$$0 = \cos t \frac{\partial r}{\partial y} - r \sin t \frac{\partial t}{\partial y},$$
$$1 = \sin t \frac{\partial r}{\partial y} + r \cos t \frac{\partial t}{\partial y}.$$

Решаваме тези две системи и определяме съответните производни:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos t, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\sin t}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin t, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\sin t}{r}.$$

Ето защо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos t - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\sin t}{r},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin t + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\cot t}{r}.$$

Заместваме в уравнението $(\star)$:

$$r \cos t \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cos t - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\sin t}{r} \right) - r \sin t \left(\frac{\partial u}{\partial r} \sin t + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\cot t}{r} \right) = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Следователно даденото уравнение е еквивалентно на уравнението

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Задача 1.26. В уравненията

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0$$

да се сменят променливите: $x = r \cos t$, $y = r \sin t$.

Отговори:
Вж. предния пример. Уравненията се преобразуват в

$$r \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = 0.$$

съответно.

7. Производни и диференциали на неявна функция

Нека $F : \Omega \to \mathbb{R}$ е непрекъснато диференцируема функция, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Казваме, че уравнението $F(x, y) = 0$ определя неявна функция $y = y(x)$, $x \in (a, b)$ ако за всяко $x \in (a, b)$ следва, че $(x, y(x)) \in \Omega$ и $F(x, y(x)) = 0$.

Теорема 1.7 (Теорема за неявната функция)**.** *Нека са изпълнени следните условия:*

(1)

(1)

Нека $F'_y(x,y) \neq 0$, за всяко $(x,y) \in \Omega$. Тогава

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}, \qquad (x,y) \in \Omega. \tag{1.5}$$

Нека $F : \Omega \to \mathbb{R}$ е непрекъснато диференцируема функция, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Разглеждаме неявната функция $z = z(x,y)$, дефинирана чрез уравнението $F(x,y,z) = 0$.

Ако $F'_z(x,y,z) \neq 0$, за всяко $(x,y) \in \Omega$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_z(x,y)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x,y)}{F'_z(x,y)}, \qquad (x,y) \in \Omega. \tag{1.6}$$

Пример 1.25. Уравнението $e^x - ye^y = 0$ определя неявна функция $y = y(x)$. Ще намерим $y'(x)$.

Ще използваме формула (1.6), където $F(x,y) = e^x - ye^y$. За целта първо намираме частните произодни:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y) =& e^x, \\ F'_y(x,y) =& -e^y - ye^y. \end{aligned}$$

Заместваме в (1.6)

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = \frac{e^x}{e^y + ye^y}.$$

Пример 1.26. Уравнението $\ln \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = \arctan \frac{y}{x}$ определя неявна функция $y = y(x)$. Ще намерим $y'(x)$.

Ще използваме формула (1.6), където $F(x,y) = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} - \arctan\dfrac{y}{x}$. За целта първо намираме частните производни:

$$F'_x(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$
$$F'_y(x,y) = -\frac{y-x}{x^2+y^2}.$$

Заместваме в (1.6) и след опростяване, получаваме:

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Задача 1.27. Намерете производната $y'(x)$ на неявната фукция, зададена чрез уравнението:

(1) $xe^{2y} - y\ln x = 12$, (2) $e^y + 8x^2e^{-2y} - 13x = 0$.

Отговори:

(1) $y'(x) = \frac{xe^{2y}-y}{x(2xe^{2y}-\ln x)}$;

(2) $y'(x) = \dfrac{16xe^{-2y}-13}{-e^y+16x^2e^{-2y}}$.

Пример 1.27. В $\mathbb{R}^2$ разглеждаме кривата γ, зададена чрез уравнението $x^3 + 2xy^3 - yx^4 - 2 = 0$. Ще определим уравнението на допирателната към графикът на кривата γ в точката $(1,1)$.

Първо намираме частните производни на функцията $F(x,y) = x^3 + 2xy^3 - yx^4 - 2$:

$$F'_x(x,y) = 3x^2 + 2y^3 - 4x^3y,$$
$$F'_y(x,y) = 6xy^2 - x^4.$$

От $F'_y(1,1) \neq 0$ следва, че уравнението $F(x,y) = 0$ определя неявна функция $y = y(x)$ в околност на точката $x_0 = 1$. Уравнението на допирателната има вида

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

където $y_0 = y(x_0) = y(1) = 1$ и $k = y'(x_0) = y'(1)$. За да пресметнем $y'(x_0)$, използваме (1.6):

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{3x^2+2y^3-4x^3y}{6xy^2-x^4},$$

т.е. $k = y'(x_0) = -\dfrac{1}{5}$. Следователно уравнението на допирателната е

$$y - 1 = -\frac{1}{5}(x - 1).$$

Задача 1.28. Да се определи уравнението на допирателната към графикът на следните функции в указаните точки:

$$(1)\ y = x^4, \qquad (2, 16);$$

$$(2)\ x^2y^2 - x^4 - y^4 + 1 = 0, \qquad (1, 1).$$

8. Производна по направление. Градиент

Нека $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ е област, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ е непрекъснато диференцируема функция в Ω, $(x_0, y_0) \in \Omega$ и нека $\vec{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ е даден единичен вектор в $\mathbb{R}^2$.

Производна на функцията f в точката (x_0, y_0) по направлението (по вектора) $\vec{v}$ се изразява чрез частните производни на f чрез равенството

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \sin\alpha.$$

Ако $\vec{v}$ е направляващ вектор на права, която се допира до линия на ниво на f в точката (x_0, y_0), то $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \vec{v}} = 0$.

Градиент на функцията f в точката (x_0, y_0) се нарича векторът

$$\left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right).$$

Означение: $\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$.

Валидни са следните релации:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \vec{v}} = \langle \vec{v}, \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) \rangle$$

и

$$\left| \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \vec{v}} \right| \le \|\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)\|.$$

Директрисата на векторът $\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$ съвпада с нормалата на линията на ниво на функцията $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0). Посоката на вектора $\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$ съвпада с посоката на растене на $f(x, y)$ в точката (x_0, y_0).

Валидни са равенствата

$$\max_{\vec{v}} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \vec{v}} = |\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)^2}.$$