ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие для вузов

Составители: Е.Г. Беломытцева, Е.Б. Туленко, А.Ф. Курин

Издательско-полиграфический центр
Воронежского государственного университета
2013

Утверждено научно-методическим советом физического факультета 3 апреля 2013 г., протокол № 4

Рецензент доцент, кандидат физ.-мат. наук Л.А. Минин

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре математической физики физического факультета Воронежского государственного университета.

Рекомендуется для студентов 2-го курса физического факультета дневной и вечерней форм обучения.

Для специальностей: 010801 – Радиофизика и электроника, 010803 – Микроэлектроника и полупроводниковые приборы, 010701 – Физика

Все явления природы следуют какому-нибудь закону максимума или минимума.

Леонард Эйлер

Введение

В настоящем учебно-методическом пособии изложены основы теории и предлагается пять практических заданий по курсу вариационного исчисления. Каждому заданию предшествует подробное решение типовых примеров. Приведена краткая биография основателя вариационного исчисления Леонарда Эйлера.

Содержание очень небольшого по объёму курса для студентов физических специальностей ориентировано прежде всего на изучение в дальнейшем вариационных принципов современной теоретической физики в курсах теоретической механики, электродинамики и квантовой механики. Этому, на наш взгляд, способствует также подробный анализ в нашем пособии задач, которые стимулировали развитие вариационного исчисления. Это древняя задача Дидоны (п. 1.17), задача И. Бернулли о брахистохроне (п. 1.10) и задачи о геодезических линиях (п. 1.14 и п. 1.15).

Знания и навыки, полученные ранее при изучении математического анализа и аналитической геометрии, Вам предстоит применить в вариационном исчислении, отчего эти знания станут ещё более глубокими, а вычисления - более искусными.

Мы надеемся, что эта новая для Вас математическая наука заинтересует Вас и окажет большую пользу при изучении физики. Возможно, кто-то из вас сохранит симпатию к ней на долгие годы, и основополагающие идеи вариационного исчисления станут источником новых полезных начинаний в Вашей деятельности. Ещё хотелось, чтобы в результате появилось чувство глубокого уважения и благодарности к создателям вариационного исчисления. Их имена найдете в тексте пособия.

Совсем недавно в курсе общей физики Вы изучали электромагнитные явления. Законы физики - ячейки огромного мозаичного полотна современной науки. Разнообразна цветовая гамма. Эта мозаика живая: ее структура по мере развития науки перестраивается. Случается, что от наступившей близости отдельных частей мозаики неожиданно возникают новые знания.

Яркую окраску имеет пятно, составленное из ячеек, принадлежащих учению об электричестве и магнетизме. В пособии Вы найдете интересные сведения из истории этой области физики, из жизни ученых, открывших законы электромагнетизма.

Успешной Вам работы!

1 Вариационное исчисление (теоретическая часть)

1.1 Функционал

В курсе математического анализа изучают функции. Для функции $z = f(x)$ характерна зависимость: числовому значению аргумента x соответствует числовое значение функции. Например, возьмем функцию $z = \sin x$. Тогда при $x = 0,\ x = \pi/4,\ x = \pi/2,\ x = \pi, \dots$ соответственно получаем $z = \sin 0 = 0,\ z = \sin \pi/4 = \sqrt{2}/2,\ z = \sin \pi/2 = 1,\ z = \sin \pi = 0, \dots$.

Однако имеются геометрические и физические задачи, которые приводят к величинам особого рода, называемым функционалами.

Функционалом называется переменная величина, значения которой определяются выбором одной или нескольких функций. Таким образом, аргументом функционала является функция $y(x)$, и ей соответствует числовое значение функционала.

Например, функционалом является длина дуги l кривой, соединяющей две заданные точки. Известно, что в случае кривой $y(x)$ на плоскости (рис.1)

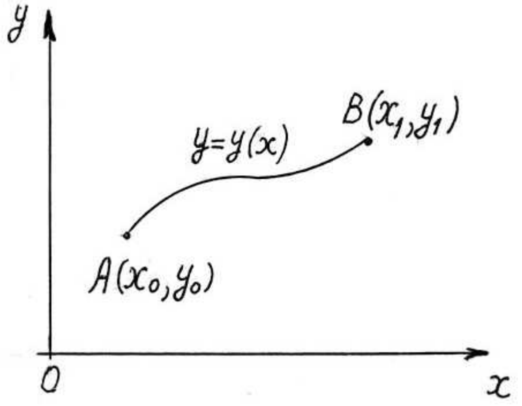

Рис. 1

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

Если точки A и B фиксированные, то разные функции $y(x)$ приводят к различным значениям l.

Площадь S некоторой поверхности также является функционалом, так как она определяется выбором поверхности, то есть выбором функции $z(x, y)$, входящей в уравнение поверхности $z = z(x, y)$. Мы знаем, что

$$S = \iint_D \sqrt{1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2}\, dxdy,$$

где D - проекция поверхности на плоскость xOy.

Известные из курса общей физики моменты инерции, статические моменты, координаты центра тяжести некоторой однородной кривой или поверхности также являются функционалами, так как их значения определяются выбором кривой или поверхности, то есть выбором функций, входящих в уравнение этой кривой или поверхности.

Во всех этих примерах мы имеем характерную для функционалов зависимость: функции соответствует число.

1.2 Вариационные задачи

Вариационное исчисление - раздел математики, в котором изучаются методы, позволяющие находить максимальные и минимальные значения функционалов, то есть экстремумы функционалов.

Задачи, в которых исследуется функционал на экстремум, называются *вариационными задачами.*

Приведем примеры вариационных задач.

1. Исторически первой задачей, известной в глубокой древности и отнесенной впоследствии к задачам вариационного исчисления, явилась так называемая задача Дидоны (по латыни - Дидо, ударение на о!). Согласно легенде, Дидона - царица Финикии, одного из государств Древней Греции, после смерти мужа, преследуемая царем соседнего государства, бежала в Северную Африку и попросила у местного предводителя Ярба участок земли, который можно охватить шкурой вола. Получив согласие на столь ничтожную просьбу, она на глазах у изумленных зрителей разрезала шкуру на узкие ремешки и, связав их друг с другом, охватила полученной лентой изрядный участок. Развернув на нем строительство, она основала на этом участке знаменитый в древности город Карфаген. Эти события легенда относит к 825 году до новой эры. Основание Карфагена а также другие яркие события в жизни Дидоны (любовь к Энею - женатому человеку, его измена, трагическая смерть - она бросилась на меч) сделали ее образ привлекательным для многих литераторов (несколько трагедий и в том числе "Энеида"римского поэта Вергилия), композиторов (не менее девяти опер, среди авторов назовем таких известных, как Генри Пёрселл, Алессандро Скарлатти, Гектор Берлиоз), художников (среди них гениальные Питер Пауль Рубенс, Джованни Баттиста Тьеполо, Джошуа Рейнолдс, Уильям Тёрнер). В честь Дидоны назван астероид *Дидона*, открытый в 1879 году (напомним, что астероиды это малые планеты, обращающиеся вокруг Солнца, в основном между орбитами Марса и Юпитера).

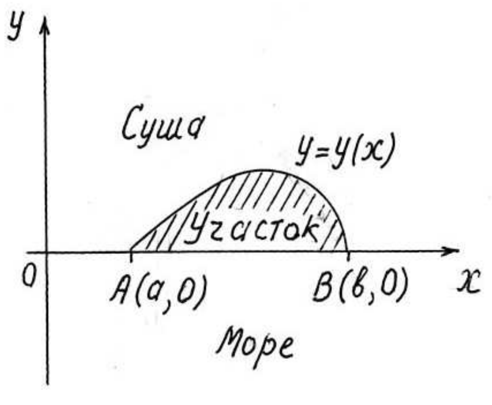

Рис. 2

Уже античные ученые заинтересовались математической стороной этой легенды: как надо расположить узкую ленту, чтобы охваченный ею участок имел наибольшую площадь?

Рассмотрим один из вариантов: пусть концы ленты расположены в заданных точках A и B на берегу моря (рис. 2). Выберем оси координат. Тогда задача сводится к определению максимума площади участка. Известно, что площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b y(x)\,dx,$$

где $y = y(x)$ - уравнение сухопутной границы участка, при заданном значении длины ленты, то есть интеграла

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\;dx$$

и заданных краевых значениях

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0.$$

В п. 1.17 мы вернемся к этой задаче.

Вариационные задачи такого рода называются *изопериметрическими* от греческих слов *isos* - равный (одинаковый) и *perimetros* - граница плоской фигуры (длина границы плоской фигуры).

2. Другая знаменитая задача (задача о *брахистохроне*), которая привела к зарождению методов вариационного исчисления, была предложена в 1696 г. Иоганном Бернулли (годы жизни 1667-1748), который опубликовал заметку с интригующим названием "Новая задача, к решению которой приглашаются математики". Приглашение было принято. Задачу решили различными способами Бернулли Якоб (1654-1705), Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716), Лопиталь де Гийом Франсуа (1661-1704) и Ньютон Исаак (1643-1727).

Задача состоит в следующем. Под влиянием тяготения без начальной скорости и без трения материальная точка массы m скатывается по некоторой линии $y(x)$ из заданной точки A в заданную точку B за некоторое время T (рис. 3). Спрашивается, как выбрать траекторию движения $y(x)$ (например, выгнуть проволоку с надетой на нее бусинкой), чтобы T было минимально возможным.

Такую кривую называют брахистохроной (от греческих слов $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau\o\varsigma$ - кратчайший и $\chi\rho\o\nu\o\varsigma$ - время или *brachistos + chronos*).

Составим функционал. Величина мгновенной скорости движения по дуге l определяется выражением

$$v = \frac{dl}{dt}, \tag{a}$$

где dl - дифференциал длины дуги

$$dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}\;dx. \tag{b}$$

Для материальной точки массы m справедлив закон сохранения энергии (см. рис. 3)

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} + mg(h - y),$$

откуда при начальной скорости $v_0 = 0$ следует формула для скорости

$$v = \sqrt{2gy}. \tag{c}$$

Подставляя v и dl (b) в выражение (a), получаем

$$dt = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}\;dx. \tag{d}$$

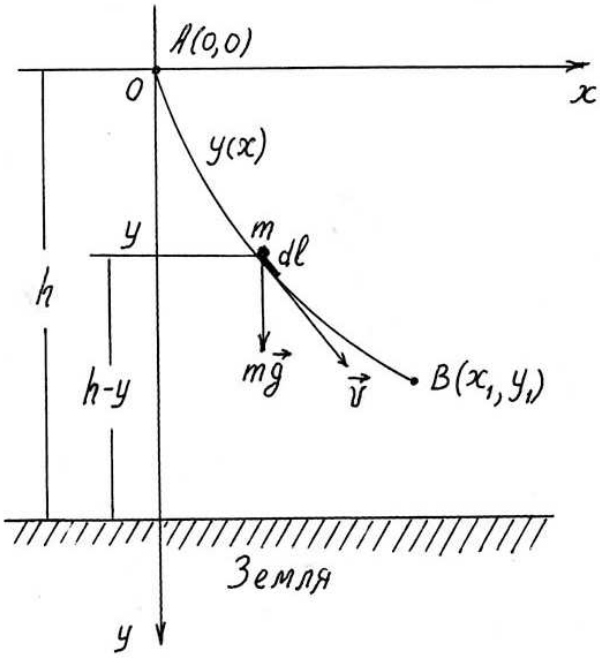

Рис. 3

Интегрирование дает время скатывания

$$T[y(x)] = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\, dx. \tag{1}$$

Это выражение является функционалом, поскольку при разных траекториях $y(x)$ будем иметь различные значения T.

Вариационная задача по определению минимума T (1) будет решена ниже в п. 1.10.

Заметим, что если считать скорость v функцией произвольно зависящей от x, y, y', то вместо формул (c) и (d) будем иметь $v = v(x, y, y')$ и

$$dt = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y,y')}\, dx$$

соответственно. Тогда получим функционал вида

$$T[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y,y')}\, dx. \tag{1$'$}$$

3. Укажем еще на задачу о *геодезических линиях.* Требуется определить линию наименьшей длины, соединяющую две заданные точки M и N на поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$ (рис. 4). Такие кратчайшие линии называют *геодезическими.*

Из курса математического анализа известно, что длина дуги l в трехмерном пространстве определяется формулой

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\, dx$$

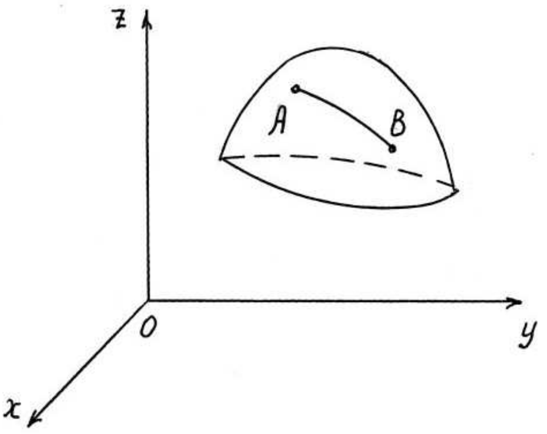

Рис. 4

причем функции y(x), z(x) подчинены условию $\varphi(x, y, z) = 0$. Здесь мы имеем типичную вариационную задачу на так называемый *условный экстремум* (см. п.12 и п.13). Эта задача была решена в 1698 г. Якобом Бернулли, но общий метод решения задач такого типа получен позже в работах Леонарда Эйлера (1707-1783) и Жозефа Луи Лагранжа (1736-1813).

4. Уже в курсе теоретической механики вы познакомитесь с функционалом, который имеет название *действие*. В частности, для материальной точки массы m при одномерном ее движении по оси Ox под влиянием силы $f(t, x)$ действие имеет вид

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x, \dot{x}) dt,$$

где t_0 и t_1 - начальный и конечный моменты времени, точка означает дифференцирование по t. Функция L называется функцией Лагранжа. Она равна разности кинетической T и потенциальной U энергий материальной точки

$$L(t, x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - U(t, x),$$

причем

$$T(\dot{x}) = \frac{m(\dot{x})^2}{2}, \qquad U(t, x) = -\int_{x_0}^{x} f(t, x) dx,$$

Здесь x_0 - начальное положение материальной точки.

Вариационная задача основана на вариационном принципе Гамильтона (*принцип наименьшего действия*), являющимся одним из наиболее универсальных принципов современного естествознания. Решение вариационной задачи заключается в определении закона движения $x(t)$ материальной точки. При этом в ходе решения получают хорошо известное уравнение Ньютона

$$m\ddot{x} = f(t, x).$$

Конечно, в нашей задаче закон $x(t)$ можно получить непосредственно из этого уравнения. Однако вариационные задачи открывают новые возможности решения физических задач особенно в более сложных случаях, когда рассматривают трехмерное движение систем частиц при наличии связей.

К указанной проблеме теоретической механики мы вернемся в конце п. 1.8, где будет показано, как из функционала получают уравнение Ньютона.

****

О НОБЕЛЕВСКОЙ ПРЕМИИ И ЕЕ ЛАУРЕАТАХ-ФИЗИКАХ

Каждый ученый физик, химик, физиолог или медик, сделавший открытие в своей области, мечтает стать лауреатом Нобелевской премии. Эта премия появилась в результате завещания Альфреда Нобеля (1833-1896) - шведского инженера (изобрел взрывчатое вещество динамит) и промышленника. Все свое состояние он завещал израсходовать на награды ученым и литераторам, внесшим крупный вклад в прогресс человечества, а также общественным деятелям, способствовавшим укреплению мира между народами.

Завещание А. Нобеля можно прочитать в Приложени 2.

Несколько фактов из его жизни. В 1842 году отец Альфреда Нобеля Эммануэль Нобель с женой и тремя сыновьями Робертом, Людвигом и Альфредом переселились в Петербург. Четвертый сын Эмиль родился в России. Несколько крупных фирм, созданных отцом и братьями Нобель, занимались машиностроением и производством взрывчатых веществ. Роберт и Людвиг основали также акционерное общество по добыче нефти в Баку.

В 1864 году при взрыве на заводе в Петербурге погиб Эмиль.

В 1867 году Альфред Нобель получил патент на динамит и начал его производство.

Умер он от болезни сердца.

См. далее после п. 1.3.

****

1.3 Непрерывность, линейность функционала

Как увидим ниже, методы решения вариационных задач, то есть задач на исследование функционалов на максимум и минимум, сходны с методами исследования на максимум и минимум функций. Поэтому при изучении функционалов будем вспоминать известные из курса математического анализа аналогичные понятия и сходные теоремы для функций.

$\boxed{\text{О функции}}$ Переменная величина z называется *функцией* переменной величины x, что обозначается как $z = f(x)$, если каждому значению x из некоторой области изменения x соответствует значение z, то есть имеет место соответствие: числу x соответствует число z.

$\boxed{\textit{О функционале}}$ Переменная величина v называется *функционалом*, зависящим от функции $y(x)$, что обозначается как $v[y(x)]$, если каждой функции $y(x)$ из некоторого класса функций соответствует значение v, то есть имеет место соответствие: функции $y(x)$ соответствует число v.

$\boxed{\text{О функции}}$ *Приращением* Δx аргумента x функции $f(x)$ называется разность между двумя значениями этой переменной $\Delta x = x_1 - x$. Если x - независимая переменная, то дифференциал x совпадает с приращением $dx = \Delta x$.

$\boxed{\textit{О функционале}}$ *Приращением* (или *вариацией*) δy аргумента $y(x)$ функционала $v[y(x)]$ называется разность между двумя функциями $\delta y = y_1(x) - y(x)$. При этом предполагается, что $y(x)$ меняется произвольно в некотором классе функций.

$\boxed{\text{О функции}}$ Функция $f(x)$ называется *непрерывной*, если малому изменению x соответствует малое изменение функции $f(x)$.

$\boxed{\textit{О функционале}}$ Функционал $v[y(x)]$ называется *непрерывным*, если малому изменению $y(x)$ соответствует малое изменение функционала $v[y(x)]$.

Сделаем здесь некоторые уточнения. Изменение $y(x)$ означает, что в качестве аргумента функционала вместо функции $y(x)$ берется другая функция $y_1(x)$. При этом возникает вопрос, когда это изменение считать малым, или, что то же самое, какие кривые $y(x)$ и $y_1(x)$ считаются мало отличающимися или близкими.

В разных проблемах вариационного исчисления требуется близость, имеющая различные количественные оценки. Так, самый простой вариант близости предполагает близость функций $y(x)$ и $y_1(x)$ по своим ординатам при всех значениях x, для которых задаются эти функции, то есть считается малым модуль разности $|y_1(x) - y(x)|$. В этом случае говорят, что функции *близки в смысле близости нулевого порядка.*

Если выполняются условия: малы модули $|y_1(x) - y(x)|$ и $|y_1'(x) - y'(x)|$, то есть имеет место близость функций не только по ординатам, но и по направлениям касательных в соответствующих точках x, то функции считаются *близкими в смысле близости первого порядка.*

Аналогично, кривые $y(x)$ и $y_1(x)$ являются *близкими в смысле близости k-го порядка*, если малы модули $|y_1(x) - y(x)|$, $|y_1'(x) - y'(x)|$,...,$|y_1^{(k)}(x) - y^{(k)}(x)|$.

Из этих определений следует, что если кривые близки в смысле близости k-го порядка, то они близки в смысле близости любого меньшего порядка.

На рис. 5 изображены кривые близкие в смысле близости нулевого порядка, но не в смысле близости первого порядка, так как ординаты у них близки, а направления касательных не близки. На рис. 6 изображены кривые близкие в смысле близости первого порядка.

Теперь уточним понятие непрерывности функционала. Предварительно напомним определение непрерывности функции.

$\boxed{\text{О функции}}$ Функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$, если для любого положи-

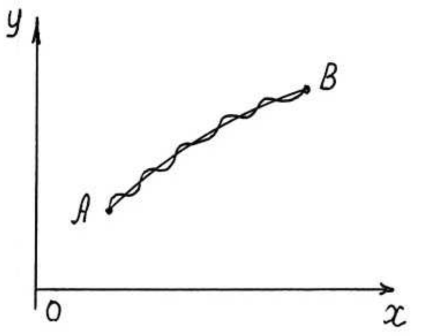

Рис. 5

тельного ε можно подобрать $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. При этом подразумевается, что x принимает значения, в которых функция $f(x)$ определена.

О функционале Функционал $v[y(x)]$ непрерывен при $y = y_0(x)$ в смысле близости k-го порядка, если для любого положительного ε можно подобрать $\delta > 0$ такое, что $|v[y_0(x)] - v[y(x)]| < \varepsilon$ при $|y_0(x) - y(x)| < \delta$, $|y_0'(x) - y'(x)| < \delta$,...,$|y_0^{(k)}(x) - y^{(k)}(x)| < \delta$. Здесь подразумевается, что функция $y(x)$ берется из класса функций, при которых функционал $v[y(x)]$ определен.

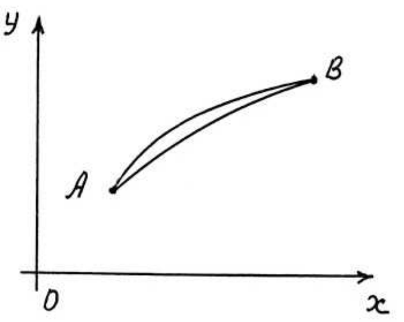

Рис. 6

Определим *расстояние* $\rho(y_1, y)$ *между кривыми* $y = y_1(x)$ и $y(x)$ $(x_0 \le x \le x_1)$ как

$$\rho(y_1, y) = \max_{x_0 \le x \le x_1} |y_1(x) - y(x)|.$$

Малость расстояния $\rho(y_1, y)$ означает близость функций в смысле близости нулевого порядка.

Расстояние между кривыми близкими в смысле близости k - го порядка определяется как

$$\rho(y_1, y) = \sum_{i=0}^{k} \max_{x_0 \le x \le x_1} |y_1^{(i)}(x) - y^{(i)}(x)|.$$

Здесь предполагается, что y_1 и y имеют непрерывные производные до k - го порядка.

Перейдем теперь к определению *линейного функционала.* Напомним сначала определение линейной функции.

$\boxed{\text{О функции}}$ Линейной функцией называется функция $f(x)$, удовлетворяющая двум условиям:
1) $f(Cx) = Cf(x)$, где C - произвольная постоянная,
2) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
Линейная функция одной переменной имеет вид

$$z = kx,$$

где k - постоянная.

$\boxed{\textit{О функционале}}$ *Линейным функционалом* называется функционал $v[y(x)]$, удовлетворяющий двум условиям
1) $v[Cy(x)] = Cv[y(x)]$, где C - произвольная постоянная,
2) $v[y_1(x) + y_2(x)] = v[y_1(x)] + v[y_2(x)]$.
Примером линейного функционала является

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} [p(x)y + q(x)y\prime]\, dx.$$

****

Первым нобелевским лауреатом по физике стал в 1901 году Вильгельм Конрад Рентген за открытие лучей, которые носят его имя.

****

Нобелевскую премию получили 17 человек из Кавендишской лаборатории (в английском городе Кембридже в 70 километрах от Лондона), организованной великим Джеймсом Клерком Максвеллом на деньги мецената герцога Вильяма Кавендиша (потомка известного ученого Генри Кавендиша), выделившего 6300 фунтов стерлингов на строительство лаборатории. Среди этих 17 были ученые, которые сделали открытия непосредственно в стенах лаборатории, а также те, кто получили здесь на переднем крае науки навыки экспериментального искусства и глубокие знания физической теории. И это за время, когда Кавендишской лабораторией руководили один за другим Джозеф Джон Томсон (Дж. Дж. Томсон) с 1884 по 1919 год, Эрнест Резерфорд (с 1919 по 1937 год) и Уильям Лоуренс Брэгг (с 1938 по 1953 год).

****

Каждый из этих руководителей был нобелевским лауреатом. Дж. Дж. Томсон (1906 год) открыл электрон в 1897 году. Интересно, что его сын Джорж Паджет Томсон тоже лауреат Нобелевской премии (1937 год) за открытие явления интерференции при отражении электронов от кристаллов. Далее, Эрнест Резерфорд получил премию в 1908 году за исследования по расщеплению элементов и химии радиоактивных веществ. Уильям Лоуренс Брэгг вместе с отцом Уильямом Генри Брэггом стали нобелевскими лауреатами в 1915 году за изучение кристаллов с помощью рентгеновских лучей.

****

5 учеников выдающегося физика и организатора науки, лауреата Нобелевской премии Дж. Дж. Томсона, о котором уже упоминалось, стали нобелевскими лауреатами. Это

Эрнест Резерфорд, Уильям Генри Брэгг (о них см. выше), а также

Чарлз Баркла (1917 год) за открытие характеристического рентгеновского излучения,

Чарлз Томсон Рис Вильсон (1927 год) за создание метода, который позволяет наблюдать следы заряженных частиц с помощью конденсации пара (камера Вильсона) и

Оуэн Уилланс Ричардсон (1929 год) за исследование явлений термоэмиссии (закон Ричардсона).

****

А вот нобелевский лауреат Поль Дирак (премия 1933 года за разработку новых, перспективных форм атомной теории) не имел ни одного аспиранта.

****

Интересно, что при Э. Резерфорде в Кавендишской лаборатории с 1921 по 1934 год успешно трудился молодой тогда Петр Леонидович Капица - нобелевский лауреат 1978 года за открытия и основополагающие изобретения в области низких температур.

См далее после п. 1.4.

****

1.4 Вариация функционала

Понятие вариации функционала в вариационном исчислении играет ту же роль, что понятие дифференциала при изучении функций в математическом анализе.

Рассмотрим сначала пример. Возьмем функционал

$$v[y(x)] = \int\limits_a^b y^2\,dx. \tag{2}$$

Пусть функция $y(x)$, от которой зависит его значение, сначала совпадает с некоторой функцией $\tilde{y}(x)$, а затем мы перешли к некоторой другой, близкой функции $\tilde{y}(x) + \delta y(x)$, где $\delta y(x)$ это вариация функции $y(x)$, то есть произвольная функция, значения которой малы, близки нулю. Она прибавляется к исходной функции $\tilde{y}(x)$ для получения новой, проварьированной функции $\tilde{y}(x) + \delta y(x)$ (см. рис. 7). При переходе от $\tilde{y}(x)$ к $\tilde{y}(x) + \delta y(x)$ функционал получает приращение

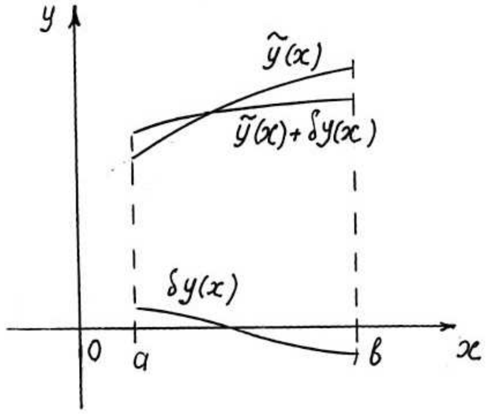

Рис. 7

$$\begin{aligned}\Delta v = v[\tilde{y}(x) + \delta y(x)] - v[\tilde{y}(x)] &= \int\limits_a^b (\tilde{y} + \delta y)^2\,dx - \int\limits_a^b \tilde{y}^2\,dx = \\ &= 2\int\limits_a^b \tilde{y}(x)\delta y(x)\,dx + \int\limits_a^b [\delta y(x)]^2\,dx.\end{aligned} \tag{3}$$

Зафиксируем теперь функцию $\tilde{y}(x)$, а функцию $\delta y(x)$ будем считать произвольной. Видно из формулы (3), что тогда приращение функционала Δv состоит из двух частей, каждая из которых представляет собой функционал относительно вариации $\delta y = y - \tilde{y}$. Первая часть

$$2\int\limits_a^b \tilde{y}(x)\delta y(x)\,dx, \tag{4}$$

обладает свойством линейности по δy, то есть это линейный функционал. Вторая часть

$$\int\limits_a^b [\delta y(x)]^2\,dx$$

при малых δy имеет высший порядок малости.

Таким образом, выражение (4) представляет собой главную, линейную по δy часть приращения (3) функционала (2) при переходе от $\tilde{y}(x)$ к $\tilde{y}(x) + \delta y(x)$. Выражение (4) называется *вариацией* функционала (2). Вариация обозначается как δv. В нашем примере

$$\delta v = \delta \int\limits_a^b y^2\,dx = 2\int\limits_a^b y(x)\delta y(x)\,dx.$$

Заметим, что поскольку функция $\tilde{y}(x)$ считалась произвольной, мы заменим ее обозначение на $y(x)$.

В конкретных случаях вариацию функционала можно вычислить с помощью формулы Тейлора.

Пусть функционал имеет вид

$$v[y] = \int\limits_a^b F(x,y)\,dx, \tag{5}$$

где y является функцией x, $y = y(x)$. Тогда

$$\Delta v = \int\limits_a^b F(x, y(x) + \delta y(x))\,dx - \int\limits_a^b F(x, y(x))\,dx =$$
$$= \int\limits_a^b [F(x, y(x)) + F'_y(x, y(x))\delta y(x) + \text{члены высшего порядка малости}]dx -$$
$$- \int\limits_a^b F(x, y(x))\,dx.$$

Оставляя линейную по δy часть приращения, получаем вариацию функционала

$$\delta v = \int\limits_a^b F'_y(x,y)\delta y\,dx.$$

Рассмотрим еще функционал

$$v[y] = \int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx, \tag{6}$$

Приращение Δv функционала v с помощью формулы Тейлора для функции двух переменных записывается как

$$\Delta v = v[y+\delta y] - v[y] =$$
$$= \int\limits_a^b F[x,\, y(x) + \delta y(x),\, (y(x) + \delta y(x))']\,dx - \int\limits_a^b F[x,\, y(x),\, y'(x)]\,dx =$$
$$= \int\limits_a^b [F(x,y,y') + F'_y(x,y,y')\delta y + F'_{y'}(x,y,y')(\delta y)' + \text{члены высшего порядка малости}]dx -$$
$$- \int\limits_a^b F(x,y,y')\,dx =$$
$$= \int\limits_a^b [F'_y(x,y,y')\delta y + F'_{y'}(x,y,y')(\delta y)' + \text{члены высшего порядка малости}]dx.$$

Отсюда следует вариация функционала (6)

$$\delta v[y(x)] = \int\limits_a^b [F'_y(x,y,y')\delta y + F'_{y'}(x,y,y')(\delta y)']\,dx. \tag{7}$$

При преобразованиях использовалось соотношение $(y+\delta y)' = y' + (\delta y)'$.

Итак, мы убедились, что понятия дифференциала функции и вариации функционала аналогичны. Вспомним определение дифференциала функции и дадим определение вариации функционала.

$\boxed{\text{О функции}}$ Возьмем функцию $z = f(x)$.

Если приращение функции $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ может быть представлено в виде

$$\Delta f = A(x)\Delta x + o(\Delta x),$$

где $A(x)$ не зависит от Δx, а $o(\Delta x)$ является функцией переменной Δx и при $\Delta x \to 0$ имеет более высокий порядок малости, чем Δx, то функция $z = f(x)$ называется дифференцируемой, а линейная по Δx часть приращения $A(x)\Delta x$ называется *дифференциалом функции* и обозначается df. Разделив Δf на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $A(x) = f'(x)$, и, следовательно,

$$df = f'(x)\,\Delta x.$$

$\boxed{\textit{О функционале}}$ Для понимания определения, приведенного ниже, полезно еще раз обратиться к описанному выше анализу функционалов с помощью формулы Тейлора.

Возьмем функционал $v[y(x)]$.

Если приращение функционала $\Delta v = v[y(x)+\delta y] - v[y(x)]$ можно представить в виде

$$\Delta v = L[y(x), \delta y] + o[\delta y], \tag{8}$$

где $L[y(x), \delta y]$ - линейная по δy часть приращения, а величина $o[\delta y]$ при расстоянии $\rho = \max\limits_x |\delta y| \to 0$ имеет более высокий порядок малости, чем δy, то линейная по δy часть приращения функционала $L[y(x), \delta y]$ называется *вариацией функционала* и обозначается δv.

Итак,

$$\delta v = L[y(x), \delta y]. \tag{9}$$

****

Среди нобелевских лауреатов рекорд молодости принадлежит Уильяму Лоуренсу Брэггу, который получил премию в 25-летнем возрасте вместе с отцом (о них мы уже упоминали).

****

П.Л. Капица ждал Нобелевскую премию почти полвека. И в этом он не является рекордсменом.

****

В Воронеже родился Нобелевские лауреат писатель Иван Алексеевич Бунин (1870-1953) - премия присуждена в 1933 году “за строгий артистический талант, с которым он воссоздал в литературной прозе типичный русский характер”.

В городе Усмань Воронежской губернии (теперь Липецкая область)родился физик Николай Геннадиевич Басов (1922-2001). Родители Н.Г. Басова переехали в Воронеж, когда мальчику исполнилось 5 лет. Премия присуждена в 1964 году (совместно с Александром Михайловичем Прохоровым и американцем Чарлзом Хардом Таунсом) за фундаментальные работы в области квантовой электроники, которые привели к созданию генераторов и усилителей нового типа - мазеров и лазеров.

В селе Новая Чигла Воронежской области родился Павел Алексеевич Черенков (1904-1990). Ему совместно с Игорем Евгеньевичем Таммом и Ильей Михайловичем Франком присуждена Нобелевская премия в 1958 году за открытие, объяснение и использование эффекта, носящего имя Черенкова (эффект Вавилова-Черенкова). П.А. Черенков окончил Воронежский университет.

****

Всего из нашей страны 12 физиков стали нобелевскими лауреатами. Кроме П.Л. Капицы, П.А. Черенкова, И.Е. Тамма, И.М. Франка, А.М. Прохорова, Н.Г. Басова, это -

Лев Давыдович Ландау (1908-1968), премия присуждена в 1962 году за пионерскую теорию конденсированных сред, прежде всего жидкого гелия,

Жорес Иванович Алферов (род. в 1930 году) - в 2000 году за разработку полупроводниковых гетероструктур, используемых в высокочастотных схемах и оптоэлектронике,

Алексей Алексеевич Абрикосов (род. в 1928 году) и Виталий Лазаревич Гинзбург (1916-2009), премия 2003 года за создание теории сверхпроводимости второго рода и теории сверхтекучести жидкого гелия - 3,

Новоселов Константин Сергеевич (род. в 1974 году) и Гейм Андрей Константинович (род. в 1958 году, с 1990 года работает в Западной Европе) - нобелевские лауреаты 2010 года “ за новаторские эксперименты по исследованию двумерного материала графена”.

****

1.5 Формула для вычисления вариации функционала

В п. 1.4 показано, что вариацию функционала δv можно получить, выделяя линейную по δy часть приращения функционала с помощью формулы Тейлора. Однако существует другой способ вычисления вариации δv, основанный на использовании вспомогательного параметра.

Сначала рассмотрим такой подход для вычисления дифференциала функции $f(x)$.

$\boxed{\text{О функции}}$ Приращение аргумента x возьмем в виде $x+\alpha\Delta x$, где будем считать x и Δx фиксированными величинами, а параметр α с изменяющимися значениями, причем $0 \leq \alpha \leq 1$. Тогда значение функции $f(x+\alpha\Delta x)$ при $\alpha = 0$ будет исходным $f(x)$, а при $\alpha = 1$ приращенным $f(x+\Delta x)$. Теперь вычислим производную от $f(x+\alpha\Delta x)$ по α при $\alpha = 0$, используя правило дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x+\alpha\Delta x)\bigg|_{\alpha=0} = f'(x+\alpha\Delta x)\frac{\partial(x+\alpha\Delta x)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0} = f'(x)\Delta x = f'(x)dx = df(x).$$

Итак, дифференциал функции равен

$$df(x) = \frac{\partial}{\partial\alpha}f(x+\alpha\Delta x)\bigg|_{\alpha=0}.$$

Например, вычислим $d\sin x$ и $d\,e^{x^2}$:

$$d\sin x = \frac{\partial}{\partial\alpha}\sin(x+\alpha\Delta x)\bigg|_{\alpha=0} = \cos(x+\alpha\Delta x)|_{\alpha=0}\,\Delta x = \cos x\,dx$$

и

$$d\,e^{x^2} = \frac{\partial}{\partial\alpha}e^{(x+\alpha\Delta x)^2}\bigg|_{\alpha=0} = e^{(x+\alpha\Delta x)^2}2(x+\alpha\Delta x)\big|_{\alpha=0}\,\Delta x = 2x\,e^{x^2}\,dx.$$

Получили известные формулы.

Рассмотрим теперь функционал $v[y(x)]$.

$\boxed{\textit{О функционале}}$ Приращенное значение функционала с использованием параметра α имеет вид $v[y(x)+\alpha\delta y]$. Здесь $y(x)$ и δy -фиксированные функции, а α - параметр с изменяющимися значениями, $0\le\alpha\le 1$. Используя формулу (8), вычислим частную производную по α от $v[y(x)+\alpha\delta y]$ при $\alpha=0$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}v[y(x)+\alpha\delta y]\bigg|_{\alpha=0} = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\Delta v}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{L[y,\alpha\delta y]+o[\alpha\delta y]}{\alpha} =$$
$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{L[y,\alpha\delta y]}{\alpha} + \lim_{\alpha\to 0}\frac{o[\alpha\delta y]}{\alpha} = L[y,\delta y] = \delta v,$$

так как в силу линейности

$$L[y,\alpha\delta y] = \alpha L[y,\delta y]$$

и

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{o[\alpha\delta y]}{\alpha} = 0,$$

поскольку, как мы знаем из определения вариации функционала, при $\alpha\delta y\to 0$ величина $o[\alpha\delta y]$ имеет порядок малости выше первого по $\alpha\delta y$ и, значит, по α.

Итак, доказана формула для вариации функционала

$$\delta v = \frac{\partial}{\partial\alpha}v[y(x)+\alpha\delta y]\bigg|_{\alpha=0}. \tag{10}$$

Заметим, что анализ различных функционалов показал, что применение этой формулы для вычисления вариации функционала имеет более широкие возможности, чем использование формулы Тейлора, так как существуют функционалы, из приращения которых нельзя выделить главной линейной части путем разложения в ряд, как в п. 1.4, однако вариация, установленная по формуле (10), существует.

****

О ФИЗИЧЕСКОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ И ЕГО ТВОРЦАХ

Наше воображение поражает тот факт, что все колоссальные практически важные достижения современного человека, в которых используются электрические, магнитные и также электромагнитные явления (это *радио-, телефонная, телеграфная, мобильная связь, телевидение, радиолокация, радионавигация, ускорители заряженных частиц, микроволновые печи, видеомагнитофоны, компьютеры, электрическое освещение, стиральные машины, электронные устройства автомобиля, самолета, ракеты, электрические двигатели, установленные на различных механизмах, генераторы на электростанциях и т. д.*) стали возможными в результате открытий, сделанных физиками в лабораторных экспериментах на разработанных и изготовленных ими приборах и устройствах при том, что первоначально людям были известны всего два природных явления и к тому же со слабой энергетикой. Это свойство янтаря притягивать легкие предметы и способность особого минерала - железной руды притягивать железные предметы. Слово *электричество* происходит от греческого слова *электрон*, что значит янтарь. Слово *магнит* происходит от названия греческого города Магнесия, возле которого находились залежи железной руды. Как выяснилось потом, природное явление - молния тоже является электрическим явлением, однако она была неуловимой и, следовательно, недоступной для исследователей.

Природа скрывала от человека все разнообразные возможности электричества, однако наделила эти два явления замечательным свойством вызывать интерес. Интерес порождал вопросы. Ответы на них требовали экспериментальной проверки. Так появились первые открытия.

Ничего подобного природой не предусмотрено в гравитации.

****

Начиная с изучения указанных двух природных эффектов, все впечатляющие результаты в области электромагнитных явлений получены трудом исследователей.

Перечислим коротко основные достижения.

Уже в XII веке в Европе был известен компас. Изучался земной магнетизм.

Было установлено, что кроме янтаря электрические свойства проявляют алмаз, хрусталь, стекло, сера и другие вещества.

Было открыто явление электропроводности и все тела были разделены на проводники и непроводники.

Следующий важный шаг в изучении электрических явлений - изобретение лейденской банки (по названию немецкого города Лейдена). Теперь физики могли получать значительные электрические заряды и экспериментировать с ними.

Было установлено физиологическое действие электрического заряда - человек ощущал удар, покалывание и жжение. Опыты с электричеством стали модными.

Была открыта электрическая природа молнии.

Французский физик Шарль Кулон (1736-1806) измерил силу, действующую между зарядами (закон Кулона).

В 1800 году итальянец Алессандро Вольта (1745-1827) изготовил первую электрическую батарею.

В 1819 году датский физик Ханс Христиан Эрстед (1777-1851) обнаружил действие тока на магнитную стрелку, что привело к возникновению новой области физики - электромагнетизма.

В 1820 году установлен закон Био-Савара.

В 1826 - закон Ома.

Закон электромагнитной индукции открыт Майклом Фарадеем (1791-1867) в 1831 году в итоге почти десятилетних настойчивых исследований. Он ввел в науку понятие электрических и магнитных силовых линий.

В 1860-1865 годы английский физик Джеймс Клерк Максвелл (1831-1879) создал теорию электромагнитного поля (уравнения Максвелла) и предсказал существование электромагнитных волн.

В 1888 году немецкий физик Генрих Рудольф Герц (1857-1894) экспериментально доказал существование электромагнитных волн.

Наступила эра активного использования законов электромагнетизма в практических целях.

==

А. Вспомните закон Кулона.

———————

Б. Что наблюдал Х. Эрстед в своем знаменитом опыте?

———————

В. Вспомните закон Био-Савара для прямолинейного тока.

———————

Г. Дайте определение силовой линии.

———————

Д. Напишите закон Ома для

1) участка цепи постоянного тока,
2) замкнутой цепи постоянного тока,
3) участка цепи, содержащей индуктивность,
4) участка цепи, содержащей емкость.

==

См. далее после п. 1.6.

****

1.6 Максимумы и минимумы функционалов. Необходимое условие экстремума функционала

Дадим определение максимума и минимума функционала.

Функционал $v[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ *максимума*, если значения функционала на любой близкой к $y = y_0(x)$ кривой не больше, чем $v[y_0(x)]$, то есть $\Delta v = v[y(x)] - v[y_0(x)] \le 0$.

Если $\Delta v \le 0$, причем $\Delta v = 0$ только при $y(x) = y_0(x)$, то говорят что на кривой $y = y_0(x)$ достигается *строгий максимум*.

Функционал $v[y(x)]$ достигает на кривой $y = y_0(x)$ *минимума*, если значения функционала на любой близкой к $y = y_0(x)$ кривой не меньше, чем $v[y_0(x)]$, то есть $\Delta v = v[y(x)] - v[y_0(x)] \ge 0$.

Если $\Delta v \ge 0$, причем $\Delta v = 0$ только при $y(x) = y_0(x)$, то говорят что на кривой $y = y_0(x)$ достигается *строгий минимум*.

Если функционал $v[y(x)]$ достигает на кривой $y_0(x)$ максимума или минимума по отношению ко всем кривым близким к $y_0(x)$ в смысле близости 0 - го порядка, то максимум или минимум называется *сильным.* Если же функционал достигает на кривой $y_0(x)$ максимума или минимума по отношению ко всем кривым близким к $y_0(x)$ в смысле близости 1 - го порядка, то максимум или минимум называется *слабым.* Если достигается сильный максимум или минимум, то подавно достигается и слабый.

Различие между сильным и слабым экстремумом весьма существенно при выводе достаточных условий экстремума.

Из курса математического анализа известно *необходимое условие экстремума функции.*

$\boxed{\text{О функции}}$ **Теорема**. Если дифференцируемая функция $f(x)$ достигает максимума или минимума во внутренней точке $x = x_0$ области определения функции, то в этой точке

$$df = 0.$$

Докажем аналогичную теорему для функционала.

$\boxed{\textit{О функционале}}$ **Теорема**. Если функционал $v[y(x)]$, имеющий вариацию, достигает максимума или минимума при $y = y_0(x)$, где $y_0(x)$ - функция, расположенная внутри области определения функционала, то при $y = y_0(x)$

$$\delta v = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем приращенный функционал $v[y_0(x)+\alpha\delta y]$. Здесь $y_0(x)$ - фиксированная функция, на которой достигается экстремум функционала. Так как в приращении аргумента функционала используется параметр α с изменяющимися значениями, то вариация δy является также фиксированной. Поэтому взятый функционал зависит только от α, то есть

$$v[y_0(x) + \alpha\delta y] = \varphi(\alpha).$$

По условию теоремы экстремум достигается при $\alpha = 0$. Значит, согласно необходимому условию экстремума функции справедливо равенство

$$\varphi'(0) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} v[y_0(x) + \alpha\delta y]\bigg|_{\alpha=0} = 0.$$

Тогда по формуле (10) получаем

$$\delta v = 0,$$

что и требовалось доказать.

Итак, на кривых, на которых достигается экстремум функционала, его вариация равна нулю.

****

Физические лаборатории начали создаваться только с середины 19 века сначала в некоторых странах Европы, затем и в США. Так, знаменитая Кавендишская лаборатория, о достижениях которой говорилось выше в связи с Нобелевской премией, была открыта в 1874 году. До этого периода физик работал в одиночку. Приборы обычно покупались на собственные деньги или изготовлялись своими руками. Нередко эксперименты проводились в жилых комнатах.

Известно, что опыты по разложению белого света И. Ньютон проводил в своей кембриджской квартире. Физическим прибором ему служила призма, купленная на собственные деньги. Г. Рихман и М.В. Ломоносов занимались исследованием атмосферного электричества с "громовыми машинами", построенными каждым у себя на дому. Джоуль свои эксперименты по определению механического эквивалента теплоты проводил дома в Манчестере. Французский физик О. Френель в доме матери, в селе близ Канна, занимался исследованиями дифракции. Использовал примитивные приборы и приспособления, сделанные для него сельским слесарем. Выдающийся английский физик и математик Оливер Хевисайд (один из создателей операционного исчисления) в 1874 году в возрасте 24 года уходит с работы в телеграфной компании и больше никогда до конца жизни нигде не служит. В доме своих родителей в Лондоне он оборудует лабораторию, где проводит опыты по проводной связи и электрические измерения, изучает электродинамику Д. Максвелла.

****

Отметим, что открытия в области электромагнетизма сделаны достаточно простыми средствами: в экспериментах использовались известные материалы, химические вещества и технологии, обычные инструменты и приспособления, экспериментальная установка размещалась на лабораторном столе.

****

Изучение такого привычного теперь *газового разряда* привело к четырем важнейшим открытиям физики:

1) рентгеновские лучи, 2) радиоактивность, 3) электрон, 4) изотопы химических элементов.

Д. Максвелл проявлял интерес к исследованиям. Пророческими оказались его слова : "...Явления электрического разряда чрезвычайно важны, и когда они будут лучше поняты, они прояснят, вероятно, природу электричества".

****

В 20-ом веке исследования проводились во многих оборудованных лабораториях. Эксперимент сильно усложнился.

Однако был случай, когда серьезные работы выполнялась не в стенах академического института. В 1946 году был несправедливо осужден предложенный Петром Леонидовичем Капицей метод получения кислорода, а он сам снят с поста директора и лишен возможности работать в созданном им Институте физических проблем Академии наук СССР в г. Москве. В эти трудные для него годы П.Л. Капица организует у себя на даче лабораторию и ведет в ней активные экспериментальные исследования по механике и гидродинамике, по генерации мощного когерентного излучения микроволн (СВЧ-колебаний электромагнитного поля). Работа здесь велась до 1955 года, когда П.Л. Капица возвратился на пост директора института.

==

Е. Вспомните закон электромагнитной индукции.

————————

Ж. Что такое самоиндукция?

————————

З. Запишите уравнения Максвелла.

==

См. далее после п. 1.9.

****

1.7 Основная лемма вариационного исчисления

Лемма. Если для каждой непрерывной функции $\eta(x)$

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \phi(x)\eta(x)\,dx = 0, \tag{11}$$

где функция $\phi(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x_1]$, то

$$\phi(x) \equiv 0$$

на том же отрезке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем от противного.

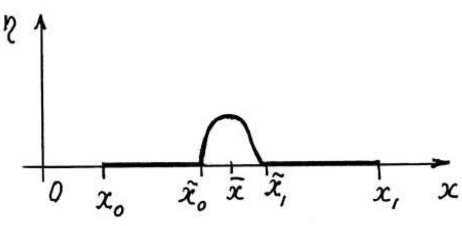

Рис. 8

Предположим, что формула (11) справедлива, а $\phi(x) \neq 0$ в точке $x = \bar{x}$, лежащей на отрезке $[x_0, x_1]$. Тогда из непрерывности функции $\phi(x)$ следует, что если $\phi(x) \neq 0$, то $\phi(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности $\bar{x}_0 \le x \le \bar{x}_1$ точки $\bar{x}$. Но тогда, выбрав функцию $\eta(x)$ также сохраняющей знак в этой окрестности и равной нулю вне этой окрестности (рис. 8), получаем

$$\int_{x_0}^{x_1} \phi(x)\eta(x)\,dx = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \phi(x)\eta(x)\,dx \neq 0,$$

так как произведение $\phi(x)\eta(x)$ сохраняет знак на отрезке $\bar{x}_0 \leq x \leq \bar{x}_1$ и обращается в нуль вне этого отрезка. Итак, мы пришли к противоречию, следовательно, $\phi(x) \equiv 0$.

1.8 Функционал, зависящий от одной функции. Уравнение Эйлера для экстремалей

Решим вариационную задачу для функционала (6)

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx,$$

где $F(x, y, y')$ - заданная функция всех трех аргументов. Будем считать ее непрерывной вместо с производными второго порядка. Граничные точки A, B допустимых кривых $y(x)$ закреплены (рис.9), то есть

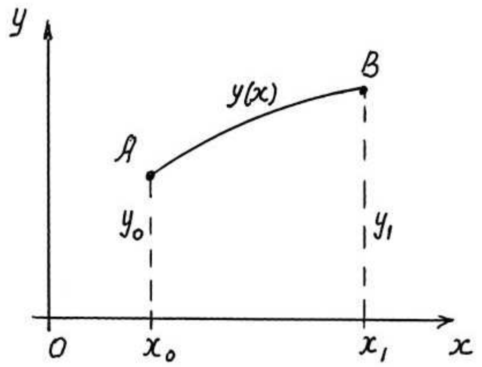

Рис. 9

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1. \tag{12}$$

Функции $y(x)$ считаем непрерывно дифференцируемыми на $x_0 \leq x \leq x_1$.

Как увидим ниже, решение вариационной задачи будет состоять в выводе дифференциального уравнения (уравнения Эйлера) относительно $y(x)$ из необходимого условия экстремума функционала $\delta v = 0$ и последующего интегрирования этого уравнения с граничными условиями (12). В результате получим интегральную кривую $y = y(x)$, на которой возможен экстремум функционала (6).

Вариация δv функционала (6) определяется формулой (7). Она получена путем разложения подынтегральной функции $F(x, y, y')$ в ряд Тейлора по степеням вариаций δy и $(\delta y)'$. Теперь вычислим δv (7) по формуле (10). Для этого сначала запишем приращенный функционал (6) с использованием параметра α

$$v[y+\alpha\delta y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha))\,dx,$$

где обозначено

$$y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\delta y(x), \quad y'(x,\alpha) = y'(x) + (\alpha\delta y(x))' = y'(x) + \alpha(\delta y(x))'.$$

Затем согласно формуле (10) найдем производную этого выражения по α при $\alpha = 0$. При этом функцию F дифференцируем по правилу дифференцирования сложной функции с учетом производных

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} y(x,\alpha) = \delta y, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha} y'(x,\alpha) = (\delta y)'.$$

Тогда получаем

$$\delta v[y(x)] = \left.\frac{\partial}{\partial\alpha} v[y(x)+\alpha\delta y]\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \left.\int_{x_0}^{x_1} [F'_y(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)) \frac{\partial}{\partial\alpha} y(x,\alpha) + F'_{y'}(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)) \frac{\partial}{\partial\alpha} y'(x,\alpha)]\,dx\right|_{\alpha=0} =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} [F'_y(x, y(x), y'(x))\delta y + F'_{y'}(x, y(x), y'(x))(\delta y)']\,dx.$$

Это выражение совпадает с (7).

Таким образом, необходимое условие экстремума функционала (6) $\delta v = 0$ имеет вид

$$\int_{x_0}^{x_1} [F'_y(x, y(x), y'(x))\delta y + F'_{y'}(x, y(x), y'(x))(\delta y)']\,dx = 0. \tag{13}$$

Его можно существенно упростить. Действительно, представляя интеграл в виде суммы интегралов, второй интеграл возьмем по частям

$$\int_{x_0}^{x_1} u\,dv = uv|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} v\,du,$$

полагая $u = F'_{y'},\ dv = d(\delta y)$. При этом $du = dF'_{y'},\ v = \delta y$. Тогда получаем

$$\int_{x_0}^{x_1} F'_{y'}(x,y,y') \frac{d\delta y}{dx}\,dx = F'_{y'}(x,y,y')\delta y\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} dF'_{y'}(x,y,y')\delta y = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{dF'_{y'}(x,y,y')}{dx}\delta y\,dx.$$

Здесь мы учли равенство нулю вариаций $\delta y(x_1) = \delta y(x_0) = 0$, поскольку, как указывалось, по условию задачи все допустимые кривые $y(x)$ имеют общие граничные точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ (рис. 9).

Теперь формула (13) принимает вид

$$\int_{x_0}^{x_1} [F'_y(x,y,y') - \frac{d}{dx} F'_{y'}(x,y,y')]\delta y = 0,$$

где выполнены все условия леммы: на кривой $y(x)$, реализующей экстремум, выражение под интегралом в квадратных скобках является непрерывной функцией, зависящей от x, а множитель $\delta y(x)$ является произвольной функцией. Следовательно,

$$F'_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F'_{y'}(x,y,y') \equiv 0 \tag{14}$$

на кривой $y(x)$, реализующей экстремум функционала (6).

После вычисления полной производной $dF'_{y'}/dx$ получаем развернутый вид формулы (14)

$$F'_y - F''_{xy'} - F''_{yy'}y' - F''_{y'y'}y'' = 0. \tag{15}$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка относительно y называется *уравнением Эйлера* (впервые опубликовано им в 1744 году). Интегральные кривые уравнения $y = y(x, C_1, C_2)$ называются *экстремалями*. Постоянные $C_{1,2}$ находят из граничных условий (12). Только на удовлетворяющих этим условиям экстремалях может реализоваться экстремум функционала. Однако, чтобы установить, реализуется ли на них в действительности экстремум, и притом максимум или минимум, надо воспользоваться *достаточным условием экстремума* (см. п. 1.18).

Напомним, что в математике задача, состоящая в решении дифференциального уравнения и удовлетворении граничным (краевым) условиям, называется граничной (краевой) задачей. Известно, что краевая задача не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным.

В качестве примера рассмотрим вариационную задачу для действия (см. п. 1.2)

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} + \int_{x_0}^{x} f(x,t)\ dx \right]\ dt.$$

Получим уравнение Эйлера для этого функционала. Здесь

$$F(t,x,\dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \int_{x_0}^{x} f(x,t)\ dx.$$

Производные

$$F'_x = f(x,t), \quad F'_{\dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}F'_{\dot{x}} = m\ddot{x}$$

позволяют записать уравнение Эйлера

$$m\ddot{x} = f(x,t),$$

которое совпадает с уравнением Ньютона, установленным впервые опытным путем. Решением этого уравнения будет экстремаль - истинная траектория движения материальной точки.

Рассмотренный простой пример является иллюстрацией подхода в физике, основанного на принципе наименьшего действия. Как указывалось в п. 1.2, вариационное исчисление позволяет решать сложные задачи.

1.9 Частные случаи уравнения Эйлера для экстремалей. Примеры

1) Пусть F не зависит от y', то есть имеем функционал (5). Тогда в уравнении Эйлера (14) $F'_{y'} \equiv 0$ и оно имеет вид
$$F'_y(x, y) = 0.$$
Это не дифференциальное уравнение, так как после вычисления частной производной по y получаем уравнение кривой линии

$$G(x, y) = 0,$$

которая будет экстремалью только в случае, если она проходит через граничные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1). Следовательно, решение вариационной задачи для функционала (5) вообще говоря не существует.

В качестве примера возьмем функционал

$$v[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} y^2\,dx, \qquad y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1.$$

Здесь $F = y^2$, уравнение Эйлера имеет вид $2y = 0$ или $y = 0$. Экстремаль $y = 0$ проходит через граничные точки только при $y_0 = 0$ и $y_1 = 0$ (рис. 10). Причем на прямой $y = 0$ имеем

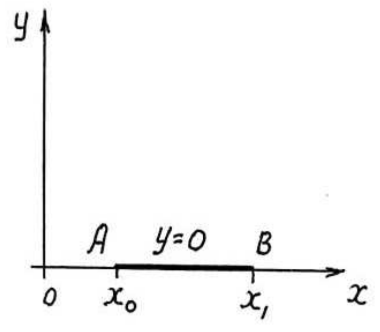

Рис. 10

$$v = \int\limits_{x_0}^{x_1} 0\,dx = 0.$$

И поскольку на допустимых кривых $F = y^2 \geq 0$, то и $v[y(x)] \geq 0$. Следовательно, на экстремали $y = 0$ данный функционал достигает минимума.

2) Пусть F зависит лишь от y'

$$F = F(y').$$

Уравнение Эйлера (15) имеет вид

$$F''_{y'y'} \cdot y'' = 0.$$

Отсюда $y'' = 0$ или $F''_{y'y'} = 0$. Общим решением уравнения $y'' = 0$ является семейство прямых линий $y = C_1x + C_2$. Уравнение $F''_{y'y'} = 0$ после вычисления производных имеет вид $G(y') = 0$, то есть не является дифференциальным относительно y'. Если его корни $y' = k_i$ - вещественные числа, то $y_i = k_ix + C$ - семейство прямых, содержащееся в полученном решении $y = C_1x + C_2$. Таким образом, в случае $F = F(y')$ экстремалями являются всевозможные прямые линии $y = C_1x + C_2$.

Решим два примера.

Пример 1. Возьмем функционал (длина дуги кривой)

$$l[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx, \qquad y(x_0) = y_0, \;\; y(x_1) = y_1.$$

Здесь $F = F(y') = \sqrt{1 + y'^2}$, экстремали $y = C_1x + C_2$. Удовлетворяя граничным условиям, приходим к алгебраической системе

$$\begin{aligned} C_1x_0 + C_2 = y_0, \\ C_1x_1 + C_2 = y_1. \end{aligned}$$

Вычитая, получаем $C_1(x_1 - x_0) = y_1 - y_0$, откуда

$$C_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Подставляя C_1 в первое уравнение системы, находим

$$C_2 = \frac{y_0x_1 - y_1x_0}{x_1 - x_0}.$$

Экстремаль имеет вид

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{y_0x_1 - y_1x_0}{x_1 - x_0}.$$

Отрезок этой прямой имеет наименьшую длину среди всех дуг, соединяющих точки $y(x_0) = y_0, \;\; y(x_1) = y_1$.

Пример 2. Рассмотрим функционал (1'), в котором скорость $v = v(y')$. В этом случае экстремалями являются прямые линии.

3) Пусть F не зависит явно от x, то есть $F = F(y, y')$. Так как здесь $F''_{xy'} = 0$, уравнение Эйлера (15) имеет вид

$$F'_y - F''_{yy'}y' - F''_{y'y'}y'' = 0.$$

Если умножить его на y', левая часть сворачивается в полную производную $d(F - y'F'_{y'})/dx$, и получаем уравнение

$$\frac{d}{dx}(F - y'F'_{y'}) = 0.$$

Интегрируя, приходим к выражению

$$F - y'F'_{y'} = C, \tag{16}$$

которое называется *первым интегралом.* Это дифференциальное уравнение первого порядка.

****

Физики-экспериментаторы - особые люди. Помимо глубоких теоретическими знаний в области проводимого эксперимента, они обладают многими навыками кропотливой практической работы: владеют самым разнообразным инструментом, технологиями, умеют пользоваться и конструируют измерительные приборы.

У экспериментатора золотые руки, и в то же время он всегда мыслит. При создании экспериментальной установки проводятся необходимые расчеты. По ходу эксперимента его воображение строит теоретические модели. Устанавливаются физические механизмы наблюдаемых явлений, проводятся численные оценки.

Экспериментатор изобретателен, не консервативен, не суетлив, аккуратен, наблюдателен, всегда в хорошей физической форме, о которой постоянно заботится.

Он терпелив и не впадает в отчаяние после неудачи, даже если на сложный трудоемкий эксперимент ушли годы.

К памятнику физику-экспериментатору, который, конечно, будет поставлен, принесем цветы.

****

В 19-ом веке, как правило, физик экспериментальную работу совмещал с теоретической. В 20-ом веке произошло разделение труда, поскольку существенно усложнились как теория, так и эксперимент, который к тому же зачастую стал дорогостоящим. Есть задачи, решение которых требует одновременно усилий специалистов многих стран при проектировании, сооружении экспериментальной установки и проведении на ней измерений. Примером может служить ускоритель тяжелых заряженных частиц под названием большой адронный коллайдер (БАК), построенный в научно-исследовательском центре Европейского совета ядерных исследований (ЦЕРН) на границе Швейцарии и Франции, недалеко от Женевы. В строительстве и исследованиях участвовали и участвуют около 10 тысяч специалистов более чем 100 стран.

****

Петр Леонидович Капица всегда высказывался о необходимости гармоничного развития теории и эксперимента во всех областях естествознания. При этом подчеркивал особую, решающую роль эксперимента.

В одной из своих статей он цитирует легко запоминающийся шутливый афоризм Лорели Ли - героини романа американской писательницы Аниты Лус “Джентльмены предпочитают блондинок”, которая говорит: “Любовь - это хорошая вещь, но золотой браслет остается навсегда”. И тут же знаменитый физик уже серьезно поясняет: “Я думаю, что мы, ученые, можем сказать: теория - это хорошая вещь, но правильный эксперимент остается навсегда”.

===

И. По какой формуле вычисляется скорость распространения электромагнитных волн в среде?

————————

К. Как связаны длина волны и частота колебаний поля?

————————

Л. В каком порядке располагаются цвета в спектре видимого диапазона электромагнитных волн?

————————

М. Вспомните шкалу электромагнитных волн.

****

1.10 Задача о брахистохроне

В качестве примера функционала с $F = F(y, y')$ рассмотрим функционал $T[y(x)]$ (1) в задаче о брахистохроне (постановку задачи и вывод формулы для T см. в п. 1.2).

Здесь

$$F(y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}.$$

Воспользуемся первым интегралом (16), который после вычисления производной $F'_{y'}$ приобретает вид

$$\frac{1}{\sqrt{2gy}}\left[\sqrt{1+y'^2} - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right] = C.$$

После очевидных преобразований получаем

$$\frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C\sqrt{2g}$$

или

$$y(1+y'^2) = C_1.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, проще всего решается с помощью подстановки $y' = \operatorname{ctg}\tilde{\tau}$, где $\tilde{\tau}$ - параметр. Тогда

$$y = \frac{C_1}{1+\operatorname{ctg}^2\tilde{\tau}} = C_1\sin^2\tilde{\tau} = \frac{C_1}{2}(1-\cos 2\tilde{\tau}).$$

Поскольку $dy = y'dx$, имеем

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1\sin\tilde{\tau}\cos\tilde{\tau}d\tilde{\tau}}{\operatorname{ctg}\tilde{\tau}} = 2C_1\sin^2\tilde{\tau}d\tilde{\tau} = C_1(1-\cos 2\tilde{\tau})d\tilde{\tau}.$$

Проинтегрируем

$$x = \frac{C_1}{2}(2\tilde{\tau} - \sin 2\tilde{\tau}) + C_2.$$

Система

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{2}(2\tilde{\tau} - \sin 2\tilde{\tau}) + C_2, \\ y = \dfrac{C_1}{2}(1-\cos 2\tilde{\tau}) \end{cases}$$

дает общее решение уравнения Эйлера для экстремалей в параметрическом виде.

Вместо $\tilde{\tau}$ введем параметр $\tau = 2\tilde{\tau}$. Тогда получаем

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{2}(\tau - \sin\tau) + C_2, \\ y = \dfrac{C_1}{2}(1 - \cos\tau). \end{cases}$$

Значения постоянных $C_{1,2}$ найдем из граничных условий. В точке A имеем $x = y = 0$. Эти координаты удовлетворяют системе при начальном значении параметра $\tau = 0$ и $C_2 = 0$. Система принимает вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{C_1}{2}(\tau - \sin\tau), \\ y = \dfrac{C_1}{2}(1 - \cos\tau). \end{cases} \tag{17}$$

Она описывает семейство циклоид.

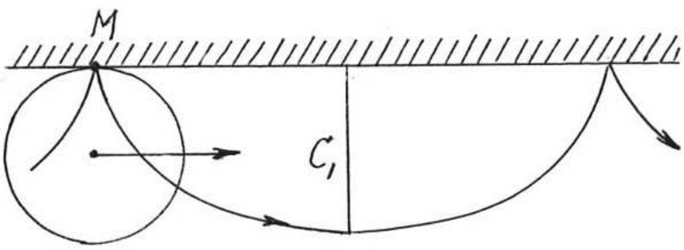

Рис. 11

Напомним, что траектория движения в виде циклоиды встречается в задачах физики. Например, циклоиду описывает точка на ободе колеса, которое без проскальзывания катится по плоскости (точка M на рис. 11). Диаметр колеса равен C_1. По циклоиде совершает колебания заряженная частица $-e$ с нулевой начальной скоростью в комбинированных (в скрещенных) однородных статических электрическом E и магнитном B полях, когда их силовые линии пересекаются под углом $\pi/2$ (рис. 12). При этом траектория заряда расположена в плоскости, перпендикулярной силовым линиям магнитного поля.

Подставим теперь в (17) координаты $x = x_1$, $y = y_1$ точки B (рис. 3).

$$\begin{cases} \dfrac{C_1}{2}(\tau - \sin\tau) = x_1, \\ \dfrac{C_1}{2}(1 - \cos\tau) = y_1. \end{cases} \tag{18}$$

Эти выражения представляют собой систему уравнений относительно неизвестных C_1 и τ. Исключим C_1 делением второго уравнения на первое, учитывая, что для

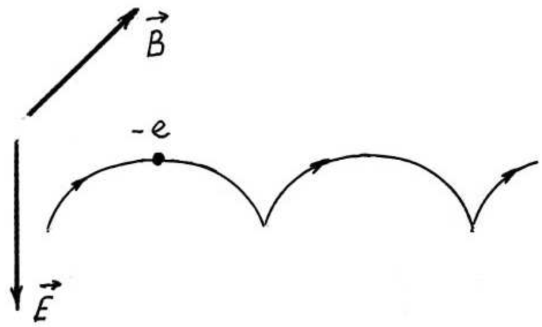

Рис. 12

всех $\tau > 0$ знаменатель $\tau - \sin\tau \neq 0$. Тогда получаем трансцендентное уравнение, в котором неизвестной является τ,

$$\frac{y_1}{x_1}(\tau - \sin\tau) = 1 - \cos\tau.$$

Уравнение решается численным методом, то есть при заданном отношении y_1/x_1 определяем значение параметра $\tau = \tau_1$, при котором скатывающаяся по циклоиде точка оказывается в конечной точке $B(x_1, y_1)$. Эта зависимость показана на рис. 13.

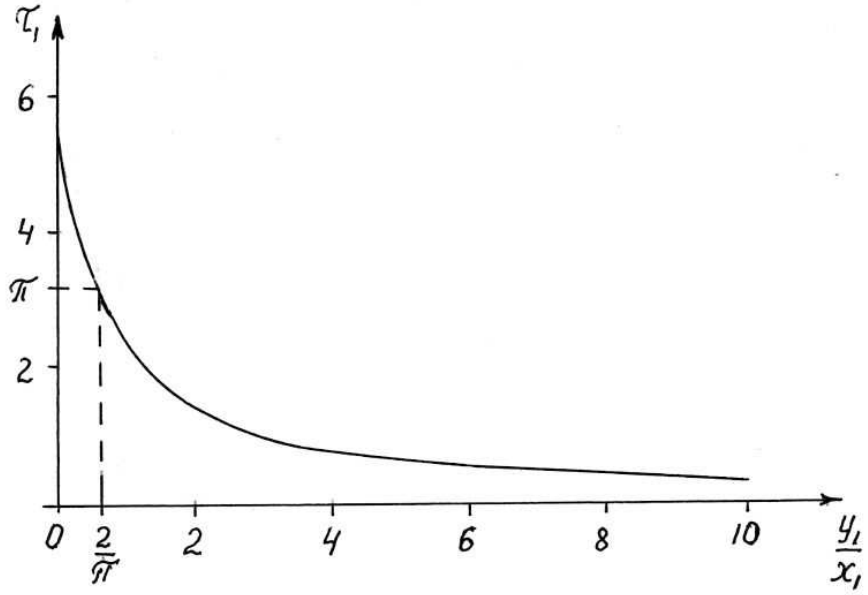

Рис. 13

Зная τ_1, можно вычислить C_1 по формуле

$$C_1 = \frac{2x_1}{\tau_1 - \sin\tau_1}, \tag{19}$$

которая следует из первого уравнения (18). Подставляя это выражение в (17), получаем уравнение экстремали, на которой реализуется экстремум функционала (1),

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1}{\tau_1 - \sin\tau_1}(\tau - \sin\tau), \\ y = \dfrac{x_1}{\tau_1 - \sin\tau_1}(1 - \cos\tau). \end{cases}$$

Итак, брахистохроной является циклоида.

Отметим интересный факт. Из второй формулы (17) следует, что координата y циклоиды принимает максимальное значение $y = C_1$ при $\tau = \pi$ (при этом $x = C_1\pi/2$). Следовательно, если значение параметра $\tau_1 < \pi$ (при этом по формуле (18) отношение $y_1/x_1 > 2/\pi$, см. также рис. 13), конечная точка B находится на спуске траектории (линия 1 на рис. 14), и на пути из A в B материальная точка все время ускоряется. Если же $\tau_1 > \pi$ (при этом $y_1/x_1 < 2/\pi$), точка B находится на подъеме траектории (линия 2 на рис. 14). Значит, в этом случае при наискорейшем перемещении из A в B сначала точка ускоряется на спуске, а затем, замедляясь, поднимается на требуемую высоту.

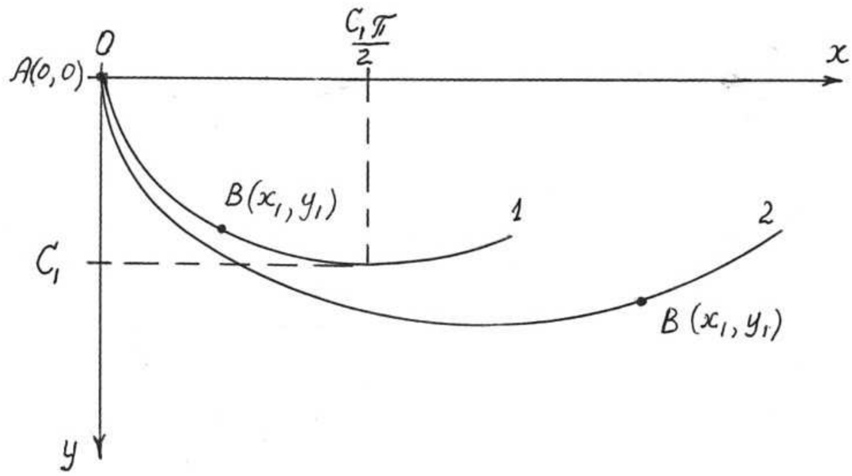

Рис. 14

В заключение, используя формулу (1), сравним время движения T из A в B по циклоиде и по прямой. В случае циклоиды с учетом выражений (17) вычислим производную

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{C_1}{2}\sin\tau\, d\tau}{\dfrac{C_1}{2}(1 - \cos\tau)\, d\tau} = \frac{2\sin\dfrac{\tau}{2}\cos\dfrac{\tau}{2}}{2\sin^2\dfrac{\tau}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\tau}{2}.$$

Подставим это выражение, а также y (17) в (1)

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\tau_1} \sqrt{\frac{1+\operatorname{ctg}^2 \dfrac{\tau}{2}}{\dfrac{C_1}{2}(1-\cos\tau)}}\, \frac{C_1}{2}(1-\cos\tau)\, d\tau = \\ = \sqrt{\frac{C_1}{2g}} \int_0^{\tau_1} d\tau = \sqrt{\frac{C_1}{2g}}\, \tau_1. \tag{20}$$

При выбранных координатах x_1, y_1 из графика на рис. 13 определяется τ_1. Значение постоянной C_1, имеющей размерность длины, вычисляется по формуле (19). Время движения T_1 получим в секундах.

При прямолинейном движении материальной точки из A в B в функционале (1) имеем траекторию

$$y = \frac{y_1}{x_1} x$$

и производную

$$y' = \frac{y_1}{x_1}.$$

Время движения

$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+\dfrac{y_1^2}{x_1^2}}{\dfrac{y_1}{x_1}x}}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{y_1^2+x_1^2}{x_1 y_1}} \int_0^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\, \sqrt{\frac{y_1^2+x_1^2}{y_1}}. \tag{21}$$

Заметим, что эту формулу можно получить также из известной задачи о движении по наклонной плоскости.

Вычислим отношение T_2/T_1 в частном случае, когда точка B оказывается на вершине циклоиды. При этом для определения значения τ_1 не надо пользоваться графиком на рис. 13, поскольку, как указывалось выше, известно точное значение $\tau_1 = \pi$. Кроме того, здесь $x_1 = C_1\pi/2$, $y_1 = C_1$. С использованием формул (20) и (21) получаем

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt{\dfrac{2}{g}}\, \sqrt{\dfrac{C_1^2\left(1+\dfrac{\pi^2}{4}\right)}{C_1}}}{\sqrt{\dfrac{C_1}{2g}}\, \pi} = \sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}} \approx 1,18545.$$

Такую разницу во времени несложно обнаружить в простом эксперименте.

****

ИЗ ЖИЗНИ УЧЕНЫХ-ФИЗИКОВ

В 1753 году американский физик Бенджамин Франклин (1706-1790) доказал электрическую природу грозового разряда. В Петербурге М.В. Ломоносов (1711-1764) и Георг Вильгельм Рихман (1711-1753) (русский физик, академик) с целью количественного описания электрических явлений построили стержни для измерения их заряда от атмосферного электричества и назвали их “громовой машиной”. Г. Рихман, чтобы произвести количественный отсчет, неосторожно наклонился и приблизился к проводнику. Он был убит электрическим разрядом в голову.

****

При изучении грозового разряда Б. Франклин изобрел громоотвод. Появилась идея о возможности защиты от молнии отводом электрического заряда через хорошо проводящие металлические стержни. В наши дни металлический стержень венчает почти каждое сооружение и является стандартным элементом его конструкции. А тогда были самые разнообразные возражения против громоотвода. Так, бытовало мнение, что грозы происходят тогда, когда злые духи, демоны, выходят из повиновения всевышнему, и единственно правильный способ борьбы заключался в том, что устраивали колокольный звон, который, как считалось, отгоняет злых духов. Так как церковные колокольни наиболее уязвимы при ударе молнии, то звонить во время грозы было небезопасным делом. Громоотводы долго не ставили на церкви и продолжали звонить в колокола.

Сохранилась статистика несчастных случаев: в Германии в конце 18-го века за 33 года было убито 120 звонарей и разрушено 400 колоколен.

Против громоотвода возникли также научные возражения. Научные оппоненты считали, что присутствие острия из металла будет создавать более благоприятные условия для возникновения молний, и громоотвод скорее вреден.

В Англии борьба против громоотвода приобрела резко политический характер, поскольку это время пришлось на эпоху освобождения Америки от колониального положения, и изобретатель громоотвода Б. Франклин в этом движении стал крупной политической фигурой молодой Америки, одним из активнейших борцов за свободу. Всякий гражданин Англии, ставивший громоотвод, считался политически неблагонадежным. Б. Франклин сохранял спокойствие и проявлял инициативу. Он убеждал, путем громадной переписки непрерывно воздействовал на ученых и общественных деятелей. Здравый смысл победил.

****

Английский физик и химик Генри Кавендиш (1731-1810) (именно его потомок герцог Вильям Кавендиш предоставил деньги на создание Кавендишской лаборатории, о чем мы рассказывали выше) публиковал только те свои работы, в достоверности которых был полностью уверен. Его работы по электричеству оставались неизвестными. Их изучил и издал Д. Максвелл. Выяснилось, что Г. Кавендиш еще в 1771 году установил, что силы электрического взаимодействия обратно пропорциональны квадрату расстояния между зарядами. Напомним, что свой закон Ш. Кулон установил в 1785 году. Все исследования Г. Кавендиш проводил в собственной лаборатории.

См. далее после п. 1.11.

****

1.11 Функционалы, зависящие от нескольких функций

Рассмотрим функционал

$$v[y_1, y_2, ..., y_n] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')\, dx \tag{22}$$

с граничными значениями

$$\begin{aligned} &y_1(x_0) = y_{10}, \;\; y_2(x_0) = y_{20}, ..., y_n(x_0) = y_{n0} \\ &y_1(x_1) = y_{11}, \;\; y_2(x_1) = y_{21}, ..., y_n(x_1) = y_{n1}. \end{aligned} \tag{23}$$

Получим необходимое условие экстремума функционала. Для этого будем варьировать только одну из функций $y_j(x),\; j = 1, 2, ..., n$, оставляя все остальные функции неизменными. При этом функционал (22) становится функционалом, зависящим только от одной варьируемой функции, например, от $y_i(x)$,

$$v[y_1, y_2, ..., y_n] = \tilde{v}[y_i].$$

Это изученный выше функционал вида (6). Следовательно, функция, реализующая экстремум, должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$F'_{y_i} - \frac{d}{dx} F'_{y_i'} = 0.$$

Так как такое рассуждение применимо к любой функции $y_i,\; i = 1, 2, ..., n$, получим систему дифференциальных уравнений второго порядка

$$F'_{y_i} - \frac{d}{dx} F'_{y_i'} = 0, \;\; i = 1, 2, ..., n.$$

Ее общее решение

$$y_1 = y_1(x, C_1, C_2, ..., C_{2n}), ..., y_n = y_n(x, C_1, C_2, ..., C_{2n})$$

образует семейство экстремалей данной вариационной задачи. Оно содержит $2n$ произвольных постоянных, которые находятся из граничных условий (23).

В качестве примера возьмем функционал

$$v[y(x), z(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(y', z')\, dx, \quad y(x_0) = y_0, \; y(x_1) = y_1, \; z(x_0) = z_0, \; z(x_1) = z_1.$$

Здесь F не зависит от x, y, z. Поэтому $F'_y = F'_z = 0$, и система уравнений Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dx} F'_{y'}(y', z') = 0, \qquad \frac{d}{dx} F'_{z'}(y', z') = 0.$$

В развернутом виде получаем

$$F''_{y'y'} y'' + F''_{y'z'} z'' = 0, \qquad F''_{y'z'} y'' + F''_{z'z'} z'' = 0.$$

Здесь вторые производные $F''_{y'y'}$, $F''_{z'z'}$, $F''_{y'z'}$ это известные функции переменных y', z', и уравнения образуют алгебраическую линейную однородную систему относительно y'' и z''. Ее определитель

$$\Delta = F''_{y'y'} F''_{z'z'} - (F''_{y'z'})^2.$$

Остановимся на случае $\Delta \neq 0$. Тогда, как известно, алгебраическая система имеет только тривиальное решение
$$y'' = 0, \;\; z'' = 0.$$
Интегрирование дает прямые линии
$$y = C_1 x + C_2, \;\; z = C_3 x + C_4.$$
Постоянные $C_1, ..., C_4$ находятся из граничных условий.

****

Расскажем о драматическом событии в жизни Георга Симона Ома (1789-1854). В 1825 году он опубликовал статью, в которой приведена логарифмическая зависимость между током и напряжением, полученная экспериментальным путем. Уже вскоре после дальнейших экспериментов сам Г. Ом понял, что этот закон неверный. Его подвели, главным образом, нестабильные источники тока.

Эта неудача явилась одной из причин его длительного непризнания в научной среде.

Вскоре в 1826 году после тщательных многих экспериментов была напечатана работа, содержащая правильный закон Ома - линейная зависимость между током и напряжением.

Ученый мир долгое время не принимал этот результат. Выражение, установленное Г. Омом было настолько простым, что именно своей простотой вызывало недоверие. Кроме того, научный авторитет Г. Ома был подорван первой публикацией, и у оппонентов были все основания сомневаться в справедливости найденного им выражения. К тому же личность учителя гимназии Г. Ома не вызывала доверия у маститых ученых, работавших тогда в крупнейших научных центрах. Г. Ом убеждал, доказывал и снова работал, работал, работал. Морально и материально его поддерживал родной брат Мартин, который был на три года младше.

Г. Ом очень много энергии и времени тратил на научную и околонаучную полемику. Несправедливая критика выводила его из равновесия, не давая сосредоточиться на научных проблемах. Случайные заработки, отсутствие условий для научной работы терзают ученого, выматывая физические и нравственные силы. 15 лет отдано борьбе за утверждение открытия. Родина ученого Германия была последней страной, признавшей его заслуги.

Все эти события подрывали здоровье Г. Ома. Он умер от повторного сердечного удара. Ему было 65.

Собственной семьи Г. Ом не создал.

****

Не было детей ни у М. Фарадея, ни у Д. Максвелла.

См. далее после п. 1.12.

****

1.12 Вариационные задачи на условный экстремум функционалов

Напомним известные из курса математического анализа постановку задачи и способы исследования функций на условный экстремум.

$\boxed{\text{О функции}}$ Пусть требуется исследовать функцию $z = f(x, y)$ при условии, что сами переменные x и y связаны уравнением

$$g(x, y) = 0.$$

Геометрически это означает, что кроме функции $z = f(x, y)$ задана некоторая линия на плоскости xOy, и требуется функцию z исследовать на экстремум при условии, что точки экстремума могут принадлежать только этой линии. Эти точки называются *точками условного экстремума*, а уравнение $g(x, y) = 0$, связывающее переменные x и y, - *уравнением связи*.

Если из уравнения связи удается выразить y через x, то в результате подстановки в заданную функцию $z = f(x, y)$ приходим к функции одной переменной x. Далее определяем те значения x, при которых z достигает экстремума. Эти значения подставляем в уравнение связи и находим соответствующие значения y. Таким образом получаем точки условного экстремума.

В тех случаях, когда y нельзя выразить явно через x, применяется *метод множителей Лагранжа*.

Напомним суть метода. Чтобы заданную функцию $z = f(x, y)$ исследовать на экстремум при условии, что $g(x, y) = 0$, необходимо

1) составить вспомогательную *функцию Лагранжа*

$$\tilde{z}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y),$$

где λ - вспомогательная неизвестная величина, которая называется *множителем Лагранжа*,

2) найти частные производные

$$\tilde{z}'_x, \ \ \tilde{z}'_y, \ \ \tilde{z}'_\lambda,$$

и приравнять каждую из них нулю,

3) решить полученную систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\tilde{z}'_x(x, y, \lambda) = 0, \ \ \tilde{z}'_y(x, y, \lambda) = 0, \ \ \tilde{z}'_\lambda(x, y, \lambda) = 0.$$

Эта система выражает только необходимое условие экстремума. Поэтому в результате решения системы будут получены точки, в которых функция z может иметь экстремум, но может и не иметь его.

Решим пример. Исследуем на экстремум функцию

$$z = x^2 + 6x - 2y + 1$$

с уравнением связи

$$x^2 + y - 4 = 0.$$

Первый способ. Выразим y

$$y = 4 - x^2$$

и подставим в z

$$z = 3x^2 + 6x - 7.$$

Эту функцию исследуем на экстремум. Найдем производную и приравняем нулю

$$z' = 6x + 6 = 0.$$

Отсюда $x_0 = -1$. Подставляя это значение в уравнение связи, находим $y_0 = 4 - 1 = 3$. Следовательно, в точке (-1,3) возможен условный экстремум. По знаку второй производной $z'' = 6 > 0$ заключаем, что в указанной точке имеется минимум, причем $z_{min} = -10$.

Второй способ (метод множителей Лагранжа). Составим функцию Лагранжа

$$\tilde{z}(x, y, \lambda) = z(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + 6x - 2y + 1 + \lambda(x^2 + y - 4).$$

Вычисляем частные производные и приравниваем их нулю

$$\tilde{z}'_x = 2x + 6 + 2\lambda x = 0, \quad \tilde{z}'_y = -2 + \lambda = 0, \quad \tilde{z}'_\lambda = x^2 + y - 4 = 0.$$

Решение системы $\lambda = 2$, $x_0 = -1$, $y_0 = 3$ дает точку $(-1, 3)$ на плоскости xOy, которая может быть точкой условного экстремума. Большего метод Лагранжа не дает. Первый способ предпочтительнее.

Метод множителей Лагранжа используется также для функций n переменных, когда исследуется на экстремум функция $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при наличии связей

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Сначала берут вспомогательную функцию

$$\tilde{z} = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i,$$

где λ_i - постоянные множители. Затем составляют систему n уравнений

$$\tilde{z}'_{x_j} = 0, \quad j = 1, 2, ..., n$$

и дополняют ее m уравнениями связи

$$\varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., m; \; m < n.$$

В результате получают $n+m$ уравнений с $n+m$ неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$ и $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Корни системы дают точки $(x_1, x_2, ..., x_n)$, в которых может быть экстремум функции z.

О функционале *Вариационными задачами на условный экстремум* называются задачи, в которых требуется найти экстремум функционала v, причем на функции, от которых зависит функционал, наложены некоторые связи. Рассмотрим вновь функционал (22)

$$v[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')\, dx \tag{24}$$

с граничными условиями (23)

$$\begin{array}{l} y_1(x_0) = y_{10}, \;\; y_2(x_0) = y_{20}, ..., y_n(x_0) = y_{n0} \\ y_1(x_1) = y_{11}, \;\; y_2(x_1) = y_{21}, ..., y_n(x_1) = y_{n1}. \end{array} \tag{25}$$

Однако теперь имеются связи

$$\varphi_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m; \; m < n. \tag{26}$$

Решение вариационной задачи основано на теореме, которая сформулирована ниже. Оно аналогично решению задачи на условный экстремум функции методом множителей Лагранжа.

Для функционала v составляют функционал

$$\tilde{v} = \int\limits_{x_0}^{x_1} \tilde{F}\, dx, \tag{27}$$

где

$$\tilde{F} = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)\varphi_i, \tag{28}$$

который уже исследуется на безусловный экстремум.

Для этого решают систему уравнений, составленную из уравнений Эйлера и уравнений связи

$$\begin{array}{l} \tilde{F}'_{y_j} - \dfrac{d}{dx}\tilde{F}'_{y'_j} = 0, \quad j = 1, 2, ..., n, \\ \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., m. \end{array} \tag{29}$$

Число уравнений $n + m$, число неизвестных тоже $n + m$. Неизвестными являются n функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ и m множителей $\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_m(x)$. Каждое уравнение Эйлера второго порядка. Общее решение уравнений Эйлера $y_j = y_j(x, C_1, C_2, ..., C_{2n})$, $j = 1, 2, ..., n$ содержит $2n$ произвольных постоянных, которые определяются из граничных условий (25).

Приведем формулировку теоремы.

Теорема. Функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, реализующие экстремум функционала v (24) при наличии условий (26) удовлетворяют при соответствующем выборе множителей $\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_m(x)$ уравнениям Эйлера, составленным для функционала (27) с $\tilde{F}$ (28). Функции $\lambda_1(x), \lambda_2(x), ..., \lambda_m(x)$ и $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ определяются из уравнений Эйлера и уравнений связи (29).

Доказательство теоремы можно найти в книге [1].

****

Немецкий физик Карл Рикке (1845-1915) для выяснения физического механизма проводимости металлов поставил эксперимент с целью проверить, переносится ли вещество металла при движении зарядов. Он в течение года пропускал ток порядка 10 А через цепь, составленную из цилиндров различных металлов. Никакого переноса вещества он не обнаружил.

Вы улыбнулись после этих слов. Не думайте, что это было проявлением чудачества К. Рикке. Этот физик был серьезным ученым (профессор, директор Физического института Гёттингенского университета). К концу 19-го века механизм электрической проводимости металлов не был известен. Отрицательный результат описанного эксперимента способствовал построению теории проводимости металлов (теория

Рикке).

См. далее после п. 1.14.

****

1.13 Задача о геодезических линиях

Постановка задачи о геодезических линиях содержится в п. 1.2. Требуется найти кратчайшее расстояние между двумя точками $M(x_0, y_0, z_0)$ и $N(x_1, y_1, z_1)$ на поверхности $\varphi(x, y, z) = 0$. Это вариационная задача на условный экстремум. Здесь функционалом (24) является расстояние между двумя точками на поверхности

$$l = v[y, z] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx. \tag{30}$$

Надо найти минимум при условии

$$\varphi(x, y, z) = 0. \tag{31}$$

Возьмем функционал (см. п. 1.12)

$$\tilde{v} = \tilde{l} = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)\varphi(x, y, z)\right] dx.$$

Здесь

$$\tilde{F} = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda(x)\varphi(x, y, z).$$

Запишем систему (29), учитывая, что первое слагаемое в $\tilde{F}$ не зависит от y и z. Поэтому $\tilde{F}'_y = \lambda(x)\varphi'_y$ и $\tilde{F}'_z = \lambda(x)\varphi'_z$. Тогда получаем

$$\lambda(x)\varphi'_y - \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0, \quad \lambda(x)\varphi'_z - \frac{d}{dx}\frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0, \quad \varphi(x, y, z) = 0.$$

Из этих трех уравнений определяются множитель $\lambda(x)$, а также функции $y = y(x)$ и $z = z(x)$, на которых может достигаться условный экстремум функционала (30).

1.14 Геодезические линии на сфере

В качестве примера найдем геодезические линии на сфере. Воспользуемся сферической системой координат (r, θ, ψ) (рис. 15), в которой справедливы формулы

$$x = r\sin\theta\cos\psi, \quad y = r\sin\theta\sin\psi, \quad z = r\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \psi \le 2\pi.$$

Уравнением связи $\varphi(x, y, z) = 0$ (31) является уравнение сферы радиуса a

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

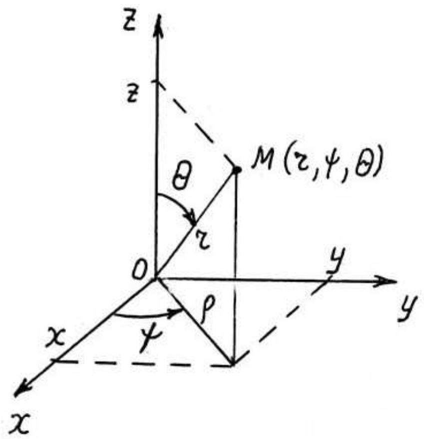

Рис. 15

которое в сферической системе после тригонометрических преобразований запишется как $r = a$.

Представим функционал (30)

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

в сферической системе. При вычислении дифференциалов dx, dy, dz воспользуемся уравнением связи $r = a$, поэтому на сфере формулы преобразования координат имеют вид

$$x = a\sin\theta\cos\psi, \quad y = a\sin\theta\sin\psi, \quad z = a\cos\theta.$$

Дифференциалы равны

$$dx = a(\cos\theta\cos\psi\, d\theta - \sin\theta\sin\psi\, d\psi), \quad dy = a(\cos\theta\sin\psi\, d\theta + \sin\theta\cos\psi\, d\psi),$$
$$dz = -a\sin\theta\, d\theta.$$

С учетом этих формул после вычислений получаем функционал

$$l = a\int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\psi)^2} = a\int_{\psi_0}^{\psi_1} \sqrt{\sin^2\theta + \left(\frac{d\theta}{d\psi}\right)^2}\, d\psi = \int_{\psi_0}^{\psi_1} F(\theta, \theta'_\psi)\; d\psi,$$

в котором допустимые кривые, лежащие на сфере, задаются уравнением

$$\theta = \theta(\psi).$$

Заметим, что использование сферической системы координат позволило данную вариационную задачу на условный экстремум свести к задаче на безусловный экстремум и ее можно решать без использования множителей Лагранжа.

Запишем уравнение Эйлера для экстремалей

$$F'_\theta - \frac{d}{d\psi}F'_{\theta'} = 0.$$

Поскольку $F \neq F(\psi)$, уравнение имеет первый интеграл (16)

$$F - \theta' F'_{\theta'} = \tilde{C},$$

который после вычисления производной $F'_{\theta'}$ записывается в виде

$$\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + (\theta'_\psi)^2}} = C,$$

где обозначено $C = \tilde{C}/a$. Выразим отсюда производную θ'_ψ

$$\theta'_\psi = \frac{1}{C}\sqrt{\sin^4\theta - C^2\sin^2\theta}. \tag{32}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными проинтегрируем с помощью подстановки

$$u = \operatorname{ctg}\theta.$$

Тогда

$$du = -\frac{d\theta}{\sin^2\theta}, \quad \frac{1}{\sin^2\theta} = u^2 + 1.$$

Интегрируя, получаем

$$\psi + C_1 = C\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{1 - \dfrac{C^2}{\sin^2\theta}}} = -C\int \frac{du}{\sqrt{1 - C^2 - (Cu)^2}} =$$

$$= -\int \frac{d(Cu)}{\sqrt{1 - C^2 - (Cu)^2}} = -\arcsin\frac{Cu}{\sqrt{1-C^2}} = -\arcsin\frac{C\operatorname{ctg}\theta}{\sqrt{1-C^2}} = \arcsin(C_2\operatorname{ctg}\theta)$$

или

$$C_2\operatorname{ctg}\theta = \sin(\psi + C_1), \tag{33}$$

где обозначено

$$C_2 = -\frac{C}{\sqrt{1-C^2}}.$$

Получен общий интеграл уравнения Эйлера для экстремалей, который справедлив при $|C| < 1$. В случае $|C| = 1$ уравнение (32) имеет частное постоянное решение $\theta = \pi/2$, не входящее в общий интеграл. Покажем, что этому решению в пространстве соответствует координатная плоскость xOy. Действительно, в декартовой системе эта плоскость описывается уравнением $z = 0$. Переходя к сферическим координатам, получаем $z = r\cos\theta = 0$, откуда следует $\theta = \pi/2$.

Уравнение (32) имеет также частное решение $\theta = 0$, которому соответствует множество плоскостей, проходящих через ось Oz. Этот вывод следует из известного из курса аналитической геометрии уравнения таких плоскостей $Ax + By = 0$, если его записать в сферических координатах,

$$Ax + By = r\sin\theta(A\cos\psi + B\sin\psi) = 0.$$

Это равенство справедливо при $\theta = 0$ и произвольных ψ.

Общий интеграл (33) приводит также к уравнению множества плоскостей. В этом убеждаемся, переходя к декартовым координатам с помощью формул (см. рис. 15)

$$z = \rho \operatorname{ctg} \theta, \quad x = \rho \cos \psi, \quad y = \rho \sin \psi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Умножая (33) на ρ, получаем уравнение

$$C_2 z = x \sin C_1 + y \cos C_1 \tag{34}$$

вида $Ax + By + Cz = 0$, которое, как известно, описывает множество плоскостей, проходящих через начало координат.

Таким образом, приведенный анализ показал, что экстремали располагаются во всевозможных плоскостях, проходящих через центр сферы. Поскольку в то же время экстремали находятся на поверхности сферы, они являются линиями пересечения указанных плоскостей и сферы. Это окружности радиуса a с центром в начале координат.

Для двух заданных точек M и N на сфере (рис. 4) экстремум функционала достигается на меньшей из двух дуг окружности, соединяющей эти точки. Уравнение окружности (геодезической линии) можно получить из системы уравнений сферы и плоскости. В частности, если точки M и N на сфере находятся в координатных плоскостях xOy, xOz, yOz имеем соответственно системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ z = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x = 0. \end{cases}$$

Отсюда следуют уравнения окружностей: $x^2 + y^2 = a^2$ - экватор, $x^2 + z^2 = a^2$ и $y^2 + z^2 = a^2$ - меридианы.

Для точек M и N на одном меридиане (в плоскости, проходящей через ось Oz), положение которого определяется углом $\psi_0 \neq \pi/2,\ 3\pi/2$ (рис. 15), имеем уравнение плоскости $y = x \operatorname{tg} \psi_0$ и систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ y = x \operatorname{tg} \psi_0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} z = \pm\sqrt{a^2 - \dfrac{x^2}{\cos^2 \psi_0}}, \\ y = x \operatorname{tg} \psi_0. \end{cases}$$

Если точки $M(x_0, y_0, z_0)$ и $N(x_1, y_1, z_1)$ находятся на разных меридианах, уравнение геодезической линии определяется системой уравнений сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ и плоскости (34), где $C_{1,2}$ вычисляются с помощью координат точек M и N. В этой системе уравнение плоскости можно записать также по известной из курса аналитической геометрии формуле для уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки $O(0, 0, 0)$, $M(x_0, y_0, z_0)$, $N(x_1, y_1, z_1)$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = x(y_0 z_1 - y_1 z_0) + y(z_0 x_1 - x_0 z_1) + z(x_0 y_1 - y_0 x_1) = 0.$$

****

Идея превратить магнетизм в электричество, то есть сделать обратное тому, что получил датский физик Х. Эрстед, занимала не только М. Фарадея, который, как мы знаем, первым открыл закон электромагнитной индукции в 1831 году. Через 9 месяцев после этого события в далеком от Лондона городе Олбани (200 км севернее Нью-Йорка) американский физик Джозеф Генри (1797-1878) независимо от М. Фарадея сделал такое же открытие. Этот результат он мог получить значительно раньше, если бы не перерыв в его занятиях наукой, сделанный по причинам, оставшимся невыясненными. Этот факт вызвал тягостные переживания ученого, сопровождавшие его всю жизнь.

Напомним, что Д. Генри открыл явление самоиндукции.

Мог обнаружить электромагнитную индукцию раньше М. Фарадея швейцарский физик Жан Колладон. Однако в ходе эксперимента он допускал досадную ошибку. Его указательный прибор находился в соседнем помещении, и пока он, подключив к источнику тока свою схему, шел к гальванометру, стрелка успевала отклониться и вернуться в исходное положение. Прожившему 90 лет Ж. Колладону было в чем упрекнуть себя за этот неудавшийся опыт.

См. далее после п. 1.15.

****

1.15 Геодезические линии на круглом цилиндре

В этой вариационной задаче функционалом является длина дуги (30). Уравнением связи (31) является уравнение цилиндра круглого сечения радиуса a (рис. 16)

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Ось цилиндра совпадает с осью Oz.

Воспользуемся цилиндрической системой координат (ρ, ψ, z) (рис. 17), в которой

$$x = \rho\cos\psi, \;\; y = \rho\sin\psi, \;\; z = z,$$

и уравнение связи записывается как

$$\rho = a.$$

Возьмем формулу длины дуги

$$l = \int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2},$$

которая в цилиндрических координатах с учетом уравнения связи $\rho = a$ принимает вид

$$l = \int \sqrt{(-a\sin\psi d\psi)^2 + (a\cos\psi d\psi)^2 + (dz)^2} = \int \sqrt{a^2(d\psi)^2 + (dz)^2}.$$

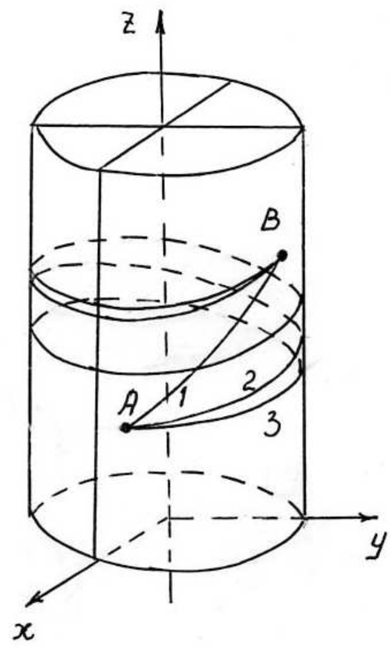

Рис. 16

Этот функционал запишем в виде (6). При этом сначала в качестве независимой переменной возьмем угол ψ, тогда

$$l = \int\limits_{\psi_0}^{\psi_1} \sqrt{a^2 + \left(\frac{dz}{d\psi}\right)^2}\, d\psi,$$

причем $\psi \neq const$. Здесь функция

$$F(z'_\psi) = \sqrt{a^2 + z'^2_\psi}$$

зависит только от производной z'_ψ, и можно воспользоваться результатом п. 1.9 (случай 2), то есть уравнение Эйлера имеет вид

$$z''_{\psi\psi} = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$z = C_1\psi + C_2.$$

Выражения для прямоугольных координат

$$x = a\cos\psi, \ \ y = a\sin\psi, \ \ z = C_1\psi + C_2$$

образуют известную систему, описывающую винтовую линию, расположенную на цилиндре. Ее ось совпадает с осью Oz. Постоянные C_1, C_2 находятся с помощью граничных значений двух точек на поверхности цилиндра $A(a, \psi_0, z_0)$ и $B(a, \psi_1 + 2k\pi, z_1)$,

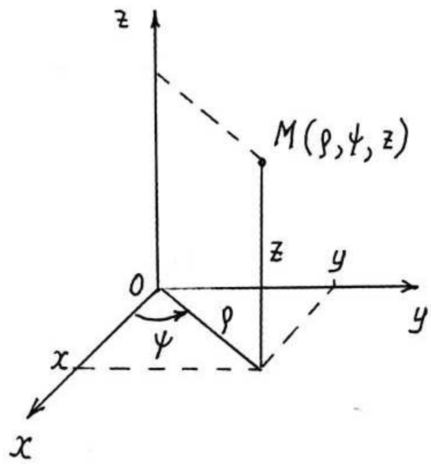

Рис. 17

где $k \in Z$ (рис. 16). Такое задание угла ψ для точки B учитывает периодичность координат x и y и допускает большое расстояние между точками A и B по угловой переменной, при котором участок винтовой линии между точками будет содержать несколько витков.

Удовлетворим граничным условиям

$$\begin{cases} C_1\psi_0 + C_2 = z_0, \\ C_1(\psi_1 + 2k\pi) + C_2 = z_1, \end{cases}$$

откуда находим C_1, C_2 и

$$z = \frac{z_1 - z_0}{\psi_1 - \psi_0 + 2k\pi}\psi + \frac{z_0(\psi_1 + 2k\pi) - z_1\psi_0}{\psi_1 - \psi_0 + 2k\pi}, \quad k \in Z.$$

Если в этом уравнении прямой угловой коэффициент $(z_1 - z_0)/(\psi_1 - \psi_0 + 2k\pi) > 0$, имеем возрастание z с увеличением ψ (правый винт). Если коэффициент отрицательный, z уменьшается с увеличением ψ (левый винт).

Шаг винтовой линии Δz находим как

$$\Delta z = |z(\psi + 2\pi) - z(\psi)| = 2\pi \left| \frac{z_1 - z_0}{\psi_1 - \psi_0 + 2k\pi} \right|.$$

На рис. 16 в качестве иллюстрации изображены экстремали в случае $z_1 > z_0$, $\psi_1 > \psi_0$ при $k = 0, 1, 2$. При $k = 0$ (линия 1) дуга, соединяющая точки A и B самая короткая. На ней имеем глобальный экстремум функционала. На остальных винтовых линиях ($k \neq 0$, на рис. 16 это кривые $2, 3$ для $k = 1$ и $k = 2$ соответственно) также имеем экстремумы, поскольку, если вместо каждой из них взять какую-либо близкую ей кривую, лежащую на цилиндре и соединяющую точки A и B, то эта близкая кривая будет длиннее соответствующего участка винтовой линии. Но эти экстремумы локальные.

Отметим, что полученная выше формула для z при $k \neq 0$ справедлива и в случае $\psi_1 = \psi_0$ (точки A и B на одной образующей цилиндра). На винтовых линиях с $k = \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ будем иметь локальные экстремумы. Экстремаль, дающая глобальный экстремум для точек на одной образующей, получается, если в функционале l в качестве независимой переменной взять z. Тогда

$$l = \int\limits_{z_0}^{z_1} \sqrt{1 + a^2 \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2}\, dz,$$

где

$$F = \sqrt{1 + a^2 \left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2}.$$

Здесь $z \neq const$ и F зависит только от производной ψ'_z. Согласно п. 1.9 (случай 2) имеем уравнение Эйлера для экстремалей

$$\psi''_{zz} = 0,$$

откуда

$$\psi = C_1 z + C_2.$$

В частности, для точек на одной образующей $A(\psi_0, z_0),\ B(\psi_0, z_1)$, удовлетворяя граничным условиям, получаем систему

$$\begin{cases} C_1 z_0 + C_2 = \psi_0, \\ C_1 z_1 + C_2 = \psi_0. \end{cases}$$

Корни $C_1 = 0,\ C_2 = \psi_0$. Значит, $\psi = \psi_0$. В цилиндрической системе это уравнение плоскости, проходящей через ось Oz. Действительно, если в уравнении такой плоскости в декартовых координатах

$$Ax + By = 0$$

перейти к цилиндрическим с помощью формул $x = \rho \cos \psi,\ \ y = \rho \sin \psi$, получим

$$\rho (A \cos \psi + B \sin \psi) = 0,$$

откуда следует $\psi = const$ или $\psi = \psi_0$. Линией пересечения этой плоскости с цилиндром является прямая

$$\begin{cases} \psi = \psi_0, \\ \rho = a \end{cases}$$

или в декартовых координатах

$$\begin{cases} x = a \cos \psi_0, \\ y = a \sin \psi_0. \end{cases}$$

Итак, геодезическими линиями на круглом цилиндре являются винтовые линии. В случае точек A и B на одной образующей геодезическая линия это сама образующая.

****

Расскажем об аспирантском экзамене Д. Максвелла в изложении П.Л. Капицы.

Происходило это в Кембридже во второй половине 19-го века. Теоретическую физику тогда преподавал английский физик и математик Джордж Габриель Стокс (1819-1903). Аспирантский экзамен в те времена был довольно трудный. Д. Стокс придерживался такой системы: давался десяток задач, и студент сам выбирал те, которые он хотел решить. Ему отводилось определенное число часов, и Д. Стокс, не стесняясь, ставил часто неразрешимые задачи, чтобы посмотреть, знает ли студент, что эта задача неразрешима. Он предлагал, например, такую задачу: найти распределение скоростей в газе. Тогда это распределение скоростей не было известно. Многие ученые считали, что скорости примерно равны. Один молодой человек к удивлению Д. Стокса решил эту задачу и решил правильно. Этот молодой человек был не кто иной, как Д. Максвелл.

****

Свою первую научную работу Д. Максвелл опубликовал, когда ему едва исполнилось 15 лет. В 25 лет он стал профессором, в 34 года на основе полученных им дифференциальных уравнений предсказал существование электромагнитных волн.

См. далее после п. 1.16.

****

1.16 Вариационные задачи на условный экстремум функционалов с интегральными связями (изопериметрические задачи)

Рассмотрим вариационную задачу для функционала

$$v[y_1, y_2, ..., y_n] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')\ dx \tag{35}$$

при наличии связей в виде интегралов

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} G_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')\ dx = l_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{36}$$

где l_i - постоянные, $m \leq n$.

Такие вариационные задачи называют *изопериметрическими.*

Сведем эту задачу на условный экстремум к задаче, изложенной в п. 1.12. Для этого введем функции

$$\int\limits_{x_0}^{x} G_i\ dx = z_i(x), \quad i = 1, 2, ..., m,$$

откуда $z_i(x_0) = 0$. Так как по условию

$$\int_{x_0}^{x_1} G_i \, dx = l_i,$$

имеем $z_i(x_1) = l_i$.

Продифференцируем $z_i(x)$ по x

$$z_i'(x) = G_i(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'), \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Итак, интегральные связи (36) заменены на дифференциальные, и задача свелась к задаче рассмотренной в п. 1.12. Теперь вместо исследования на условный экстремум функционала (35) при наличии связей

$$G_i - z_i' = 0, \quad i = 1, 2, ..., m$$

будем исследовать на безусловный экстремум функционал

$$\tilde{v} = \int_{x_0}^{x} \tilde{F} \, dx,$$

где

$$\tilde{F} = F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)(G_i - z_i').$$

Уравнения Эйлера для функционала $\tilde{v}$ имеют вид

$$\tilde{F}_{y_j}' - \frac{d}{dx}\tilde{F}_{y_j'}' = 0, \;\; j = 1, 2, ..., n; \qquad \tilde{F}_{z_i}' - \frac{d}{dx}\tilde{F}_{z_i'}' = 0, \;\; i = 1, 2, ..., m$$

или

$$F_{y_j}' + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_{iy_j}' - \frac{d}{dx}(F_{y_j'}' + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_{iy_j'}') = 0, \;\; j = 1, 2, ..., n; \tag{37}$$

$$\frac{d}{dx}\lambda_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Из последних m уравнений следует, что все λ_i постоянные, а первые n уравнений совпадают с уравнениями Эйлера для функционала

$$\tilde{\tilde{v}} = \int_{x_0}^{x_1} (F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i) \, dx = \int_{x_0}^{x_1} \tilde{\tilde{F}} \, dx. \tag{38}$$

Из приведенного анализа следует правило, полезное для практики: для получения необходимого условия в задаче о нахождении экстремума функционала (35) при наличии связей (36) надо составить вспомогательный функционал (38), где λ_i постоянные, и написать для него уравнения Эйлера (37). Произвольные постоянные $C_1, C_2, ..., C_{2n}$ в общем решении системы уравнений Эйлера и постоянные $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ определяются из граничных условий (25) и из интегральных условий (36).

****

НЕКОТОРЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ ВЫДАЮЩИХСЯ УЧЕНЫХ

М.В. Ломоносов:

Для пользы общества сколь радостно трудиться!

****

А. Эйнштейн о И. Ньютоне:

Такой человек может быть понят, только если представить его как сцену, на которой разворачивалась борьба за вечную истину.

****

С.И. Вавилов:

История русской науки показывает, что ее вершинам, ее гениям свойственна особая широта задач и результатов, связанная, однако, с удивительной почвенностью и реальностью и вместе с тем с простотой подхода к решениям.

****

А.Г. Столетов:

В электричестве человек нашел путь к решению самых разнообразных, самых фантастических задач своего ума.

****

П.Л. Капица:

Ученым следует помнить, что самые важные и интересные научные открытия - это те, которые нельзя предвидеть.

Еще Шекспир сказал устами Гамлета: Есть многое на свете, друг Горацио, что и не снилось нашим мудрецам. (There are more things in heaven and earth, Horatio, than are dreamt of in your philosophy.)

****

Дж.Дж. Томсон:

Открытия в прикладной науке могут произвести преобразование, а в чистой науке ведут к революции.

****

Очарование физики в том и состоит, что в ней нет жестких и твердых границ, что каждое открытие не является пределом, а только аллеей, ведущей в страну, еще не исследованную, и сколько бы ни существовала наука, всегда будет обилие нерешенных проблем, и физикам никогда не будет опасности стать безработными.

****

Великое открытие - это не конечная станция, а скорее дорога, ведущая в области, до сих пор неизвестные. Мы взбираемся на вершину пика, и нам открывается другая вершина, еще более высокая, чем мы когда-либо видели до сих пор, и так *продолжается дальше. Вклад, сделанный в понимание физики одним поколением, не становится меньшим или менее глубоким или менее революционным по мере того, как одно поколение сменяет другое.*

Сумма нашего знания не похожа на то, что математики называют сходящимися рядами..., где изучение нескольких членов позволяет понять общие свойства целого. Физика соответствует скорее другому типу рядов, рядам расходящимся, где добавляемые члены не становятся меньше и меньше и где нельзя считать, что выводы, к которым мы пришли при изучении нескольких известных членов, совпадут с теми, которые мы сделаем, когда наши знания будут больше.

****

Б. Паскаль:

Земную науку надо познать, чтобы ее полюбить, а божественную науку надо полюбить, чтобы ее познать.

Блез Паскаль (1623-1662) - французский математик, физик и философ. Основной закон гидростатики (закон Паскаля) сформулировал в 1653 году.

****

1.17 Задача Дидоны

В п. 1.2 имеется постановка изопериметрической вариационной задачи на вычисление границы $y(x)$ заданной длины l, при которой площадь участка принимает максимальное значение (рис. 2). Решим эту задачу. Здесь функционалом является площадь криволинейной трапеции $CABD$ (рис. 18)

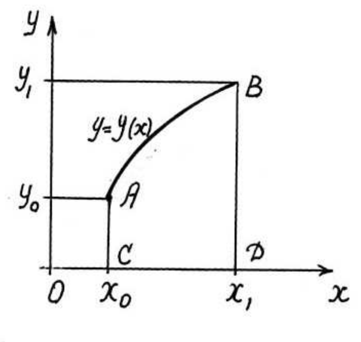

Рис. 18

$$v = S = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx, \qquad y(x_0) = y_0, \;\; y(x_1) = y_1. \tag{39}$$

Изопериметрическое условие имеет вид

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\ dx = l, \tag{40}$$

где l - заданное значение длины дуги.

Составим сначала вспомогательный функционал (38)

$$\tilde{\tilde{v}} = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y + \lambda\sqrt{1+y'^2})\ dx = \int\limits_{x_0}^{x_1} \tilde{\tilde{F}}\ dx.$$

Подынтегральная функция не содержит x, поэтому уравнение Эйлера для функционала $\tilde{\tilde{v}}$ имеет первый интеграл (16)

$$\tilde{\tilde{F}} - y'\tilde{\tilde{F}}'_{y'} = C_1$$

или

$$y + \lambda\sqrt{1+y'^2} - \lambda\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$y - C_1 = -\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Выразим производную y'

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{\lambda^2 - (y-C_1)^2}}{y - C_1}.$$

Интегрирование этого уравнения с разделяющимися переменными приводит к общему интегралу

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2, \tag{41}$$

который описывает множество окружностей радиуса λ.

Таким образом, экстремалями функционала S (39) являются окружности. Постоянные C_1, C_2, λ определяем из граничных условий (см. (39)) и условия (40). Далее будем считать $x_0 = a$, $y_0 = 0$, $x_1 = b$, $y_1 = 0$, как на рис. 2.

Подставим граничные значения в (41)

$$\begin{aligned} (a - C_2)^2 + C_1^2 = \lambda^2, \\ (b - C_2)^2 + C_1^2 = \lambda^2. \end{aligned} \tag{42}$$

Вычитая, исключаем неизвестные C_1, λ и получаем

$$C_2 = \frac{a+b}{2}. \tag{43}$$

Далее, выразим y из (41)

$$y = C_1 \pm \sqrt{\lambda^2 - (x - C_2)^2},$$

Вычислим производную

$$y' = \mp\frac{x - C_2}{\sqrt{\lambda^2 - (x-C_2)^2}}$$

и подставим это выражение в условие (40). После интегрирования с учетом формулы (43) получаем

$$l = \pm 2\lambda \arcsin \frac{b-a}{2\lambda}.$$

Учитывая, что длина $l > 0$, функция в правой части четная, оставляем знак плюс. Из этой формулы следует уравнение

$$\sin \frac{l}{2\lambda} = \frac{b-a}{2\lambda},$$

в котором при заданной длине l неизвестным является радиус окружности λ.

Введем относительные безразмерные величины: радиус окружности R и длину границы на суше L

$$R = \frac{\lambda}{(b-a)/2}, \qquad L = \frac{l}{b-a}. \tag{44}$$

Для них уравнение принимает вид

$$\sin \frac{L}{R} = \frac{1}{R}. \tag{45}$$

Заметим, что $L > 1$, поскольку в нашей задаче длина l больше отрезка $b-a$ (рис. 2).

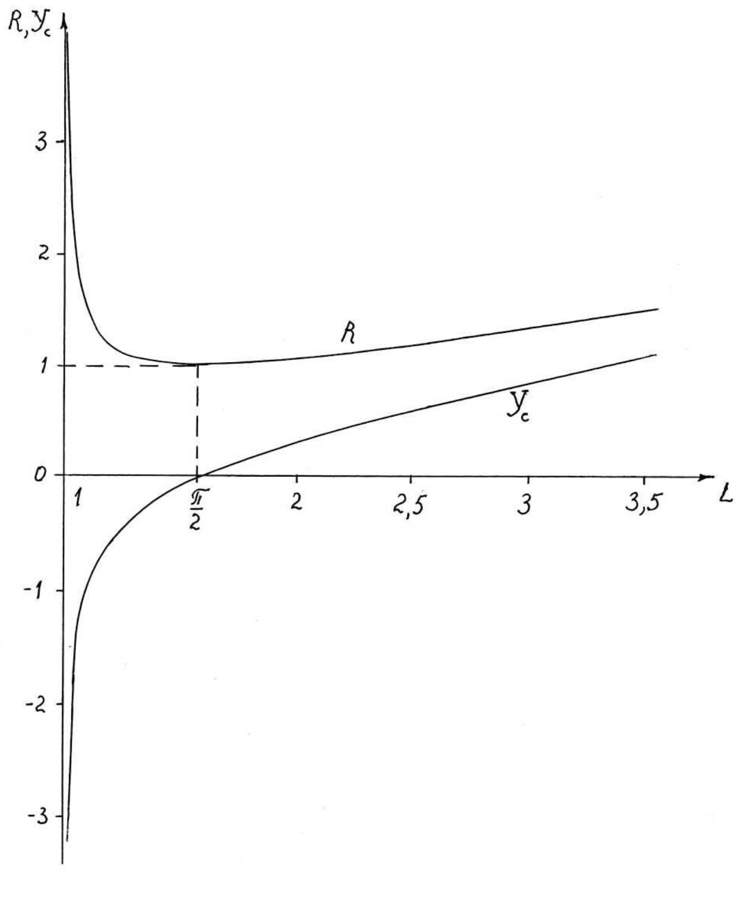

Рис. 19

На рис. 19 показана зависимость R от L.

Значения R это корни уравнения (45), которое при фиксированных L решалось численным методом.

Координату C_1 центра окружности находим из любого из выражений (42) при C_2 (43)

$$C_1 = \pm\sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2}.$$

Умножая на $2/(b-a)$, получаем

$$Y_c = \pm\sqrt{R^2 - 1}, \tag{46}$$

где

$$Y_c = \frac{C_1}{(b-a)/2}$$

- безразмерная координата по оси Oy центра окружности.

На рис. 19 показана зависимость Y_c от L, построенная по формуле (46) с использованием корней R уравнения (45). Значение $Y_c = 0$ при $R = 1$ относится к окружности, центр которой лежит на оси Ox. При этом ее диаметр равен отрезку $b - a$, длина $l = \pi(b-a)/2$ или $L = \pi/2$ (окружность 1 на рис. 20). Для больших длин l $(L > \pi/2)$ координата $C_1 > 0$ (или $Y_c > 0$), и в формуле (46) берем знак плюс (окружности $2, 3$ на рис. 20). Для меньших длин l $(L < \pi/2)$ имеем $C_1 < 0$ (или $Y_c < 0$), в формуле (46) берем Y_c со знаком минус (кривые $4, 5$ на рис. 20). Из формулы (43) следует, что центры всех окружностей находятся на прямой $x = (a+b)/2$, проходящей через середину отрезка $b - a$.

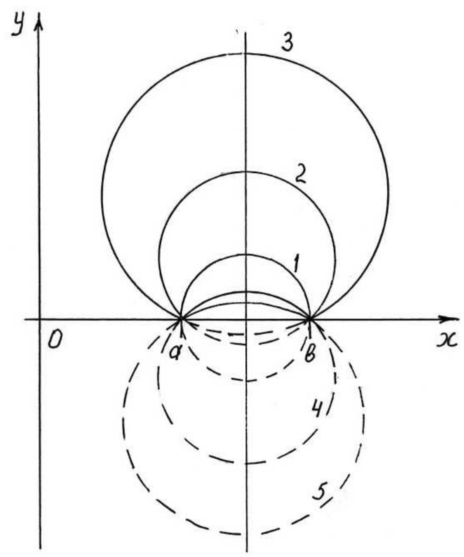

Рис. 20

1.18 О достаточных условиях экстремума функционала

Возьмем функционал (6), зависящий от одной функции. Используя формулу Тейлора с учетом равенства $(\delta y)' = \delta y'$, запишем приращение функционала Δv и в отличие от п. 1.4 будем удерживать также члены ряда со вторыми производными

$$\Delta v[y] = v[y+\delta y] - v[y] = \int\limits_a^b F(x, y+\delta y, y'+\delta y')\ dx - \int\limits_a^b F(x,y,y')\ dx =$$

$$= \int\limits_a^b \Big\{ F(x,y,y') + F'_y(x,y,y')\delta y + F'_{y'}(x,y,y')\delta y' +$$

$$+\frac{1}{2}[F''_{yy}(x,y,y')(\delta y)^2 + 2F''_{yy'}(x,y,y')\delta y \delta y' + F''_{y'y'}(x,y,y')(\delta y')^2] + ...\Big\}\ dx -$$

$$-\int\limits_a^b F(x,y,y')\ dx =$$

$$= \int\limits_a^b \Big[F'_y(x,y,y')\delta y + F'_{y'}(x,y,y')\delta y'\Big]\ dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \Big[F''_{yy}(x,y,y')(\delta y)^2 + 2F''_{yy'}(x,y,y')\delta y \delta y' + F''_{y'y'}(x,y,y')(\delta y')^2\Big]\ dx + \ldots .$$

Запишем Δv в виде

$$\Delta v[y] = \delta v[y] + \frac{1}{2}\delta^2 v[y] + \ldots . \tag{47}$$

Здесь первое слагаемое $\delta v[y]$ это вариация (7) функционала (6). Будем теперь называть ее *первой вариацией*. Выражение

$$\delta^2 v[y] = \int\limits_a^b \Big[F''_{yy}(x,y,y')(\delta y)^2 + 2F''_{yy'}(x,y,y')\delta y \delta y' + F''_{y'y'}(x,y,y')(\delta y')^2\Big]\ dx$$

называется *второй вариацией* функционала (6).

Пусть для функционала $v[y]$ при $y = y_0(x)$ выполняется необходимое условие экстремума, то есть первая вариация $\delta v[y] = 0$. Тогда в разложении (47) первый член отсутствует, и главным становится второй, содержащий вторую вариацию. Из рассуждений, как это делается в курсе математического анализа при рассмотрении экстремума функции нескольких переменных, следуют выводы:

1) если $\delta^2 v > 0$ для любой вариации δy (конечно, кроме $\delta y \equiv 0$, когда $\delta^2 v = 0$), то при $y = y_0(x)$ функционал $v[y]$ имеет минимум,

2) если $\delta^2 v < 0$ для любой вариации δy (конечно, кроме $\delta y \equiv 0$, когда $\delta^2 v = 0$), то при $y = y_0(x)$ функционал $v[y]$ имеет максимум,

3) если $\delta^2 v$ может принимать значения обоих знаков, то при $y = y_0(x)$ экстремума не будет.

В ходе дальнейшего анализа эти формулировки преобразуются для разных классов функционалов к требованиям, наложенным непосредственно на искомую функцию $y_0(x)$.

Для функционала (6) достаточные условия можно найти, например, в книгах [1,2]. Интересно, что эти условия различны для сильных и слабых экстремумов.

Достаточные условия - результат исследований Вейерштрасса Карла Теодора Вильгельма (1815-1897), Лежандра Адриена Мари (1752-1833), Якоби Карла Густава Якоба (1804-1851) и других математиков.

2 Задачи по вариационному исчислению

2.1 Функционалы, зависящие от одной функции (к п. 1.8 и п. 1.9)

В этом разделе содержатся задачи на вычисление экстремалей функционала (6)

$$v[y(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\ dx.$$

Для этого решается уравнение Эйлера (14) для экстремалей

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0,$$

которое в развернутом виде записывается как (15)

$$F'_y - F''_{xy'} - F''_{yy'} y' - F''_{y'y'} y'' = 0.$$

Граничные условия определяются формулами (12)

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Пример 1. Найдем кривую $y(x)$, на которой может достигаться экстремум функционала

$$v[y] = \int\limits_{-1}^{0} e^x (y'^2 + 6y^2)\ dx, \qquad y(-1) = 0,\ \ y(0) = 1.$$

Здесь

$$F = e^x (y'^2 + 6y^2).$$

Вычислим частные производные

$$F'_y = 12ye^x, \quad F'_{y'} = 2y'e^x.$$

Подставим в уравнение Эйлера

$$12ye^x - 2\frac{d}{dx}(y'e^x) = 0.$$

Вычисляя производную по x и, сокращая на e^x, получаем линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 + k - 6 = 0$$

имеет корни $k_1 = -3,\ k_2 = 2$, по которым записываем общее решение

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}.$$

Эти функции являются экстремалями.

Удовлетворим граничным условиям

$$\begin{aligned} &C_1 e^3 + C_2 e^{-2} = 0, \\ &C_1 + C_2 = 1 \end{aligned}$$

Корни этой системы

$$C_1 = \frac{1}{1-e^5}, \qquad C_2 = -\frac{e^5}{1-e^5}$$

подставим в общее решение

$$y = \frac{e^{-3x} - e^{2x+5}}{1-e^5}.$$

Получена экстремаль, на которой может достигаться экстремум функционала.

Пример 2. Найдем экстремали функционала

$$v[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 + \frac{2y}{\operatorname{ch} x})\, dx.$$

Здесь

$$F = y^2 + y'^2 + \frac{2y}{\operatorname{ch} x}, \qquad F'_y = 2y + \frac{2}{\operatorname{ch} x}, \quad F'_{y'} = 2y'.$$

Подставим эти производные в уравнение Эйлера

$$y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

Полученное линейное уравнение проинтегрируем методом вариации произвольных постоянных. Фундаментальную систему определяем из решения однородного уравнения по корням $k_1 = 1,\ k_2 = -1$ характеристического уравнения

$$y_1 = e^x, \ \ y_2 = e^{-x}.$$

Известно, что общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x},$$

причем для производных $C'_{1,2}(x)$ имеется алгебраическая система

$$\begin{aligned} &C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0, \\ &C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &C'_1 e^x + C'_2 e^{-x} = 0, \\ &C'_1 e^x - C'_2 e^{-x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned}$$

Складывая уравнения, находим C'_1, вычитая - C'_2

$$C'_1 = \frac{1}{1+e^{2x}}, \quad C'_2 = -\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}.$$

В результате интегрирования получаем функции

$$C_1(x) = x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + \tilde{C}_1, \quad C_2(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + \tilde{C}_2.$$

Подставим эти выражения в

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}.$$

После алгебраических преобразований с учетом известных формул

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

окончательно получаем

$$y = \tilde{\tilde{C}}_1 \operatorname{ch} x + \tilde{\tilde{C}}_2 \operatorname{sh} x + x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \ln \operatorname{ch} x.$$

Это экстремали функционала.

Задание 1. Найти кривую, на которой может достигаться экстремум функционала.

1) $v[y] = \int\limits_0^{\pi/2} (y'^2 - y^2)\,dx,$ $\quad y(0) = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,$

2) $v[y] = \int\limits_0^1 (y'^2 + 12xy)\,dx,$ $\quad y(0) = 0,\ y(1) = 1,$

3) $v[y] = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + y'^2}\,dx,$ $\quad y(0) = 0,\ y(1) = 3,$

4) $v[y] = \int\limits_0^1 (y'^2 + 4y)\,dx,$ $\quad y(0) = 0,\ y(1) = 2,$

5) $v[y] = \int\limits_{-1}^0 (y^2 + 2xyy')\,dx,$ $\quad y(-1) = 0,\ y(0) = 1,$

6) $v[y] = \int\limits_1^2 (y'^2 + 2yy' + y^2)\,dx,$ $\quad y(1) = 1,\ y(2) = 0,$

7) $v[y] = \int\limits_0^1 (y'^2 + xy)\,dx,$ $\quad y(0) = 0,\ y(1) = 0,$

8) $v[y] = \int\limits_0^1 (y'^2 + x^2 y)\,dx,$ $\quad y(0) = 0,\ y(1) = 0,$

9) $v[y] = \int\limits_0^1 (y + y'^2)\,dx,$ $\quad y(0) = 0,\ y(1) = -1,$

10) $v[y] = \int\limits_0^1 y'^2 y^2\,dx,$ $\quad y(0) = 1,\ y(1) = \sqrt{2}.$

Задание 2. Найти экстремали функционалов.

11) $v[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} y'(1 + x^2 y')\,dx,$

12) $v[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2),$

13) $v[y] = \displaystyle\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y}\,dx,$

14) $v[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y'^2 + xy')\,dx,$

15) $v[y] = \displaystyle\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{1 + y^2}{y'^2}\,dx,$

16) $v[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y'^2 + y^2 - 2y\sin x)\,dx,$

17) $v[y] = \displaystyle\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{y'^2}{x^3}\,dx,$

18) $v[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 + 2ye^x)\,dx,$

19) $v[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} (y^2 - y'^2 - 2y\sin x)\,dx,$

20)* $v[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} (x^2 y'^2 + 2y^2 + 2xy)\,dx,$

.

2.2 Функционалы, зависящие от двух функций (к п. 1.11)

Задачи этого раздела относятся к функционалу (22), зависящему от двух функций

$$v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\ dx$$

с граничными условиями (23)

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1, \qquad z(x_0) = z_0,\ z(x_1) = z_1.$$

Экстремали находим из системы уравнений Эйлера

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0, \qquad F'_z - \frac{d}{dx}F'_{z'} = 0.$$

Пример. Найдем кривые, на которых может достигаться экстремум функционала

$$v[y, z] = \int_0^{\pi/2} (y'^2 + z'^2 + 2yz)\ dx, \quad y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ z(0) = 0,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Здесь

$$F = y'^2 + z'^2 + 2yz.$$

Запишем систему уравнений Эйлера. Для этого вычислим производные

$$F'_y = 2z,\ F'_{y'} = 2y',\ \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2y'', \quad F'_z = 2y,\ F'_{z'} = 2z',\ \frac{d}{dx}F'_{z'} = 2z'',$$

и система принимает вид

$$y'' = z, \quad z'' = y.$$

Исключаем z, дифференцируя дважды первое уравнение. В результате получаем линейное однородное уравнение

$$y^{(4)} - y = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^4 - 1 = (k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0$$

имеет корни $k_1 = 1,\ k_2 = -1,\ k_3 = i,\ k_4 = -i$, позволяющие записать общее решение

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

Дифференцируя дважды это выражение, получаем

$$z = C_1e^x + C_2e^{-x} - C_3\cos x - C_4\sin x.$$

С помощью начальных значений находим постоянные $C_1 = C_2 = C_3 = 0, C_4 = 1$. Таким образом, экстремум функционала может достигаться на кривых

$$y = \sin x, \quad z = -\sin x.$$

Задание 3. Найти кривые, на которых может достигаться экстремум функционала.

21) $v[y,z] = \int\limits_0^{\pi/2} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)\,dx, \quad y(0)=0,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3,\ z(0)=0,\ z\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1,$

22) $v[y,z] = \int\limits_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\,dx, \quad y(0)=0,\ y(1)=1,\ z(0)=0,\ z(1)=1,$

23) $v[y,z] = \int\limits_0^2 (y'^2 + 2z'^2 + 2xy' + 4x^4 z)\,dx, \quad y(0)=0,\ y(2)=1,\ z(0)=0,\ z(2)=1,$

24) $v[y,z] = \int\limits_0^1 (y'^2 + yz + y'z' - 4xz')\,dx, \quad y(0)=-4,\ y(1)=0,\ z(0)=0,\ z(1)=1.$

2.3 Задачи на условный экстремум функционалов (к п. 1.12)

В этом разделе представлены задачи на экстремум функционала (24), зависящего от двух функций,

$$v[y,z] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')\,dx,$$

с граничными значениями (25)

$$y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1, \quad z(x_0)=z_0,\ z(x_1)=z_1$$

при наличии условия (26)

$$\varphi(x,y,z)=0.$$

Используется метод множителей Лагранжа. Для функционала v составляют вспомогательный функционал

$$\tilde{v} = \int\limits_{x_0}^{x_1} \tilde{F}\,dx,$$

в котором

$$\tilde{F} = F + \lambda\varphi.$$

Экстремали находят из системы уравнений (29)

$$\tilde{F}'_y - \frac{d}{dx}\tilde{F}'_{y'} = 0, \quad \tilde{F}'_z - \frac{d}{dx}\tilde{F}'_{z'} = 0, \quad \varphi = 0.$$

Пример. Найдем кривые, на которых может достигаться экстремум функционала

$$v[y,z] = \int\limits_0^1 (4y'^2 + z'^2 + 16y)\,dx, \quad y(0)=0,\ y(1)=\frac{1}{2}, \quad z(0)=0,\ z(1)=1$$

при условии

$$2y - z = 0.$$

Эту задачу решим двумя способами.

1-й способ. Сведем эту задачу на условный экстремум к задаче на безусловный экстремум. Для этого из уравнения связи выразим z

$$z = 2y$$

и подставим в функционал v. Получаем функционал, зависящий только от y

$$v[y] = \int_0^1 (8y'^2 + 16y)\,dx.$$

Здесь

$$F = 8y'^2 + 16y, \quad F'_y = 16, \quad F'_{y'} = 16y', \quad \frac{d}{dx}F'_{y'} = 16y'',$$

и уравнение Эйлера для экстремалей имеет вид

$$y'' - 1 = 0.$$

Интегрируя дважды, находим

$$y = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

С учетом граничных условий $y(0) = 0$, $y(1) = 1/2$ получаем кривые, на которых может достигаться экстремум функционала

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad z = 2y = x^2.$$

2-й способ. Решим задачу с использованием множителей Лагранжа. Для этого запишем вспомогательный функционал

$$\tilde{v} = \int_0^1 \tilde{F}\,dx = \int_0^1 [4y'^2 + z'^2 + 16y + \lambda(2y - z)]\,dx$$

и уравнения Эйлера для этого функционала. Поскольку

$$\tilde{F}'_y = 16 + 2\lambda, \quad \tilde{F}'_{y'} = 8y', \quad \frac{d}{dx}\tilde{F}'_{y'} = 8y''$$

и

$$\tilde{F}'_z = -\lambda, \quad \tilde{F}'_{z'} = 2z', \quad \frac{d}{dx}\tilde{F}'_{z'} = 2z'',$$

получаем систему уравнений, состоящую из двух уравнений Эйлера и уравнения связи

$$\begin{cases} 4y'' = 8 + \lambda, \\ 2z'' = -\lambda, \\ z = 2y. \end{cases}$$

Подставим z из третьего уравнения во второе уравнения

$$\begin{cases} 4y'' = 8 + \lambda, \\ 4y'' = -\lambda, \\ z = 2y. \end{cases}$$

Теперь из первого уравнения вычтем второе, что дает $\lambda = -4$. Подставляя это значение в первое уравнение, получаем

$$y'' = 1,$$

откуда следует

$$y = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Из третьего уравнения находим

$$z = x^2 + 2C_1 x + 2C_2.$$

С помощью граничных значений получаем $C_1 = C_2 = 0$. Окончательно

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad z = x^2.$$

Задание 4. Найти кривые, на которых может достигаться условный экстремум функционалов.

25) $v[y,z] = \int\limits_0^{\pi/8} ((1-x^2)y'^2 + z'^2 + 2(1-x)yy' - 17y^2)\, dx, \quad y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1,$
$z - xy = 0,$

26) $v[y,z] = \int\limits_0^{1} (2y'^2 - z'^2 + z^2 + 2y'e^x)\, dx, \quad y(0) = 1,\ y(1) = 0, \qquad z - y - e^x = 0,$

27) $v[y,z] = \int\limits_0^{\sqrt{3}} (y'^2 - y^2 + 4z - z')\, dx, \quad y(0) = 0,\ y(\sqrt{3}) = 2, \qquad z - y^2 = 0,$

28) $v[y,z] = \int\limits_0^{2} (y^2 + z'^2 + 2yy' + 2z')\, dx, \quad y(0) = 0,\ y(2) = 2, \qquad z - 2y - 1 = 0.$

2.4 Задачи на условный экстремум функционалов с интегральными связями (изопериметрические задачи, к п. 1.16)

Будем решать вариационные задачи для функционала вида (35)

$$v[y(x), z(x)] = \int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\, dx$$

с граничными значениями

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1, \quad z(x_0) = z_0,\ z(x_1) = z_1$$

при наличии интегрального условия (см. формулу (36))

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y', z, z')\ dx = l,$$

где l - постоянная.

Согласно выводам, сделанным в п. 1.16, необходимо составить вспомогательный функционал вида (38)

$$\tilde{v} = \int_{x_0}^{x_1} (F + \lambda G)\ dx = \int_{x_0}^{x_1} \tilde{F}\ dx,$$

где λ - постоянный множитель, и записать для него уравнения Эйлера

$$\tilde{F}'_y - \frac{d}{dx}\tilde{F}'_{y'} = 0, \quad \tilde{F}'_z - \frac{d}{dx}\tilde{F}'_{z'} = 0.$$

Произвольные постоянные $C_{1,2,3,4}$ в общем решении этой системы уравнений и λ определяются из граничных условий и интегрального условия.

Пример. Найдем экстремали функционала

$$v[y] = \int_0^1 (y'^2 + x^2)\ dx, \quad y(0) = 0, \ \ y(1) = 0$$

при условии

$$\int_0^1 y^2\ dx = 2.$$

Здесь функционал зависит от одной функции и $F = y'^2 + x^2$, $\ G = y^2$. Запишем $\tilde{F}$

$$\tilde{F} = F + \lambda G = y'^2 + x^2 + \lambda y^2.$$

С помощью производных

$$\tilde{F}'_y = 2\lambda y, \quad \tilde{F}'_{y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx}\tilde{F}'_{y'} = 2y''$$

получаем уравнение Эйлера

$$y'' - \lambda y = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$k^2 = \lambda$$

определяются знаком λ. Рассмотрим три случая.

1) $\lambda < 0$. Корни $k_{1,2} = \pm i\sqrt{-\lambda}$ мнимые сопряженные, и общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\ x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\ x).$$

Удовлетворим граничным условиям

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_1 \cos\sqrt{-\lambda} + C_2 \sin\sqrt{-\lambda} = 0. \end{cases}$$

Отсюда при $C_2 \neq 0$ следует равенство $\sqrt{-\lambda} = \pi n,\ \ n \in Z$ или $\lambda = -(\pi n)^2$.

Решение y принимает вид

$$y = C_2 \sin(\pi n x).$$

Постоянную C_2 найдем из интегрального условия

$$\int\limits_0^1 C_2^2 \sin^2(\pi n x)\ dx = 2,$$

которое может выполняться, если $n \neq 0$. После интегрирования получаем $C_2 = \pm 2$. Таким образом, экстремали, на которых возможен условный экстремум функционала, определяются выражением

$$y = \pm 2 \sin(\pi n x), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots\ .$$

2) $\lambda = 0$. Здесь имеем кратный корень $k_{1,2} = 0$ и общее решение уравнения Эйлера

$$y = C_1 x + C_2.$$

Удовлетворим граничным условиям

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 + C_2 = 0, \end{cases}$$

откуда следуют значения $C_1 = C_2 = 0$ и тривиальное решение $y = 0$ уравнения Эйлера, при котором интегральное условие не выполняется.

3) $\lambda > 0$. Корни $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$ вещественные, решение

$$y = C_1 e^{\sqrt{\lambda}\, x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}\, x}.$$

Из граничных условий находим $C_1 = C_2 = 0$. Вновь получаем тривиальное решение $y = 0$, не удовлетворяющее интегральному условию.

Окончательно, экстремум функционала возможен на кривых

$$y = \pm 2 \sin(\pi n x), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots\ .$$

Задание 5. Найти экстремали функционалов с интегральными условиями.

29) $v[y] = \int\limits_0^2 y'^2\ dx, \quad y(0) = 0,\ y(2) = 1, \qquad \int\limits_0^2 y\ dx = \dfrac{2}{3},$

30) $v[y, z] = \int\limits_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\ dx, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1,\ z(0) = 0, ,\ z(1) = 1,$

$\int\limits_0^1 (y'^2 - z'^2 - xy')\ dx = 2.$

****

Ответы

1) $y=\sin x$. **2**) $y=x^3$ **3**) $y=3x$. **4**) $y=x^2+x$. **5**) На любой непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-1,0]$ функции, удовлетворяющей заданным граничным условиям, может быть экстремум функционала.
6) $y=(e^{-x+3}-e^{x-1})/(e^2-1)$. **7**) $y=(x^3-x)/12$. **8**) $y=(x^4-x)/24$.
9) $y=(x^2-5x)/4$. **10**) $y=\sqrt{1+x}$. **11**) $y=C_1/x+C_2$. **12**) $y=C_1\cos(4x)+C_2\sin(4x)$. **13**) $y^2+(x+C_1)^2=C_2$. **14**) $y=-x^2/4+C_1x+C_2$. **15**) $y=\operatorname{sh}(C_1x+C_2)$. **16**) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+0,5\sin x$. **17**) $y=C_1x^4+C_2$. **18**) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+0,5xe^x$. **19**) $y=C_1\cos x+C_2\sin x-0,5x\cos x$.
20) $y=C_1/x^2+C_2x+x\ln|x|/3$. **21**) $y=x\cos x+3\sin x,\ z=x\cos x+\sin x$.
22) $y=x,\ z=x$. **23**) $y=-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{3x}{2},\ z=\dfrac{x^6}{30}-\dfrac{17x}{30}$. **24**) $y=4\dfrac{e^x-e^{-x}}{e-e^{-1}}-4,\ z=\dfrac{(5e+3e^{-1})(e^x-e^{-x})}{(e-e^{-1})^2}-\dfrac{4x(e^x+e^{-x})}{e-e^{-1}}$. **25**) $y=\sin(4x),\ z=x\sin(4x)$.
26) $y=\dfrac{(1+0,5e^2)e^x-1,5e^{2-x}}{1-e^2}+\dfrac{1}{2}xe^x,\ z=\dfrac{(1+0,5e^2)e^x-1,5e^{2-x}}{1-e^2}+\dfrac{1}{2}xe^x+e^x$.
27) $y=\dfrac{2\operatorname{sh}(\sqrt{3}\ x)}{\operatorname{sh}3},\ z=\left(\dfrac{2\operatorname{sh}(\sqrt{3}\ x)}{\operatorname{sh}3}\right)^2$. **28**) $y=\dfrac{2\operatorname{sh}(0,5x)}{\operatorname{sh}1},\ z=\dfrac{4\operatorname{sh}(0,5x)}{\operatorname{sh}1}+1$.
29) $y=\dfrac{x^2}{4}$. **30**) $y=\dfrac{7x}{2}-\dfrac{5x^2}{2}$ и $y=3x^2-2x$.
* * * * * * * * * * * * * * *
А) $F=q_1q_2/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2)$ – сила взаимодействия точечных зарядов на расстоянии r, ε_0 – электрическая постоянная, ε – относительная диэлектрическая проницательность среды.
Б) Эрстед наблюдал отклонение магнитной стрелки от первоначального положения при пропускании тока по проводнику, что указывает на существование магнитного поля вокруг проводника с током.
В) $B=\mu_0\mu I/(2\pi r)$ – индукция магнитного поля на расстоянии r от проводника, где I – сила тока, μ_0 – магнитная постоянная, μ – относительная магнитная проницаемость срелы.
Г) Силовыми линиями электрического (магнитного) поля называются воображаемые линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением напряженности электрического поля (индукции магнитного поля).
Д) 1) $U=RI$, U – падение напряжения, I – сила тока, R – сопротивление;
2) $E=(R+r)I$, E – электродвижущая сила источника, I – сила тока, R – сопротивление внешней цепи, r – внутреннее сопротивление источника тока;
3) $U_L=L(dI/dt)$, U_L – падение напряжения на индуктивности L, I – сила тока.
4) $U_C=\int Idt/C$, U_C – падение напряжения на емкости C, I – сила тока.
Е) $E=-d\Phi/dt$, E – электродвижущая сила в проводнике, Φ – магнитный поток.
Ж) Явлением самоиндукции называется возникновение электродвижущей силы в цепи в результате изменения тока в этой цепи.
З) $rot\ \mathbf{E}=-\partial\mathbf{B}/\partial t,\ rot\ \mathbf{H}=\mathbf{j}+\partial\mathbf{D}/\partial t,\ div\ \mathbf{D}=\rho,\ div\ \mathbf{B}=0$, где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ – напряженность и индукция электрического поля, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ – напряженность и индукция магнитного поля, $\mathbf{j}$ – плотность тока, ρ – плотность заряда.
И) $v=c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, где c – скорость света в вакууме, ε, μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.
К) $\lambda=v/\nu=\mathbf{2}\pi v/\omega$, где λ – длина волны, v – скорость волны, ν – частота, $\omega=$

$\mathbf{2}\pi\nu$ – циклическая частота.
Л) Красный–оранжевый–желтый–зеленый–голубой–синий–фиолетовый (в этой последовательности длина волны уменьшается, частота растет).
М) сверхдлинные волны ($\lambda > 10000m$) –– длинные волны ($3000m < \lambda < 10000m$) – – средние волны ($200m < \lambda < 3000m$) – – промежуточные волны ($50m < \lambda < 200m$) – – короткие волны ($10m < \lambda < 50m$) – – метровые волны ($1m < \lambda < 10m$) – – дециметровые волны ($0.1m < \lambda < 1m$) – – сантиметровые волны ($1cm < \lambda < 10cm$) – – миллиметровые волны ($1mm < \lambda < 1cm$) – – субмиллиметровые волны ($0.1mm < \lambda < 1mm$) – – инфракрасное излучение – – видимый свет – – ультрафиолетовое излучение –– рентгеновское излучение –– гамма-излучение.

Приложение 1

Краткая биография Леонарда Эйлера

Леонард Эйлер родился 15 апреля 1707 года в Базеле (Швейцария) в семье пастора Пауля Эйлера и его жены Маргариты (урожденной Брукер), дочери священника. Учился в базельской латинской гимназии и в 13-летнем возрасте стал студентом факультета искусств Базельского университета, где преподавал Иоганн Бернулли, который индивидуально занимался со способным мальчиком. В 1724 году 17-летний Леонард был удостоен ученой степени магистра.

После отказа в университете на конкурсе по кафедре физики (ему тогда было 19 лет) принимает решение ехать в Россию в Петербург, где к тому времени жили сыновья Иоганна Бернулли - Николай и Даниил. С конца мая 1727 года Леонард Эйлер в Петербурге. Через несколько месяцев он бегло говорил по-русски.

Работал Л. Эйлер в Петербургской Академии наук. За первые 14 лет он написал 80 крупных научных работ, выполнял поручения по практическим проблемам: читал лекции студентам университета, принимал экзамены в Кадетском корпусе, занимался вопросами устройства пожарных насосов и механических пил, работал в комиссии мер и весов, в Географическом департаменте и т. д. Л. Эйлер стал академиком и профессором чистой математики.

В 26-летнем возрасте женился на Екатерине Гзелль, дочери художника из Амстердама Георга Гзелля, которого еще Петр I пригласил в Петербург. Ей тоже было 26.

В 1740 году умерла императрица Анна Иоанновна. Сложилась неустойчивая политическая обстановка, которую особенно остро почувствовали иностранцы. "Предвиделось нечто опасное..." - писал Л. Эйлер. Он принял предложение прусского короля Фридриха II работать в Берлинской Академии на выгодных условиях.

В июне 1941 года после 14-летнего пребывания в России Леонард Эйлер с женой, двумя сыновьями и четырьмя племянниками прибыл в Берлин, где стал директором математического отделения Прусской (Берлинской) Академии наук.

В течение всего времени пребывания в Берлине Л. Эйлер оставался почетным членом Петербургской Академии.

В Берлине он активно занимался научной работой. Здесь заложил основы новой математической науки - вариационного исчисления (публикация 1744 года). В

1759 году Л. Эйлер получил экземпляр теоретической работы 23-летнего Жозефа Луи Лагранжа “О способах нахождения наибольших и наименьших значений величин интегралов” до опубликования работы. Л. Эйлер очень высоко оценил работу. Затем Лагранж развил и дополнил многие результаты Л. Эйлера по вариационному исчислению, а во многих отношениях продвинулся дальше.

В 1766 году после 25-летнего пребывания в Берлине по приглашению Екатерины II Л. Эйлер возвратился в Петербург и продолжил работу в Академии наук. Скоро он перестал видеть, однако это не отразилось на его работоспособности. В работе помогали старший сын Иоганн Альбрехт - математик и физик и ученики.

В 1773 году умерла жена Л. Эйлера, с которой он прожил почти 40 лет.

18 сентября 1783 года ушел из жизни сам гений. Леонард Эйлер похоронен в Петербурге, где он прожил в общей сложности 31 год.

Любовь к математике от отца перешла трем сыновьям: Иоганну Альбрехту - профессору математики, Карлу, который стал видным медиком, и Христофору, которого увлекла карьера военного (завершил службу в России генерал-лейтенантом).

Примечание. Пребывание Л. Эйлера в России приходится на время царствования

1) Петра II, внука Петра I и сына царевича Алексея (годы правления 1727-1730, в январе 1730 года юный царь сильно простудился, заболел и умер, с его смертью оборвалась мужская линия династии Романовых),

2) Анны Иоанновны, годы правления 1730-1740 (вторая дочь царя Ивана Y, который был братом и соправителем Петра I),

3) Екатерины II (правила с 1762 по 1796 год).

Приложение 2

Завещание Альфреда Нобеля

Я, нижеподписавшийся, Альфред Бернхард Нобель, обдумав и решив, настоящим объявляю мое завещание по поводу имущества, нажитого мною к моменту смерти.

Все остающееся после меня реализуемое имущество необходимо распределить следующим образом: капитал мои душеприказчики должны перевести в ценные бумаги, создав фонд, проценты с которого будут выдаваться в виде премии тем, кто в течение предшествующего года принес наибольшую пользу человечеству. Указанные проценты следует разделить на пять равных частей, которые предназначаются: первая часть тому, кто сделал наиболее важное открытие или изобретение а области физики, вторая - тому, кто совершил крупное открытие или усовершенствование в области химии, третья - тому, кто добился выдающихся успехов в области физиологии или медицины, четвертая - создавшему наиболее значительное литературное произведение, отражающее человеческие идеалы, пятая - тому, кто внесет весомый вклад в сплочение народов, уничтожение рабства, снижение численности существующих армий и содействие мирной договоренности. Премии в области физики и химии должны присуждаться Шведской королевской академией наук, по физиологии и медицине - Королевским Каролинским институтом в Стокгольме, по литературе - Шведской академией в Стокгольме, премия мира - комитетом из пяти человек, избираемым норвежским стортингом. Мое особое желание заключается в том, чтобы на присуждение премий не влияла национальность кандидата, чтобы премию получали наиболее достойные, независимо от того, скандинавы они или нет.

Сие завещание является последним и окончательным, оно имеет законную силу и отменяет все мои предыдущие завещания, если таковые обнаружатся после моей смерти.

Наконец, последнее мое обязательное требование состоит в том, чтобы после моей кончины компетентный врач однозначно установил факт смерти, и лишь после этого мое тело следует предать сожжению.

Париж, 27 ноября 1895 г. *Альфред Бернхард Нобель*

Примечание: стортинг - норвежский парламент, состоящий из верхней и нижней палат.

Список литературы

1. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М. : Эдиториал УРСС, 2000. – 319 с.
2. Мышкис А.Д. Математика. Специальные курсы / А.Д. Мышкис. – СПб.: Лань, 2002. – 640 с.
3. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. IV. Часть 1. / В.И. Смирнов. – М. : Наука, 1974. – 336 с.

Содержание