МАТЕМАТИКА
В ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

$x_1 = a_{11}^* (a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n), \quad x_n = ((ab)^* + bc)$

XIX

А.И. Белоусов, С.Б. Ткачев

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана

Математика в техническом университете

Выпуск XIX

Серия удостоена
Премии Правительства
Российской Федерации
в области науки и техники
за 2003 год

Комплекс учебников из 21 выпуска

Под редакцией В.С. Зарубина и А.П. Крищенко

I. Введение в анализ
II. Дифференциальное исчисление функций одного переменного
III. Аналитическая геометрия
IV. Линейная алгебра
V. Дифференциальное исчисление функций многих переменных
VI. Интегральное исчисление функций одного переменного
VII. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля
VIII. Дифференциальные уравнения
IX. Ряды
X. Теория функций комплексного переменного
XI. Интегральные преобразования и операционное исчисление
XII. Дифференциальные уравнения математической физики
XIII. Приближенные методы математической физики
XIV. Методы оптимизации
XV. Вариационное исчисление и оптимальное управление
XVI. Теория вероятностей
XVII. Математическая статистика
XVIII. Случайные процессы
XIX. Дискретная математика
XX. Исследование операций
XXI. Математическое моделирование в технике

А.И. Белоусов, С.Б. Ткачев

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Под редакцией
д-ра техн. наук, профессора В.С. Зарубина
и д-ра физ.-мат. наук, профессора А.П. Крищенко

Издание третье, стереотипное

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2004

УДК 512.5+519.1(075.8)
ББК 22.174
Б43

Рецензенты: чл.-корр. РАН Ю.Н. Павловский, проф. А.К. Платонов

Б43 **Белоусов А.И., Ткачев С.Б.** Дискретная математика: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XIX).

ISBN 5-7038-1769-2 (Вып. XIX)
ISBN 5-7038-1270-4

В девятнадцатом выпуске серии „Математика в техническом университете" изложены теория множеств и отношений, элементы современной абстрактной алгебры, теория графов, классические понятия теории булевых функций, а также основы теории формальных языков, куда включены теории конечных автоматов, регулярных языков, контекстно-свободных языков и магазинных автоматов. В анализе графов и автоматов особое внимание уделено алгебраическим методам.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических университетов. Может быть полезен преподавателям, аспирантам и инженерам.

Ил. 200. Табл. 27. Библиогр. 65 назв.

УДК 512.5+519.1(075.8)
ББК 22.174

ISBN 5-7038-1769-2 (Вып. XIX)
ISBN 5-7038-1270-4

К 175-летию
МГТУ им. Н.Э. Баумана

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга является девятнадцатым выпуском комплекса учебников „Математика в техническом университете". Она содержит систематическое изложение курса дискретной математики.

Развитие классической („непрерывной") математики было обусловлено прежде всего решением задач естествознания, главным образом физики. „Дискретная" же математика развивалась в связи с изучением законов и правил человеческого мышления, что и обусловило ее применение в тех областях техники, которые так или иначе связаны с моделированием мышления, и в первую очередь в вычислительной технике и программировании.

Мышление реализует себя прежде всего в языке. Поэтому разумно считать, что ядро дискретной математики образует именно математическая теория языков, точнее, область этой теории, называемая теорией формальных языков. Слово „формальный" подчеркивает, что в этой теории изучаются в основном искусственные языки, специально созданные для каких-то целей: языки программирования, языки математики и т.п. Теория формальных языков является базой теории кодирования, „криптологии", изучающей методы защиты информации, теории алгоритмов и в определенном смысле математической логики. В прикладном аспекте эта теория служит основой разработки математического обеспечения вычислительных машин.

Доминирующим в современной теории формальных языков является алгебраический подход, в котором существенно используется аппарат, базирующийся на понятии алгебраической структуры полукольца. Этот аппарат во многом похож на аппарат линейной алгебры. Систематическое изложение теории формальных языков на базе теории полуколец и является одной из основных задач этой книги. Отметим, что в отечественной учебной литературе такой подход почти не получил отражения.

Теория формальных языков существенно опирается и на теорию графов. Многие задачи теории языков (например, задача определения языка конечного или магазинного автомата) сводится к задаче о путях во взвешенных (размеченных) ориентированных графах, где множество меток имеет алгебраическую структуру полукольца.

Изложение материала построено следующим образом. Глава 1 посвящена множествам и отношениям. Здесь напоминаются основы теории множеств, изложенные в первом выпуске комплекта учебников, причем некоторые вопросы излагаются более детально. Основное содержание главы составляет теория отношений. Центральным результатом является теорема о неподвижной точке для индуктивных упорядоченных множеств, на базе которой строятся методы решения задач о путях в графах и алгебраические методы в теории формальных языков.

Ввиду важности алгебраических методов в дискретной математике большое внимание уделяется алгебраической теории: ей посвящены три главы. В главе 2 излагаются элементы классической общей алгебры и рассматриваются группы, кольца и поля. Глава 3 посвящена полукольцам и булевым алгебрам. Приведенный здесь материал имеет важное значение с точки зрения приложения алгебраических методов как в теории формальных языков, так и в теории булевых функций. Особенностью изложения является определение булевой алгебры как частного случая полукольца. В главе 4 приведены некоторые результаты общей теории алгебраических систем.

Глава 5 посвящена теории графов. Центральное место в главе занимает изложение алгебраического метода решения задач о путях в ориентированных графах, размеченных над полукольцами. Этот материал служит, с одной стороны, иллюстрацией применения алгебраической техники в решении графовых задач, а с другой — основой решения задач в теории формальных языков. Глава содержит также описание некоторых алгоритмов на графах: алгоритма „поиска в глубину“ и „поиска в ширину“, алгоритма Краскала для отыскания остовного дерева наименьшего веса, алгоритма топологической сортировки. Коротко рассматриваются изоморфизм графов, группы автоморфизмов графов и элементы цикломатики (анализа структуры циклов неориентированного графа).

Глава 6 посвящена классическому разделу дискретной математики — булевым функциям — и включает вопросы минимизации булевых функций и теорему Поста о функциональной полноте.

В главах 7 и 8 изложена теория формальных языков. Глава 7 содержит „линейную часть“ этой теории — теорию конечных автоматов и регулярных языков, а глава 8 — теорию контекстно-свободных языков. Это важнейший класс языков, его теоретический анализ является основой многих информационных технологий, таких, в частности, как проектирование компиляторов или разработка лингвистического обеспечения баз данных. Фундаментальным является понятие магазинного автомата — распознавателя в классе контекстно-свободных языков. Именно эта модель языка служит математической основой конкретных технологий разработки синтаксических анализаторов для языков программирования.

В дополнениях к главе 8 приведены элементарные сведения о синтаксическом анализе контекстно-свободных языков и введение в математическую теорию семантики формальных языков (в частности, языков программирования). Здесь мы пытаемся перекинуть „мостик“ от чистой теории к практической технологии анализа контекстно-свободных языков, используемой прежде всего в компиляторах. Этот материал призван проиллюстрировать связь между изложеной математической теорией и ее приложениями к разработке математического обеспечения компьютеров.

В конце каждой главы помещены задачи для самостоятельного решения. Наиболее трудные задачи снабжены указаниями. В некоторых задачах содержатся и теоретические результаты, дополняющие основной текст. Часть задач придумана авторами, часть заимствована из других задачников и учебников.

Дискретная математика — бурно развивающаяся область. К сожалению, в этом учебнике мы не нашли возможности даже обзорно изложить некоторые результаты, развивающие классическую теорию графов (гиперграфы, сети Петри, потоковые диаграммы) и теорию языков (сверхъязыки, автоматы над структурами, отличными от слов, теорию алгоритмов как динамических систем, топологические методы в семантике). Мы рекомендуем интересующемуся читателю обстоятельно написанную „Handbook of Theoretical Computer Science“, а также последние выпуски периодического издания „Lecture notes in Computer Science“. Наиболее интересные, с нашей точки зрения, работы из этого издания указаны в списке литературы.

Для успешного освоения материала книги достаточно знания традиционных курсов математического анализа и линейной алгебры, читаемых в техническом университете. Мы в основном опирались на материал, изложенный в выпусках I–IV настоящего комплекса учебников.

В тексте книги имеются ссылки на другие выпуски комплекса учебников. Такой ссылкой служит номер выпуска. Например, [I] означает, что имеется в виду первый выпуск. Ссылки без римских цифр относятся только к этому, девятнадцатому, выпуску. Так, (см. **1.2**) отсылает читателя ко второму параграфу первой главы, а (см. **Д.7.1**) — к первому дополнению седьмой главы этой книги. Ссылки на номера формул и рисунков набраны обычным шрифтом (например, (2.1) — первая формула в главе 2, (рис. 1.5) — пятый рисунок в главе 1).

Большинство используемых в этой книге обозначений помещено в перечне основных обозначений, где наряду с их краткой расшифровкой указаны глава и параграф, в которых можно найти более подробное объяснение по каждому из обозначений. Для части обозначений, введенных в первом выпуске, указаны глава и параграф первого выпуска, а также при необходимости глава и параграф этой книги. Например, **I-1.3, 1.1** показывает, что обозначение введено в третьем параграфе первой главы первого выпуска и пояснения к нему содержатся в первом параграфе первой главы девятнадцатого выпуска. После этого перечня приведены написание и русское произношение входящих в формулы букв латинского и греческого алфавитов.

В конце книги помещены список рекомендуемой литературы и предметный указатель, в котором расположены в алфавитном порядке (по существительному в именительном падеже) все выделенные в тексте ***полужирным курсивом*** термины с указанием страницы, где они строго определены или описаны.

Выделение термина *светлым курсивом* означает, что этот термин в данном параграфе относится к ключевым словам и читателю должно быть известно его значение. Значение этого термина можно уточнить, найдя с помощью предметного указателя необходимую страницу этого выпуска, на которой термин определен или описан. Если термин введен в другом выпуске, то дана ссылка на этот выпуск (например, III означает ссылку на третий выпуск), а также указана курсивом страница предлагаемой книги, на которой имеются некоторые пояснения к этому термину.

Авторы выражают глубокую благодарность А.А. Кирильченко и М.С. Виноградовой за многочисленные пожелания и замечания, которые были учтены при подготовке книги.

Перед чтением книги в целях самоконтроля предлагается выполнить приведенные ниже задания. В тексте заданий **прямым полужирным** шрифтом выделены термины, значение которых должно быть известно читателю, а в конце каждого задания указана ссылка на номер выпуска, в котором можно найти соответствующие разъяснения. В основном тексте книги эти термины не выделены и не входят в предметный указатель.

Задания для самопроверки

1. Что такое конечное **множество**, **подмножество**, **элемент** множества? Какими способами можно задать множество? Приведите примеры **конечных** и **счетных множеств**. [I]

2. Является ли множество всех **рациональных чисел счетным**? [I]

3. Что такое **множество** всех **действительных чисел**? Что понимают под **расширенной (пополненной) числовой прямой**? [I]

4. Является ли **множество натуральных чисел собственным подмножеством множества целых чисел**? [I]

5. Какие операции над множествами Вы знаете? Перечислите свойства этих операций. [I]

6. В чем заключается **принцип двойственности** для законов **де Моргана**? [I]

7. Из каких этапов состоит доказательство по **методу математической индукции**? [I]

8. Сформулируйте определение **взаимно однозначного отображения** двух множеств. Что такое **тождественное отображение**? Чему равна **композиция прямого** и **обратного отображений** двух множеств? [I]

9. При каких условиях отображение одного множества в другое называют **сюръекцией, инъекцией** и **биекцией**? [I]

10. Что называют **неподвижной точкой отображения**? Сколько неподвижных точек у отображения $y = \sin x$? [I]

11. Какие **элементарные функции** Вы знаете? [II]

12. Что такое **область определения** и **область значения** функции? [I]

13. Приведите примеры функций, **непрерывных** в интервале (a,b). В чем различие между **монотонной** и **строго монотонной** в некотором промежутке функциями? [I]

14. Что такое **последовательность элементов множества**? [I]

15. Какими свойствами обладает **предел последовательности**? [I]

16. Сформулируйте **признак Вейерштрасса сходимости** ограниченной последовательности. [I]

17. Какова связь между количеством **сочетаний** и количеством **размещений** из n элементов по k? [I]

18. Что такое **единичная и нулевая матрицы**? [III]

19. Что такое **диагональная матрица, верхняя треугольная (нижняя треугольная) матрица**? [III]

20. Для матриц каких **типов (размеров)** определены операции **сложения и умножения**? [III]

21. Что такое **определитель** числовой **квадратной матрицы порядка** n? Как связаны операции **транспонирования** и вычисления **обратной матрицы**? [III]

22. Какую квадратную матрицу называют **вырожденной**, а какую — **невырожденной**? [III]

23. Какие свойства имеют операции **сложения свободных векторов** в пространстве и **умножения вектора на число**? Какими алгебраическими свойствами обладают **скалярное** и **векторное произведения** векторов? [III]

24. Что такое **коллинеарные** и **компланарные** векторы? [III]

25. Что такое **линейное пространство**? Каковы **аксиомы линейного пространства**? Что такое **линейное арифметическое пространство**? [IV]

26. Что такое **размерность линейного пространства** и **базис линейного пространства**? [IV]

27. Что такое **линейный оператор**? [IV]

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

◀ и ▶ — начало и окончание доказательства

\# — окончание примера или замечания

$a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A (множество A содержит элемент a) **I-1.1, 1.1**

$a \notin A$ — элемент a не принадлежит множеству A (множество A не содержит элемент a) **I-1.1, 1.1**

$\{a, b, c\}$ — множество, состоящее из элементов a, b, c **I-1.1, 1.1**

$A = \{x\colon \ldots\}$ — множество A состоит из элементов x, обладающих свойством, указанным после двоеточия **I-1.1, 1.1**

$\varnothing$ — пустое множество **I-1.1, 1.1**

U — универсальное множество **1.1**

$A = B$ — множества A и B равны **1.1**

$A \subset B$, $B \supset A$ — множество A является подмножеством множества B (A включено в B) **I-1.2, 1.1**

$A \subseteq B$, $B \supseteq A$ — множество A включено в множество B или совпадает с ним, **I-1.2, 1.1**

$A \cap B$ — пересечение множеств A и B **I-1.4, 1.1**

$A \cup B$ — объединение множеств A и B **I-1.4, 1.1**

$\overline{A}$ — дополнение множества A до универсального множества **I-1.4, 1.1**

$A \setminus B$ — разность множеств A и B **I-1.4, 1.1**

$A \triangle B$ — симметрическая разность множеств A и B **I-1.4, 1.1**

— объединение k множеств $A_1, \ldots, A_k$ **I-1.4, 1.5**

— пересечение k множеств $A_1, \ldots, A_k$ **I-1.4, 1.5**

— множество всех подмножеств множества A **1.1**

— символы дизъюнкции и конъюнкции **I-1.5, 1.1**

— булево объединение **3.4**

— булево пересечение **3.4**

— символ импликации **I-1.5, 1.1**

— символ эквивалентности **I-1.5, 1.1**

— отрицание высказывания A **I-1.5, 1.1**

— булево дополнение элемента x **3.4**

— квантор всеобщности ($\forall x$ — для любого x) и квантор существования ($\exists x$ — существует x) **I-1.5, 1.1**

— упорядоченная пара элементов x и y **1.2**

— прямое (декартово) произведение множества X на множество Y **I-2.5, 1.2**

— n-я декартова степень множества X (декартово произведение n экземпляров множества X) **I-2.5**

— число размещений (без повторений) из n элементов по m **I-2.6, 1.9**

— число сочетаний (без повторений) из n элементов по m **I-2.6, 1.9**

— число перестановок из n элементов **I-2.6, 1.9**

— множество натуральных чисел **I-1.3, 1.9**

— множество неотрицательных целых чисел **1.9**

— множество целых чисел **I-1.3**

— множество рациональных чисел **I-1.3**

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел **I-1.3**

$[x, y]$ — замкнутый промежуток (отрезок) **I-1.3**

(x, y) — открытый промежуток (интервал) **I-1.3**

$[x, y)$, $(x, y]$ — полуинтервалы **I-1.3**

$f\colon A \to B$ — отображение (функция) из множества A в множество B **I-2.1, 1.3**

$y = f(x)$ — элемент y есть образ элемента x при отображении f **I-2.1, 1.3**

$f\colon x \mapsto y$ — отображение (функция) переводит элемент x в элемент y, т.е. $y = f(x)$ **1.3**

f^{-1} — отображение, обратное отображению f **I-2.3, 1.3**

$f^{-1}(y)$ — полный прообраз элемента y при отображении f **I-2.1, 1.3**

$f(C)$ — образ множества C при отображении f **I-2.1, 1.3**

$f^{-1}(D)$ — полный прообраз множества D при отображении f **I-2.1, 1.3**

B^A — множество всех отображений из A в B **1.3**

$\rho \circ \sigma$, $f \circ g$ — композиция соответствий ρ и σ, композиция отображений f и g **1.3**

$\rho \subseteq A_1 \times A_2$ — соответствие из множества A_1 в множество A_2 **1.3**

$D(f)$ — область определения отображения f **I-2.1, 1.3**

$D(\rho)$ — область определения соответствия ρ **1.3**

$R(f)$ — область значения отображения f **I-2.1, 1.3**

$R(\rho)$ — область значения соответствия ρ **1.3**

$\rho(x)$ — сечение соответствия ρ **1.3**

ρ^{-1} — соответствие, обратное соответствию ρ **1.3**

$\rho \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$ — n-арное отношение на множествах $A_1, \ldots, A_n$ **1.3**

id_A — диагональ множества A **1.3**

ρ^* — рефлексивно-транзитивное замыкание бинарного отношения ρ **1.6**

$f^n(x)$ — результат n-кратного применения функции f к элементу x, причем $f^0(x) = x$ **1.8**

$\rho|_{C,D}$ — (C, D)-ограничение соответствия ρ **1.4**

$\rho|_C$ — C-сужение соответствия ρ **1.4**

$\rho|_{\circ C}$ — строгое C-сужение соответствия ρ **1.4**

$\rho|_M$ — ограничение бинарного отношения ρ на подмножество M **1.4**

$(A_i)_{i\in I}$ — индексированное семейство множеств (с множеством индексов I) **1.5**

$\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ — объединение индексированного семейства множеств **1.5**

$\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ — пересечение индексированного семейства множеств **1.5**

$[x]_\rho$ — класс эквивалентности элемента x по отношению эквивалентности ρ **1.7**

A/ρ — фактор-множество множества A по отношению эквивалентности ρ **1.7**

$a = b \pmod k$ — числа a и b равны по модулю k **1.7**

$=_{(\mathrm{mod}\,k)}$ — бинарное отношение равенства по модулю k **1.7**

$\leqslant$, $\preceq$, $\sqsubseteq$, $\preccurlyeq$ — стандартные обозначения различных отношений порядка **1.8**

$\geqslant$, $\succeq$, $\sqsupseteq$, $\succcurlyeq$ — обозначения отношений порядка, двойственных соответственно к $\leqslant$, $\preceq$, $\sqsubseteq$, $\preccurlyeq$ **1.8**

$<$, $\prec$, $\sqsubset$ — обозначения отношений строгого порядка, определяемых соответственно $\leqslant$, $\preceq$, $\sqsubseteq$ **1.8**

$>$, $\succ$, $\sqsupset$ — обозначения отношений строгого порядка, двойственных соответственно к $<$, $\prec$, $\sqsubset$ **1.8**

$\lhd$ — обозначения отношения доминирования, определяемого отношением порядка $\leqslant$ **1.8**

$\sup B$ ($\inf B$) — точная верхняя (точная нижняя) грань множества B **I-2.7, 1.8**

$\sup X_n$ ($\inf X_n$) — точная верхняя (точная нижняя) грань последовательности X_n **1.8**

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ — предел последовательности x_n при $n \to \infty$ **I-6.3**

$\mathbb{O}$ — наименьший элемент индуктивного частично упорядоченного множества **1.8**

$A \sim B$ — множество A эквивалентно множеству B **1.9**

$|A|$ — мощность множества A **1.9**

$\aleph_0$ — мощность счетного множества **1.9**

c — мощность континуума **1.9**

$\mathbf{0}$ — нуль относительно операции **2.1**

$\mathbf{1}$ — единица относительно операции **2.1**

a^{-1} — элемент, обратный элементу a при мультипликативной записи группы **2.2**

$-a$ — элемент, противоположный элементу a при аддитивной записи коммутативной группы **2.2**

S_n — симметрическая группа степени n (группа подстановок n-элементного множества) **2.2**

aH (Ha) — левый (правый) смежный класс подгруппы H (какой-либо группы G), определяемый элементом $a \in G$ **2.7**

G/H — фактор-группа группы G по нормальной подгруппе H **2.8**

$\mathbb{Z}_k$ — кольцо вычетов по модулю k **2.3**

$\mathbb{Z}_k^+$ — аддитивная группа вычетов по модулю k **2.3**

$\mathbb{Z}_p^*$ — мультипликативная группа вычетов по модулю p (для простого p) **2.3**

$\mathcal{B}$ — полукольцо $(\{0,1\}, +, \cdot, 0, 1)$ (двухэлементное полукольцо) **3.1**

$\mathcal{R}^+$ — полукольцо $(\mathbb{R}^+, \min, +, +\infty, 0)$ (полукольцо неотрицательных действительных чисел вместе с $+\infty$ с операциями взятия наименьшего элемента и сложения) **3.1**

$\mathcal{S}_A$ — полукольцо $(2^A, \cup, \cap, \varnothing, A)$ (полукольцо всех подмножеств множества A) **3.1**

$\mathcal{R}_A$ — полукольцо $(2^{A\times A}, \cup, \circ, \varnothing, \mathrm{id}_A)$ (полукольцо всех бинарных отношений на множестве A) **3.1**

$\mathcal{N}$ — полукольцо $(\mathbb{N}_0, +, \cdot, 0, 1)$ (полукольцо неотрицательных целых чисел с обычными операциями сложения и умножения) **3.1**

$\mathcal{S}_{[a,\,b]}$ — полукольцо $([a, b] \subset \mathbb{R}, \max, \min, a, b)$ (полукольцо чисел из отрезка числовой прямой с операциями взятия максимума и минимума из двух чисел) **3.1**

$\mathbf{Matr}(\mathcal{S})$ — множество всех матриц с элементами из полукольца $\mathcal{S}$ **3.3**

$\mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ — полукольцо квадратных матриц порядка n с элементами из полукольца $\mathcal{S}$ **3.3**

$\mathcal{D}_n$ — полукольцо всех делителей натурального числа n **3.4**

$\sum\limits_{n\in N} x_n$, $\sum x_n$ — точная верхняя грань бесконечной последовательности $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ элементов замкнутого полукольца **3.2**

a^* — итерация (замыкание) элемента a замкнутого полукольца (или полукольца с итерацией) **3.2**

$\mathbb{B}$ — двухэлементная булева алгебра (то же, что полукольцо $\mathcal{B}$) **3.4**

$\mathcal{A} = (A, \Omega, \Pi)$ — алгебраическая система с носителем A, сигнатурой, состоящей из множества операций Ω и множества отношений Π **4.1**

$\mathcal{A} = (A, \Omega)$ — алгебра с носителем A и сигнатурой (множеством операций) Ω **4.1**

$\mathcal{A} = (A, \Pi)$ — модель с носителем A и сигнатурой (множеством отношений) Π **4.1**

$[B]_\Omega$ — замыкание множества B по операциям сигнатуры Ω (Ω-замыкание множества B) **4.2**

$h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — гомоморфизм h алгебраической системы $\mathcal{A}$ в алгебраическую систему $\mathcal{B}$ **4.4**

$\operatorname{Ker} h$ — ядро гомоморфизма h одной алгебраической системы в другую **4.4**

$h(\mathcal{A})$ — гомоморфный образ алгебраической системы $\mathcal{A}$ (относительно гомоморфизма h) **4.4**

$\cong$ — символ изоморфизма алгебраических систем **4.4**

$\mathcal{A}/\rho$ — фактор-система алгебраической системы $\mathcal{A}$ по конгруэнции ρ **4.3**

$u \vdash\!\dashv_G v$ — вершина u соединена ребром с вершиной v в неориентированном графе G (имя графа часто опускается) **5.1**

$u \to_G v$ — существует дуга в ориентированном графе G с началом u и концом v (имя графа часто опускается) **5.1**

$u \models\!\dashv^*_G v$ — из вершины u (неориентированного графа G) достижима вершина v (имя графа часто опускается) **5.1**

$u \models\!\dashv^+ v$ — существует цепь ненулевой длины, соединяющая вершины u и v (неориентированного графа) **5.1**

$u \models\!\dashv^n v$ — существует цепь длины n, соединяющая вершины u и v (неориентированного графа) **5.1**

$u \Rightarrow^* v$ — из вершины u (некоторого ориентированного графа) достижима вершина v **5.1**

$u \Rightarrow^+ v$ — существует путь ненулевой длины из вершины u в вершину v (в ориентированном графе) **5.1**

$u \Rightarrow^n v$ — существует путь длины n из вершины u в вершину v (в ориентированном графе) **5.1**

$\mathrm{dg}(v)$ — степень вершины v (в неориентированном или ориентированном графе) **5.1**

$\mathrm{dg}^+(v)$ — полустепень исхода вершины v (в ориентированном графе) **5.1**

$\mathrm{dg}^-(v)$ — полустепень захода вершины v (в ориентированном графе) **5.1**

$\Gamma(v)$ — множество всех таких вершин u (ориентированнго или неориентированного графа), что $u \to v$ (для ориентированного графа) или $u \mapsto v$ (для неориентированного графа) **5.1**

$\Gamma^{-1}(v)$ — множество всех таких вершин u (ориентированного графа), что $u \to v$ **5.1**

$L[v]$ — список смежности вершины v (в неориентированном или ориентированном графе) **5.2**

$d(v)$, $h(v)$, $l(v)$ — глубина, высота и уровень соответственно узла v дерева **5.3**

h_T — высота дерева T **5.3**

$G_1 \cong G_2$ — графы G_1 и G_2 изоморфны **5.7**

$\overline{G}$ — дополнение графа G **5.7**

V^* — множество всех слов в алфавите V **7.1**

V^+ — множество всех непустых слов в алфавите V **7.1**

V^n — множество всех слов длины n в алфавите V **7.1**

λ — пустое слово **7.1**

$x(i)$ — i-я буква слова x **7.1**

$x(1)x(2)\ldots x(k)$ — побуквенная запись слова x **7.1**

$(u,\ x,\ v)$ — вхождение слова x в слово $y = uxv$ **7.1**

$u \sqsubseteq v$ — слово u входит в слово v **7.1**

$L_1 \cdot L_2$ — соединение (конкатенация) языков L_1 и L_2 **7.1**