Тема 20

Частни производни, диференцируемост, пълен диференциал. Достатъчно условие за диференцируемост. Частни производни от по-висок ред, равенство на смесените произведения.

страницата се нуждае от дописване/преглеждане

В тази точка ще разгледаме как стои въпросът с диференцирането на функция на 2 променливи. Тъй като вече *знаем* как стои въпросът с диференциране на функция на 1 променлива, ще изкажем една теорема която прави връзката между двете (т.нар. критерий за диференцируемост).

Ще започнем с дефиниции за частни производни по някоя от променливите (в случая - x, y).

Частна производна

Дефиниция:

$$\text{Let } f(x,y) \text{ de}\{\}\text{fined in } B_\Delta(x_0,y_0) \quad (1)$$
$$\backslash\text{vspace}5mm$$
$$1.\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

наричаме първа частна производна на f във точка (x_0, y_0) по променливата x.

$$2.\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} \quad (2)$$

наричаме първа частна производна на f във точка (x_0,y_0) по променливата y.

Още 2 алтернативни начина на записване:
$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0,y_0) = (f(x_0,y_0))'_x$$

Общо взето частна производна е просто производната на функцията, като останалите променливи считаме за параметри - т.е разглеждаме функцията на няколко променливи като функция на една променлива и една (или повече) константи/параметри.

Диференцируемост

Дефиниция:

(3)

$f(x,y)$ differentiable in (x_0,y_0) iff :
$\exists \mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathbb{R}$:
\vspace$3mm$
$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) =$
$= \mathrm{A}(x-x_0) + \mathrm{B}(y-y_0) + \alpha_1(x-x_0,y-y_0)(x-x_0) + \alpha_2(x-x_0,y-y_0)(y-y_0)$
where $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \alpha_i(x-x_0,y-y_0) = 0 \quad i=1,2$
\vspace$3mm$
Or alternatively (with delta):
$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$
$= \mathrm{A}\Delta x + \mathrm{B}\Delta y + \alpha_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y$
where $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \alpha_i(\Delta x,\Delta y) = 0 \quad i=1,2$

Дефиницията е сложна - но нейната цел(поне) е обозрима. Една функция е диференцируема в точка, ако съществува допирателна към графиката на функцията в тази точка. Както се сещате графиката на функция на 2 променливи е някаква повърхнина (някакъв сбръчкан килим в добрия случай), и диференциала дава точно параметрите на тази равнина - А е коефициента на наклона на права от равнината по направление x, докато B е по y.
Т.е това е разширено с 1 измерение понятието за допирателна (която в 1D варианта беше просто допирателна права).

Диференциал

Дефиниция:
Ако една функция е диференцируема в точка, то нейният диференциал в тази точка е просто първата част от равенството (от дефиницията за диференциал):
$df(x_0,y_0) = \mathrm{A}(x-x_0) + \mathrm{B}(y-y_0)$
Както сами виждате - бележи се като диференциал във линейния случай (с малко d отпред).

Връзка между производна и диференциал

Следната теорема дава връзка между частните производни на функция и нейният диференциал (по-точно А и B)
Теорема:

$$\text{Let } f(x,y) \text{ de\{\}fined over } B_\delta(x_0,y_0) \text{ and differentiable in } (x_0,y_0) \Longrightarrow \tag{4}$$
1. $f(x,y)$ continuous in (x_0,y_0)
2. $\exists \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$ and
$$\mathrm{A} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}, \mathrm{B} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$$

Доказателство:

Покажи

Достатъчно условие за диференцируемост

Теорема

$$\begin{aligned} &\text{Let } f(x,y) \text{ de\{\}fined over } B_\delta(x_0,y_0) \text{ and} \\ &\forall (x,y) \in B_\delta(x_0,y_0) \\ &\quad \exists \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{aligned} \tag{8}$$

и частните производни са непрекъснати в точка (x_0,y_0).
Доказателство:

Покажи

Шантава теорема

Следва една малко шантава теорема:
Теорема:

$$\begin{aligned}
&\text{Let } z = f(x, y) \text{ defined over } B_\Delta(x_0, y_0) \text{ and differentiable in } (x_0, y_0) \\
&\text{Let } x = x(t), y = y(t) \text{ defined over } (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \text{ and differentiable in } t_0 \\
&\text{ and } \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \longrightarrow (x(t), y(t)) \in B_\Delta(x_0, y_0) \\
&\Longrightarrow z(t) = f(x(t), y(t)) \text{ differentiable in } t_0 \text{ and} \\
&dz(t_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} . \frac{dx(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} . \frac{dy(t_0)}{dt}
\end{aligned} \tag{12}$$

Следва и варианта със заместване на функция с 2 променливи:

$$\begin{aligned}
&Let \\
&x = x(u, v) \\
&y = y(u, v) \\
&\text{ and } z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) \\
&\backslash\text{vspace}3mm \\
&\Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial u} \\
&\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial v}
\end{aligned} \tag{13}$$

Не знам как може да се обясни това нещо по човешки ...

Производни от по висок ред

Дефиниция:
На всяка частна производна можем да намираме нейната производна… и така нататък. За сега се интересуваме само от повторно прилагане (т.е втора производна). Има 4 различни 2ри производни, заради 2те променливи по който можем да диференцираме вече 2те първи производни

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
&\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\
&\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ smeseni proizvodni} \\
&\frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}
\end{aligned} \tag{14}$$

Равенство на смесените производни
Теорема:

$$\begin{aligned}
&\text{Let } f(x, y) \text{ de\{\}fined over } B_\delta(x_0, y_0) \text{ and} \\
&\exists \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\
&\text{and } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ continuous in } (x_0, y_0) \Longrightarrow \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}
\end{aligned} \tag{15}$$

Или - ако има смесени производни и те са непрекъснати в (x_0, y_0), то те са равни (в общия случай не е вярно).