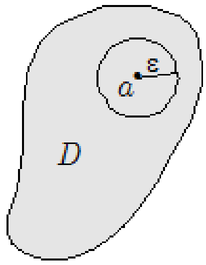
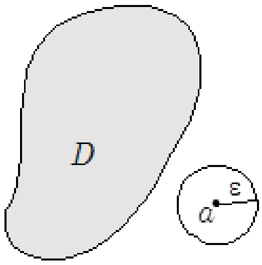
1. Пространството R^n

4. Отворени, затворени и компактни множества в $\mathbf{R}^n$. Понятието околност на точка в пространството $\mathbf{R}^n$ позволява да се въведат някои естествени понятия, свързани с точките на дадено множество:

Определение 5. Нека множеството $D \subset \mathbf{R}^n$. Казваме, че една точка $a \in \mathbf{R}^n$ е ***вътрешна точка*** за множеството D, ако тази точка има околност $K_\varepsilon(a) \subset D$ (фиг. 1 а).
Казваме, че една точка $a \in \mathbf{R}^n$ е ***външна точка*** за множеството D, ако съществува околност $K_\varepsilon(a)$, за която $K_\varepsilon(a) \cap D$ = Æ (фиг. 1 б).
Една точка $a \in \mathbf{R}^n$ се нарича ***контурна точка*** за множеството D, ако тя не е нито вътрешна, нито външна за D, т.е. когато във всяка нейна околност $K_\varepsilon(a)$ има точки от D и точки, които не принадлежат на D (фиг. 1 в).



Фиг. 1 а



Фиг. 1 б

Фиг. 1 в

От предишните определения следва, че за дадено подмножество D на пространството $\mathbf{R}^n$ *едно точка* a *от* $\mathbf{R}^n$ *е или вътрешна, или външна, или контурна точка за* D, като **съответните възможности взаимно се изключват**.

Ясно е, че ако a е вътрешна точка за множеството $a \in \mathbf{R}^n$, то тя непременно принадлежи на D, понеже дори цяла нейна околност се съдържа в D.

Лесно се вижда също, че външните точки на едно множество D никога на принадлежат на D, и дори са вътрешни за неговото допълнение $\mathbf{R}^n \setminus D$.

За контурните точки на едно множество обаче, в общия случай не може да се твърди нещо определено. Те могат да принадлежат, или да не принадлежат на множеството и това зависи от начина по който е зададено самото множество.

Една характеризация на вътрешните или контурни точки се получава от следното твърдение:

Една точка $a \in \mathbf{R}^n$ е вътрешна или контурна за множеството $D \subset \mathbf{R}^n$ тогава и само тогава, когато съществува редица $x_k \in D$, за която $x_k \to a$ в пространството $\mathbf{R}^n$.

Предишното твърдение показва, че вътрешните или контурни точки на едно множество $D \subset \mathbf{R}^n$ могат „да се приближават“ относно разстоянието в $\mathbf{R}^n$ с точки от самото множество D, независимо дали контурните точки му принадлежат, или не. При това не е изключено всички членове на „приближаващата редица“ $x_k \in D$ да съвпадат от известен номер нататък (такъв например е случаят, когато контурната точка е *изолирана*, в смисъл който ще изясним по-долу.)

Определение 6. Едно множество V в пространството $\mathbf{R}^n$ се нарича ***отворено***, когато всичките му точки са негови вътрешни точки. Едно множество $F \subset \mathbf{R}^n$ се нарича ***затворено***, когато съдържа **всичките** си контурни точки.

Пример 1. *Затвореното кълбо* $B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R}^n : \rho(x,a) \le \varepsilon\}$ е *затворено множество*, понеже съдържа всичките си контурни точки. Това са точките от сферата $S_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R}^n : \rho(x,a) = \varepsilon\}$ с радиус ε, която го загражда. Съответно *отвореното кълбо* $K_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R}^n : \rho(x,a) < \varepsilon\}$ *е отворено множество*, понеже лесно се вижда, че всяка негова точка е вътрешна.

Пример 2. *Пространството* $\mathbf{R}^n$ *е едновременно отворено и затворено множество*, понеже всяка негова точка $a \in \mathbf{R}^n$ е вътрешна, понеже се съдържа в него заедно с произволна нейна околност $K_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R}^n : \rho(x,a) < \varepsilon\}$. От друга страна, *можем да считаме*, че $\mathbf{R}^n$ *съдържа и всичките си контурни точки*, просто защото **то няма такива**.

Пример 3. *Празното множество Æ е едновременно отворено и затворено множество в пространството* $\mathbf{R}^n$.