Вячеслав Васильевич Степанов

КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ОГЛАВЛЕНИЕ

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Д. у. — дифференциальное уравнение)

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ.

Курс дифференциальных уравнений в объёме нашей университетской программы по необходимости слагается из глав, соответствующих различным отделам научной теории этой ветви математического анализа. Элементарные методы интеграции, теоремы существования, особые решения, общая теория линейных уравнений — эти главы в современном состоянии науки связаны с теорией групп Ли, с применением методов теории функций действительного и комплексного переменного, с методами линейной алгебры и т. п.

Современное понятие о математической строгости, постепенно внедряющейся в курсы анализа, не позволяет строить учебник дифференциальных уравнений с невыясненной точки зрения на взаимную связь отделов — например, элементарных методов интегрирования и теорем существования. Далее, развитие самой теории и современных её приложений требует введения в университетский курс новых отделов, связанных, с одной стороны, с развитием качественных методов, с другой стороны, с теоремами колебания для линейных дифференциальных уравнений.

Настоящий курс построен целиком в области действительного переменного; это обусловливается как положением курса в плане университетского преподавания (он начинается раньше теории аналитических функций), так и указанной выше необходимостью дать курс, объединённый общей идеей. Вопросы существования и единственности решений ставятся уже при изложении элементарных методов интеграции. В связи с общей структурой курса теорема существования решения уравнения первого порядка появляется близко от начала курса. Классические понятия общего решения, интегрирующего множителя, первого интеграла удаётся, по нашему мнению, обосновать достаточно строго и не слишком громоздко, если ограничиться локальной точкой зрения. В связи с этим в курсе даётся (мелким шрифтом) достаточно развёрнутая качественная теория распределения интегральных кривых в окрестности особой точки и оставляется в стороне исследование общего течения интегральных кривых. К сожалению, отмеченная выше строгость основывается на теореме о дифференцируемости решения по параметру; эта теорема ввиду её сложности приведена лишь в мелком шрифте главы VII. С принятой здесь точки зрения особое решение определяется как решение, в каждой точке которого нарушается единственность; теория особых решений для уравнений степени выше первой относительно производной, конечно, не может быть достаточно систематически изложена в действительной области. В связи с уравнениями второго порядка дано механическое приложение — периодические движения. В теории линейных уравнений даны «нетрадиционные» теоремы — Штурма и теорема сравнения. Краевые задачи не вошли в рассматриваемый курс, их место — при изучении уравнений математической физики, так как постановка задачи с параметром и его собственными значениями непонятна без обращения к первоисточнику — уравнению с частными производными второго порядка. Параграф об интегрировании с помощью степенных рядов, важный для приложений, конечно, не может быть сколько-нибудь полным без обращения к аналитическим функциям; он является в курсе эпизодическим и не содержит, например, уравнений Бесселя и Лежандра, относимых нами к курсу уравнений математической физики. Новым является параграф о применении тригонометрических рядов к линейным уравнениям.

Другие отступления от традиций легко обнаружатся при сравнении настоящего курса с другими руководствами.

Вопросы, не входящие в университетскую программу, но тесно примыкающие к её темам, даны мелким шрифтом.

От изучающего настоящий курс требуется знание университетского курса анализа в достаточно строгом и углублённом изложении, основные сведения из теории определителей, высшей алгебры и дифференциальной геометрии.

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

В. В. Степанов, автор учебника, скончался 22 июля 1950 года в период подготовки пятого издания. В пятом издании к главе VII добавлен § 6 об устойчивости по Ляпунову; в составлении этого параграфа большое содействие автору по его просьбе оказал С. А. Гальперн. В качестве последней главы был помещён исторический очерк, написанный для этой книги по просьбе автора А. П. Юшкевичем.

Для шестого издания были исправлены лишь замеченные опечатки и частично переработан А. П. Юшкевичем исторический очерк (глава X).

ГЛАВА I.

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ТИПЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЁННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ.

§ 1. Введение.

1. С точки зрения формально-математической задача решения (*интегрирования*) дифференциальных уравнений есть задача, обратная дифференцированию. Задача дифференциального исчисления состоит в том, чтобы по заданной функции найти её производную. Простейшая обратная задача уже встречается в интегральном исчислении: дана функция $f(x)$, найти её примитивную (неопределённый интеграл). Если искомую примитивную функцию обозначить через y, то указанная задача может быть записана в форме уравнения:

$$\frac{dy}{dx}=f(x) \tag{1}$$

или

$$dy=f(x)\,dx. \tag{2}$$

Равносильные между собой уравнения (1) и (2) являются простейшими дифференциальными уравнениями. Мы уже умеем их решать; в самом деле, из интегрального исчисления известно, что наиболее общая функция y, удовлетворяющая уравнению (1), или, что то же, уравнению (2), имеет вид:

$$y=\int f(x)\,dx+C. \tag{3}$$

В решении (3) символ неопределённого интеграла обозначает какую-нибудь примитивную, а C есть *произвольное постоянное*. Итак, оказывается, что искомая функция y определяется из уравнения (1) или (2) *неоднозначно*. Наше дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений, каждое из которых получится, если произвольному постоянному C придать определённое числовое значение. Решение (3) уравнения (1), содержащее произвольное постоянное, называется *общим решением*; каждое решение, которое получается из общего, если дать постоянному C определённое числовое значение, называется *частным решением.*

Следующий пример возьмём из механики. Исследуем движение точки m по вертикальной прямой под действием силы земного притяжения. Примем за ось Oy вертикальную прямую, по которой движется (падает) точка; начало поместим на поверхности земли, а положительное направление условимся отсчитывать вверх. Чтобы знать движение, т. е. положение нашей точки в любой момент t после начала движения (соответствующего значению $t=0$), надо знать выражение единственной координаты этой точки y как функции t. Таким образом, у нас независимым переменным является t, а искомой функцией y. Составим уравнение для нахождения y. Из механического смысла второй производной следует, что ускорение равно $\frac{d^2y}{dt^2}$; с другой стороны, мы знаем, что ускорение силы тяжести в каждой точке земной поверхности и вблизи неё постоянно и (приблизительно) равно 981 *см/сек*^{2}, оно обозначается буквой g, $g \approx 981$ *см/сек*^{2}; оно направлено вниз, следовательно, в нашей системе координат ему надо придать знак —. Приравнивая два найденных выражения для ускорения точки, получаем уравнение, в котором известной является функция y:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g. \tag{4}$$

Здесь дано значение второй производной от y, требуется найти функцию. Легко решить («проинтегрировать») это дифференциальное уравнение[1]). Взяв два раза неопределённый интеграл от обеих частей равенства (4) по t, мы получаем последовательно:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1, \tag{5}$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2. \tag{6}$$

Выражение (6) есть общее решение уравнения (4); оно содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2. Выясним физический смысл этих постоянных. Полагая в уравнении (5) $t=0$, получаем:

$$C_1 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = v_0 \text{ (начальная скорость точки);}$$

аналогично из уравнения (6):

$$C_2 = (y)_{t=0} = y_0 \text{ (начальное положение точки).}$$

[1]) Обыкновенно вместо выражения «решить дифференциальное уравнение» говорят: «*интегрировать дифференциальное уравнение*». Чтобы избежать путаницы, операцию взятия неопределённого интеграла называют «*квадратурой*».

С этими новыми обозначениями произвольных постоянных мы напишем общее решение (6) дифференциального уравнения (4) в виде:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0. \tag{7}$$

Теперь ясно, какие дополнительные данные нужно иметь, чтобы получить частное решение, описывающее одно вполне определённое движение: нужно знать числовые значения начального положения точки y_0 и начальной скорости v_0 (*начальные условия*).

ЗАДАЧИ.

1. Найти уравнение движения точки, падающей с высоты 10 *м* без начальной скорости. Через сколько секунд точка упадёт на землю?

2. Найти уравнение движения точки, брошенной вверх со скоростью 1 *м/сек*. Через сколько времени точка достигнет наивысшего положения?

3. Найти общие решения уравнений: $\frac{dy}{dx} = 2$; $\frac{dy}{dx} = -x^3$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$.

2. В уравнение (1) входила только первая производная от искомой функции. Это — дифференциальное уравнение *первого порядка*. Самое общее дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{8}$$

где F — заданная непрерывная функция трёх своих аргументов; в частности, она может не зависеть от x или от y (или от обоих этих аргументов), но непременно должна содержать $\frac{dy}{dx}$. Если уравнение (8) определяет $\frac{dy}{dx}$ как неявную функцию двух остальных аргументов [1]) (в дальнейшем мы всегда будем предполагать это условие выполненным), то его можно представить в виде, разрешённом относительно $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y). \tag{9}$$

Здесь f — непрерывная заданная функция от x, y [в частности, она может не содержать одного или обоих аргументов: в уравнении (1) f не зависит от y; в задаче 3, пример 1, правая часть не зависит

---

[1]) Чтобы существовала неявная функция $y' = f(x,\ y)$, определяемая уравнением $F(x, y, y') = 0$ и принимающая значение y_0' при $x = x_0$ и $y = y_0$, достаточно, чтобы выполнялось равенство $F(x_0,\ y_0,\ y_0') = 0$, существовала непрерывная частная производная $F'_{y'}$ в окрестности значений x_0, y_0, y_0' и чтобы было $F'_{y'}(x_0,\ y_0,\ y_0') \neq 0$; тогда соотношение (8) определяет непрерывную функцию (9) в окрестности значений x_0, y_0 независимых переменных, причём $f(x_0,\ y_0) = y_0'$.

ни от x, ни от y]. В дифференциальном уравнении (8) или (9) x является независимым переменным, y — искомой функцией. Итак, *дифференциальное уравнение первого порядка есть соотношение, связывающее искомую функцию, независимое переменное и первую производную от искомой функции.*

Решением дифференциального уравнения (8) или (9) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение (8) или (9), обратит его в тождество.

Уравнение (4) содержало вторую производную от искомой функции; это было уравнение *второго порядка*. Общий вид дифференциального уравнения второго порядка есть

$$F(x,\ y,\ y',\ y'') = 0, \tag{10}$$

или, предполагая его разрешённым относительно второй производной (если это разрешение возможно),

$$y'' = f(x,\ y,\ y'). \tag{10'}$$

(Мы для краткости письма обозначаем производные от y по x штрихами.) Здесь F и f — данные непрерывные функции своих аргументов, x — независимое переменное, y — искомая функция; некоторые из аргументов x, y, y' (или все они) могут не входить в уравнение, но y'' непременно входит. Решением опять называется функция $\varphi(x)$, которая, будучи подставлена на место y в уравнение (10) [или (10')], обратит его в тождество.

Вообще *порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей входящей в него производной* от искомой функции. Так, уравнение n-го порядка имеет вид:

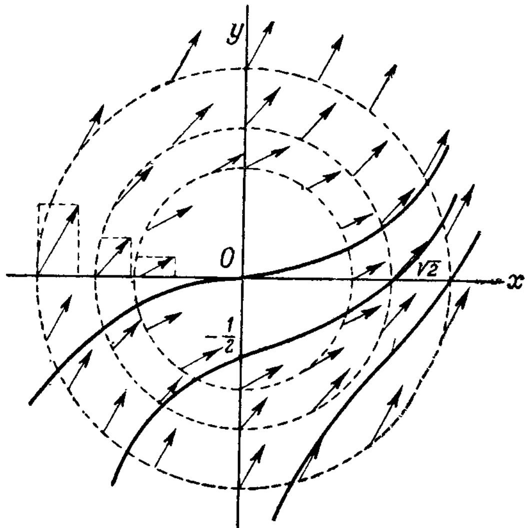
$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)}) = 0,$$

причём $y^{(n)}$ непременно входит в уравнение.

3. Дифференциальному уравнению первого порядка можно дать геометрическое толкование, которое выяснит нам вопрос о характере множественности решений такого уравнения. Пусть дано уравнение в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y). \tag{9}$$

Примем x, y за декартовы прямоугольные координаты плоскости. Каждой точке $(x,\ y)$ той области, где определена функция f, уравнение (9) ставит в соответствие определённое значение $\frac{dy}{dx}$. Пусть $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения (9); тогда кривая, определяемая уравнением $y = \varphi(x)$, называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения. Значение $\frac{dy}{dx}$ есть тангенс угла, образуемого касательной к этой кривой с осью Ox. Таким образом, каждой точке $(x,\ y)$ рассматриваемой области уравнение (9) ставит в соответствие некоторое направление; мы получаем *поле направлений*. Это поле можно изобразить, поместив в соответствующих точках области стрелки, образующие с осью Ox углы $\operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}$ (положительное направление стрелки можно взять произвольным, так как арктангенс определяет угол лишь с точностью до кратного π). Задача интегрирования дифференциального уравнения может быть теперь истолкована так: найти такую кривую, чтобы её касательная в каждой точке имела направление, совпадающее с направлением поля в этой точке. Грубо говоря, нужно провести кривую так, чтобы расставленные на поле стрелки показывали в каждой точке направление касательной к искомой кривой.



Черт. 1.

Рассмотрим подробнее следующий пример:

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2. \quad (11)$$

Расставим стрелки, найдя предварительно те линии, где наклон одинаков (*изоклины*). Так, если $y'=0$, мы имеем $x=y=0$ (начало координат), если $y'=\frac{1}{2}$, то $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ $\left(\text{круг радиуса } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ с центром в начале}\right)$, $y'=1$ на окружности $x^2+y^2=1$ и т. д. (черт. 1). Чтобы начертить интегральную кривую уравнения (11), надо взять некоторую точку (x_0, y_0) на плоскости и провести через неё кривую так, чтобы она в каждой точке имела направление поля $\left[\text{на чертеже проведены кривые через точки } (0,\ 0),\ \left(0,\ -\frac{1}{2}\right),\ (\sqrt{2},\ 0)\right]$. Мы видим, что получается не одна кривая, а целое семейство от одного параметра (за параметр можно взять, например, отрезок, отсекаемый кривою на оси Oy). Это же заключение будет при известных ограничениях справедливо и для любого поля, т. е. любого дифференциального уравнения. Таким образом, мы вправе ожидать такого ответа на вопрос о множестве интегральных кривых дифференциального уравнения: *интегральные кривые дифференциального уравнения первого порядка образуют семейство, зависящее от одного параметра*:

$$y = \varphi(x, C). \tag{12}$$

Замечая, что функция $\varphi(x, C)$ при любом C есть решение дифференциального уравнения, мы можем также ожидать следующего результата.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка даётся формулой (12), *заключающей одно произвольное постоянное*[1]).

Наконец, вспомнив, что мы получаем каждую отдельную интегральную кривую, задавая точку (x_0, y_0), через которую она проходит, мы приходим к следующему заключению:

Чтобы однозначно определить частное решение дифференциального уравнения первого порядка, надо задать то значение y_0, которое искомая функция принимает при заданном значении x_0 независимого переменного (начальные значения).

В самом деле, если x_0 и y_0 даны, то, подставляя их в уравнение (12), мы получим: $y_0 = \varphi(x_0, C)$ — одно уравнение для определения одного неизвестного C; наши геометрические соображения позволяют ожидать, что это уравнение имеет решение.

Примечание. Рассуждения настоящего раздела 3 не являются строгими доказательствами существования решения дифференциального уравнения и однозначного определения частного решения начальными данными, так как они ссылаются на геометрическую картину; все приведённые результаты справедливы лишь при определённых ограничениях, наложенных на функцию f; строгие доказательства будут даны в главе II. Наши рассуждения только показывают, каких обстоятельств мы вправе ожидать в простейших случаях, и дают практический приём для приближённого вычерчивания интегральных кривых.

ЗАДАЧА.

4. Построить поле направлений для уравнения $\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$ (построить изоклины $y' = 0$, $y' = \pm 1, \pm 2$). Провести интегральные кривые через точки (0, 0), (0, 1), (1, 0).

4. Мы видели, что свойство общего решения дифференциального уравнения первого порядка — зависеть от одного произвольного постоянного, — выявленное на простейшем примере (1), подтверждается соображениями предыдущего раздела и для более общих уравнений первого порядка. Естественно ожидать, что, по аналогии с примером (4), решение общего дифференциального уравнения второго по-

[1]) Точное определение общего и частного решения мы сможем дать лишь в дальнейшем.

рядка (10) или (10′) будет заключать два произвольных постоянных, а общее решение дифференциального уравнения n-го порядка будет зависеть от n произвольных постоянных. Так оно и есть (при известных ограничениях); мы не будем здесь приводить геометрических соображений, а подойдём к вопросу с другой стороны, благодаря чему наши соображения по аналогии получат значительное подтверждение.

Поставим задачу, в некотором смысле обратную задаче интегрирования дифференциального уравнения. Пусть дано соотношение:

$$y = \varphi(x, C), \tag{13}$$

где C есть параметр; дифференцируя по x [1]), получим:

$$y' = \varphi'_x(x, C). \tag{14}$$

Если правая часть выражения (14) не содержит C, то мы уже произвели исключение параметра C и получили дифференциальное уравнение:

$$y' = \varphi'_x(x); \tag{14'}$$

очевидно, что в этом случае соотношение (13) имеет вид:

$$y = \varphi(x) + C$$

и является решением уравнения (14′).

Пусть теперь правая часть равенства (14) содержит C; тогда и правая часть равенства (13) содержит C, т. е. $\varphi'_C(x, C) \not\equiv 0$, и в окрестности значений x_0, C_0, для которых $\varphi'_C(x_0, C_0) \neq 0$, мы можем определить C как функцию от x и y:

$$C = \psi(x, y). \tag{15}$$

Очевидно, что имеет место тождество (по переменным x и C):

$$\psi(x, \varphi(x, C)) \equiv C. \tag{16}$$

Подставляя значение C, определённое формулой (15), в выражение (14), мы получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' = \varphi'_x(x, \psi(x, y)). \tag{17}$$

Легко убедиться в том, что (13) представляет его решение при любом значении C; в самом деле, если мы подставим это выражение для y в уравнение (17), то в левой части получим $\varphi'_x(x, C)$, а в правой $\varphi'_x\{x, \psi[x, \varphi(x, C)]\}$, а это, в силу тождества (16), тоже даёт $\varphi'_x(x, C)$.

---

[1]) Мы предполагаем, что все входящие в рассуждения производные существуют.

Если соотношение между x, y, C дано в неявном виде:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{13'}$$

то, дифференцируя его по x, находим:

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' = 0. \tag{14''}$$

Исключая C из соотношений (13') и (14''), приходим, при выполнении соответствующих условий из теории неявных функций, к уравнению

$$F(x, y, y') = 0. \tag{17'}$$

Предыдущие рассуждения показывают, что (13') определяет его решение.

Пусть теперь дано соотношение

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{18}$$

связывающее функцию y и независимое переменное x и заключающее n параметров C_1, C_2, ..., C_n. Нельзя ли построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция y, определённая соотношением (18), при любых постоянных значениях параметров? Мы предположим, что Φ непрерывна по всем аргументам и дифференцируема по x и y достаточное число раз. Дифференцируем в указанных предположениях равенство (18) n раз [оно является тождеством, если вместо y подставить функцию $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, определяемую соотношением (18)]. Имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} y' = 0,\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y} y' + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial\Phi}{\partial y} y'' = 0,\\
&\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\,\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial y} y''' = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial^n\Phi}{\partial x^n} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\partial\Phi}{\partial y} y^{(n)} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Соотношения (18) и (19) образуют систему $n+1$ уравнений; они содержат n параметров C_1, C_2, ..., C_n. Вообще говоря [1]), из этой системы можно исключить все параметры, т. е. найти их выражения через x, y, y', ..., $y^{(n)}$ из n уравнений и вставить эти выражения в $(n+1)$-е уравнение. Мы придём к соотношению вида:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{20}$$

[1]) Даже для случая линейных уравнений мы знаем, что не всегда из n уравнений можно определить n неизвестных.

т. е. к дифференциальному уравнению n-го порядка. Мы уже отметили, что при подстановке в уравнение (18) на место y его выражения $\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ получается тождество, и то же справедливо относительно уравнений (19); поэтому и уравнение (20), являющееся следствием уравнений (18) и (19), обратится в тождество, если в него подставить вместо y функцию $\varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, а это значит, что y, определяемый из уравнения (18), есть решение уравнения (20). Таким образом, эта функция, содержащая n произвольных постоянных, является решением некоторого дифференциального уравнения n-го порядка. Можно было бы провести и более точное рассуждение, как мы это сделали для уравнения первого порядка. Теперь мы вправе ожидать, что исходное решение является общим и что, обратно, общее решение дифференциального уравнения n-го порядка содержит n произвольных постоянных.

ЗАДАЧИ.

5. Найти дифференциальное уравнение всех прямых на плоскости (взять общую форму); проинтегрировать это уравнение.

6. Найти дифференциальное уравнение софокусных эллипсов с данным фокусным расстоянием $2c$.

Указание. Уравнение семейства $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}=1$, где a — произвольный параметр, дифференцируем по x, считая y функцией x; по сокращении имеем:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{yy'}{a^2-c^2}=0.$$

Исключив из этих двух уравнений a^2, получим искомое уравнение первого порядка.

Пример 1. Семейство всех кругов на плоскости

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

содержит три параметра. Дифференцируем три раза:

$$x-\alpha+(y-\beta)y'=0, \quad 1+(y-\beta)y''+y'^2=0,$$

$$(y-\beta)y'''+3y''y'=0.$$

Параметры α и r исключились при дифференцировании; нам остаётся исключить β из двух последних уравнений, и мы получим (приравнивая два выражения для $y-\beta$):

$$y'''(1+y'^2)-3y'y''^2=0.$$

Пример 2. В качестве последнего примера возьмём уравнение всех конических сечений. Из аналитической геометрии известно, что оно зависит от пяти параметров (отношения шести коэффициентов) и имеет вид:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0.$$

Предположим, что $a_{22} \neq 0$, и разрешим это уравнение относительно y:

$$y = -\frac{a_{12}x + a_{23}}{a_{22}} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{12}x + a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - \frac{a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}}{a_{22}}},$$

или

$$y = -\frac{a_{12}}{a_{22}}x - \frac{a_{23}}{a_{22}} \pm \sqrt{\frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{22}^2}x^2 + 2\frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{22}^2}x + \frac{a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}{a_{22}^2}}.$$

Обозначив постоянные новыми буквами, мы получим окончательно:

$$y = Ax + B + \sqrt{Cx^2 + 2Dx + E}. \qquad (21)$$

В это уравнение входит пять параметров; надо их исключить из данного уравнения и тех уравнений, которые из него получатся после одного, двух, ..., пяти дифференцирований.

Итак, дифференцируем обе части уравнения (21) по x:

$$y' = A + \frac{Cx + D}{\sqrt{Cx^2 + 2Dx + E}},$$

$$y'' = \frac{C(Cx^2 + 2Dx + E) - (Cx + D)^2}{(Cx^2 + 2Dx + E)^{3/2}} = \frac{CE - D^2}{(Cx^2 + 2Dx + E)^{3/2}}.$$

Постоянные A и B исключились; мы имеем в числителе правой части постоянные, в знаменателе — квадратный трёхчлен в степени $\frac{3}{2}$. Для дальнейшего исключения постоянных выгодно возвести обе части в степень $-\frac{2}{3}$; тогда мы получим:

$$(y'')^{-\frac{2}{3}} = (CE - D^2)^{-\frac{2}{3}}(Cx^2 + 2Dx + E),$$

т. е. в правой части квадратный трёхчлен относительно x; если его продифференцировать три раза, то все постоянные исключатся, так как в правой части получится 0. Итак, искомое дифференциальное уравнение сразу запишется в виде:

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0.$$

Проведём это дифференцирование последовательно

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y''', \quad \left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = \frac{10}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''^2 - \frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y^{IV}$$

и, наконец,

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = -\frac{80}{27}y''^{-\frac{11}{3}}y'''^3 + \frac{20}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''y^{IV} + \\ + \frac{10}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''y^{IV} - \frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y^{V} = 0.$$

Упростим последнее уравнение, приведя подобные члены и умножив обе части на $y''^{\frac{11}{3}}$, чтобы не иметь отрицательных степеней; далее, умножим все члены на числовой множитель $-\frac{27}{2}$. Мы получим окончательно:

$$9y''^2y^{\mathrm{V}} - 45y''y'''y^{\mathrm{IV}} + 40y'''^3 = 0.$$

Примечание 1. Мы взяли в формуле (21) перед радикалом знак $+$; легко проверить, что тот же окончательный результат получится, если взять знак $-$.

Примечание 2. Заметим, что $C = \frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{22}^2}$; в случае параболы мы имеем $C = 0$, и уравнение парабол (зависящее от четырёх параметров) имеет вид:

$$y = Ax + B + \sqrt{2Dx + E}.$$

Примечание 3. Мы предположили $a_{22} \neq 0$; разбор случая $a_{22} = 0$ отнесён к задачам.

ЗАДАЧИ.

7. Вывести дифференциальное уравнение конических сечений, у которых $a_{22} = 0$. Каково геометрическое свойство этих кривых, выделяющее их из всех кривых второго порядка? (Рассмотреть два случая: $a_{12} \neq 0$, $a_{12} = 0$.)

8. Вывести дифференциальное уравнение парабол, для которых $a_{22} \neq 0$, и тех парабол, для которых $a_{22} = 0$.

Примечание. Если мы имели соотношение между x и y, содержащее n параметров, то мы утверждали, что, «вообще говоря», для исключения этих параметров надо иметь $n+1$ уравнений. В отдельных случаях параметры могут исключиться из меньшего числа уравнений; например, из семейства $y = C_1(C_2x + C_3)$ получается после исключения параметров уравнение второго порядка $y'' = 0$, так как на самом деле это семейство зависит от двух параметров C_1C_2 и C_1C_3.

Труднее обнаружить этот факт на уравнении $y^2 = 2bxy + cx^2$, представляющем семейство распадающихся кривых второго порядка с двойной точкой в начале координат. Как геометрический образ, это семейство действительно зависит от двух параметров; но если разрешить уравнение относительно y, мы получим:

$$y = (b \pm \sqrt{b^2 + c})\,x;$$

с функциональной точки зрения y, рассматриваемый как однозначная функция от x, зависит от x и одной комбинации параметров:

$$k = b \pm \sqrt{b^2 + c}.$$

И действительно, дифференцируя данное соотношение, находим:

$$yy' = b(xy' + y) + cx;$$

исключая c из этого уравнения и из данного, получим:

$$xyy' - y^2 = b(x^2y' - xy) \quad \text{или} \quad (y - bx)(xy' - y) = 0.$$

Второй множитель, приравненный нулю, даёт искомое дифференциальное уравнение $xy' - y = 0$; легко видеть, что, приравняв нулю первый множитель, мы получим частное решение того же дифференциального уравнения.