ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ.

Тема 2: Уравнение Эйлера для экстремалей в случае функционала, зависящего от одной функции.

Используем методичку "Вариационное исчисление".

Для функционала

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \tag{6}$$

в методичке выведено уравнение Эйлера для экстремалей

$$F'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx}F'_{y'}(x, y, y') = 0. \tag{14}$$

После вычисление производной по x получаем развернутый вид уравнения Эйлера

$$F'_y - F''_{xy'} - F''_{yy'}y' - F''_{y'y'}y'' = 0. \tag{15}$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение $y = y(x, C_1, C_2)$ дает интегральные кривые, которые называют *экстремалями.* Используя граничные условия $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ (две заданные точки на плоскости), получаем экстремаль, на которой возможен экстремум функционала.

В частном случае, когда F не зависит явно от x, из уравнения (15) следует *первый интеграл*

$$F - y'F'_{y'} = C, \tag{16}$$

представляющий собой дифференциальное уравнение первого порядка. Здесь C - произвольна постоянная.

Домашнее задание. №1 - №20 на стр. 59.

В методичке на стр. 57-59 приведены два примера решения уравнения (14). Решим два примера из домашнего задания.

№3

$$v[y] = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2}dx, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 3.$$

Эта вариационная задача имеет геометрический смысл, поскольку интеграл есть длина дуги, проведенной между двумя точками на плоскости. Хорошо известно, что минимальную длину имеет отрезок прямой, соединяющей эти точки. О максимуме длины здесь не может быть речи. Значит, следует ожидать, что в ответе в качестве $y(x)$ мы получим уравнение прямой, проходящей через две точки, заданные в условии задачи.

Решим уравнение Эйлера. В этом примере

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2} \neq F(x),$$

поэтому воспользуемся первым интегралом (16)

$$\sqrt{1 + y'^2} - y' \frac{2y'}{2\sqrt{1 + y'^2}} = C.$$

После очевидных преобразований получаем уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = C.$$

Выразим производную

$$y' = C_1.$$

Интегрируя, получаем эстремали

$$y = C_1 x + C_2.$$

Удовлетворим граничным условиям

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 \cdot 0 + C_2, \\ 3 &= C_1 \cdot 1 + C_2. \end{aligned}$$

Отсюда $C_1 = 3, \ C_2 = 0$. Как и ожидалось, минимальную длину имеет отрезок прямой $y = 3x$, проходящей через точки $y(0) = 0, \ y(1) = 3$.

Этот же пример решим без использования первого интеграла (16). Будем решать уравнение Эйлера для экстремалей в свернутом виде (14)

$$F'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F'_{y'}(x, y, y') = 0.$$

Здесь

$$F'_y = 0, \quad F'_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Производная $dF'_{y'}/dx$ вычисляется как производная сложной функции

$$\frac{dF'_{y'}}{dx} = \frac{dF'_{y'}}{dy'} \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dy'} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) \cdot y'' = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Вычисленные производные подставим в уравнение Эйлера

$$-\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = 0.$$

Отсюда следует уравнение Эйлера для функционала, описывающего длину дуги кривой $y(x)$ между двумя заданными точками

$$y'' = 0.$$

Видно, что для этого функционала уравнение Эйлера - самое простое уравнение второго порядка.

Интегрируя дважды, получаем экстремали

$$y = C_1 x + C_2.$$

Удовлетворяя граничным условиям, приходим к экстремали $y = 3x$, на которой функционал достигает экстремума.

№19

В примерах №11 - №20 нет граничных условий. Необходимо найти экстремали - общее решение уравнения Эйлера.

$$v[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 - y'^2 - 2y \sin x) dx.$$

Здесь $F(x, y, y') = y^2 - y'^2 - 2y \sin x$. Производные

$$F'_y = 2y - 2\sin x, \qquad F'_{y'} = -2y', \qquad \frac{d}{dx} F'_{y'} = -2y''.$$

Уравнение Эйлера (14) для данного функционала приобретает вид

$$y'' + y = \sin x.$$

Это линейное с постоянными коэффициентами уравнение со специальной правой частью. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ меет корни $k_{1,2} = \pm i$, общее решение однородного уравнения записывается как

$$y_{o.o.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Имеется однократный резонанс. Частное решение ищем методом неопределенных коэффициентов в виде

$$\bar{y} = (A \cos x + B \sin x) x.$$

Вычислим первую и вторую производные и подставим в уравнение. В результате находим $A = -0.5$, $B = 0$ и частное решение

$$\bar{y} = -0.5 x \cos x.$$

Экстремали описываются функцией

$$y(x) = y_{o.o.} + \bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 0.5 x \cos x.$$

****

№10

$$v[y] = \int_0^1 y'^2 y^2 dx, \quad y(0) = 1, \ y(1) = \sqrt{2}.$$

Здесь $F \neq F(x)$, воспользуемся первым интегралом

$$F - y' F'_{y'} = C,$$

то есть

$$y'^{\,2}\, y^2 - y'\, 2y^2\, y' = C.$$

Выражаем y'

$$y' = \frac{C_1}{y}.$$

При извлечении корня знак $\pm$ отнесем к C_1. Разделяем переменные и интегрируем. Получаем общий интеграл уравнения Эйлера

$$y^2 = C_2 x + C_3.$$

Уже здесь можно удовлетворить граничным условиям

$$\begin{array}{l} 1 = C_2 \cdot 0 + C_3 \\ 2 = C_2 \cdot 1 + C3, \end{array}$$

откуда получаем $C_2 = C_3 = 1$ и $y = \pm\sqrt{x+1}$. Оставляем знак $+$, так как граничные значения $y > 0$.

Окончательно $y = \sqrt{x+1}$ - экстремаль, на которой возможен экстремум функционала.

****

№20

Задан функционал

$$v[y] = \int_{x_0}^{x_1} (x^2 y'^{\,2} + 2y^2 + 2xy) dx.$$

Производные в уравнении Эйлера

$$F'_y = 4y + 2x, \quad F'_{y'} = 2x^2 y\prime, \quad \frac{d}{dx} F'_{y'} = 4xy' + 2x^2 y''.$$

Получаем уравнение Эйлера для экстремалей

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = x.$$

Это уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\, xy' + a_n y = f(x).$$

Такое линейное уравнение называют уравнением Эйлера (не путать с уравнением Эйлера для экстремалей!). В задачнике А.Ф Филиппова об этом уравнении написано в параграфе 11. Уравнение решают, используя подстановку $x = e^t$, то есть аргумент x меняют на t. В результате получают линейное уравнение с постоянными коэффициентами.

В нашем примере

$$x = e^t, \quad t = \ln x, \quad t'_x = \frac{1}{x}, \quad y'_x = y'_t\, t'_x = \frac{y'_t}{x}, \quad y''_{x^2} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x}\right)'_x =$$
$$= \frac{y''_{t^2}\, t'_x\, x - y'_t \cdot 1}{x^2} = \frac{y''_{t^2} - y'_t}{x^2}.$$

Уравнение Эйлера приобретает вид линейного с постоянными коэффициентами неоднородного уравнения со специальной правой частью

$$y''_{t^2} + y'_t - 2y = e^t.$$

Характеристическое уравнение $k^2 + k - 2 = 0$ имеет корни $k_1 = 1, k_2 = -2$. Получаем общее решение однородного уравнения

$$y_{o.o.} = C_1\, e^t + C_2\, e^{-2t}.$$

Имеется резонанс, поэтому частное решение ищем в виде $\bar{y} = A\, t\, e^t$. Постоянная оказывается равной $A = 1/3$. В результате получаем общее решение

$$y(t) = C_1\, e^t + C_2\, e^{-2t} + \frac{1}{3} t\, e^t.$$

Возвращаемся к аргументу x и получаем экстремали

$$y = C_1\, x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{1}{3} x \ln x.$$

Тема 3: Уравнение Эйлера для экстремалей в случае функционала, зависящего от нескольких функций.

Для функционала

$$v[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y'_1, y'_2, ..., y'_n) dx \tag{22}$$

с граничными условиями

$$\begin{array}{ll} y_1(x_0) = y_{10}, & y_2(x_0) = y_{20}, ..., y_n(x_0) = y_{n0} \\ y_1(x_1) = y_{11}, & y_2(x_1) = y_{21}, ..., y_n(x_1) = y_{n1} \end{array} \tag{23}$$

в методичке получена система уравнений второго порядка

$$F'_{y_i} - \frac{d}{dx} F'_{y'_i} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Ее общее решение

$$y_1 = y_1(x, C_1, C_2, ..., C_{2n}), ..., y_n = y_n(x, C_1, C_2, ..., C_{2n})$$

образует семейство экстремалей данной вариационной задачи. Оно содержит $2n$ произвольных постоянных, которые находим из граничных условий (23).

Домашнее задание. №21 - №24 на стр. 61.

В методичке на стр. 60 приведен пример краевой задачи для функционала, зависящего от двух функций. Решим пример из домашнего задания.

№24

$$v[y,z] = \int_0^1 [yz + y'z' + y'^2 - 4xz']dx, \quad y(0) = -4,\ y(1) = 0,\ z(0) = 0,\ z(1) = 1.$$

В системе

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0,$$
$$F'_z - \frac{d}{dx}F'_{z'} = 0$$

вычислим производные в первом уравнении

$$F'_y = z, \quad F'_{y'} = z\prime + 2y', \quad \frac{d}{dx}F'_{y'} = z'' + 2y''.$$

Получаем первое уравнение для данного функционала

$$2y'' + z'' - z = 0$$

Вычислим производные во втором уравнении

$$F'_z = y, \quad F'_{z'} = y' - 4x, \quad \frac{d}{dx}F'_{z'} = y'' - 4.$$

Получаем второе уравнение

$$y'' - y = 4.$$

Это уравнение не содержит z. Оно линейное неоднородное с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm 1$ указывают на отсутствие резонанса. Частное решение ищем в виде $\bar{y} = A$. Подставляя в уравнение, получаем $A = -4$. Общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 4.$$

Вычислим вторую производную

$$y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

и подставим в первое уравнение. Получаем уравнение относительно z

$$z'' - z = -2C_1 e^x - 2C_2 e^{-x}.$$

Оно опять-таки линейное неоднородное с постоянными коэффициентами со специальной правой частью. Корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \pm 1$ указыват на резонанс. Используем принцип суперпозиции. Частные решения ищем в виде

$$\bar{z}_1 = Be^x\, x, \qquad \bar{z}_2 = Ce^{-x}\, x.$$

В результате подстановки этих функций в уравнение получаем $B = -C_1,\ C = C_2$. Общее решение имеет вид

$$z = C_3 e^x + C_4 e^{-x} - C_1 x e^x + C_2 x e^{-x}.$$

Удовлетворяем граничным условиям

$$\begin{aligned}
&-4 = C_1 + C_2 - 4,\\
&0 = C_1 e + C_2 e^{-1} - 4,\\
&0 = C_3 + C_4,\\
&1 = C_3 e + C_4 e^{-1} - C_1 e + C_2 e^{-1}.
\end{aligned}$$

Находим корни

$$C_1 = \frac{4}{e - e^{-1}}, \quad C_2 = -\frac{4}{e - e^{-1}}, \quad C_3 = \frac{5e + 3e^{-1}}{(e - e^{-1})^2}, \quad C_4 = -\frac{5e + 3e^{-1}}{(e - e^{-1})^2}.$$

Получаем экстремали

$$y = \frac{4}{e - e^{-1}}(e^x - e^{-x}) - 4, \qquad z = \frac{5e + 3e^{-1}}{(e - e^{-1})^2}(e^x - e^{-x}) - \frac{4}{e - e^{-1}} x (e^x + e^{-x}).$$

****

Тема 4: Вариационные задачи на условный экстремум функционалов.

В методичке см. п. 1.12 (стр. 38 - 40).

Возьмем функционал

$$v[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') dx \tag{24}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}, ..., y_n(x_0) = y_{n0}\\
y_1(x_1) = y_{11}, \quad y_2(x_1) = y_{21}, ..., y_n(x_1) = y_{n1}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Пусть теперь переменные величины связаны уравнениями

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m;\ m < n. \tag{26}$$

Уравнения называют *уравнениями связи.* Требуется вычислить экстремали.

Вариационная задача решается с использованием множителей Лагранжа. А именно, для функционала (24) составляют вспомогательный функционал вида

$$\tilde{v} = \int_{x_0}^{x_1} \tilde{F} dx, \tag{27}$$

где

$$\tilde{F} = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i, \tag{28}$$

который уже исследуется на безусловный экстремум.

Экстремали вычисляют из системы уравнений, состоящей из n дифференциаальных уравнений Эйлера для функционала $\tilde{v}$ и m недифференциальных уравнений связи

$$\begin{cases} \tilde{F}'_{y_j} - \dfrac{d}{dx}\tilde{F}'_{y'_j} = 0, \quad j = 1, ..., n, \\ \varphi_i = 0, \quad i = 1, ..., m. \end{cases} \tag{29}$$

Домашнее задание. №25 - №28 на стр. 63.

В методичке на стр. 61 - 63 приведен пример вариационной задачи на условный экстремум функционала, зависящего от двух функций. Решим пример из домашнего задания.

№25

$$v[y, z] = \int_0^{\pi/8} [(1 - x^2)y'^2 + z'^2 + 2(1 - x)yy' - 17y^2]dx, \quad y(0) = 0, \ y(\frac{\pi}{8}) = 1,$$
$$z - xy = 0.$$

Решим пример двумя способами.

I. Сведем задачу на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум. Для этого из уравнения связи выразим $z = xy$ и подставим в функционал v. Учитывая выражение $z' = y + xy'$, получаем

$$F = -16y^2 + y'^2 + 2yy'.$$

Уравнение Эйлера

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$$

после вычислиния производных

$$F'_y = -32y + 2y', \qquad F'_{y'} = 2y' + 2y, \qquad \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y'' + 2y'$$

приобретает вид

$$y'' + 16y = 0.$$

Это линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами имеет общее решение

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

Вычислим z

$$z = xy = C_1 x \cos 4x + C_2 x \sin 4x.$$

Удовлетворим граничным условиям. Получаем $C_1 = 0, \ C_2 = 1$ и экстремали, на которых возможен экстремум данного функционала

$$y = \sin 4x, \qquad z = x \sin 4x.$$

II. Решим ту же задачу с использованием множителей Лагранжа. Для этого возьмем вспомогательный функционал

$$\tilde{v} = \int_0^{\pi/8} \tilde{F} dx = \int_0^{\pi/8} [(1-x^2)y'^2 + z'^2 + 2(1-x)yy' - 17y^2 + \lambda(z - xy)]dx.$$

Вычислим производные

$$\tilde{F}'_y = 2(1-x)y' - 34y - \lambda x, \quad \tilde{F}'_{y'} = 2(1-x^2)y' + 2(1-x)y, \quad \frac{d}{dx}\tilde{F}'_{y'} = -4xy' + 2(1-x^2)y'' + 2(1-x)y' - 2y.$$

Получаем первое уравнение Эйлера

$$2(1-x^2)y'' - 4xy' + 32y + \lambda x = 0.$$

Вычислим производные

$$\tilde{F}'_z = \lambda, \quad \tilde{F}'_{z'} = 2z', \quad \frac{d}{dx}\tilde{F}'_{z'} = 2z''$$

и записываем второе уравнение Эйлера

$$z'' = \frac{\lambda}{2}.$$

Дополняем систему уравнений Эйлера уравнением связи, получаем систему

$$\begin{cases} 2(1-x^2)y'' - 4xy' + 32y + \lambda x = 0, \\ z'' = \dfrac{\lambda}{2}, \\ z - xy = 0. \end{cases}$$

Здесь неизвестными являютя y, z и λ. Исключаем неизвестные. Выразим λ из второго уравнения с использованием третьего уравнения

$$\lambda = 2z'' = 2(z')' = 2(y + xy')' = 2(2y' + xy'').$$

Подставим это выражение в первое уравнение. После приведения подобных членов получаем дифференциальное уравнение относительно y

$$y'' + 16y = 0.$$

Интегрируем

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

Удовлетворяем граничным условиям

$$y = \sin 4x.$$

Из третьего урвнения системы получаем

$$z = x \sin 4x.$$