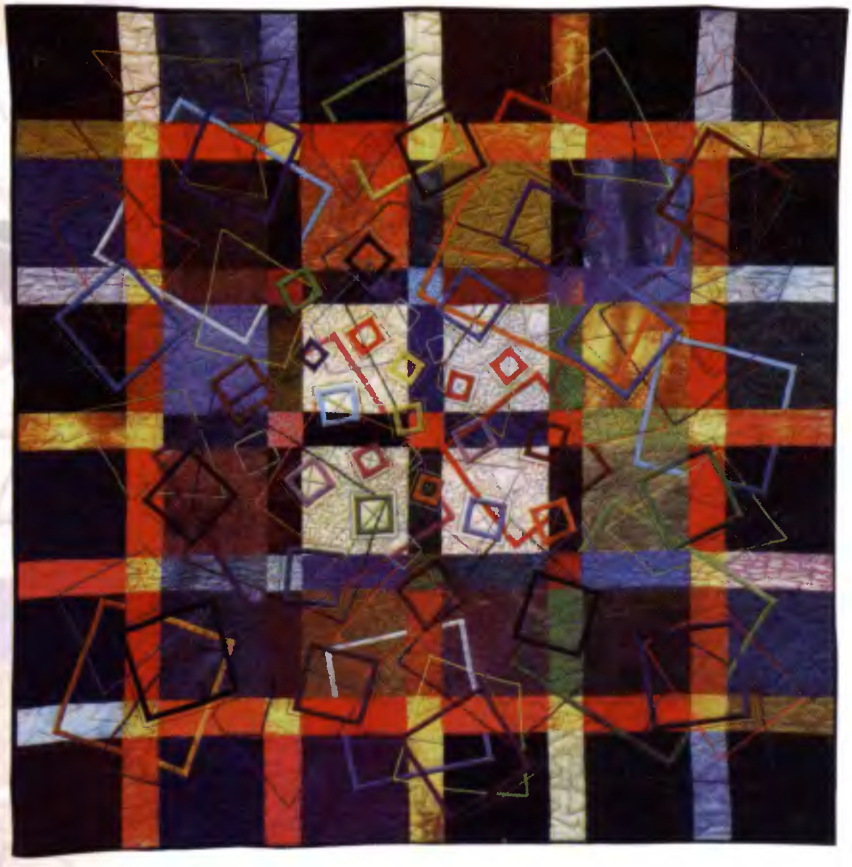
# Дискретная математика

## и комбинаторика



Джеймс Андерсон

# DISCRETE MATHEMATICS WITH COMBINATORICS

JAMES A. ANDERSON

*University of South Carolina, Spartanburg*

Prentice Hall

Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458

# ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И КОМБИНАТОРИКА

ДЖЕЙМС А. АНДЕРСОН
*Университет Южной Каролины, Спартанбург*

ВИЛЬЯМС

Москва • Санкт-Петербург • Киев
2004

ББК 32.973.26-018.2.75
А65
УДК 681.3.07

Издательский дом "Вильямс"

Зав. редакцией *С.Н. Тригуб*

Перевод с английского канд. физ.-мат. наук *М.М. Беловой*

Под редакцией канд. физ.-мат. наук *С.С. Шкильняка* и *М.Р. Саит-Аметова*

Научный консультант докт. физ.-мат. наук, проф. *Ю.В. Казаченко*

По общим вопросам обращайтесь в Издательский дом "Вильямс" по адресу:
info@williamspublishing.com, http://www.williamspublishing.com

**Андерсон,** Джеймс А.

А65 Дискретная математика и комбинаторика. : Пер. с англ. — М. : Издательский дом "Вильямс", 2004. — 960 с. : ил. — Парал. тит. англ.

ISBN 5-8459-0498-6 (рус.)

Эта книга представляет собой современный учебник по дискретной математике. Кроме таких разделов, как математическая логика, теория множеств, комбинаторика, теория графов, теория алгоритмов и вычислений, традиционно включаемых в основной курс дискретной математики, она содержит обширные сведения по теории вероятностей, алгебре и теории чисел. Особое внимание уделено теории доказательств. Чтение книги требует некоторой математической культуры, хотя для изучения основных глав достаточно знаний по математике в объеме средней школы. Материал сопровождается многочисленными примерами, в конце каждого раздела приводится большое количество упражнений.

Книга адресована в первую очередь преподавателям и студентам технических специальностей. Она будет также полезна тем, кто интересуется дискретной математикой и желает изучить ее самостоятельно.

**ББК 32.973.26–018.2.75**



ISBN 5-8459-0498-6 (рус.)
ISBN 0-13-086998-8 (англ.)

# Содержание

## 8 Комбинаторика и вероятность 316



## 9 Алгебраические структуры 392



## 10 Некоторые специальные вопросы теории чисел 422



## 11 Некоторые специальные вопросы теории рекурсии 448

*Памяти Эльвуда В. Стоуна и Орвилла Г. Уиби.*
*Моей семье: Мэрилин, Энди, Кристин и Филу.*
*Учителям, наставникам и друзьям: Т.Хэду, Н.Кимура, Л.С.Лоузу и Э.Л.Дубовски.*

# Предисловие

Несмотря на то, что на рынке учебной литературы на сегодняшний день имеется немало книг по дискретной математике, пожалуй, ни одна из них не может сравниться с этой книгой по размаху и глубине рассматриваемых тем. Отличительной особенностью данной книги является то внимание, которое уделяется в ней теории доказательств. Понятие доказательства вводится уже в первой главе и развивается на протяжении всей книги. Дискретную математику изучают, как правило, на первых курсах математических факультетов и факультетов информатики. Необходимость изучения техники доказательств для будущих математиков очевидна. Она также крайне важна для развития логического мышления у будущих специалистов в области информатики. По сути, правильно составленная компьютерная программа эквивалентна логическому доказательству. По мнению автора, использовать то или иное приложение (или, в крайнем случае, не ошибаться при его использовании) легче, если понимаешь, как оно работает. За редкими исключениями, материал книги является самодостаточным. Использованию любого понятия в тексте предшествует его строгое математическое определение.

Материал данной книги не требует от читателя знания математического анализа. Для понимания основных глав вполне достаточно знакомства со школьным курсом алгебры. Но, несмотря на самодостаточность книги в целом, отдельные ее главы все же требуют от читателя определенной математической подготовки.

Книга планировалась как основа семестрового или двухсеместрового курса по дискретной математике. В первых восьми главах закладываются основы предмета; их можно использовать при чтении начального курса. Эти главы практически независимы друг от друга, так что преподаватель сам может выбрать материал для изложения. Содержание остальных глав соответствует второй части курса по дискретной математике. В них введенные ранее понятия изучаются более детально, и рассматриваются темы повышенного уровня сложности. Темы рассматриваются с различных точек зрения, чтобы показать, как их можно использовать в зависимости от ситуации. В спектр рассматриваемых тем входят:

*Логика*, включающая таблицы истинности, логику высказываний, коммутационные схемы, исчисление предикатов, индукцию и доказательства;

*Теория множеств*, включающая понятие мощности множеств, отношения, частично упорядоченные множества, отношения конгруэнтности, графы, ориентированные графы и функции;

*Алгоритмы*, включающая понятие сложности алгоритмов, алгоритмы поиска и сортировки, а также алгоритмы Евклида, Хаффмана, Прима, Уоршолла, Форда-Фулкерсона, Флойда-Уоршолла и Дейкстры;

*Теория графов*, включающая ориентированные графы, циклы и пути Эйлера, циклы и пути Гамильтона, плоские и взвешенные графы;

*Деревья*, включающая бинарные деревья поиска, взвешенные деревья, обход деревьев, коды Хаффмана и остовные деревья;

*Комбинаторика*, включающая перестановки, сочетания, включение-исключение, разбиения, производящие функции, числа Каталана, числа Стирлинга, ладейные многочлены, разупорядочения и перечисления цветов;

*Алгебра*, включающая полугруппы, группы, решетки, полурешетки, булевы алгебры, кольца, поля, области целостности, полиномы и матрицы.

Книга содержит обширные сведения по алгебре и теории чисел, что, по мнению автора, усиливает ее содержание, хотя включать эти темы в курс лекций вовсе не обязательно. Материал соответствующих глав полностью независим от остальных частей книги, и в каком объеме его стоит излагать — решать лектору. Данное пособие содержит также элементы теории вероятностей, сведения о конечных разностях и другие темы, обычно не рассматриваемые в книгах по дискретной математике.

## СТРУКТУРА КНИГИ

Содержание первых трех глав охватывает логику и теорию множеств. Здесь позиция автора состоит в том, что понимание основ теории доказательств необходимо для логического построения передовых компьютерных технологий. Изложены основные положения теории доказательств и проиллюстрированы многочисленными примерами. В главе 2 студенту предлагается самостоятельно доказать некоторые элементарные утверждения теории множеств. В главе 3 вводится понятие аксиоматической системы для теории чисел. Студенту предоставляется возможность попрактиковаться в доказательстве теорем о хорошо знакомых ему объектах. В этой же главе вводится метод доказательства по индукции. Далее в книге приводится множество доказательств, а также посвященных им задач. Сначала эти задачи довольно просты, но по ходу изложения книги уровень их сложности постепенно возрастает.

Отношения и графы вводятся в главе 2. В главе 4 из понятия отношения естественным образом выводится понятие функции. Однако подробное изучение функций в главе 4 проводится независимо от материала главы 2. Точно так же в главе 6 графы исследуются вне контекста главы 2, где они рассматриваются в связи с отношениями.

Матрицы, перестановки и последовательности вводятся в главе 4 как функции специального вида. Дальнейшее изучение свойств этих функций продолжается в главе 6. Здесь же вводятся алгоритмы операций над матрицами и рассматриваются те свойства матриц, которые используются далее в главах, посвященных алгебре, комбинаторике и теории кодов.

В главе 8 перестановки используются как инструмент комбинаторных подсчетов. Перестановки также используются в последующих главах, посвященных прикладным вопросам алгебры и комбинаторики. Глава 8, хотя она и связана с главой 4, может изучаться независимо.

Содержание главы 5 не связано с предыдущими главами ничем, за исключением того, что касается матриц. Подробно изучены алгоритмы, в частности, алгоритмы сортировки. Понятие сложности алгоритмов также рассмотрено в этой главе. Здесь же даны сведения о префиксной и суффиксной записях. Эта тема опять обсуждается в главе 15 в связи с обходом бинарных деревьев. В главе 5 вводятся также двоичные и шестнадцатеричные числа.

Многие элементарные понятия, связанные с графами, ориентированными графами и деревьями, рассматриваются в главе 6. Более глубоко эти вопросы изучаются в главах 14–16. Содержание главы 6 не зависит от содержания предыдущих глав.

В главах 7 и 10 получает дальнейшее развитие теория чисел. Материал этих глав используется в главе 22 при изучении приложений теории чисел. В остальном они вполне самостоятельны и при желании могут быть опущены.

С главы 8 начинается изучение широкого круга вопросов комбинаторики, которое затем продолжается во многих других частях книги, включая главы 12, 13 и 17. В той же главе 8 приводятся некоторые сведения из теории вероятностей, что само по себе весьма необычно для книг по дискретной математике.

Главы 9 и 20 охватывают основные понятия алгебры, включающие полугруппы, группы, кольца, решетки, полурешетки, области целостности и поля. При построении примеров групп и колец в этих главах используется материал разделов 3.6 и 4.3. Материал главы 9 используется далее в приложениях, рассматриваемых в главах 17–21.

По многим причинам главы 11, 12 и 13 можно выделить в отдельную группу. В главе 11 продолжается изучение рекурсии. Кроме обычных линейных рекуррентных отношений, включаемых, как правило, в учебные курсы по дискретной математике, глава содержит сведения по теории конечных разностей. Если читатель не имеет хотя бы поверхностного представления о рекурсии, то для понимания этой главы ему необходимо ознакомиться с материалом главы 6. В главе 12 продолжается изучение комбинаторики, начатое в главе 8. Здесь рассматриваются такие вопросы, как включение-исключение и задача о размещении. Кроме того, вводится понятие разупорядочения и ладейного полинома. Главы 11 и 12 тесно взаимосвязаны; в них многие темы рассматриваются с различных точек зрения. Одним из объектов такого разностороннего рассмотрения являются числа Стирлинга. Тем не менее, каждая из этих глав вполне самостоятельна.

В главе 13 вводится понятие производящей функции, и на его основе продолжается изучение материала глав 11 и 12. В частности, производящие функции используются для построения эффективного метода решения задач о размещении.

В главах 14–16 продолжается изучение графов и деревьев, начатое в главе 6. Содержание этих глав очевидным образом зависит от материала главы 6, но с материалом большинства предыдущих глав практически не связано. Исключение составляет использование матриц в одном из рассматриваемых алгоритмов. Здесь изучаются стандартные для теории графов и деревьев объекты: плоские графы, циклы Гамильтона, бинарные деревья, остовные деревья, минимальные остовные деревья, алгоритмы нахождения кратчайшего пути и потоки в сетях.

Еше одну группу составляют главы 17–22, посвященные прикладным вопросам теории чисел, алгебры и комбинаторики. Глава 17 посвящена теории вычислений; в ней рассматриваются коды, регулярные языки, автоматы, грамматики и связь между ними. Здесь используются полугруппы, введенные в разделе 9.2. В главе 18 вводятся специальные коды, такие как коды с обнаружением ошибок и коды с исправлением ошибок. Для понимания материала этой главы требуется знание теории групп в объеме раздела 9.4 и теории матриц в объеме глав 4 и 5. Совершенно иное применение теория кодов получает в главе 22, где рассматриваются вопросы криптографии. Эта глава требует знаний по теории чисел на уровне, выходящем за пределы данной книги.

В главе 19 при изложении теорем Бернсайда и Пойя для перечисления цветов используются как алгебра, так и комбинаторика. Здесь, главным образом, требуется знание перестановок в объеме раздела 9.4.

Глава 21 посвящена простейшим приложениям групп и полугрупп, а также их отображениям на комплексную плоскость. Необходимые предварительные сведения содержатся в разделах 9.2 и 9.5.

Глава 22 содержит три важных приложения теории чисел. Изучение функций хеширования и криптографии является для информатики весьма актуальным.

При чтении вводного курса автор, как правило, полностью излагает материал глав 1–5, разделов 8.1–8.3, а также старается изложить первые три раздела главы 6. Как отмечалось ранее, материал первых восьми глав составлен так, чтобы обеспечить максимальную гибкость. В следующей таблице указано, какие предварительные сведения требуются для усвоения материала каждой из глав:

| *Глава* | *Необходимые главы или разделы* |
|---|---|
| Глава 1 | Никакие |
| Глава 2 | Никакие |
| Глава 3 | Разделы 1.1–1.4 и 2.1 |
| Глава 4 | Никакие |
| Глава 5 | Разделы 4.1–4.3 |
| Глава 6 | Никакие |
| Глава 7 | Глава 3 |
| Глава 8 | Никакие |
| Глава 9 | Раздел 3.6 |
| Глава 10 | Глава 7 |
| Глава 11 | Разделы 5.1–5.3 |
| Глава 12 | Глава 8 |
| Глава 13 | Главы 11 и 12 |
| Глава 14 | Главы 5 и 6 |
| Глава 15 | Главы 5 и 6 |
| Глава 17 | Глава 9 |
| Глава 18 | Главы 5 и 9 |
| Глава 19 | Глава 9 |
| Глава 20 | Глава 9 |
| Глава 21 | Глава 9 |
| Глава 22 | Глава 10 |

## ПОДДЕРЖКА

Имеется подробное руководство к решению всех задач, рассмотренных в этой книге, которое можно заказать в издательстве Prentice Hall. Книга имеет свою страницу в Интернете; ее адрес: *www.prenhall.com/janderson*. Здесь вы найдете ссылки на другие интересные сайты, посвященные дискретной математике, в том числе содержащие контрольные задания и формулировки интересных проблем дискретной математики, не вошедшие в данное издание.

## БЛАГОДАРНОСТИ

В первую очередь мне хочется поблагодарить Джорджа Лобелла, руководившего разработкой этой книги, и Барбару Мэк, координировавшую наши усилия. Я благодарю Кристиана и Филиппа Мусик за мастерски выполненное художественное оформление. Особую благодарность я приношу Джеймсу Беллу, внесшему огромный вклад в написание данной книги. Очень жаль, что он не смог выступить в роли моего соавтора. Мне очень не хватает его партнерской поддержки. Кроме того, я хочу поблагодарить за помощь моих коллег Дэна Кука, Эда Вайлда, Рика Чоу, М. Б. Ульмера и Джерома Льюиса. Я благодарен своей студентке Соледад Шугаи за усилия, приложенные ею при изучении моего курса. Также хочу поблагодарить студентов Джоди Дина, Джессику Донс, Грейса Эллисона, Винни Чин Фай Ип, Присциллу Лапьер, Эстер Лай, Бадрала Мадани, Джулию Норрис, Трейси Квина и Роберта Вигерта, бывших первыми, кто прослушал данный материал.

Пожалуйста, присылайте по электронной почте свои замечания и предложения по дальнейшему улучшению книги.

Джеймс А. Андерсон
janderson@gw.uscs.edu

ГЛАВА

# ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ, ЛОГИКА, ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

1

## 1.1. ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ЛОГИЧЕСКИЕ СВЯЗКИ

В этом разделе рассматриваются таблицы истинности, знакомство с которыми будет для нас первым шагом в изучении логики. Далее мы увидим, что таблицы истинности являются также основным инструментом для определения других важных понятий дискретной математики. Логика, созданная как наука знаменитым Аристотелем (384–322 до н.э.), на протяжении столетий использовалась для развития многих областей знания, включая теологию, философию, математику. Она — тот фундамент, на котором построено все здание математики. По сути, логика — это наука о рассуждениях, которая позволяет определить истинность или ложность того или иного математического утверждения, исходя из совокупности первичных предположений, называемых аксиомами. Логика применяется также в информатике для построения компьютерных программ и доказательства их корректности. Понятия, методы и средства логики лежат в основе современных информационных технологий. Одна из основных целей этой книги — изложить основы математической логики, показать, как она используется в информатике, и разработать методы анализа и доказательства математических утверждений.

***Высказывание*** — это утверждение или повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно. Иными словами, утверждение об истинности или ложности высказывания должно иметь смысл. Истинность или ложность, приписываемые некоторому утверждению, называются его ***значением истинности***, или ***истинностным значением***.

Вот примеры предложений, не являющихся высказываниями:

*Кто вы?* (вопрос),
*Прочтите эту главу до следующего занятия* (приказ или восклицание),
*Это утверждение ложно* (внутренне противоречивое утверждение).

Мы будем обозначать высказывания буквами латинского алфавита $p$, $q$, $r$, ... Например, $p$ может обозначать утверждение *Завтра будет дождь*, а $q$ — утверждение *Квадрат целого числа есть число положительное.*

В обыденной речи для образования сложного предложения из простых используются связки — особые части речи, соединяющие отдельные предложения. Наиболее часто употребляются связки *и, или, нет, если ... то, только если*, и *тогда и только тогда*. В отличие от обыденной речи, в логике смысл таких связок должен быть определен однозначно. Истинность сложного высказывания однозначно определяется истинностью или ложностью составляющих его частей. Высказывание, не содержащее связок, называется ***простым***. Высказывание, содержащее связки, называется ***сложным***.

Пусть $p$ и $q$ обозначают высказывания

$p$ : *Джейн водит автомобиль,*
$q$ : *У Боба русые волосы.*

Сложное высказывание

*Джейн водит автомобиль и у Боба русые волосы*

состоит из двух частей, объединенных связкой *и*. Это высказывание может быть символически записано в виде

$$p \text{ и } q$$

или просто как

$$p \wedge q\,,$$

где символ $\wedge$ обозначает слово *и* на языке символических выражений. Выражение $p \wedge q$ называется ***конъюнкцией*** высказываний $p$ и $q$.

Точно так же высказывание

*Джейн водит автомобиль или у Боба рыжие волосы.*

символически выражается как

$$p \text{ или } q$$

или

$$p \vee q\,,$$

где $\vee$ обозначает слово *или* в переводе на символический язык. Выражение $p \vee q$ называется ***дизъюнкцией*** высказываний $p$ и $q$.

***Опровержение***, или ***отрицание*** высказывания $p$ обозначается через

$$\sim p\,.$$

Таким образом, если $p$ есть высказывание *Джейн водит автомобиль*, то $\sim p$ — это утверждение *Джейн не водит автомобиль.*

Если $r$ есть высказывание *Джо нравится информатика*, то *Джейн не водит автомобиль и у Боба русые волосы или Джо любит информатику* символически запишется как $((\sim p) \wedge q) \vee r$. И наоборот, выражение $p \wedge (\sim q) \wedge r$ — это символическая форма записи высказывания *Джейн водит автомобиль, у Боба волосы не русые и Джо нравится информатика.*

Рассмотрим выражение $p \wedge q$. Если некто говорит: "Джейн водит автомобиль и у Боба русые волосы", то мы, естественно, представляем себе Джейн за рулем автомобиля и русоволосого Боба. В любой другой ситуации (например, если Боб не русоволос или Джейн не водит автомобиль) мы скажем, что говорящий не прав.

Возможны четыре случая, которые нам необходимо рассмотреть. Высказывание $p$ может быть истинным ($T$) или ложным ($F$) и независимо от того, какое истинностное значение принимает $p$, высказывание $q$ может также быть истинным ($T$) или ложным ($F$). ***Таблица истинности*** перечисляет все возможные комбинации истинности и ложности сложных высказываний.

| **Случай** | $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $T$ | $T$ | $T$ |
| 2 | $T$ | $F$ | $F$ |
| 3 | $F$ | $T$ | $F$ |
| 4 | $F$ | $F$ | $F$ |

Ранее мы убедились, что только в первом случае высказывание $p \wedge q$ истинно. В остальных же мы имеем ложное значение $p \wedge q$. Например, случай 3 описывает значение истинности для $p \wedge q$, когда неверно, что Джейн водит автомобиль и у Боба русые волосы. Если $p$ — высказывание *Джон богат*, а $q$ — высказывание *Джон красив*, то не знакомая с Джоном девушка, которую убедили в том, что высказывание *Джон богат и Джон красив*, или *Джон богат и красив* истинно, будет представлять себе Джона и богатым, и красивым.

Точно так же рассмотрим высказывание

*Джейн водит автомобиль или у Боба русые волосы*,

которое символически выражается как $p \vee q$. Если некто скажет: "Джейн водит автомобиль или у Боба русые волосы", то он будет не прав только тогда, когда Джейн не сможет управлять автомобилем, а Боб не будет русоволосым. Для того чтобы все высказывание было истинным, достаточно, чтобы одна из двух составляющих его компонент была истинной. Поэтому $p \vee q$ имеет таблицу истинности

| **Случай** | $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $T$ | $T$ | $T$ |
| 2 | $T$ | $F$ | $T$ |
| 3 | $F$ | $T$ | $T$ |
| 4 | $F$ | $F$ | $F$ |

Высказывание $p \vee q$ ложно только в случае 4, когда $p$ и $q$ оба ложны.

Если $p$ — высказывание *Джон богат*, а $q$ — высказывание *Джон красив*, и не знакомая с Джоном девушка уверена в истинности высказывания *Джон богат или Джон красив*, или *Джон богат или красив*, то она вправе ожидать, что истинно одно из высказываний, но не обязательно оба. Девушка почувствует себя введенной в заблуждение, только если обнаружит, что Джон беден и уродлив.

Таблица истинности для отрицания $p$ имеет вид

| **Случай** | $p$ | $\sim p$ |
|---|---|---|
| 1 | $T$ | $F$ |
| 2 | $F$ | $T$ |

Истинностное значение $\sim p$ всегда противоположно истинностному значению $p$. В таблицах истинности отрицание всегда оценивается первым, если только за знаком отрицания не следует высказывание, заключенное в скобки. Поэтому $\sim p \vee q$ интерпретируется как $(\sim p) \vee q$, так что отрицание применяется только к $p$. Если мы хотим отрицать все высказывание $p \wedge q$, то это записывается как $\sim(p \vee q)$.

Символы $\wedge$ и $\vee$ называют ***бинарными*** связками, так как они связывают два высказывания как, например, в выражениях $p \wedge q$ и $p \vee q$. Символ $\sim$ является ***унарной*** связкой, так как применяется только к одному высказыванию.

Еще одна бинарная связка — это ***исключающее или***, которое обозначается через $\veebar$. Высказывание $p \veebar q$ истинно, когда истинно $p$ или $q$, но не оба одновременно. Эта связка имеет таблицу истинности

| **Случай** | $p$ | $q$ | $p \veebar q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $T$ | $T$ | $F$ |
| 2 | $T$ | $F$ | $T$ |
| 3 | $F$ | $T$ | $T$ |
| 4 | $F$ | $F$ | $F$ |

Используя слово *или*, мы можем иметь в виду *исключающее или*. Например, когда мы говорим: "Дик сдаст экзамен по логике или он не сдаст этот экзамен", мы, конечно, предполагаем, что Дик сделает что-то одно. Таким образом, когда мы говорим, что $p$ — либо истина, либо ложь, то, естественно, предполагаем, что это не выполняется одновременно. В логике *исключающее или* используется довольно редко, и в дальнейшем мы, как правило, будем обходиться без него.

Рассмотрим высказывание

*Сэм уплатит налог за машину или Сэм утратит свою машину и будет ходить на работу пешком.*

Пусть $p$ обозначает высказывание *Сэм уплатит налог за машину*, $q$ — высказывание *Сэм останется при своей машине*, а $r$ — высказывание *Сэм будет ходить на работу пешком*. Тогда наше сложное высказывание можно представить в виде

$$p \vee ((\sim q) \wedge r),$$

где скобки использованы, чтобы показать, какие именно высказывания являются компонентами каждой связки.

Таблица истинности дает возможность однозначно указать те ситуации, когда высказывание $p \vee ((\sim q) \wedge r)$ является истинным; при этом мы должны быть уверены, что учтены все случаи. Поскольку сложное высказывание содержит три основных высказывания $p, q$ и $r$, то возможны восемь случаев

| Случай | $p$ | $q$ | $r$ | $\sim q$ | $(\sim q) \wedge r$ | $p \vee ((\sim q) \wedge r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $T$ | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| 2 | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| 3 | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| 4 | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ |
| 5 | $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| 6 | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| 7 | $F$ | $F$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| 8 | $F$ | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ |

При нахождении значений истинности для столбца $(\sim q) \wedge r$ мы используем столбцы для $(\sim q)$ и $r$, а также таблицу истинности для $\wedge$. Таблица истинности для $\wedge$ показывает, что высказывание $(\sim q) \wedge r$ истинно лишь в том случае, когда истинны оба высказывания $(\sim q)$ и $r$. Это имеет место лишь в случаях 3 и 7.

Заметим, что при определении значений истинности для столбца $p \vee ((\sim q) \wedge r)$ играет роль только истинность высказываний $p$ и $(\sim q) \wedge r$. Таблица истинности для $\vee$ показывает, что единственный случай, когда высказывание, образованное с помощью связки *или*, ложно, — это случай, когда ложны обе части этого высказывания. Такая ситуация имеет место только в случаях 5, 6 и 8.

Если Сэм не уплатит налог за машину (т.е. $p$ ложно, или имеет значение $F$), лишится своей машины ($q$ имеет значение $F$) и будет ходить на работу пешком ($r$ имеет значение $T$), то будет иметь место случай 7. Тот, кто скажет: "Сэм уплатит налог за машину или Сэм утратит машину и будет ходить на работу пешком", будет абсолютно прав.

Другой, эквивалентный способ построения таблицы истинности состоит в том, чтобы записывать истинностные значения выражения под связкой. Снова рассмотрим выражение $p \vee ((\sim q) \wedge r)$. Сначала мы записываем истинностные значения под переменными $p$, $q$ и $r$. Единицы под столбцами истинностных значений указывают на то, что этим столбцам истинностные значения присваиваются в первую очередь. В общем случае число под столбцом будет показывать номер шага, на котором производятся вычисления соответствующих истинностных значений.

| Случай | $p$ | $q$ | $r$ | $p$ | $\vee$ | $((\sim$ | $q)$ | $\wedge$ | $r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $T$ | $T$ | $T$ | $\boldsymbol{T}$ | | | $\boldsymbol{T}$ | | $\boldsymbol{T}$ |
| 2 | $T$ | $T$ | $F$ | $\boldsymbol{T}$ | | | $\boldsymbol{T}$ | | $\boldsymbol{F}$ |
| 3 | $T$ | $F$ | $T$ | $\boldsymbol{T}$ | | | $\boldsymbol{F}$ | | $\boldsymbol{T}$ |
| 4 | $T$ | $F$ | $F$ | $\boldsymbol{T}$ | | | $\boldsymbol{F}$ | | $\boldsymbol{F}$ |
| 5 | $F$ | $T$ | $T$ | $\boldsymbol{F}$ | | | $\boldsymbol{T}$ | | $\boldsymbol{T}$ |
| 6 | $F$ | $T$ | $F$ | $\boldsymbol{F}$ | | | $\boldsymbol{T}$ | | $\boldsymbol{F}$ |
| 7 | $F$ | $F$ | $T$ | $\boldsymbol{F}$ | | | $\boldsymbol{F}$ | | $\boldsymbol{T}$ |
| 8 | $F$ | $F$ | $F$ | $\boldsymbol{F}$ | | | $\boldsymbol{F}$ | | $\boldsymbol{F}$ |
| | | | | 1 | | | 1 | | 1 |

Затем мы записываем под символом $\sim$ истинностные значения высказывания $\sim q$.

| Случай | $p$ | $q$ | $r$ | $p$ | $\vee$ | $((\sim$ | $q)$ | $\wedge$ | $r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | | **$F$** | $T$ | | $T$ |
| 2 | $T$ | $T$ | $F$ | $T$ | | **$F$** | $T$ | | $F$ |
| 3 | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | | **$T$** | $F$ | | $T$ |
| 4 | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | | **$T$** | $F$ | | $F$ |
| 5 | $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | | **$F$** | $T$ | | $T$ |
| 6 | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | | **$F$** | $T$ | | $F$ |
| 7 | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | | **$T$** | $F$ | | $T$ |
| 8 | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | | **$T$** | $F$ | | $F$ |
| | | | | 1 | | 2 | 1 | | 1 |

Далее записываем истинностные значения $(\sim q) \wedge r$ под символом $\wedge$.

| Случай | $p$ | $q$ | $r$ | $p$ | $\vee$ | $((\sim$ | $q)$ | $\wedge$ | $r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | | $F$ | $T$ | **$F$** | $T$ |
| 2 | $T$ | $T$ | $F$ | $T$ | | $F$ | $T$ | **$F$** | $F$ |
| 3 | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | | $T$ | $F$ | **$T$** | $T$ |
| 4 | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | | $T$ | $F$ | **$F$** | $F$ |
| 5 | $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | | $F$ | $T$ | **$F$** | $T$ |
| 6 | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | | $F$ | $T$ | **$F$** | $F$ |
| 7 | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | | $T$ | $F$ | **$T$** | $T$ |
| 8 | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | | $T$ | $F$ | **$F$** | $F$ |
| | | | | 1 | | 2 | 1 | 3 | 1 |

Наконец, записываем значения высказывания $p \vee ((\sim q) \wedge r)$ под символом $\vee$.

| Случай | $p$ | $q$ | $r$ | $p$ | $\vee$ | $((\sim$ | $q)$ | $\wedge$ | $r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | **$T$** | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ |
| 2 | $T$ | $T$ | $F$ | $T$ | **$T$** | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ |
| 3 | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ | **$T$** | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| 4 | $T$ | $F$ | $F$ | $T$ | **$T$** | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| 5 | $F$ | $T$ | $T$ | $F$ | **$F$** | $F$ | $T$ | $F$ | $T$ |
| 6 | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ | **$F$** | $F$ | $T$ | $F$ | $F$ |
| 7 | $F$ | $F$ | $T$ | $F$ | **$T$** | $T$ | $F$ | $T$ | $T$ |
| 8 | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | **$F$** | $T$ | $F$ | $F$ | $F$ |
| | | | | 1 | 4 | 2 | 1 | 3 | 1 |

**ПРИМЕР 1.1.** Пусть $p$, $q$ и $r$ обозначают, соответственно, высказывания *Фрэд любит футбол*, *Фрэд любит гольф*, *Фрэд любит теннис*. Требуется записать высказывание *Фрэд любит футбол и неверно, что он любит гольф или теннис* в символической форме и указать соответствующую ему таблицу истинности.