16.Смяна на променливите при кратен интеграл.

Нека са ни дадени две отворени области D, D' от R^2 и една непрекъсната и дефинирана в $D \ni (x,y)$ функция $f(x,y)$. Нека изображението

$$\phi : D' \to D,\ \phi :\ (u,v) \to (x,y),$$

задава едно взаимно-еднозначно съответствие между двете множества D и D', което означава че на всяка точка $(u,v) \in D'$ съответствува точно една точка $(x,y) \in D$, която се получава чрез следната **смяна на променливите**:

$$\phi := \left| \begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{array} \right. . \tag{16.1}$$

При тази смяна на променливите (x,y) се наричат стари променливи, а (u,v) - новите променливи. Всяка една такава смяна на променливите се асоциира с нейния **якобиан** $J := J(\phi)$, който предтсавлява следната матрица:

$$J := \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ y_v & y_v \end{pmatrix}. \tag{16.2}$$

В горната формула x_u, x_v, y_u, y_v са частните производни на функциите $x(u,v), y(u,v)$ по съответните променливи, за които предполагаме, че са непрекъснати като функции на две променливи $(u,v) \in D'$. За да се осигури взимната еднозначност на изображението между двете области $\phi : D' \to D$ едно достатъчно условие е да поискаме **за всяко** $(u,v) \in D'$:

$$\det(J) := |J| \neq 0. \tag{16.3}$$

За да опростим означенията по-нататък с $|J|$ ще означаваме абсолютната стойност на $\det(J)$.

Teorema 1. При предположенията и означенията, които направихме по-горе, в сила е следната формула за смяна на променливите при двоен интеграл:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D'} f(x(u,v),y(u,v)) \cdot |J| dudv. \tag{16.4}$$

Формулата (16.4) лесно се обобщава за три и повече ($n-$) променливи. По-нататък ще разгледаме три най-често прилагани субституции при кратните интеграли, а именно - **полярната** смяна на променливите при двоен интеграл, и **сферичната** и **цилиндрична** смени на променливите при троен интеграл.

Полярна смяна. Това е следната смяна:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi . \end{array} \right. \qquad (16.5),$$

където (x, y) са старите декартови координати на т.$M(x, y)$ x е абсцисата на т.М, а y еординатата на т.М. Полярните координати ρ, φ са новите координати, като $\rho = |\vec{OM}| \geq 0$ е радиус-векторът на т.М, а $\varphi = \angle(O_x, \vec{OM}) \in [0, 2\pi]$ е полярният ъгъл на т.М. Якобианът на тази смяна се пресмята като

$$J = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho. \qquad (16.6)$$

Цилиндрична смяна. Това е следната смяна в тримерното пространство: ако $M(x, y, z)$ е точка, зададена с нейните декартови координати, то новите цилиндрични координати са ρ, φ, z, където (ρ, φ) са полярните координати на т.$'$-ортогонална проекция на т.М в координатната равнина O_{xy}, а z като нова координата съвпада със старата координата z. Цилиндричната смяна се задава като:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z. \end{array} \right. \qquad (16.7)$$

Якобианът на цилиндричната смяна се пресмята като:

$$J = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi & x_z \\ y_\rho & y_\varphi & y_z \\ z_\rho & z_\varphi & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho. \qquad (16.8)$$

Сферична смяна. Това е следната смяна в тримерното пространство: ако $M(x, y, z)$ е точка, зададена с нейните декартови координати, то новите сферични координати са ρ, φ, θ, където $\rho = |\vec{OM}| \geq 0$ е радиус-векторът на т.М, $\varphi = \angle(O_x, \vec{OM'}) \in [0, 2\pi]$, ако M' е ортогоналната проекция на т.М в координатната равнина O_{xy}, $\theta = \angle(O\vec{M}', O_z) \in [0, \pi]$. Сферичната смяна се задава като:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta. \end{array} \right. \qquad (16.9)$$

Якобианът на сферичната смяна се пресмята като:

$$J = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\varphi & x_{theta} \\ y_\rho & y_\varphi & y_{theta} \\ z_\rho & z_\varphi & z_{theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta \cdot \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \rho\sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix} + (-\rho\sin\theta) \cdot \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -\rho^2 \sin\theta. \qquad (16.10)$$

Следователно $|J| = \rho^2 \sin\theta$.

Пример 1. Пресметнете

$$I = \int\int_G \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dxdy,$$

ако $G : \{x^2 + y^2 - 2ax = 0,\ a > 0$.

Решение: Лесно се вижда, че $G : (x-a)^2 + y^2 = a^2$. Правим полярна смяна и виждаме, че $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. В полярни координати уравнението на окръжността G е $\rho^2 - 2a\rho\cos\varphi = 0$, $\rho = 2a\cos\varphi$. Тогава границите за изменение на ρ са $0 \leq \rho \leq 2a\cos\varphi$. Тогава

$$I = -\frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2a\cos\varphi} (4a^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} d(4a^2 - \rho^2) \right) d\varphi =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(4a^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}} - (4a^2)^{\frac{3}{2}}] d\varphi = \left(-\frac{8a^3}{3}\right) \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\varphi - 1) d\varphi = \pi \cdot \frac{8a^3}{3}.$$