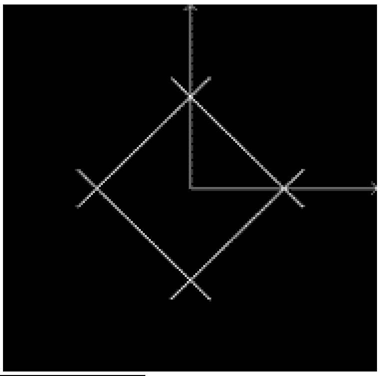
Смяна на променливите при двойни интеграли - примери

Свети Илия - пак в тия...

Ще пресметнем интеграла $\iint\limits_D \left(x^2 - y^2\right)^2 dxdy \qquad D: \begin{cases} y = x+1 \;\; ; \;\; y = x-1 \\ y = -x+1 \;\; ; \;\; y = -x-1 \end{cases}$

като извършим подходяща смяна на променливите. -

Правим чертеж: 

$$\left| \begin{array}{ll} u = x - y & u \in [-1; 1] \\ v = x + y & v \in [-1; 1] \end{array} \right.$$

Изразяваме x и y чрез u и v: $\left| \begin{array}{l} u = x - y \\ v = x + y \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = (u+v)/2 \\ y = (-u+v)/2 \end{array} \right.$

Изчисляваме Якобиана при извършената смяна на променливите:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Изходният интеграл се преобразува във вида: $I = \iint\limits_{D'} u^2 v^2 . \frac{1}{2} dudv \qquad D': \begin{cases} u \in [-1; 1] \\ v \in [-1; 1] \end{cases}$

Областта на интегриране е правоъгълна, така че: $I = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} u^2 du\right)\left(\int_{-1}^{1} v^2 dv\right) = \frac{1}{2} . \frac{2}{3} . \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

Задача 2.
Ще пресметнем интеграла

$$\iint\limits_D xy\, dxdy \qquad D: \begin{cases} y^2 = 4x \;\; ; \;\; y^2 = 9x \\ xy = 1 \;\; ; \;\; xy = 5 \end{cases}$$

като извършим подходяща смяна на променливите. ?

Какво ще научим: Интеграли, пресметнати чрез преминаване в цилндрични и сферични координати