ориентацията на кривата γ. Ако сменим ориентацията на γ, то допирателният вектор си променя посоката, $\boldsymbol{\tau}_{\gamma^{-1}} = -\boldsymbol{\tau}_{\gamma}$, следователно интегралът си променя знака,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} d\mathbf{r} = -\int_{\gamma^{-1}} \mathbf{F} d\mathbf{r} .$$

3. Формула на Грийн. В този раздел ще разглеждаме равнинни криволинейни интеграли от втори род

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{\gamma} P(x, y)dx + Q(x, y)dy ,$$

където $\mathbf{F} = (P, Q)$, $d\mathbf{r} = (dx, dy)$. Ще разглеждаме само гладки или частично гладки криви. Кривата $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, се нарича ***проста***, когато няма точки на самопресичане и ***затворена***, когато крайната и началната точка съвпадат. Съвпадението на началната и крайната точка не се счита за самопресичане. Когато кривата е едновременно проста и затворена, се нарича ***жорданова***. Една жорданова крива γ разделя равнината на две области по очевиден признак (Рис. 6.6).

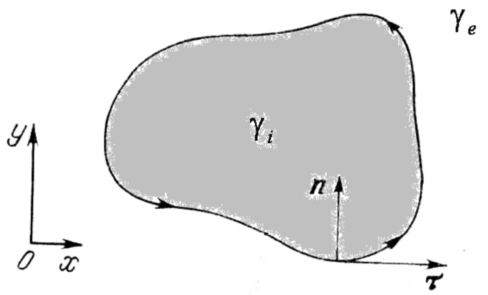

Рис. 6.6.

Едната област γ_i се нарича ***вътрешност*** на кривата, а другата γ_e се нарича ***външност*** на кривата. По този начин $\mathsf{R}^2 = \gamma \cup \gamma_i \cup \gamma_e$, което е съдържанието на една важна и изненадващо сложна за (строго) доказване ***теорема на Жордан***. На рис. 6.6, вътрешността γ_i е оцветена в сиво. Жордановите криви ще предполагаме положително ориентирани, освен ако изрично не е указано противното, което означава движение на текущата точка при нарастване на параметъра в посока обратна на въртенето на часовниковата стрелка. При положителна ориентация на γ, единичният нормален вектор $\mathbf{n}$ към γ (който образува заедно с допирателния вектор $\boldsymbol{\tau}$ дясна локална координатна система) е насочен към вътрешността на кривата (Рис. 6.6).

Ориентацията на една крива е относително понятие и зависи от ориентацията на координатната система. На рис. 6.6 кривата γ е положително ориентирана, понеже самата координатна система Oxy се разглежда като положително ориентирана.

Област $D \subset \mathsf{R}^2$ се нарича отворено и линейно свързано множество, а затворена област $\overline{D} = D \cup \partial D$ се нарича обединението на областта с нейната граница. Ако областта представлява вътрешност на дадена жорданова крива γ, $D = \gamma_i$, то нейната граница е самата крива, $\partial D = \gamma$. Векторното поле $\mathbf{F}(P, Q)$ се нарича ***гладко*** в множеството E, когато координатните функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имат непрекъснати частни производни в някакво отворено множество, което съдържа E. Символът $\oint$ означава, че интегралът е по затворена крива.

Теорема 6.1 *(Грийн).* Нека γ е жорданова крива с вътрешност областта D и нека векторното поле $\mathbf{F}(P,Q)$ е гладко в затворената област $\overline{D}=D\bigcup\gamma$. Тогава е в сила равенството (***формула на Грийн***)

(6.9) $$\oint_{\gamma} Pdx+Qdy=\iint_{D}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy.$$

Доказателство. Доказателството ще проведем само за области D, които могат да се представят като крайно обединение от криволинейни трапеци от вида

(6.10) $$\left|\begin{array}{c} a\le x\le b \\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\end{array}\right.$$

и като крайно обединение на криволинейни трапеци от вида

(6.11) $$\left|\begin{array}{c} c\le y\le d \\ \varphi(y)\le x\le\psi(y)\end{array}\right..$$

Да разгледаме отначало случая когато $Q(x,y)\equiv 0$. Тогава (6.9) се свежда до

(6.12) $$\oint_{\gamma} P(x,y)dx=-\iint_{D}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy.$$

Да предположим отначало, че областта D е криволинейния трапец (6.10) (Рис. 6.7). В този случай контурът γ се състои от четири дъги, $\gamma: PQ\bigcup QR\bigcup RS\bigcup SP$.

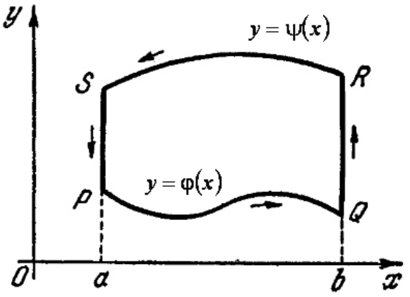

Рис. 6.7.

За дъгите PQ и $SR=RS^{-1}$ имаме следната параметризация $y=\psi(x)$

$$PQ:\left|\begin{array}{l} x=x \\ y=\varphi(x) \\ a\le x\le b\end{array}\right. \text{ и } RS^{-1}:\left|\begin{array}{l} x=x \\ y=\psi(x) \\ a\le x\le b\end{array}\right.$$

а по вертикалните дъги QR и SP имаме $dx=0$, следователно

$$\int_{QR} P(x,y)dx=\int_{SP} P(x,y)dx=0,$$

откъдето за интеграла в лявата страна на (6.12) намираме

(6.13) $$\begin{aligned}\oint_{\gamma} P(x,y)dx&=\int_{PQ} P(x,y)dx+\int_{QR} P(x,y)dx+\int_{RS} P(x,y)dx+\int_{SP} P(x,y)dx=\\ &=\int_{PQ} P(x,y)dx-\int_{SR} P(x,y)dx=\int_a^b P(x,\varphi(x))dx-\int_a^b P(x,\psi(x))dx\end{aligned}$$

От друга страна съгласно правилото за свеждане на двойния интеграл към повторен имаме

$$-\iint\limits_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dxdy = -\int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy\right]dx = -\int\limits_a^b \left[P(x,y)\Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\right]dx =$$

$$= -\int\limits_a^b [P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))]dx = \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\psi(x))dx$$

което заедно с (6.13) доказва верността на формулата (6.12) в този случай. В общия случай областта D по предположение може да се представи като крайно обединение на криволинейни трапеци, както е показано например на рис. 6.8.

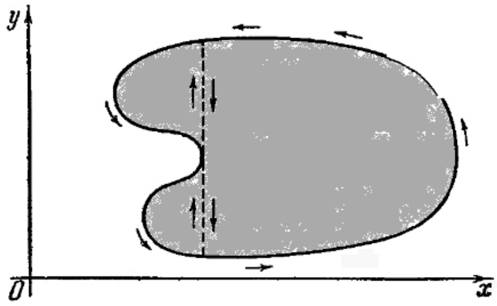

Рис. 6.8.

Тук верността на (6.12) се получава след прилагане адитивното свойство както на криволинейния интеграл от втори род така и на двойния интеграл, отчитайки, че криволинейните интеграли по допълнителните дъги взаимно се съкращават.

Разсъждавайки по аналогичен начин намираме, че

(6.14) $\oint\limits_\gamma Q(x,y)dy = \iint\limits_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dxdy$.

Сега за да получим доказателство на теоремата е достатъчно да съберем почленно формулите (6.12) и (6.14). ■

Формулата (6.9) може да се използва например за намиране лица на области. Ако положим $Q = x$ и $P \equiv 0$, то (6.9) дава

$$\oint\limits_\gamma xdy = \iint\limits_D dxdy = \mu(D).$$

Аналогично полагайки $P = -y$ и $Q \equiv 0$, получаваме друга формула

$$\oint\limits_\gamma -ydx = \iint\limits_D dxdy = \mu(D), \text{ и т.н.}$$

4. Независимост на интеграла от пътя. Формулата на Грийн е валидна при значително по-общи предположения за областта D и кривата γ. Например нека областта D е между кривите γ_1 и γ_2, както е показано на рис. 6.9.

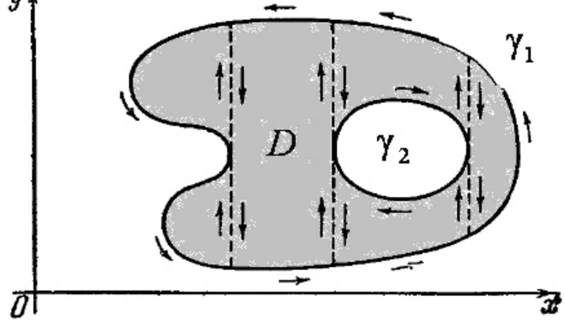

Рис. 6.9.