Криволинеен интеграл от II род (по координати)

Вървя по пътя.
Вятър брули тялото
немощно.
Силата във работа
превръщам,
Ставам – живи мощи.

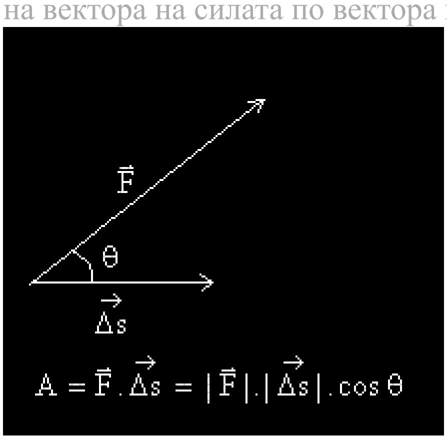
Написал и оформил - Неизвестен

Механичен смисъл

Нека на всяка точка M(x,y) от равнината Oxy, на единична маса действа сила $\mathbf{F}^{\rightarrow}$ с координати (X(x,y), Y(x,y)).
Тогава се казва, че в равнината Oxy е дефинирано векторно поле.
Нека C = AB^ е крива от тази равнина.
Желаем да намерим работата извършвана от векторното поле при преместване на единична маса от A до B при движението и по кривата C.
Да припомним, че

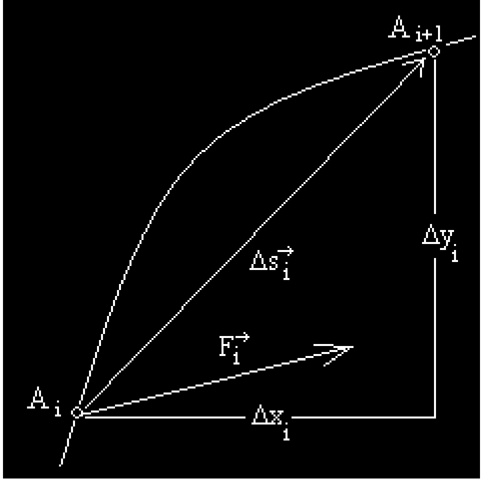
$$A = \vec{F}.\vec{\Delta s} = |\vec{F}|.|\vec{\Delta s}|.\cos\theta$$

Т.е. работата е скаларното произведение на вектора на силата по вектора на преместването.



Ако $\mathbf{F}^{\rightarrow} = (X,Y)$ и $\Delta\mathbf{r} = \Delta s^{\rightarrow} = (\Delta x, \Delta y)$ то:
$A = \mathbf{F}^{\rightarrow} . \Delta s^{\rightarrow} = X.\Delta x+Y.\Delta y$.
Да разделим кривата C с точки по нея: в посока от A към B на дъги A_iA_{i+1}^ с дължини $\sigma_i = |A_iA_{i+1}$^$|$ и с максимална дължина $\lambda = \max\{ \sigma_i \}$.

Нека $M_i \in A_iA_{i+1}$^ е произволна точка от дъгата A_iA_{i+1}^ .
Означаваме с $\Delta s_i^{\rightarrow}$ векторите $A_iA_{i+1}^{\rightarrow}$ при $i = 1\ldots n$.



Да разгледаме един интервал от това деление.
Предполагаме, че преместването се извършва не по дъгата $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ а по вектора $\overrightarrow{\Delta s_i} = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ с координати $(\Delta x_i , \Delta y_i)$ и че във всички точки от това преместване, на единична маса действа една и съща сила $\overrightarrow{F_i}$.
Тогава:

$$A_i \approx \vec{F_i} \,.\, \vec{\Delta s_i} = X(x_i, y_i)\,.\,\Delta x_i + Y(x_i, y_i)\,.\,\Delta y_i$$

Събирайки тези елементарни работи получаваме приблизителното равенство:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \,.\, \vec{\Delta s_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(X(x_i, y_i)\,.\,\Delta x_i + Y(x_i, y_i)\,.\,\Delta y_i \right)$$

Неточността на това приближение намалява при $\lambda \to 0$, което може да се постигне чрез увеличаване на точките на деление запазвайки тяхното равномерно разпределение.
Извършвайки граничен преход при $\lambda \to 0$ получаваме:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(X(x_i, y_i)\,.\,\Delta x_i + Y(x_i, y_i)\,.\,\Delta y_i \right)$$

Аналитично определение

Нека $C = AB$^ е една непрекъсната крива в равнината (x,y), в точките на която са зададени вектори, $\mathbf{F}^{\rightarrow}(M) = \mathbf{F}^{\rightarrow}(x,y)$, където $M(x,y) \in C = AB$^.

Нека освен това векторът $\mathbf{F}^{\rightarrow}(x,y)$ има координати (X, Y), всяка от тях зависеща от x и y: $(X(x, y), Y(x, y))$.
Нека $A_1 = A$, A_2 , A_3 ,… , $A_{n+1} = B$ са точки от $C = AB$^ в посока от A към B и
векторът $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ има координати $(\Delta x_i , \Delta y_i)$.
Ако съществува границата

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(X(x_i, y_i)\,.\,\Delta x_i + Y(x_i, y_i)\,.\,\Delta y_i \right)$$

то тя се нарича криволинеен интеграл от II род (по координати) и се означава с:

$$I = \int_C X(x,y)dx + Y(x,y)dy$$

Обикновено в Българската литература, вместо (X, Y),
като координати на векторното поле се използват (P, Q). Така че:

$$I = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

От самата дефиниция се вижда, че посоката на обхождане на кривата C има съществено значение.

Векторно означаване на криволинейния интеграл

Ако векторното поле $\vec{\mathbf{F}}$ (x,y) има координати (P(x, y), Q(x, y))
а векторът на преместването е $d\vec{\mathbf{r}}$ и както знаем, $d\vec{\mathbf{r}}$ = (dx , dy),
то криволинейният интеграл по кривата C се записва така:

$$\int_C \vec{\mathbf{F}}.\vec{d\mathbf{r}} = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Това означение се прилага широко във физиката.
Ако кривата C е затворена то интегралът се записва с кръгче, ето така:

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}}.\vec{d\mathbf{r}} = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Свеждане към определен интеграл

Нека C е крива зададена с параметрично уравнение x=x(t) ; y=y(t) ; $t_1 \le t \le t_2$,
където двете функции са с непрекъснати производни .
Тогава dx = x'(t).dt и dy = y'(t).dt.

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} P(x(t),y(t)).x'(t)dt + Q(x(t),y(t)).y'(t)dt$$

В частен случай, при y = y(x) ; a ≤ x ≤ b може да се приеме , че x = t и формулата придобива вида:

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P(x,y(x)).dx + Q(x,y(x)).y'(x)dx$$

Ако кривата C е зададена с уравнение в полярни координати r = r(φ), където $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, тогава:

$$x = r(\varphi).\cos\varphi \Rightarrow dx = (r'.\cos\varphi - r.\sin\varphi).d\varphi$$
$$y = r(\varphi).\sin\varphi \Rightarrow dy = (r'.\sin\varphi + r.\cos\varphi).d\varphi$$

Свойства на криволинейния интеграл от II род (по координати)

I.

$$\int_{AB^\frown} \ldots = -\int_{BA^\frown} \ldots$$

Редът има значение!

II.
Ако C е точка от кривата AB^ , то

$$\int_{AB^\frown} \ldots = \int_{AC^\frown} \ldots + \int_{CB^\frown} \ldots$$

Пример

В равнината Oxy е зададено векторното поле, като на всяка точка от равнината (x,y) е съпоставен вектор **F** (x, y).
Намерете работата на векторното поле при движение на единична маса
от началото на координатната система до точката C(1,1) по четири различни криви:

а) параболата с уравнине $y = x^2$
б) параболата с уравнине $y = \sqrt{x}$
в) начупената линия по точките O(0, 0) → A(1, 0) → C(1, 1)
г) начупената линия по точките O(0, 0) → B(0, 1) → C(1, 1)

Да започнем:

а) $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

В нашия случай P = x, Q = y .

Получаваме:

$$\int_C xdx + ydy$$

Понеже кривата С има уравнение $y = x^2$, след заместване получаваме:

$$\int_C xdx + x^2 dx^2$$

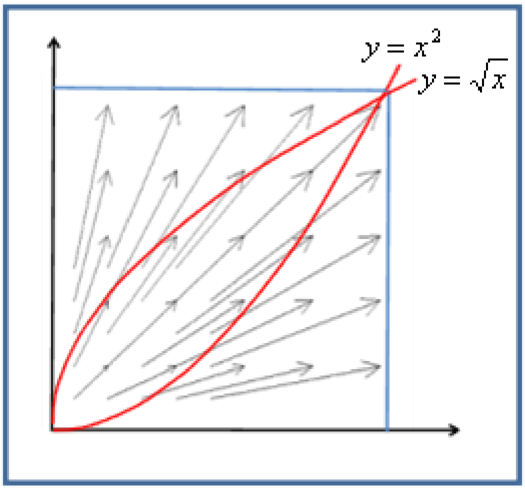
$dy = dx^2 = 2x.dx$, така че:

$$I = \int_C xdx + x^2 dx^2 = \int_C xdx + x^2.2xdx = \int_0^1 (x + 2x^3)dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{4}x^4\Big|_0^1 = 1.$$

Изключително важно е да илюстрираме ситуациите в които попадаме със схеми и да изработим план за действие.

Без план човекът или организацията попадат в ситуация, планирана от други.

Чертежът по-долу е направен с програма.



Важно е да се забележи, че при векторното поле има симетрия по отношение на правата y = x

Интуитивно усещаме, че работата на полето по кривата $y = \sqrt{x}$ ще бъде същата.

Да видим дали е така:

б)

$$I = \int_C xdx + ydy = \int_C xdx + \sqrt{x}d\sqrt{x} = \int_C xdx + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx = \int_0^1 (x + 0{,}5)dx = 1$$

в) по отсечката OA x се променя от 0 до 1 а y е константа, равна на 1.

Тогава dy = 0 и $I_1 = \int_{OA} xdx + ydy = \int_C xdx + 1.0 = \int_0^1 xdx = 0{,}5$

По отсечката AC x=1 и dx = 0

$$I_2 = \int_{AC} xdx + ydy = \int_C 1.0 + y.dy = \int_0^1 y.dy = 0{,}5$$

Общо получаваме отново 1.

Поради видимата симетрия и при г) ще е толкова.

Нека,въобще С е крива, свързваща точките О и С.

Тогава както x така и y се променят от 0 до 1.

$$I = \int_C xdx + ydy = \int_{x=0}^1 xdx + \int_{y=0}^1 ydy = 1$$

Какво ще научим:

Независимост на криволинейния интеграл от пътя на интегриране