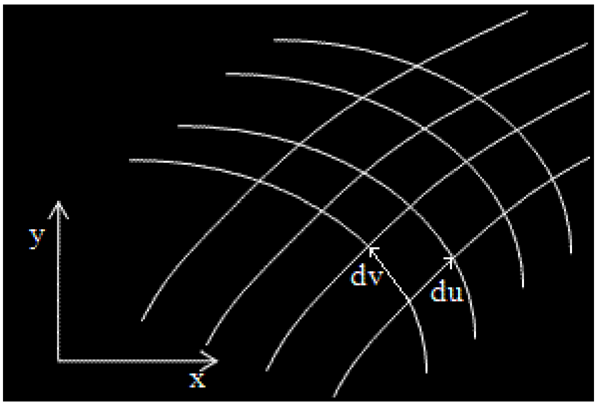
Смяна на променливите при двойни интеграли-теория

Нека е известно, че при интеграла $\iint_D f(x,y)dxdy$, в зависимост от подинтегралната функция f(x, y) и вида на областта D е удобно да се премине към нови променливи (u, v) със смяната: $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

Интегралът $\iint_D f(x,y)dxdy$ е равен на

$$\boxed{\iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv}$$

Последният се получава като в подинтегралната функция заменим (x, y) с техните изрази, съдържащи новите променливи (u, v), умножим по якобиана и интегрираме по (u, v).
При втория интеграл се променя както вида на подинтегралната функция, така и вида на областта D.
Новата област се получава като от ограниченията спрямо (x, y) се извлекът ограничения, касаещи новите променливи (u, v). -



По u- линията се променя само u, докато v е константа
Тогава в координатната система Oxy u- линията има параметрично x = x(u, v_0) y = y(u, v_0)

Тогава векторът **du** има координати $\mathbf{du} = d(x(u,v_0), y(u,v_0)) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right)du$.

По същия начин се намират координатите на вектора **dv**: $\mathbf{dv} = d(x(u_0,v), y(u_0,v)) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)dv$

Лицето на паралелепипеда, свързан с двата вектора **du** и **dv** е детерминантата на якобиана

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial u & \partial y/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v \end{pmatrix}$, която е равна на детерминантата $J = \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix}$.

Какво ще научим:
Смяна на променливите при двойни интеграли - примери