

- DCC136 -

# Algoritmos Construtivos

– Heurísticas de Construção –



# Conceitos Comuns

---

- Roteiro
  - Algoritmo de Construção
  - Algoritmo Guloso
  - Algoritmo Guloso randomizado, adaptativo, reativo

# Métodos Construtivos

---

- Problema de otimização combinatória  
Definição 1:
    - Pode ser definido por um par  $(S, f)$ , onde:
    - $S$  representa o conjunto de soluções viáveis
    - $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  a função objetivo a otimizar (função que associa a cada solução  $s \in S$  do espaço de busca um valor real que indica seu valor, permitindo uma relação de ordem entre pares de soluções).
- Pag 3

# Métodos Construtivos

---

- Problema de otimização combinatória:  
Definição 2:
  - Dado um conjunto finito  $E = \{1, 2, \dots, n\}$  e uma função de custo  $c: 2^E \rightarrow \mathbb{R}$  encontrar  $s^* \in F$  tal que  $c(s^*) \leq c(s) \quad \forall s \in F$  onde  $F \subseteq 2^E$  é o conjunto de soluções viáveis do problema.
  - $F$ : Conjunto discreto de soluções com um número finito de elementos.

# Métodos Construtivos

---

- Algoritmo Guloso ou algoritmo construtivo
  - Constroem uma solução de forma iterativa, inserindo a cada passo um elemento no conjunto solução.

# Métodos Construtivos

---

- **Algoritmo Guloso ou algoritmo construtivo**
    - A partir de uma solução inicial (conjunto vazio), a cada passo, atribui-se valor para uma variável de decisão até que uma solução viável seja construída.
    - Em problemas de otimização, onde a solução pode ser definida pela presença/ausência de elementos, uma solução parcial pode ser vista como um subconjunto de elementos. A cada etapa um elemento é inserido na solução parcial.
-

# Métodos Construtivos

---

- Algoritmo Guloso ou algoritmo construtivo
    - A partir de uma solução inicial (conjunto vazio), a cada passo, atribui-se valor para uma variável de decisão até que uma solução viável seja construída.
    - Em problemas de otimização, onde a solução pode ser definida pela presença/ausência de elementos, uma solução parcial pode ser vista como um subconjunto de elementos. A cada etapa um elemento é inserido na solução parcial.
-

# Métodos Construtivos

---

- Algoritmo Guloso ou algoritmo construtivo
  - Selecionar sequencialmente elementos de  $E$ , eventualmente descartando alguns, de tal forma que se obtenha ao final uma solução viável, isto é, pertencente a  $F$ .

# Métodos Construtivos

---

- Algoritmo Guloso ou algoritmo construtivo
  - Funcionamento geral:
  - Constrói uma solução, elemento por elemento;
  - A cada passo é adicionado um único elemento candidato;
  - O candidato escolhido é o “melhor” segundo um certo critério (heurística);
  - O método se encerra quando todos os elementos candidatos foram analisados.

# Métodos Construtivos

- Algoritmo Guloso ou algoritmo construtivo
- ## Exemplo: Problema da Mochila

Seja, então, uma mochila de capacidade  $b = 23$  e os 5 objetos da tabela abaixo, com os respectivos pesos e benefícios.

Objeto ( $j$ )	1	2	3	4	5
Peso ( $w_j$ )	4	5	7	9	6
Benefício ( $p_j$ )	2	2	3	4	4

Construamos uma solução para esse problema usando a seguinte idéia: adicionemos à mochila a cada passo, o objeto mais valioso por unidade de peso e que não ultrapasse a capacidade da mochila. Reordenando os objetos de acordo com a relação  $p_j/w_j$ , obtemos:

Objeto ( $j$ )	5	1	4	3	2
Peso ( $w_j$ )	6	4	9	7	5
Benefício ( $p_j$ )	4	2	4	3	2
$(p_j/w_j)$	0.67	0.50	0.44	0.43	0.40

Representemos uma solução  $s$  por um vetor binário de  $n$  posições.

# Métodos Construtivos

---

- **Algoritmo Guloso ou algoritmo construtivo**

**Passo 1** : Adicionemos, primeiramente, o objeto 5, que tem a maior relação  $p_j/w_j$

$$s = (00001)^t$$

$$f(s) = 4$$

Peso corrente da mochila =  $6 < b = 23$

**Passo 2** : Adicionemos, agora, o objeto 1, que tem a segunda maior relação  $p_j/w_j$

$$s = (10001)^t$$

$$f(s) = 6$$

Peso corrente da mochila =  $10 < b = 23$

**Passo 3** : Adicionemos, agora, o objeto 4, que tem a terceira maior relação  $p_j/w_j$

$$s = (10011)^t$$

$$f(s) = 10$$

Peso corrente da mochila =  $19 < b = 23$

**Passo 4** : O objeto a ser alocado agora seria o terceiro. No entanto, esta alocação faria superar a capacidade da mochila. Neste caso, devemos tentar alocar o próximo objeto com a maior relação  $p_j/w_j$ , que é o objeto 1. Como também a alocação desse objeto faria superar a capacidade da mochila e não há mais objetos candidatos, concluímos que a solução anterior é a solução final, isto é:  $s^* = (10011)^t$  com  $f(s^*) = 10$ .

# Métodos Construtivos

- Algoritmo Guloso ou algoritmo construtivo

---

**Algorithm 1.2** Template of a greedy algorithm.

---

```
s = {} ; /* Initial solution (null) */  
Repeat  
    ei = Local-Heuristic(E\{e/e ∈ s\}) ;  
    If s ∪ ei ∈ F Then  
        s = s ∪ ei ;  
Until Complete solution found
```

---

# Métodos Construtivos

- Algoritmo Guloso ou algoritmo construtivo
  - Principais questões

## Algorithm 1.2 Template of a greedy algorithm

Identificar a solução como um conjunto de elementos

```
s = {} ; /* Initial solution (empty) */  
Repeat  
     $e_i = \text{Local-Heuristic}(E \setminus \{e / e \in s\})$  ;  
    If  $s \cup e_i \in F$  Then  
         $s = s \cup e_i$  ;  
Until Complete solution found
```

Heurística de seleção de elementos

# Métodos Construtivos

---

- Algoritmo Guloso ou algoritmo construtivo
  - Um exemplo para o Problema Caixeiro Viajante
    - E:
    - Heurística Local:

# Métodos Construtivos

---

- Algoritmo Guloso ou algoritmo construtivo
  - Um exemplo para o Problema Caixeiro Viajante
    - E: Conjunto das arestas
    - Heurística Local: Selecionar o vizinho mais próximo

# Métodos Construtivos

- Construção de uma solução
  - Problema do Caixeiro Viajante (PCV)
  - Heurísticas locais para o PCV
    - Vizinho mais próximo
    - Inserção mais próxima
    - Inserção mais distante
    - Inserção mais barata
    - Inserção com maior ângulo
    - Algoritmo de economias
    - ...

# Métodos Construtivos

---

- PCV – Vizinho mais próximo
  - Ideia central: Construir uma rota, passo a passo, adicionando à solução corrente a cidade (ainda não visitada) mais próxima da última cidade inserida.

# Métodos Construtivos

---

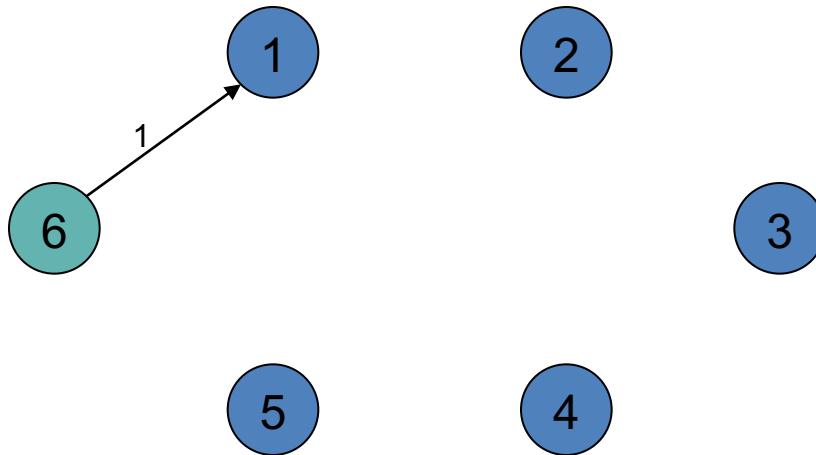
- PCV – Vizinho mais próximo
  - Marcone (UFOP)

# PCV – Vizinho mais Próximo

## Exemplo - Passo 1

Cid.	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	4	9	1
2	2	0	5	9	7	2
3	1	5	0	3	8	6
4	4	9	3	0	2	6
5	9	7	8	2	0	2
6	1	2	6	6	2	0

$i$	$j$	$d_{ij}$
6	1	1
6	2	2
6	3	6
6	4	6
6	5	2



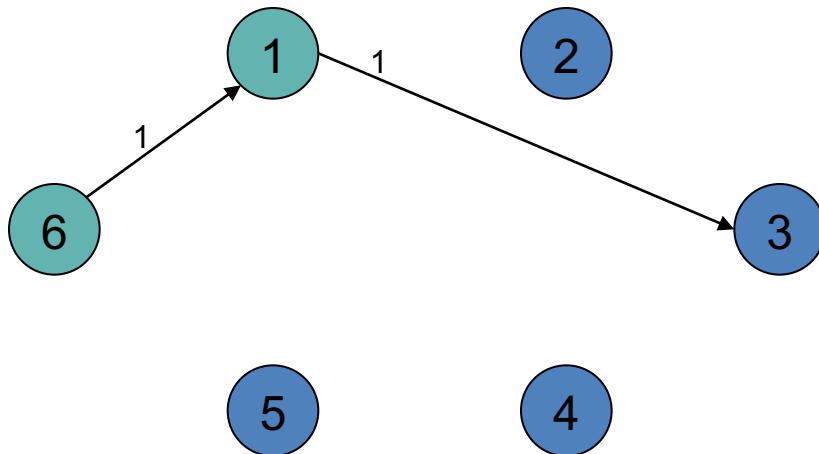
- Distância Total = 1

# PCV – Vizinho mais Próximo

## Exemplo - Passo 2

Cid.	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	4	9	1
2	2	0	5	9	7	2
3	1	5	0	3	8	6
4	4	9	3	0	2	6
5	9	7	8	2	0	2
6	1	2	6	6	2	0

i	j	$d_{ij}$
1	2	2
1	3	1
1	4	4
1	5	9



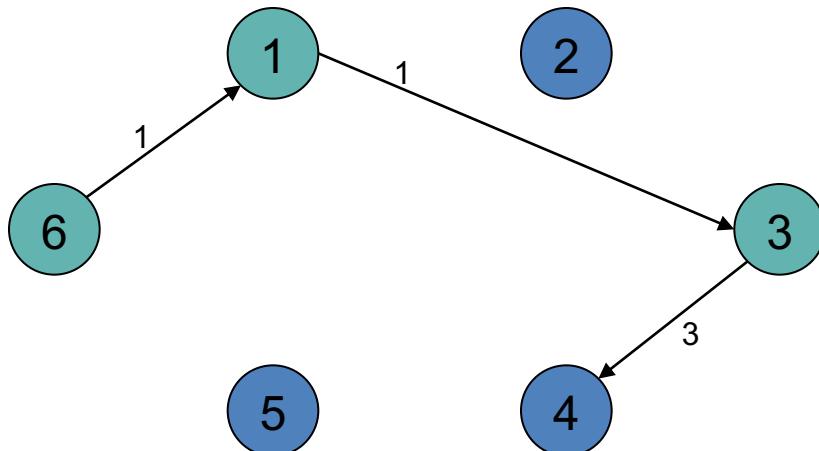
• Distância Total =  $1 + 1 = 2$

# PCV – Vizinho mais Próximo

## Exemplo - Passo 3

Cid.	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	4	9	1
2	2	0	5	9	7	2
3	1	5	0	3	8	6
4	4	9	3	0	2	6
5	9	7	8	2	0	2
6	1	2	6	6	2	0

i	j	$d_{ij}$
3	2	5
3	4	3
3	5	8



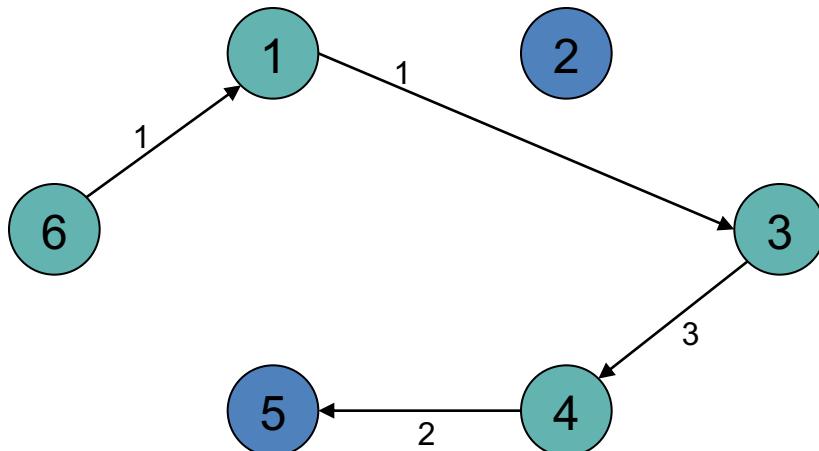
• Distância Total =  $2 + 3 = 5$

# PCV – Vizinho mais Próximo

## Exemplo - Passo 4

Cid.	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	4	9	1
2	2	0	5	9	7	2
3	1	5	0	3	8	6
4	4	9	3	0	2	6
5	9	7	8	2	0	2
6	1	2	6	6	2	0

i	j	$d_{ij}$
4	2	9
4	5	2



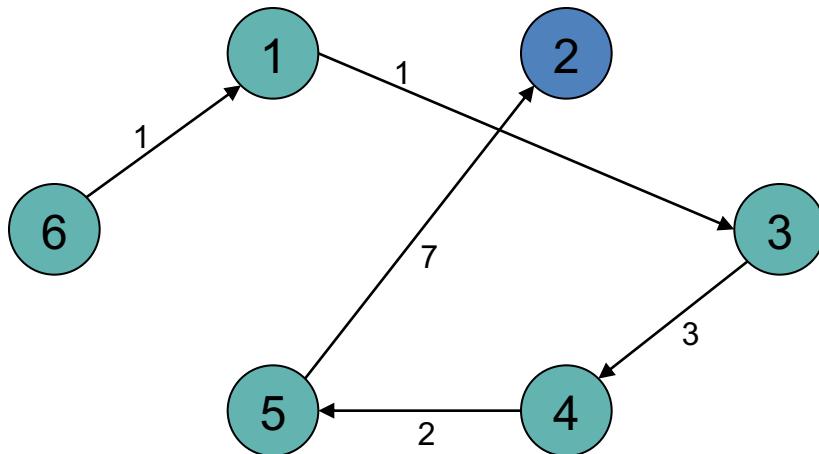
• Distância Total =  $5 + 2 = 7$

# PCV – Vizinho mais Próximo

## Exemplo - Passo 5

Cid.	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	4	9	1
2	2	0	5	9	7	2
3	1	5	0	3	8	6
4	4	9	3	0	2	6
5	9	7	8	2	0	2
6	1	2	6	6	2	0

i	j	$d_{ij}$
5	2	7

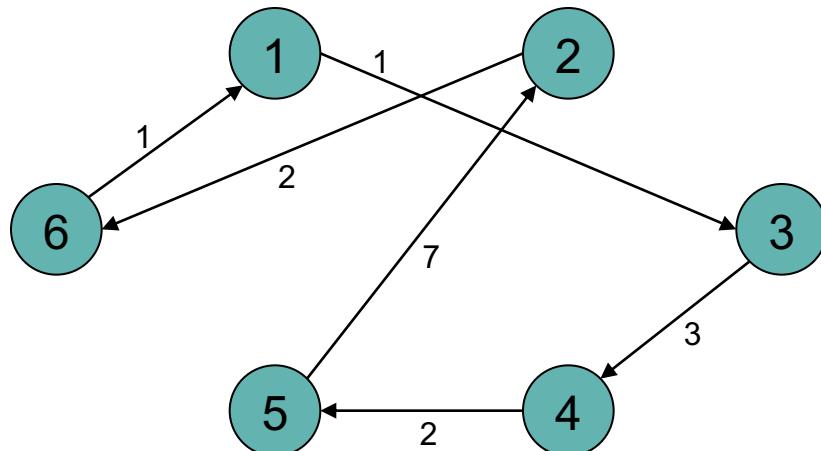


• Distância Total =  $7 + 7 = 14$

## PCV – Vizinho mais Próximo

## Exemplo – Passo final: “Inserção forçada”

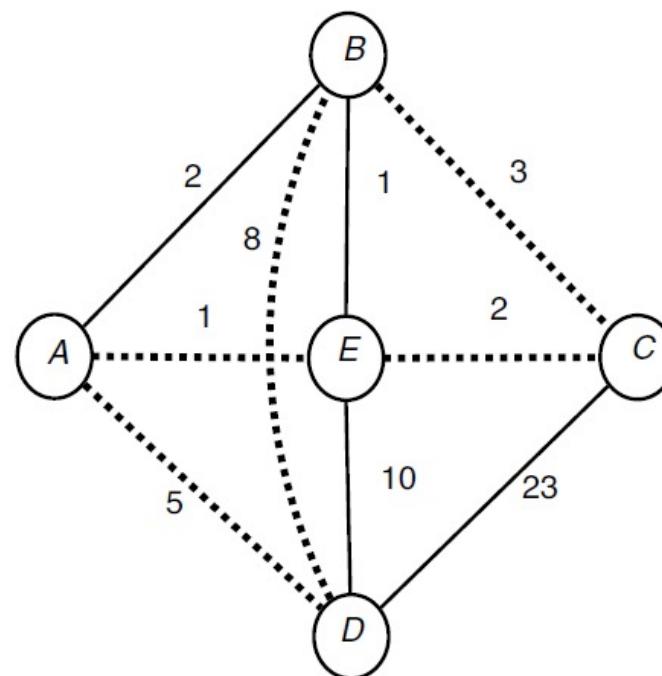
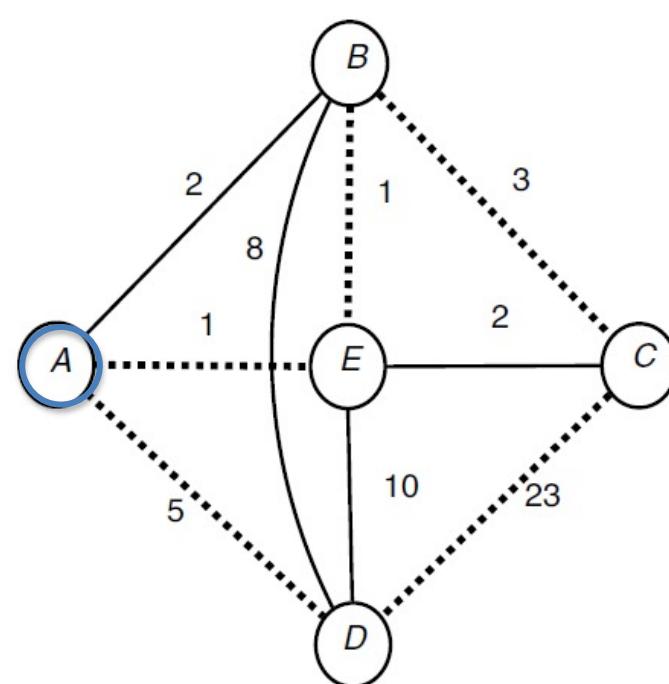
Cid.	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	4	9	1
2	2	0	5	9	7	2
3	1	5	0	3	8	6
4	4	9	3	0	2	6
5	9	7	8	2	0	2
6	1	2	6	6	2	0



- Distância Total =  $14 + 2 = 16$

# Métodos Construtivos

- Algoritmo Guloso ou algoritmo construtivo
  - Exemplo: PCV



# Métodos Construtivos

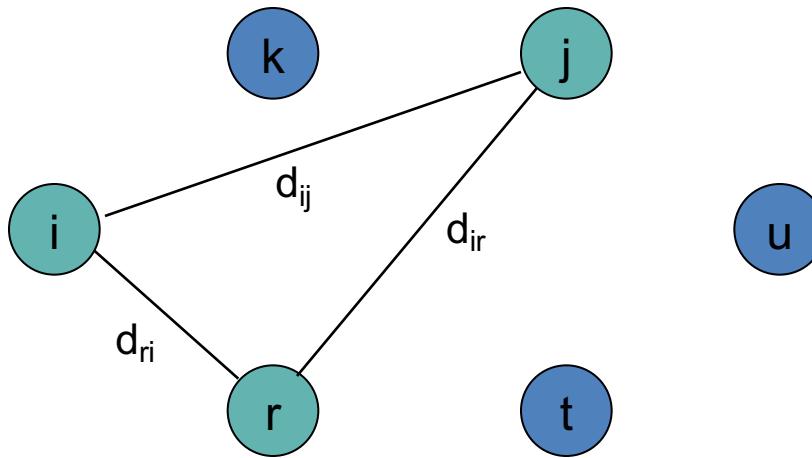
---

- PCV – Inserção mais barata
  - Ideia central: Construir uma rota passo a passo, partindo de rota inicial envolvendo 3 cidades e adicionar a cada passo, a cidade  $k$  (ainda não visitada) entre a ligação  $(i, j)$  de cidades já visitadas, cujo custo de inserção seja o mais barato

# PCV – Inserção mais barata

## Exemplo - Passo 0

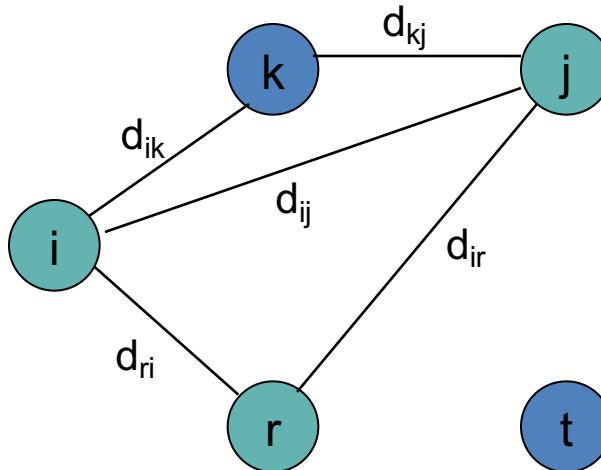
Cid.	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	4	9	1
2	2	0	5	9	7	2
3	1	5	0	3	8	6
4	4	9	3	0	2	6
5	9	7	8	2	0	2
6	1	2	6	6	2	0



# PCV – Inserção mais barata

## Exemplo - Passo 1

Cid.	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	4	9	1
2	2	0	5	9	7	2
3	1	5	0	3	8	6
4	4	9	3	0	2	6
5	9	7	8	2	0	2
6	1	2	6	6	2	0

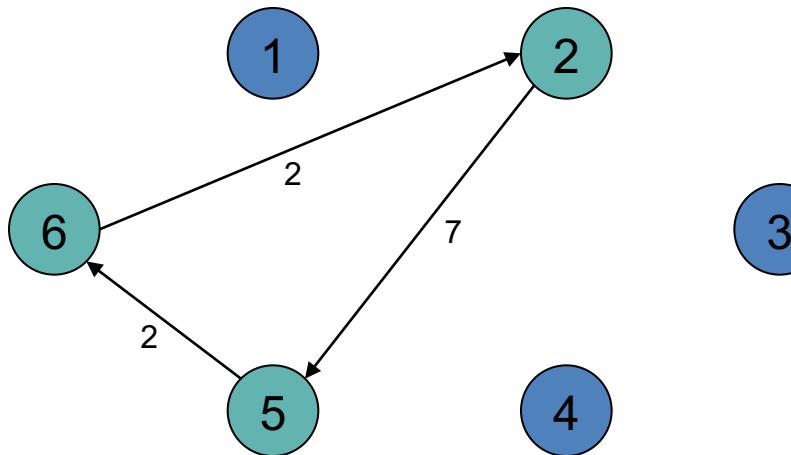


Custo da inserção =  $d_{ik} + d_{kj} - d_{ij}$

# PCV – Inserção mais barata

## Exemplo - Passo 1

Cid.	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	4	9	1
2	2	0	5	9	7	2
3	1	5	0	3	8	6
4	4	9	3	0	2	6
5	9	7	8	2	0	2
6	1	2	6	6	2	0

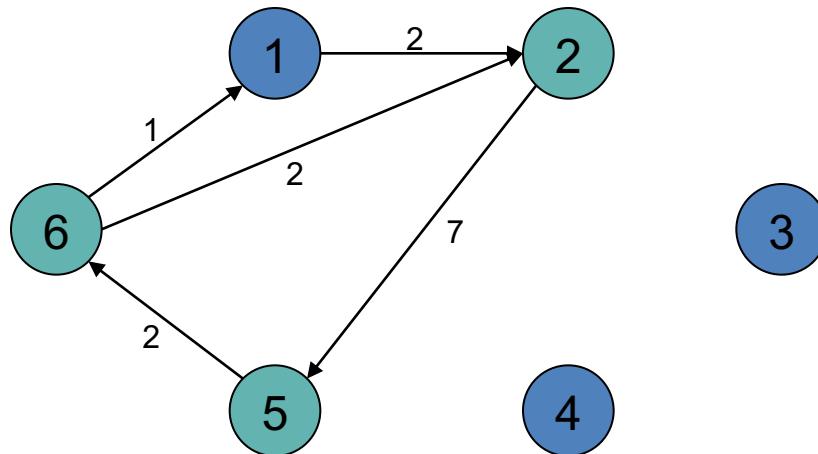


• Distância Total = 11

# PCV – Inserção mais barata

## Exemplo - Passo 2

Cid.	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	4	9	1
2	2	0	5	9	7	2
3	1	5	0	3	8	6
4	4	9	3	0	2	6
5	9	7	8	2	0	2
6	1	2	6	6	2	0



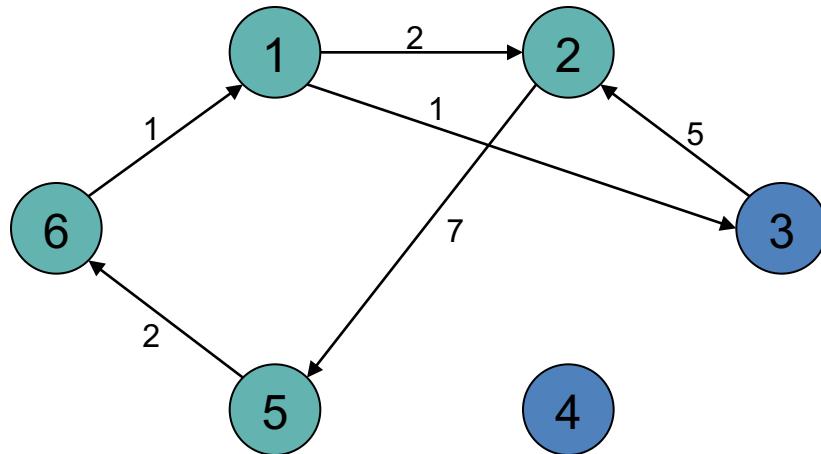
i	k	j	$d_{ik} + d_{kj} - d_{ij}$
6	1	2	$1 + 2 - 2 = 1$
6	3	2	$6 + 5 - 2 = 9$
6	4	2	$6 + 9 - 2 = 13$
2	1	5	$2 + 9 - 7 = 4$
2	3	5	$5 + 8 - 7 = 6$
2	4	5	$9 + 2 - 7 = 4$
5	1	6	$9 + 1 - 2 = 8$
5	3	6	$8 + 6 - 2 = 12$
5	4	6	$2 + 6 - 2 = 6$

- Distância Total =  $11 + 1 = 12$

# PCV – Inserção mais barata

## Exemplo - Passo 3

Cid.	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	4	9	1
2	2	0	5	9	7	2
3	1	5	0	3	8	6
4	4	9	3	0	2	6
5	9	7	8	2	0	2
6	1	2	6	6	2	0



i	k	j	$d_{ik} + d_{kj} - d_{ij}$
6	3	1	$6 + 1 - 1 = 6$
6	4	1	$6 + 4 - 1 = 9$
1	3	2	$1 + 5 - 2 = 4$
1	4	2	$4 + 9 - 2 = 11$
2	3	5	$5 + 8 - 7 = 6$
2	4	5	$9 + 2 - 7 = 4$
5	3	6	$8 + 6 - 2 = 12$
5	4	6	$2 + 6 - 2 = 6$

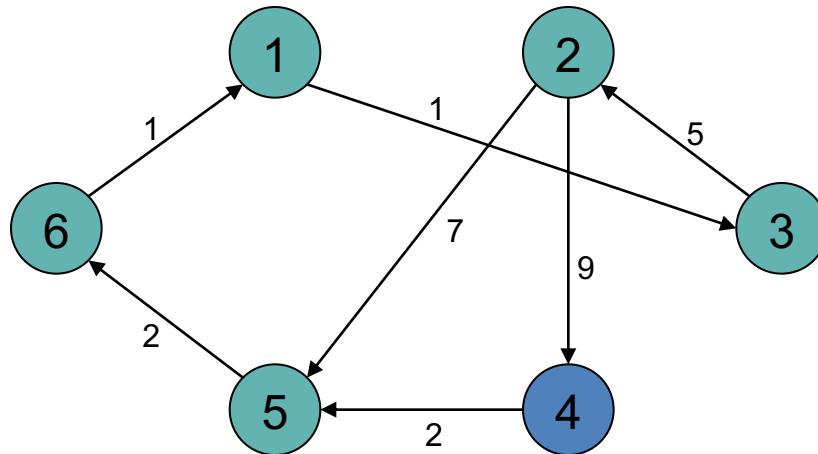
- Distância Total =  $12 + 4 = 16$

# PCV – Inserção mais barata

## Exemplo - Passo final

Cid.	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	4	9	1
2	2	0	5	9	7	2
3	1	5	0	3	8	6
4	4	9	3	0	2	6
5	9	7	8	2	0	2
6	1	2	6	6	2	0

i	k	j	$d_{ik} + d_{kj} - d_{ij}$
6	4	1	$6 + 4 - 1 = 9$
1	4	3	$4 + 3 - 1 = 6$
3	4	2	$3 + 9 - 5 = 7$
2	4	5	$9 + 2 - 7 = 4$
5	4	6	$2 + 6 - 2 = 6$

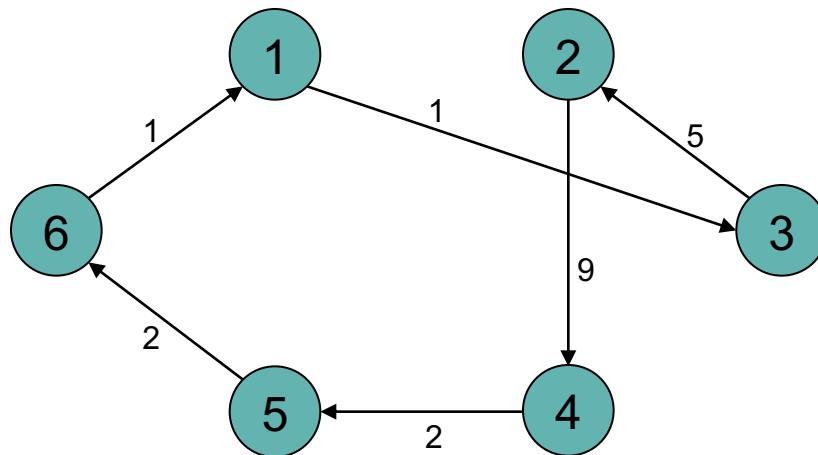


- Distância Total =  $16 + 4 = 20$

# PCV – Inserção mais barata

## Exemplo – solução final

Cid.	1	2	3	4	5	6
1	0	2	1	4	9	1
2	2	0	5	9	7	2
3	1	5	0	3	8	6
4	4	9	3	0	2	6
5	9	7	8	2	0	2
6	1	2	6	6	2	0



• Distância Total =  $16 + 4 = 20$

$s = (6 \ 1 \ 3 \ 2 \ 4 \ 5)$

# Métodos Construtivos

---

- Como adaptar?
    - Heurística do vizinho mais próximo para o Problema de Roteamento de Veículos com frota homogênea.
    - Heurística da inserção mais barata para o Problema de Roteamento de Veículos com frota homogênea.
-

# Métodos Construtivos

---

- PRV
  - Estratégia Sequencial x Paralela

# Métodos Construtivos

---

- Árvore de Steiner

Definir:

- E:
- Heurística Local:

# Dúvidas

- Perguntas ou comentários?



Luciana Brugiolo Gonçalves  
[lbrugiolo@ice.ufjf.br](mailto:lbrugiolo@ice.ufjf.br)

# Referências

---

- EL-GHAZALI TALBI. *Metaheuristics: From Design to Implementation*, Wiley, 2009.
- Notas de aula do prof. Marcone Jamilson Souza (UFOP)
- Notas de aula da prof<sup>a</sup> Liliane Salgado (UFPE).
- Notas de aula do prof Celso Ribeiro (UFF).

# TRABALHO

---

- TRABALHO 1 (continuação):
  - The capacitated team orienteering problem
    - Propor uma estratégia capaz de construir uma solução viável para o CTOP.