

Вячеслав Васильевич Степанов
КУРС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к пятому изданию	5
От издательства	6
Глава I. Общие понятия. Интегрируемые типы уравнений первого порядка, разрешённых относительно производной	7
§ 1. Введение	7
§ 2. Метод, разделения переменных	18
§ 3. Однородные уравнения	27
§ 4. Линейные уравнения	34
§ 5. Уравнение Якоби	41
§ 6. Уравнение Риккати	47
Глава II. Вопросы существования решений уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной	57
§ 1. Теорема существования (Коши и Пеано)	57
§ 2. Особые точки	76
§ 3. Интегрирующий множитель	94
Глава III. Уравнения первого порядка, не разрешённые относительно производной	104
§ 1. Уравнения первого порядка n -й степени	104
§ 2. Уравнения, не содержащие явно одного из переменных	110
§ 3. Общий метод введения параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро	113
§ 4. Особые решения	120
§ 5. Задача о траекториях	135
Глава IV. Дифференциальные уравнения высших порядков	140
§ 1. Теорема существования	140
§ 2. Типы уравнений n -го порядка, разрешаемые в квадратурах	154
§ 3. Промежуточные интегралы. Уравнения, допускающие понижение порядка	167
§ 4. Уравнения, левая часть которых является точной производной	177
Глава V. Общая теория линейных дифференциальных уравнений	180
§ 1. Определения и общие свойства	180
§ 2. Общая теория линейного однородного уравнения	183
§ 3. Неоднородные линейные уравнения	199
§ 4. Сопряжённое уравнение	205
Глава VI. Частные виды линейных дифференциальных уравнений	214
§ 1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами и приводимые к ним	214
§ 2. Линейные уравнения второго порядка	241
Глава VII. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений	260
§ 1. Нормальная форма системы дифференциальных уравнений	260
§ 2. Системы линейных дифференциальных уравнений	270
§ 3. Существование производных по начальным значениям от решений	298

системы	
§ 4. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений	307
§ 5. Симметричная форма системы дифференциальных уравнений	312
§ 6. Устойчивость по Ляпунову. Теорема об устойчивости по первому приближению	317
Глава VIII. Уравнения с частными производными. Линейные уравнения в частных производных первого порядка	330
§ 1. Постановка задачи об интегрировании уравнений с частными производными	330
§ 2. Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка	338
§ 3. Линейные неоднородные уравнения с частными производными первого порядка	343
Глава IX. Нелинейные уравнения в частных производных первого порядка	355
§ 1. Система двух совместных уравнений первого порядка	355
§ 2. Уравнение Пфаффа	360
§ 3. Полный, общий и. особый интегралы уравнения в частных производных первого порядка	370
§ 4. Метод Лагранжа-Шарпи нахождения полного интеграла	381
§ 5. Метод Коши для двух независимых переменных	393
§ 6. Метод Коши для n независимых переменных	406
§ 7. Геометрическая теория уравнений с частными производными первого порядка	420
Глава X. Исторический очерк	428
Ответы	459
Алфавитный указатель	466

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(Д. у. — дифференциальное уравнение)

Абель Н. 447	Бернулли Я. 38, 433
Александров П. С. 457	Бернштейн С. Н. 456, 457
Амплитуда колебания 219	Бессель Ф. 451
Аналитическая теория д. у. ^х) 108	Бесселевы функции 245, 250
Андронов А.А. 457	Бессела уравнение 237, 238, 242, 244, 245, 250, 255
Арбог Л. 441	Билинейная форма 290
Арцела теорема 69	Биркгоф Д. 45В
Аффинная группа 36	Боголюбов Н. Н. 457, 458
Барроу И. 430	Больцано Б. 440, 446
Бендиксон И. 84, 92, 455	Брук И. С. 458
Бернулли Д. 433—436, 440, 449, 451, 452	Вандермонда определитель 216
Бернулли И. 38, 433	Ванцель П. 447
Бернулли Н. 435	Вариации уравнения в вариациях 304, 320
Бернулли уравнение 38	

- Вариация постоянного 35, 201, 281
 Вейерштрасса теорема 166
 Вековой член 231
 Векуа И. Н. 457
 Винтнер А. 75
 Возврата точки 130
 Вполне интегрируемое уравнение 362
 Вронский Г. 435
 Вронского определитель 185
 Второго порядка линейное уравнение 192, 241
 Высших порядков д. у. 140
 Галеркин Б. В. 458
 Галилей Г. 429, 439
 Галуа Э. 447
 Гамильтона функция 412
 Гармоническое колебание 218
 Гаусс К. 446, 451
 Геометрическая теория уравнений в частных производных 420
 Гершгорин С. А. 458
 Гипергеометрический ряд 249
 Гипергеометрическое уравнение 247
 Гиперповерхность 315, 336
 Главные моменты инерции 312
 Гомотетия 33
 Грина функция 211
 Группа преобразований 32
 Гурса Э. 451
 Гутенмахер Л. И. 458
 Гюнтер Н. М. 457
 Давидов А. Ю. 452
 Даламбер Ж. 434, 437, 439, 441, 442, 443, 445, 452
 Дарбу Г. 54, 449, 450
 Дарбу уравнение 54
 Движение 267, 317
 — возмущённое 318
 — невозмущённое 318
 — стационарное 267
 Дебон Ф. 429
 Декарт Р. 429
 Декремент логарифмический 220
 Делители элементарные матрицы 291
 Дикритический узел 84, 92
 Динамика точки 162
 Динамическая система 267
 Дирихле формула 155
 Дискриминантная кривая 126
 Дифференциальное уравнение (см. также соотв. название д. у.)
 Дифференциальный оператор 183
 Дифференциалы полные, точные 94
 Егоров Д. Ф. 41, 450
 Единственность решения я. у. 63, 120, 150
 Ермаков В. П. 450
 Живых сил интеграл 163
 Задача Коши 140, 152, 335, 339, 348, 352, 390, 401, 411
 Зернов Н. Е. 453
 Изогональные траектории 135
 Изоклины 11
 Имшенецкий В. Г. 451, 452, 453, 455
 Инвариантный множитель 291
 Инволюция 385
 Инерции момент 312
 Интеграл д. у. 22
 — живых сил 163
 — общий 151, 167, 375
 — особый 374
 — первый 168
 — полный 414
 — промежуточный 167
 — системы д. у. 308
 Интегральная гиперповерхность 338
 — кривая 10, 32, 84, 423
 — поверхность 378
 Интегральный элемент 407
 Интегрирование д. у. 7, 8
 Интегрируемости условие 95
 Интегрирующий множитель 97, 98, 363
 Истечение жидкости из сосуда 25
 Каменков Г. В. 457

- Каналов поверхность 379
 Каноническая система д. у. 260, 412
 Канторович Л. В. 458
 Квадратура 8, решение д. у. в квадратурах 20, 154
 Келдыш М. В. 458
 Клейн ф. 153
 Клеро А. 434, 435, 437
 —уравнение 117, 130
 — —обобщённое 389
 Кнезера теорема 256
 Ковалевская С. В. 332, 335, 448, 455
 Колебание гармоническое 218
 — затухающее 220
 —упругое 219, 230
 Колеблющееся в интервале решение 251
 Комплексная область (теорема существования)74
 Конус Т 420
 Коркин А. Н. 450
 Коши О. 440, 446, 447, 448, 452
 — доказательство существования 57
 — задача (см. задача Коши)
 — метод 393, 406
 — нормальная форма 262
 — формула 156
 Крейн М. Г. 457
 Кривая дискриминантная 126
 —интегральная 10, 32, 84, 423
 — Монжа 423
 — характеристическая 351
 Кристаль Г. 449
 Кристофель Э. 435
 Крылов А. Н. 458
 Крылов Н. М. 457, 458
 Курно А. 449
 Лаврентьев М. А. 457
 Лагранж Ж. 434, 435, 437, 438, 441, 442, 443
 Лагранжа уравнение 116
 Лагранжа-Шарпи метод 381
 Ламэ Г. 451
 Лаплас П. 441, 442
 Лаппо-Данилевский И. А. 457
 Лежандр А. 451
 Лежандра уравнение 247, 251
 Лежен-Дирихле П. 446
 Лейбниц Г. 430, 433
 Лексель А. И, 435, 438
 Летников А. В. 451
 Ли С. 33, 444, 453, 454
 Линейно зависимая система 278
 —независимая система 277, 278
 Линейные уравнения 100, 180
 — —второго порядка 192, 241
 — —в частных производных 338
 — —первого порядка 34
 — —с постоянными коэффициентами 214
 — —, системы 250
 — —, частные виды 214
 Линейный дифференциальный оператор 183
 Линии погони 170
 — тока 268
 —характеристические 380
 Липшиц Р. 448
 Липшица условие 58
 Лиувилль Ж. 53, 449, 450, 451
 Лиувилля-Остроградского формула 192
 Лобачевский Н. И. 446, 447, 453, 457
 Логарифмический декремент 220
 Лузин Н. Н. 488
 Люстерник Л. А. 458
 Ляпунов А. М. 453, 455
 Майера скобка 385
 Максимович В. П. 449
 Малкин И. Г. 457
 Марков А. А. 457
 Маятник математический Юб
 Мгновенная скорость 312
 Метод (см. соответств. название)
 Микеладзе Ш. Е. 458
 Миндинг Ф. Г. 450, 455
 Многочлен неприводимый 108

- приводимый 108
- характеристический 215
- Чебышева 237
- Множитель инвариантный 291
- интегрирующий 97,- 98, 363
- Моисеев Н. Д. 457
- Моменты инерции главные 312
- Монж Г. 443, 444, 445
- Монжа кривые 423
- обозначения 351
- уравнения 260
- Мордухай-Болтовской Д. Д. 449
- Муаньо Ф. 448, 449
- Мусхелишвили Н. И. 457
- Мышкис А. Д. 457
- Направлений поле 11
- Начальная фаза 219
- Начальные значения особые 314
- условия 9
- Неколеблющееся в интервале решение 251
- Нелинейные уравнения в частных производных 355
- Немыцкий В. В. 457
- Неоднородная линейная система 271
- Неоднородное уравнение, формула Коши 212
- — линейное 34, 180, 199, 224
- Непер Д. 428, 429
- Неприводимый многочлен 108
- Неустойчивое положение равновесия 165
- Нормальная форма Коши 262
- — системы д. у. 260
- Нормальной формы система 241
- Ньютон И. 430, 431, 432
- Общее решение 7, 12, 18
- уравнения в частных производных 333
- Общий интеграл 151, 167, 375
- — системы д. у. 308
- Огибающая 122, 132
- Однородная линейная система 271
- Однородные уравнения 27, 34
- — — линейные 34
- — — в частных производных 338
- — — с постоянными коэффициентами 214
- Оператор дифференциальный 183
- самосопряжённый 208
- Определитель Вандермонда 216
- Вронского 185
- Ортогональные траектории 135
- Особые начальные значения 314
- решения 121, 131
- точки 76
- Особый интеграл 374
- Остроградский М. В. 450, 453
- Остроградского-Лиувилля формула 192
- Панов Д. Ю. 458
- Пеано Д. 448
- Первого порядка д. у. 9
- — — линейные уравнения 34
- — — уравнения в частных производных 99
- — характеристика 395, 407, 409
- приближения система 320
- Первый интеграл 168
- — системы д. у. 308
- Переменных разделение 23, 388
- Перенос 32
- Период колебания 219
- Персидский К.П. 457
- Петерсон К. М. 452
- Петровский И. Г. 332, 457, 458
- Пикар Э. 448, 449
- Пикара доказательство существования 57
- метод последовательных приближений 142
- Поверхность интегральная 378
- Погони линии 170
- Подобие ,33

- Поле направлений 11
- Полные дифференциалы 94
- Полный интеграл 414
- Полоса характеристическая 381
- Понижение порядка д. у. 167, 173, 198, 200
- Порядок д. у. 10
 - уравнения с частными производными 330
- Последовательных приближений метод 57 74, 144
- Постоянная энергии 419
- Постоянного вариация 35, 201, 281
- Постоянные коэффициенты, д. у. с постоянными коэффициентами 214
- Преобразование переноса 32
 - подобия 33
- Преобразований группа 32
- Приводимый многочлен 108
- Прикосновения точки 130
 - элемент 378
- Продолжение решения д. у. 65
- Производная точная 177
- Производных существование 298
- Промежуточный интеграл 167
- Пространство фазовое 266
- Пуанкаре А. 84, 455
- Пуассон 453
- Пуассона скобка 385
- Пфафф И. 444, 451
- Пфаффа уравнение 360, 387
- Пфаффо́ва форма 366
- Пеано Д. 68, 448
- Пеано теорема 68
- Равновесия положение 165
- Разделение переменных 23, 388
- Решение д. у. 7, 8
 - особое 121. 131
- Риккати Д. 434, 436
- Риккати уравнение 47, 50, 244
- Рикье, теорема существования 332
- Руффини П. 447
- Ряд гипергеометрический 249
 - степенной 245
- Ряды тригонометрические 233
- Самосопряжённое уравнение 208
- Самосопряжённый оператор 208
- Свободное гармоническое колебание 218
- Седловина 79
- Сила живая 163
- Симметричная форма системы д. у. 313
- Синцов Д. М. 452
- Система динамическая 267
 - д. у. 260
 - — — в частных производных 331
 - каноническая 260, 412
 - — — фундаментальная 187
- Скобка Майера 385
 - Пуассона 385
- Скорость мгновенная 312
- Смирнов В. И. 457
- Соболев С. Л. 457
- Совместности условия 332, 356
- Совместные уравнения 355
- Сонин Н. Я. 451, 453
- Сопряженное дифференциальное выражение 206
 - уравнение 206
- Сравнения теорема 253
- Стационарное движение 267
- Стеклов В. А. 453, 455
- Степанов В. В. 457
- Степенной ряд 245
- Существования теорема 57, 68, 140, 270
- Т, конус 420
- Тейлор Б. 437, 439
- Теорема (см. соответств. название)
- Тихонов А. Н. 457
- Тока линии 268

- Точки возврата 130
 — особые 76
 — прикосновения 130
 Точная производная 177
 Точные дифференциалы 94
 Траектория движения 267
 — , задача о траекториях 135
 Тривиальное решение 319, 321, 325, 326, 327
 Тригонометрические ряды 233
 Узел 79, 83, 92
 Упругие колебания 219, 230
 Условие (см. соответств. название)
 Устойчивое положение равновесия 166
 Устойчивость по Ляпунову 317
 Фаза начальная 219
 Фазовое пространство 266
 Фокус 81, 91
 Форма билинейная 290
 — нормальная Коши 262
 Форма нормальная системы д. у. 141
 — Пфаффа 366
 — симметричная системы д. у. 313
 Формула Лиувилля 192
 Фроммера метод 84
 Фукс Л. 435, 451
 Фундаментальная система 187
 Функция Бесселя 245, 250
 — Гамильтона 412
 — Грина 211
 Фурье Ж. 452
 Характеристика 336, 351, 405, 406
 — первого порядка 395, 407, 409
 Характеристическая полоса 361
 Характеристические кривые 351
 Характеристический многочлен 215
 Характеристическое уравнение 284, 323
 Хинчин А. Я. 457
 Центр 81, 92
 Чаплыгин С. А. 458
 Частное решение д. у. 8, 12, 18
 Частные производные, уравнения в частных производных 99, 330
 Частота колебания 219
 Чебышев И. Л. 237, 449, 455, 457
 Чебышева многочлен 237
 Четаев Н. Г. 457
 Шарпи П. 442
 Шарпи-Лагранжа метод 381
 Шпета теорема 256
 Штурм Ж. 450
 Штурма теорема 252
 Эйлер Л. П. 95, 431, 433—443, 445, 450—452, 455, 457
 Эйлера уравнение 238, 256
 Элемент интегральный 407
 — прикосновения 378
 Элементарные делители матрицы 291
 Энергии постоянная 419
 Якоби К. 450, 457
 — метод 412, 416
 — теорема 414
 — уравнение 41, 93, 414

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ.

Курс дифференциальных уравнений в объёме нашей университетской программы по необходимости складывается из глав, соответствующих различным отделам научной теории этой ветви математического анализа. Элементарные методы интегриации, теоремы существования, особые решения, общая теория линейных уравнений — эти главы в современном состоянии науки связаны с теорией групп Ли, с применением методов теории функций действительного и комплексного переменного, с методами линейной алгебры и т. п.

Современное понятие о математической строгости, постепенно внедряющейся в курсы анализа, не позволяет строить учебник дифференциальных уравнений с невыясненной точки зрения на взаимную связь отделов — например, элементарных методов интегрирования и теорем существования. Далее, развитие самой теории и современных её приложений требует введения в университетский курс новых отделов, связанных, с одной стороны, с развитием качественных методов, с другой стороны, с теоремами колебания для линейных дифференциальных уравнений.

Настоящий курс построен целиком в области действительного переменного; это обуславливается как положением курса в плане университетского преподавания (он начинается раньше теории аналитических функций), так и указанной выше необходимостью дать курс, объединённый общей идеей. Вопросы существования и единственности решений ставятся уже при изложении элементарных методов интегриации. В связи с общей структурой курса теорема существования решения уравнения первого порядка появляется близко от начала курса. Классические понятия общего решения, интегрирующего множителя, первого интеграла удаётся, по нашему мнению, обосновать достаточно строго и не слишком громоздко, если ограничиться локальной точкой зрения. В связи с этим в курсе даётся (мелким шрифтом) достаточно развёрнутая качественная теория распределения интегральных кривых в окрестности особой точки и оставляется в стороне исследование общего течения интегральных кривых. К сожалению, отмеченная выше строгость основывается на теореме о дифференцируемости решения по параметру; эта теорема ввиду её сложности приведена лишь в мелком шрифте главы VII. С принятой здесь точки зрения особое решение определяется как решение,

в каждой точке которого нарушается единственность; теория особых решений для уравнений степени выше первой относительно производной, конечно, не может быть достаточно систематически изложена в действительной области. В связи с уравнениями второго порядка дано механическое приложение — периодические движения. В теории линейных уравнений даны «нетрадиционные» теоремы — Штурма и теорема сравнения. Краевые задачи не вошли в рассматриваемый курс, их место — при изучении уравнений математической физики, так как постановка задачи с параметром и его собственными значениями непонятна без обращения к первоисточнику — уравнению с частными производными второго порядка. Параграф об интегрировании с помощью степенных рядов, важный для приложений, конечно, не может быть сколько-нибудь полным без обращения к аналитическим функциям; он является в курсе эпизодическим и не содержит, например, уравнений Бесселя и Лежандра, относимых нами к курсу уравнений математической физики. Новым является параграф о применении тригонометрических рядов к линейным уравнениям.

Другие отступления от традиций легко обнаружатся при сравнении настоящего курса с другими руководствами.

Вопросы, не входящие в университетскую программу, но тесно примыкающие к её темам, даны мелким шрифтом.

От изучающего настоящий курс требуется знание университетского курса анализа в достаточно строгом и углублённом изложении, основные сведения из теории определителей, высшей алгебры и дифференциальной геометрии.

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

В. В. Степанов, автор учебника, скончался 22 июля 1950 года в период подготовки пятого издания. В пятом издании к главе VII добавлен § 6 об устойчивости по Ляпунову; в составлении этого параграфа большое содействие автору по его просьбе оказал С. А. Гальперн. В качестве последней главы был помещён исторический очерк, написанный для этой книги по просьбе автора А. П. Юшкевичем.

Для шестого издания были исправлены лишь замеченные опечатки и частично переработан А. П. Юшкевичем исторический очерк (глава X).

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ.

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ТИПЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА,
РАЗРЕШЁННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ.

§ 1. Введение.

1. С точки зрения формально-математической задача решения (*интегрирования*) дифференциальных уравнений есть задача, обратная дифференцированию. Задача дифференциального исчисления состоит в том, чтобы по заданной функции найти её производную. Простейшая обратная задача уже встречается в интегральном исчислении: дана функция $f(x)$, найти её примитивную (неопределённый интеграл). Если искомую примитивную функцию обозначить через y , то указанная задача может быть записана в форме уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad (1)$$

или

$$dy = f(x) dx. \quad (2)$$

Равносильные между собой уравнения (1) и (2) являются простейшими дифференциальными уравнениями. Мы уже умеем их решать; в самом деле, из интегрального исчисления известно, что наиболее общая функция y , удовлетворяющая уравнению (1), или, что то же, уравнению (2), имеет вид:

$$y = \int f(x) dx + C. \quad (3)$$

В решении (3) символ неопределённого интеграла обозначает какую-нибудь примитивную, а C есть *произвольное постоянное*. Итак, оказывается, что искомая функция y определяется из уравнения (1) или (2) *неоднозначно*. Наше дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений, каждое из которых получится, если произвольному постоянному C придать определённое числовое значение. Решение (3) уравнения (1), содержащее произвольное постоянное, называется *общим решением*; каждое решение, которое получается

из общего, если дать постоянному C определённое числовое значение, называется *частным решением*.

Следующий пример возьмём из механики. Исследуем движение точки m по вертикальной прямой под действием силы земного притяжения. Примем за ось Oy вертикальную прямую, по которой движется (падает) точка; начало поместим на поверхности земли, а положительное направление условимся отсчитывать вверх. Чтобы знать движение, т. е. положение нашей точки в любой момент t после начала движения (соответствующего значению $t=0$), надо знать выражение единственной координаты этой точки y как функции t . Таким образом, у нас независимым переменным является t , а искомой функцией y . Составим уравнение для нахождения y . Из механического смысла второй производной следует, что ускорение равно $\frac{d^2y}{dt^2}$; с другой стороны, мы знаем, что ускорение силы тяжести в каждой точке земной поверхности и вблизи неё постоянно и (приблизительно) равно 981 см/сек^2 , оно обозначается буквой g , $g \approx 981 \text{ см/сек}^2$; оно направлено вниз, следовательно, в нашей системе координат ему надо придать знак $-$. Приравнявая два найденных выражения для ускорения точки, получаем уравнение, в котором известной является функция y :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g. \quad (4)$$

Здесь дано значение второй производной от y , требуется найти функцию. Легко решить («проинтегрировать») это дифференциальное уравнение ¹⁾. Взяв два раза неопределённый интеграл от обеих частей равенства (4) по t , мы получаем последовательно:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1, \quad (5)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2. \quad (6)$$

Выражение (6) есть общее решение уравнения (4); оно содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2 . Выясним физический смысл этих постоянных. Полагая в уравнении (5) $t=0$, получаем:

$$C_1 = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = v_0 \text{ (начальная скорость точки);}$$

аналогично из уравнения (6):

$$C_2 = (y)_{t=0} = y_0 \text{ (начальное положение точки).}$$

¹⁾ Обыкновенно вместо выражения «решить дифференциальное уравнение» говорят: «интегрировать дифференциальное уравнение». Чтобы избежать путаницы, операцию взятия неопределённого интеграла называют «квадратурой».

С этими новыми обозначениями произвольных постоянных мы напишем общее решение (6) дифференциального уравнения (4) в виде:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0. \quad (7)$$

Теперь ясно, какие дополнительные данные нужно иметь, чтобы получить частное решение, описывающее одно вполне определённое движение: нужно знать числовые значения начального положения точки y_0 и начальной скорости v_0 (*начальные условия*).

ЗАДАЧИ.

1. Найти уравнение движения точки, падающей с высоты 10 м без начальной скорости. Через сколько секунд точка упадёт на землю?

2. Найти уравнение движения точки, брошенной вверх со скоростью 1 м/сек. Через сколько времени точка достигнет наивысшего положения?

3. Найти общие решения уравнений: $\frac{dy}{dx} = 2$; $\frac{dy}{dx} = -x^3$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$.

2. В уравнение (1) входила только первая производная от искомой функции. Это — дифференциальное уравнение *первого порядка*. Самое общее дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad (8)$$

где F — заданная непрерывная функция трёх своих аргументов; в частности, она может не зависеть от x или от y (или от обоих этих аргументов), но непременно должна содержать $\frac{dy}{dx}$. Если уравнение (8) определяет $\frac{dy}{dx}$ как неявную функцию двух остальных аргументов¹⁾ (в дальнейшем мы всегда будем предполагать это условие выполненным), то его можно представить в виде, разрешённом относительно $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (9)$$

Здесь f — непрерывная заданная функция от x, y [в частности, она может не содержать одного или обоих аргументов: в уравнении (1) f не зависит от y ; в задаче 3, пример 1, правая часть не зависит

¹⁾ Чтобы существовала неявная функция $y' = f(x, y)$, определяемая уравнением $F(x, y, y') = 0$ и принимающая значение y'_0 при $x = x_0$ и $y = y_0$, достаточно, чтобы выполнялось равенство $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$, существовала непрерывная частная производная $F'_{y'}$ в окрестности значений x_0, y_0, y'_0 и чтобы было $F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$; тогда соотношение (8) определяет непрерывную функцию (9) в окрестности значений x_0, y_0 независимых переменных, причём $f(x_0, y_0) = y'_0$.

ни от x , ни от y]. В дифференциальном уравнении (8) или (9) x является независимым переменным, y — искомой функцией. Итак, *дифференциальное уравнение первого порядка есть соотношение, связывающее искомую функцию, независимое переменное и первую производную от искомой функции.*

Решением дифференциального уравнения (8) или (9) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение (8) или (9), обратит его в тождество.

Уравнение (4) содержало вторую производную от искомой функции; это было уравнение *второго порядка*. Общий вид дифференциального уравнения второго порядка есть

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad (10)$$

или, предполагая его разрешённым относительно второй производной (если это разрешение возможно),

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (10')$$

(Мы для краткости письма обозначаем производные от y по x штрихами.) Здесь F и f — данные непрерывные функции своих аргументов, x — независимое переменное, y — искомая функция; некоторые из аргументов x, y, y' (или все они) могут не входить в уравнение, но y'' непременно входит. Решением опять называется функция $\varphi(x)$, которая, будучи подставлена на место y в уравнение (10) [или (10')], обратит его в тождество.

Вообще *порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей входящей в него производной от искомой функции*. Так, уравнение n -го порядка имеет вид:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

причём $y^{(n)}$ непременно входит в уравнение.

3. Дифференциальному уравнению первого порядка можно дать геометрическое толкование, которое выяснит нам вопрос о характере множественности решений такого уравнения. Пусть дано уравнение в виде:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (9)$$

Примем x, y за декартовы прямоугольные координаты плоскости. Каждой точке (x, y) той области, где определена функция f , уравнение (9) ставит в соответствие определённое значение $\frac{dy}{dx}$. Пусть $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения (9); тогда кривая, определяемая уравнением $y = \varphi(x)$, называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения. Значение $\frac{dy}{dx}$ есть тангенс угла, образуемого касательной к этой кривой с осью Ox . Таким образом, каждой точке (x, y) рассматриваемой области уравнение (9) ставит в соот-

ветствие некоторое направление; мы получаем *поле направлений*. Это поле можно изобразить, поместив в соответствующих точках области стрелки, образующие с осью Ox углы $\operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}$ (положительное направление стрелки можно взять произвольным, так как арктангенс определяет угол лишь с точностью до кратного π). Задача интегрирования дифференциального уравнения может быть теперь истолкована так: найти такую кривую, чтобы её касательная в каждой точке имела направление, совпадающее с направлением поля в этой точке. Грубо говоря, нужно провести кривую так, чтобы расставленные на поле стрелки показывали в каждой точке направление касательной к искомой кривой.

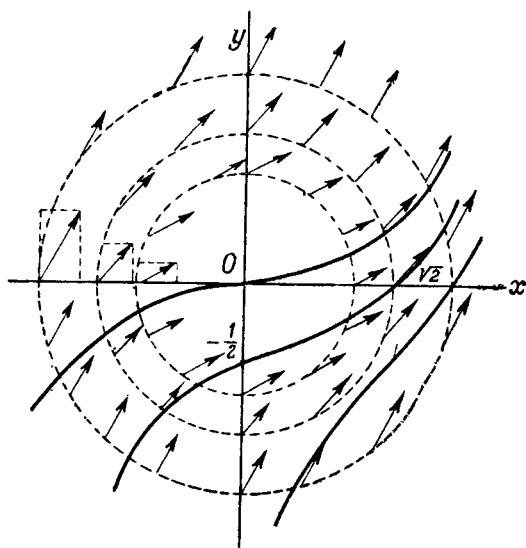
Рассмотрим подробнее следующий пример:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2. \quad (11)$$

Расставим стрелки, найдя предварительно те линии, где наклон одинаков (*изоклины*). Так, если $y' = 0$, мы имеем $x = y = 0$ (начало координат), если $y' = \frac{1}{2}$, то $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ (круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$ с центром в начале), $y' = 1$ на окружности $x^2 + y^2 = 1$ и т. д. (черт. 1).

Чтобы начертить интегральную кривую уравнения (11), надо взять некоторую точку (x_0, y_0) на плоскости и провести через неё кривую так, чтобы она в каждой точке имела направление поля [на чертеже проведены кривые через точки $(0, 0)$, $(0, -\frac{1}{2})$, $(\sqrt{2}, 0)$]. Мы

видим, что получается не одна кривая, а целое семейство от одного параметра (за параметр можно взять, например, отрезок, отсекаемый кривой на оси Oy). Это же заключение будет при известных ограничениях справедливо и для любого поля, т. е. любого дифференциального уравнения. Таким образом, мы вправе ожидать такого



Черт. 1.

ответа на вопрос о множестве интегральных кривых дифференциального уравнения: *интегральные кривые дифференциального уравнения первого порядка образуют семейство, зависящее от одного параметра:*

$$y = \varphi(x, C). \quad (12)$$

Замечая, что функция $\varphi(x, C)$ при любом C есть решение дифференциального уравнения, мы можем также ожидать следующего результата.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка дается формулой (12), заключающей одно произвольное постоянное¹⁾.

Наконец, вспомнив, что мы получаем каждую отдельную интегральную кривую, задавая точку (x_0, y_0) , через которую она проходит, мы приходим к следующему заключению:

Чтобы однозначно определить частное решение дифференциального уравнения первого порядка, надо задать то значение y_0 , которое искомая функция принимает при заданном значении x_0 независимого переменного (начальные значения).

В самом деле, если x_0 и y_0 даны, то, подставляя их в уравнение (12), мы получим: $y_0 = \varphi(x_0, C)$ — одно уравнение для определения одного неизвестного C ; наши геометрические соображения позволяют ожидать, что это уравнение имеет решение.

Примечание. Рассуждения настоящего раздела 3 не являются строгими доказательствами существования решения дифференциального уравнения и однозначного определения частного решения начальными данными, так как они ссылаются на геометрическую картину; все приведённые результаты справедливы лишь при определённых ограничениях, наложенных на функцию f ; строгие доказательства будут даны в главе II. Наши рассуждения только показывают, каких обстоятельств мы вправе ожидать в простейших случаях, и дают практический приём для приближённого вычерчивания интегральных кривых.

ЗАДАЧА.

4. Построить поле направлений для уравнения $\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2$ (построить изоклины $y' = 0$, $y' = \pm 1, \pm 2$). Провести интегральные кривые через точки $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.

4. Мы видели, что свойство общего решения дифференциального уравнения первого порядка — зависеть от одного произвольного постоянного, — выявленное на простейшем примере (1), подтверждается соображениями предыдущего раздела и для более общих уравнений первого порядка. Естественно ожидать, что, по аналогии с примером (4), решение общего дифференциального уравнения второго по-

¹⁾ Точное определение общего и частного решения мы сможем дать лишь в дальнейшем.

рядка (10) или (10') будет заключать два произвольных постоянных, а общее решение дифференциального уравнения n -го порядка будет зависеть от n произвольных постоянных. Так оно и есть (при известных ограничениях); мы не будем здесь приводить геометрических соображений, а подойдём к вопросу с другой стороны, благодаря чему наши соображения по аналогии получают значительное подтверждение.

Поставим задачу, в некотором смысле обратную задаче интегрирования дифференциального уравнения. Пусть дано соотношение:

$$y = \varphi(x, C), \quad (13)$$

где C есть параметр; дифференцируя по x ¹⁾, получим:

$$y' = \varphi'_x(x, C). \quad (14)$$

Если правая часть выражения (14) не содержит C , то мы уже произвели исключение параметра C и получили дифференциальное уравнение:

$$y' = \varphi'_x(x); \quad (14')$$

очевидно, что в этом случае соотношение (13) имеет вид:

$$y = \varphi(x) + C$$

и является решением уравнения (14').

Пусть теперь правая часть равенства (14) содержит C ; тогда и правая часть равенства (13) содержит C , т. е. $\varphi'_C(x, C) \neq 0$, и в окрестности значений x_0, C_0 , для которых $\varphi'_C(x_0, C_0) \neq 0$, мы можем определить C как функцию от x и y :

$$C = \psi(x, y). \quad (15)$$

Очевидно, что имеет место тождество (по переменным x и C):

$$\psi(x, \varphi(x, C)) \equiv C. \quad (16)$$

Подставляя значение C , определённое формулой (15), в выражение (14), мы получим дифференциальное уравнение первого порядка:

$$y' = \varphi'_x(x, \psi(x, y)). \quad (17)$$

Легко убедиться в том, что (13) представляет его решение при любом значении C ; в самом деле, если мы подставим это выражение для y в уравнение (17), то в левой части получим $\varphi'_x(x, C)$, а в правой $\varphi'_x\{x, \psi[x, \varphi(x, C)]\}$, а это, в силу тождества (16), тоже даёт $\varphi'_x(x, C)$.

¹⁾ Мы предполагаем, что все входящие в рассуждения производные существуют.

т. е. к дифференциальному уравнению n -го порядка. Мы уже отметили, что при подстановке в уравнение (18) на место y его выражения $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ получается тождество, и то же справедливо относительно уравнений (19); поэтому и уравнение (20), являющееся следствием уравнений (18) и (19), обратится в тождество, если в него подставить вместо y функцию $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, а это значит, что y , определяемый из уравнения (18), есть решение уравнения (20). Таким образом, эта функция, содержащая n произвольных постоянных, является решением некоторого дифференциального уравнения n -го порядка. Можно было бы провести и более точное рассуждение, как мы это сделали для уравнения первого порядка. Теперь мы вправе ожидать, что исходное решение является общим и что, обратно, общее решение дифференциального уравнения n -го порядка содержит n произвольных постоянных.

ЗАДАЧИ.

5. Найти дифференциальное уравнение всех прямых на плоскости (взять общую форму); проинтегрировать это уравнение.

6. Найти дифференциальное уравнение софокусных эллипсов с данным фокусным расстоянием $2c$.

Указание. Уравнение семейства $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$, где a — произвольный параметр, дифференцируем по x , считая y функцией x ; по сокращении имеем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{yy'}{a^2 - c^2} = 0.$$

Исключив из этих двух уравнений a^2 , получим искомое уравнение первого порядка.

Пример 1. Семейство всех кругов на плоскости

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

содержит три параметра. Дифференцируем три раза:

$$x - \alpha + (y - \beta)y' = 0, \quad 1 + (y - \beta)y'' + y'^2 = 0,$$

$$(y - \beta)y''' + 3y''y' = 0.$$

Параметры α и r исключились при дифференцировании; нам остаётся исключить β из двух последних уравнений, и мы получим (приравнявая два выражения для $y - \beta$):

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0.$$

Пример 2. В качестве последнего примера возьмём уравнение всех конических сечений. Из аналитической геометрии известно, что оно зависит от пяти параметров (отношения шести коэффициентов) и имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Предположим, что $a_{22} \neq 0$, и разрешим это уравнение относительно y :

$$y = -\frac{a_{12}x + a_{23}}{a_{22}} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{12}x + a_{23}}{a_{22}}\right)^2 - \frac{a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}}{a_{22}}},$$

или

$$y = -\frac{a_{12}}{a_{22}}x - \frac{a_{23}}{a_{22}} \pm \sqrt{\frac{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}{a_{22}^2}x^2 + 2\frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{22}^2}x + \frac{a_{23}^2 - a_{21}a_{33}}{a_{22}^2}}.$$

Обозначив постоянные новыми буквами, мы получим окончательно:

$$y = Ax + B \pm \sqrt{Cx^2 + 2Dx + E}. \quad (21)$$

В это уравнение входит пять параметров; надо их исключить из данного уравнения и тех уравнений, которые из него получаются после одного, двух, ..., пяти дифференцирований.

Итак, дифференцируем обе части уравнения (21) по x :

$$y' = A + \frac{Cx + D}{\sqrt{Cx^2 + 2Dx + E}},$$

$$y'' = \frac{C(Cx^2 + 2Dx + E) - (Cx + D)^2}{(Cx^2 + 2Dx + E)^{3/2}} = \frac{CE - D^2}{(Cx^2 + 2Dx + E)^{3/2}}.$$

Постоянные A и B исключились; мы имеем в числителе правой части постоянные, в знаменателе — квадратный трёхчлен в степени $\frac{3}{2}$. Для дальнейшего исключения постоянных выгодно возвести обе части в степень $-\frac{2}{3}$; тогда мы получим:

$$(y'')^{-\frac{2}{3}} = (CE - D^2)^{-\frac{2}{3}}(Cx^2 + 2Dx + E),$$

т. е. в правой части квадратный трёхчлен относительно x ; если его продифференцировать три раза, то все постоянные исключатся, так как в правой части получится 0. Итак, искомое дифференциальное уравнение сразу запишется в виде:

$$(y''^{-\frac{2}{3}})''' = 0.$$

Проведём это дифференцирование последовательно

$$(y''^{-\frac{2}{3}})' = -\frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y''', \quad (y''^{-\frac{2}{3}})'' = \frac{10}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''^2 - \frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y^{IV}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} (y''^{-\frac{2}{3}})''' = & -\frac{80}{27}y''^{-\frac{11}{3}}y'''^3 + \frac{20}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''y^{IV} + \\ & + \frac{10}{9}y''^{-\frac{8}{3}}y'''y^{IV} - \frac{2}{3}y''^{-\frac{5}{3}}y^V = 0. \end{aligned}$$

Упростим последнее уравнение, приведя подобные члены и умножив

обе части на $y''^{\frac{11}{3}}$, чтобы не иметь отрицательных степеней; далее, умножим все члены на числовой множитель $-\frac{27}{2}$. Мы получим окончательно:

$$9y''^2y^V - 45y''y'''y^{IV} + 40y'''^3 = 0.$$

Примечание 1. Мы взяли в формуле (21) перед радикалом знак $+$; легко проверить, что тот же окончательный результат получится, если взять знак $-$.

Примечание 2. Заметим, что $C = \frac{a_{12}^3 - a_{11}a_{22}}{a_{22}^3}$; в случае параболы мы имеем $C = 0$, и уравнение парабол (зависящее от четырех параметров) имеет вид:

$$y = Ax + B + \sqrt{2Dx + E}.$$

Примечание 3. Мы предположили $a_{22} \neq 0$; разбор случая $a_{22} = 0$ отнесён к задачам.

ЗАДАЧИ.

7. Вывести дифференциальное уравнение конических сечений, у которых $a_{22} = 0$. Каково геометрическое свойство этих кривых, выделяющее их из всех кривых второго порядка? (Рассмотреть два случая: $a_{12} \neq 0$, $a_{12} = 0$.)

8. Вывести дифференциальное уравнение парабол, для которых $a_{22} \neq 0$, и тех парабол, для которых $a_{22} = 0$.

Примечание. Если мы имели соотношение между x и y , содержащее n параметров, то мы утверждали, что, «вообще говоря», для исключения этих параметров надо иметь $n+1$ уравнений. В отдельных случаях параметры могут исключиться из меньшего числа уравнений; например, из семейства $y = C_1(C_2x + C_3)$ получается после исключения параметров уравнение второго порядка $y'' = 0$, так как на самом деле это семейство зависит от двух параметров C_1C_2 и C_1C_3 .

Труднее обнаружить этот факт на уравнении $y^2 = 2bxy + cx^2$, представляющем семейство распадающихся кривых второго порядка с двойной точкой в начале координат. Как геометрический образ, это семейство действительно зависит от двух параметров; но если разрешить уравнение относительно y , мы получим:

$$y = (b \pm \sqrt{b^2 + c})x;$$

с функциональной точки зрения y , рассматриваемый как однозначная функция от x , зависит от x и одной комбинации параметров:

$$k = b \pm \sqrt{b^2 + c}.$$

И действительно, дифференцируя данное соотношение, находим:

$$yy' = b(xy' + y) + cx;$$

исключая c из этого уравнения и из данного, получим:

$$xyy' - y^2 = b(x^2y' - xy) \quad \text{или} \quad (y - bx)(xy' - y) = 0.$$

Второй множитель, приравненный нулю, даёт искомое дифференциальное уравнение $xy' - y = 0$; легко видеть, что, приравняв нулю первый множитель, мы получим частное решение того же дифференциального уравнения.