Криволинеен интеграл от I род (по дъга)

Ефирна нишка се извива и крепи голяма тежест,
Разпределена правилно по нея.
Ако формата със съдържанието свържеш ,
Нишката в кълбо ще се превърне.

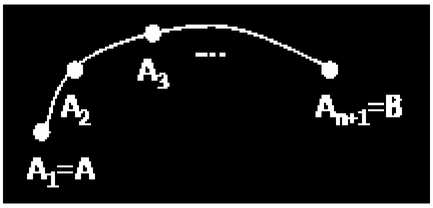
Написал - Неизвестен

Механичен смисъл

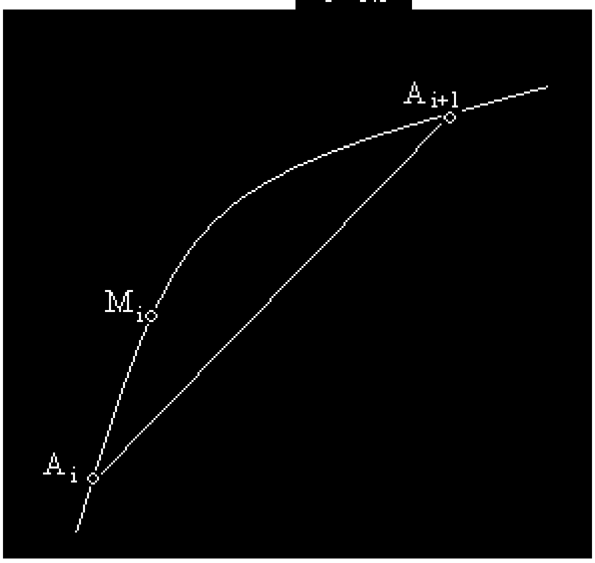
Нека в равнината е зададена една непрекъсната и ректифицируема крива $C = AB^\frown$ (това означава че кривата има дължина).
В точките по кривата има разположени елементарни маси с линейна плътност ρ(M), където M е точка от кривата.
Линейната плътност се дефинира с:

$$\rho(M) = \lim_{|PQ^\frown|\to 0} \frac{m(PQ^\frown)}{|PQ^\frown|}$$

$PQ^\frown$ е дъга от кривата C, съдържаща точка M, а $|PQ^\frown|$ и $m(PQ^\frown)$ са нейната дължина и маса, съответно.
Желаем да определим масата m на кривата C.
За целта разделяме кривата
$C = AB^\frown$ чрез междинни точки $A_1 = A$, A_2 , A_3 ,… , A_{n+1} =B лежащи на кривата в посока от A към B на n части.



Означаваме със $\sigma_i = |A_iA_{i+1}^\frown|$ дължината на отделните части.
Нека $\lambda = \max_i \{\sigma_i\}$ е тяхната максимална дължина.
Във всяка от тези части избираме по една точка $M_i \in A_iA_{i+1}^\frown$.
Предполагаме, че плътността на всички точки по дъгата $A_iA_{i+1}^\frown$ е една и съща и е равна на $\rho(M_i)$.



Неточността предизвикана от това предположение намалява при намаляване на дължината $\sigma_i = |A_iA_{i+1}^\frown|$.

Тогава масата на дъгата A_iA_{i+1}^ е приблизително равна на $\rho(M_i).\sigma_i$.
Събирайки тези елементарни маси получаваме приблизителното равенство:

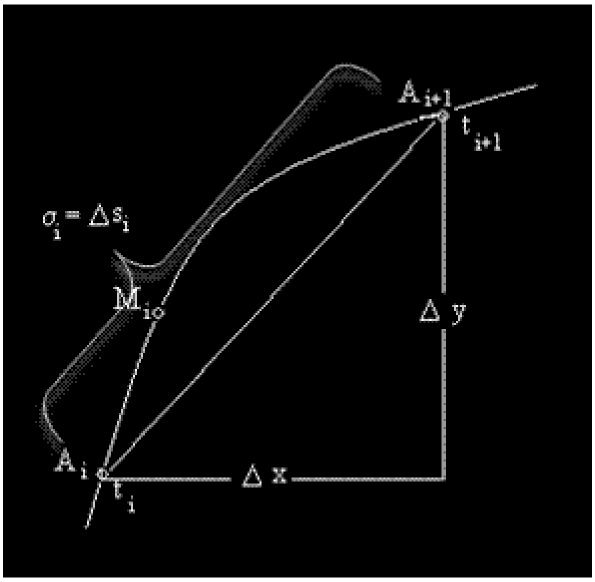
$$m \approx \sum_{i=1}^{i=n} \rho(M_i)\sigma_i$$

Неточността на това приближение намалява при $\lambda \to 0$, което може да се постигне чрез увеличаване на точките на деление, запазвайки тяхното равномерно разпределение.
Извършвайки граничен преход при $\lambda \to 0$ получаваме, че:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{i=n} \rho(M_i)\sigma_i$$

Аналитично определение

Нека f(x,y) е функция, зададена във всяка точка M(x,y) от непрекъснатата и ректифирицируима (имаща определена дължина във всеки свой участък) крива C, крайни точки A и B. f(M)=f(x,y) за $M \in C$
Да разделим C = AB^ с точки по нея: $A_1 = A$, A_2 , A_3 ,… , A_{n+1} =B, в посока от A към B на дъги A_iA_{i+1}^ с дължини $\sigma_i = |A_iA_{i+1}$^| и с максимална дължина $\lambda = \max\{ \sigma_i \}$.
Нека $M_i \in A_iA_{i+1}$^ е произволна точка от дъгата A_iA_{i+1}^.



Ако съществува границата

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{i=n} f(x,y)\sigma_i$$

то тя се нарича криволинеен интеграл от I род (по дъга) на функцията f(x,y) по кривата C и се означава с

$$\int_C f(x,y)\,ds$$

От самата дефиниция се вижда, че посоката на обхождане на кривата C не играе никаква роля.

Свеждане към определен интеграл

Нека C е крива зададена с параметрично уравнение x=x(t) ; y=y(t) ; $t_1 \le t \le t_2$.
Тогава:

$$\sigma_i = \Delta s_i = |A_iA_{i+1}\urcorner \cong \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \cong \sqrt{x'^2(t_i)\Delta t^2 + y'^2(t_i)\Delta t^2} = \sqrt{x'^2(t_i) + y'^2(t_i)}\,.\,\Delta t$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(x(t_i), y(t_i)).\,\sigma_i = \sum_{i=1}^{i=n} f(x(t_i), y(t_i)).\sqrt{x'^2(t_i) + y'^2(t_i)}\,.\,\Delta t$$

което е интегрална сума:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)).\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}.dt$$

Така получаваме, че при параметрично задаване на кривата C
C: x=x(t) ; y=y(t) ; t1 ≤ t ≤ t2

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)).\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}.dt$$

В частен случай, при y=y(x) ; a ≤ x ≤ b може да се приеме , че x=t и формулата придобива вида:

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x, y(x)).\sqrt{1+y'^2(x)}.dx$$

Ако кривата C е зададена с уравнение в полярни координати C: $\rho = \rho(\varphi)$ $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$

то:

$$\left.\begin{aligned} x = r(\varphi).\cos\varphi \Rightarrow dx = (r'.\cos\varphi - r.\sin\varphi).d\varphi \\ y = r(\varphi).\sin\varphi \Rightarrow dy = (r'.\sin\varphi + r.\cos\varphi).d\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{r'^2+r^2}.d\varphi$$

Свойства

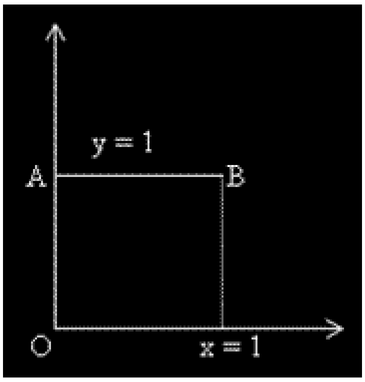
I. Ако C е точка от кривата AB^ , то

$$\int_{AB^\frown} \ldots = \int_{AC^\frown} \ldots + \int_{CB^\frown} \ldots$$

II. Ако f(x,y) е непрекъсната по дъгата AB^ то съществува точка M(ξ , η) от тази крива, такава, че :

$$\int_{AB^\frown} f(x,y)ds = f(\xi,\eta).|AB^\frown|$$

Пример 1
Да разгледаме хоризонталната отсечка l: y = 1 при x променящо се от 0 до 1 .
Да предположим, че линейната и плътност ρ зависи само от x и е равна на x.
Да изчислим масата на отсечката.
Правим чертеж:



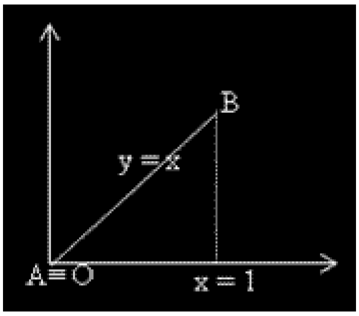
В точката A линейната плътност ще бъде 0 а в B 1.
Така че ρ(x,y) = x.
Изчисляваме ds , знаейки уравнението на линията. l: y = 1

$$y' = 0;\ ds = \sqrt{1+y'^2}.dx = dx$$

$$M = \int_l \rho(x,y)ds = \int_l xds = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} = 0.5$$

Пример 2
Да разгледаме наклонената отсечката l: y = x при x променящо се от 0 до 1 .
Да предположим, че линейната и плътност ρ зависи само от x и е равна на x.

Да изчислим нейната маса.
Правим чертеж:

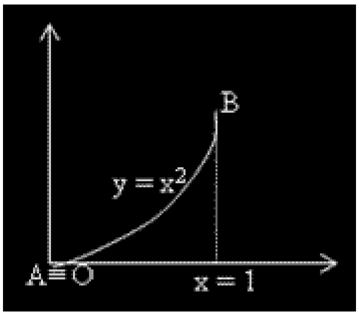


В точката А линейната плътност ще бъде 0 а в В 1.
Така че ρ(x,y) = x.
Изчисляваме ds , знаейки уравнението на линията l: y = x

$$y' = 1;\ ds = \sqrt{1 + y'^2}.dx = \sqrt{2}.dx$$

$$M = \int_l \rho(x,y)ds = \int_l xds = \int_0^1 x.\sqrt{2}dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$$

Пример 3
Да разгледаме параболата с уравнение l: y = x2 при x променящо се от 0 до 1 .
Да предположим, че линейната и плътност ρ зависи само от x и е равна на x.
Да изчислим нейната маса.
Правим чертеж:



В точката А линейната плътност ще бъде 0 а в В 1.
Така че ρ(x,y) = x.
Изчисляваме ds , знаейки уравнението на линията l: y = x2

$$y' = 2x;\ ds = \sqrt{1 + 4x^2}.dx$$

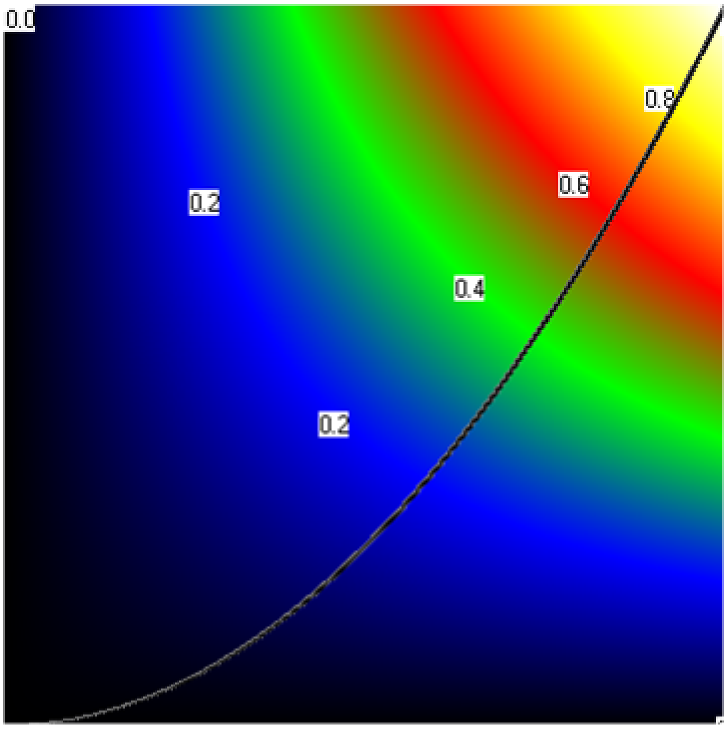
$$M = \int_l \rho(x,y)ds = \int_l xds = \int_0^1 x.\sqrt{1 + 4x^2}dx$$

Внасяме x под знака на деференциала и получаваме табличен интеграл.

$$\int_0^1 x.\sqrt{1 + 4x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}dx^2 = \frac{1}{8}\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}d(1 + 4x^2) = \frac{1}{8}.\frac{2}{3}(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{12}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \approx 0.85$$

Това е една по-добра илюстрация към примера.



Какво ще научим: Криволинеен интеграл от II род (по координати)	Висша математика II част Висша математика III част Уравнения на математическата физика