Условни екстремуми. Множители на Лагранж

2. Условни екстремуми. Множители на Лагранж. В редица практически екстремални задачи за функции на много променливи се налага търсенето на екстремуми при наложени допълнителни ограничителни условия върху независимите променливи. Такива екстремуми се наричат ***условни екстремуми***. За да стане ясно това понятие, ще го въведем и изучим първо за функция на две независими променливи при наличието на едно допълнително условие, тъй като в този случай това понятие допуска непосредствено геометрическо тълкуване.

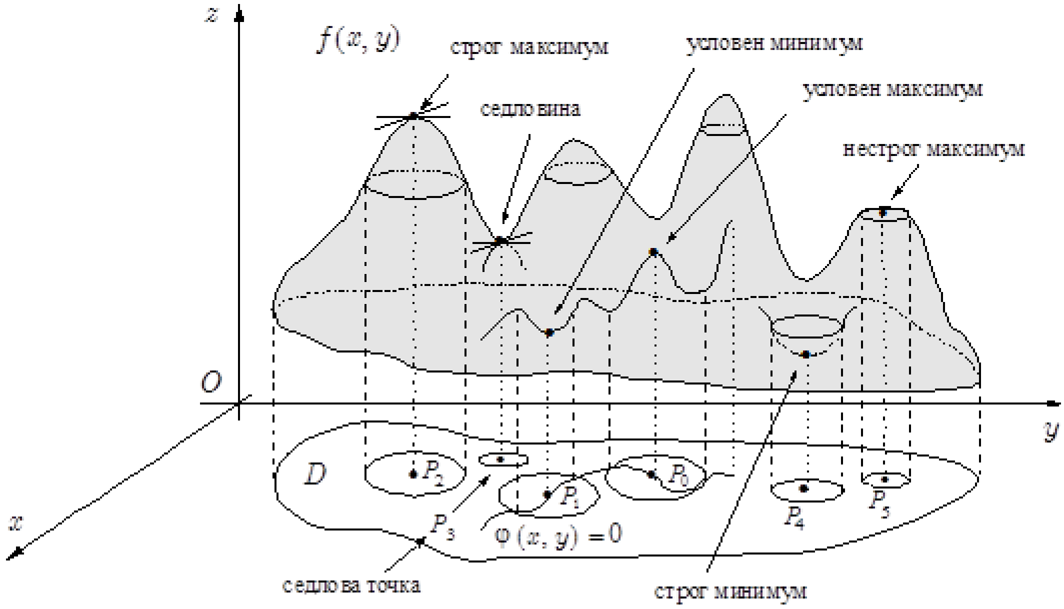
Определение 3. Нека функциите $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$, са дефинирани в множеството $D \subset \mathbf{R}^2$. Казваме, че в точката $P_0(x_0,y_0) \in D$ функцията $f(x,y)$ има ***условен максимум*** при ограничителното условие

(1) $\varphi(x,y) = 0$,

ако съществува околност $K_\varepsilon(P_0)$ на тази точка, така че $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ за всяко $(x,y) \in K_\varepsilon(P_0) \cap D$, което удовлетворява условието $\varphi(x,y) = 0$. Ако неравенството $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ е изпълнено за всяка точка $(x,y) \in D$, която удовлетворява условието $\varphi(x,y) = 0$, казваме, че в точката $P_0(x_0,y_0)$ функцията има ***най-голяма стойност*** (***абсолютен условен максимум***, ***глобален условен максимум***) **при условието** $\varphi(x,y) = 0$.

Условният максимум се нарича ***строг***, когато е в сила неравенството $f(x,y) < f(x_0,y_0)$ за всяко $(x,y) \in K_\varepsilon(P_0) \cap D$, $(x,y) \ne (x_0,y_0)$, удовлетворяващо условието $\varphi(x,y) = 0$. Аналогично се дефинират ***условен минимум*** и ***строг условен минимум*** на функцията $f(x,y)$ **при ограничителното условие** $\varphi(x,y) = 0$, както и ***най-малка стойност*** (***абсолютен условен минимум*** , ***глобален условен минимум***) **при условието** $\varphi(x,y) = 0$. Условните максимуми и минимуми се наричат кратко ***условни екстремуми***.

Смисълът на понятието условен екстремум е, че той е екстремум (т.е. максимум или минимум) **не в цяла околност** $K_\varepsilon(P_0)$ **около** точката $P_0 \in D$, а само в тези нейни точки $P(x,y)$, които принадлежат на дефиниционното множество D и които удовлетворяват условието $\varphi(x,y) = 0$. При това положение е ясно, че точката P_0 **не е задължена да бъде вътрешна точка** на дефиниционното множество и **може да бъде негова контурна точка**. За една функция на две независими променливи $f(x,y)$, понятието условен екстремум в дадена точка $P_0(x_0,y_0)$ при условие $\varphi(x,y) = 0$ може да се изтълкува геометрично като задача за търсене на екстремуми, когато точката $P(x,y)$ от нейното дефиниционно множество D не напуска кривата с уравнение $\varphi(x,y) = 0$ от координатната равнина Oxy (фиг. 9). Тогава точката $(x,y,f(x,y))$ от графиката на функцията, образно казано **ще описва крива** върху повърхнината, която в случая е тази графика. Това може да се интерпретира нагледно, все едно че се движим по някаква „пътека“ върху „планината“ - графика на функцията, изобразена на фиг. 9. При това е ясно, че в зависимост от релефа на „планината“ върху тази „пътека“ окално може да има „най-ниски“ места, там където след „слизане“ надолу започваме „да се изкачваме“ нагоре. Именно едно такова локално „най-ниско“ място върху тази „пътека“ ще бъде точка на условен минимум. Такъв например се достига в точката P_1 от фиг. 9. Аналогично, в зависимост от релефа на „планината“ върху „пътеката“ локално може да има „най-високи места“, там където сме „се изкачвали“ нагоре след което сме започнали „да слизаме“ надолу. Именно едно такова локално „най-високо“ място върху тази „пътека“ ще бъде условен максимум. Такъв например се достига в точката P_0 от фиг. 9.



Фиг. 9

За да направим сравнение между точките в които има условни екстремуми и локални екстремуми, както и седловите точки, на фиг. 9 сме отбелязали и някои локални екстремуми и седловини върху „планината“ която обхождаме. За разлика от условните екстремуми е ясно, че локалните максимуми може да се тълкуват като нейни „върхове“, докато локалните минимуми може да се тълкуват като „най-ниските точки“ от „дъната“ например на „високопланински езера“. За разлика от локалните екстремуми, условните екстемуми са екстремуми само върху „пътеката“, която обхождаме и съвсем не е задължително те да бъдат и локални екстремуми, тъй като „наляво“ или „надясно“ от една точка на условен екстремум може да имаме съответно и „по-високи“ и „по-ниски“ точки от „планината“ (фиг. 9). От тази гледна точка седловите точки може да се тълкуват като такива точки на условни екстремуми, в които например функцията има максимум върху *x*-линията и минимум върху *y*-линията, или обратно (фиг. 9),   докато точките на локалните екстремуми може да се тълкуват като точки на условни екстремуми, в които обаче функцията има максимум (или съответно минимум) едновременно и върху *x*-линията и върху *y*-линията (фиг. 9).

От предишните бележки е ясно, че за намиране на условните екстремуми не биха могли да се използва нито необходимите, нито достатъчните условия от предишния раздел 6 за търсене на локални екстемуми. Причината за това е, че **условният екстремум в действителност не е локален екстремум**, т.е. не е най-голяма или най-малка стойност на функцията в цяла околност на дадената точка, а е най-голяма или най-малка стойност само за тези точки от някаква околност, ***които удовлетворяват допълнителни условия***, *например лежат върху някаква крива в двумерния случай*.

Ето защо за търсенето на условните екстемуми се прилагат други методи. Един възможен метод за търсене на условен екстремум на функцията $f(x,y)$ при условие $\varphi(x,y)=0$ е когато последното уравнение може да се реши явно относно някоя от променливите, например да се изрази y като еднозначна функция на x, т.е. $y=y(x)$ когато x описва даден интервал Δ. Тогава задачата за намиране на условните екстремуми се свежда към задачата за намиране на локалните екстремуми на функцията на една променлива $F(x)=f(x,y(x))$ в интервала Δ, която изучихме в раздел 5, параграф 4.6, глава 4. По такъв начин е решена и задачата в следващия пример, в който се разглежда една типична екстремална задача от геометрията.

Ще отбележим, че подобни екстремални задачи от геометрията, изучавани в училище, са именно задачи за условни екстремуми и в училищния курс по математика се препоръчва да се решават по описания начин.

Пример 1. Измежду всички правоъгълници с даден фиксиран периметър $2p>0$ да се намери този, който има най-голямо лице. Ясно е, че ако означим с $x>0$ и $y>0$ дължините на съседните страни на този правоъгълник, задачата се свежда да задачата за намиране на най-голямата стойност на функцията $S(x,y)=xy$ когато точката (x,y) описва множеството $D=\{(x,y):x>0,\ y>0\}$ и удовлетворява условието $x+y=p$, т.е. условието $\varphi(x,y)=x+y-p=0$.

Ще решим първо тази задача чрез описания по-горе метод, препоръчван в училищния курс по математика. Веднага се вижда, че от условието $x+y=p$ можем да изразим променливата y като функция на променливата x във вида $y=p-x$. Понеже $y=p-x>0$, получаваме допълнителното ограничение $x<p$ за променливата x и задачата се свежда до задачата за търсене на най-голяма стойност на функцията на една независима променлива $F(x)=S(x,p-x)=x(p-x)$ в интервала $0<x<p$. Ясно е че в този интервал производната $F'(x)=p-2x$ се анулира единствено в точката $x=p/2$ и тъй като $F''(p/2)=-2<0$ е ясно, че в точката функцията $F(x)$ има локален максимум $F(p/2)=p^2/4$. Тъй като този локален максимум е единственият локален екстремум на функцията $F(x)$, следва, че той е и неин **абсолютен максимум**, т.е. **нейна най-голяма стойност**. Когато обаче $x=p/2$ е ясно, че $y=p-x=p-p/2=p/2$, което показва, че измежду всички правоъгълници с даден фиксиран периметър $2p>0$ най-голямо лице $S_{\max}=p^2/4$ има квадрата със страни $x=y=p/2$.

Един друг значително по-ефективен метод за търсене на условните екстремуми е така наречения ***метод на множителите на Лагранж***. Да разгледаме функцията

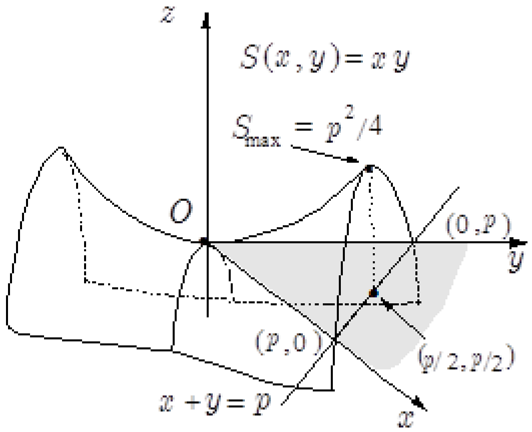
(2) $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

известна като ***функция на Лагранж***, която зависи от реалните променливи x,y и от допълнително въведената променлива $\lambda\in\mathbf{R}$ (***множител на Лагранж***). При тези означения е вярна следната теорема, която дава необходими условия за съществуване на условен екстремум при функциите на две променливи:

Теорема 1. (теорема на Лагранж) При предишните предположения и означения, нека в точката $P_0(x_0,y_0)\in D$ функцията $f(x,y)$ има условен екстремум при условието $\varphi(x,y)=0$, и нека функцията $f(x,y)$ и функцията $\varphi(x,y)$, задаваща условието, имат непрекъснати частни производни в околност на точката P_0. (Ясно е, че координатите на точката P_0, удовлетворяват условието, т.е. $\varphi(x_0,y_0)=0$.)
Нека освен това в точката $P_0(x_0,y_0)$ е изпълнено условието $\varphi'_y(x_0,y_0)\neq 0$. Тогава съществува множител на Лагранж $\lambda=\lambda_0$, така че точката (x_0,y_0,λ_0) е стационарна точка на функцията на Лагранж, т.е. в нея са изпълнени необходимите условия за съществуване на локален екстремум на функцията на Лагранж

(3) $$\left|\begin{array}{l} L'_x(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \\ L'_y(x_0,y_0,\lambda_0)=0 \\ L'_\lambda(x_0,y_0,\lambda_0)=\varphi(x_0,y_0)=0 \end{array}\right. .$$

Пример 2. Ще разгледаме отново задачата, поставена в пример 1, измежду всички правоъгълници с даден фиксиран периметър $2p>0$ да се намери този, който има най-голямо лице. И сега, ако означим с $x>0$ и $y>0$ дължините на съседните страни на този правоъгълник, задачата се свежда да задачата за намиране на най-голямата стойност на функцията $S(x,y)=xy$ когато точката (x,y) описва множеството $D=\{(x,y):x>0,\ y>0\}$ и удовлетворява условието $x+y=p$, т.е. условието $\varphi(x,y)=x+y-p=0$. Ще отбележим, че повърхнината - графика на функцията $S(x,y)=xy$ също е хиперболичен параболоид (фиг.10), който съдържа координатните оси Ox и Oy. Множеството D е първи квадрант (защрихованото множество на фиг.10), а условието $x+y=p$ е уравнение на правата, минаваща през точките $(p,0)$ и $(0,p)$ от осите Ox и Oy. Така поставената задача може геометрично да се изтълкува като задача за намиране на най-голямата стойност на функцията $S(x,y)=xy$ когато точката (x,y) описва отсечката между точките $(p,0)$ и $(0,p)$, означена с по-плътна линия на фиг.10. При това намерената по-горе максимална стойност на лицето $S_{\max}=p^2/4$ се достига в средата на на тази отсечка - точката $(p/2,p/2)$
.



Фиг. 10

Пример 3. Сега обаче ще решим тази задача по друг начин с метода на множителите на Лагранж. Ще отбележим обаче, че тя е достатъчно елементарна и в пример 1 я решихме без да прибягваме към този метод. Ние съзнателно обаче излагаме две различни нейни решения за да можем да сравним положителните и отрицателните черти и на двата метода. Функцията на Лагранж за тази задача има вида $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = xy + \lambda(x + y - p)$.

Като пресметнем нейните частни производни, образуваме системата на Лагранж

$$(4)\quad \left| \begin{array}{l} L'_x = y + \lambda = 0 \\ L'_y = x + \lambda = 0 \\ L'_\lambda = x + y - p = 0\,. \end{array} \right.$$

Ще отбележим, че самият множител на Лагранж $\lambda = -p/2$ „изчезва“ при решаването на системата. Той по същество не е необходим, но неговото съществуване се осигурява от предишната теорема. Като извадим първото от второто уравнение в нея, елиминираме множителя на Лагранж λ и получаваме $x = y$. Като направим заместване в последното уравнение на системата (4) намираме, че единствена „съмнителна“ точка за условен екстремум е точката с координати $x = y = p/2$, т.е. единственият условен екстремум, за който още не е ясно дали е максимум или минимум, евентуално ще бъде стойността $S(p/2, p/2) = p^2/4$.

Теоремата на Лагранж обаче осигурява само необходими условия за съществуване на условни екстремуми, т.е. дава условия за локализиране на „съмнителните“ точки за условен екстремум. Съществуват и достатъчни условия за съществуването на условни екстремуми (максимуми или минимуми), които използват по същество втория диференциал на функцията на Лагранж, но те в повечето случаи са трудно приложими. Затова след намирането на „съмнителните“ точки за условен екстремум обикновено се използват други съображения за доказването, че в дадена точка има условен екстремум, или няма, както и че този условен екстремум е абсолютен условен екстремум, или че не е.

В предишната задача например, след като сме идентифицирали единствената „съмнителна“ точка за условен екстремум $(p/2, p/2)$, може да се докаже директно, че стойността на лицето $S(p/2, p/2) = p^2/4$ е най-голямата негова стойност при условието $x + y - p = 0$, където $x > 0,\ y > 0$.

Аналогично се въвеждат ***условен максимум*** и ***условен минимум*** за функция на *n независими променливи* при наличие на $m < n$ *ограничителни условия*:

Определение 4. Нека функцията $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и функциите $\varphi_1(x) = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, …, $\varphi_m(x) = \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, където $m < n$, са дефинирани в множеството $D \subset \mathbf{R}^n$. Казваме, че в точката $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ функцията $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ има ***условен максимум*** при ограничителните условия

(5) $$\begin{cases} \varphi_1(x) = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \varphi_2(x) = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x) = \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases},$$

ако съществува околност $K_\varepsilon(a)$ на тази точка, така че $f(x) \le f(a)$ за всяко $x \in K_\varepsilon(P_0) \cap D$, което **удовлетворява предишните условия** (5).

Ако неравенството $f(x) \le f(a)$ е изпълнено за всяко $x \in D$, което удовлетворява условията (5) казваме, че в точката a функцията има ***най-голяма стойност***(***абсолютен условен максимум***, ***глобален условен максимум***) при условията (5). Условният максимум се нарича ***строг***, когато е в сила неравенството $f(x) < f(a)$ за всяко $x \in K_\varepsilon(P_0) \cap D$, $x \ne a$, което удовлетворява условията (5).

Аналогично се дефинират понятията ***условен минимум*** и ***строг условен минимум*** на функцията $f(x)$ ***при ограничителните условия*** (5) , както и ***най-малка стойност*** (***абсолютен условен минимум***, ***глобален условен минимум***) **при условията** (5). Условните максимуми и минимуми се наричат кратко ***условни екстремуми***.

Следвайки предишната идея, в общия случай когато изследваме за условни екстремуми една функция на n променливи $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ние бихме могли да сведем тази задача към задачата за търсене на локалните екстремуми на функция на $n-m$ променливи, ако е възможно да решим системата (5) по отношение на m от променливите, като ги изразим чрез останалите $n-m$ променливи, например да изразим $x_{n-m+1}, \dots, x_n$ чрез $x_1, \dots, x_{n-m}$ и да заместим получените изрази във функцията f.

Ясно е обаче, че за сложни функции този начин практически е неприложим, тъй като при него уравнението или системата, задаващи допълнителните условия, трябва първо да се решат по отношение на някои от променливите, т.е. тези променливи трябва да се изразят явно като **функции** на останалите. Ясно е, че в общия случай това практически е невъзможно.

И за функциите на повече променливи значително по-ефективен метод за търсене на условните екстремуми е ***методът на множителите на Лагранж***, който свежда задачата за намирането на тези екстремуми към задачата за търсенето на стационарните точки на функцията

(6) $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 \varphi_1(x) + \lambda_2 \varphi_2(x) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x)$,

известна като ***функция на Лагранж***, където $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subset \mathbf{R}^n$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^m$, която зависи от $(n+m)$-те променливи $x_1, x_2, \dots, x_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Неизвестните стационарни точки се определят от системата

(7) $$\begin{cases} L'_{x_1}(a, \lambda) = 0 \\ L'_{x_2}(a, \lambda) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ L'_{x_n}(a, \lambda) = 0 \\ L'_{\lambda_1}(a, \lambda) = \varphi_1(a) = 0 \\ L'_{\lambda_2}(a, \lambda) = \varphi_2(a) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L'_{\lambda_m}(a, \lambda) = \varphi_m(a) = 0 \end{cases}$$

И в този случай числата $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ се наричат ***множители на Лагранж***.

По този начин се формулират **необходими условия за търсене на условни екстремуми**. Съществуват и достатъчни условия за наличието на условен екстремум при функциите на n променливи, които притежават непрекъснати частни производни от втори ред. В повечето случаи обаче те са практически неприложими и затова ги изпускаме.