3. Функция на няколко независими променливи величини - граници и непрекъснатост

страницата се нуждае от дописване/преглеждане

Няколко дефиниции

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{R}^n = \{(x_1, .., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1..n\}$

От тук до края на темата ще считаме, че $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^2$

Дефиниция

Функция определена върху $\mathbb{X}$, наричаме правило, кето на всяка
$\forall (x, y) \in \mathbb{X} \xrightarrow[unique]{f} z$, където $z \in \mathbb{R}$

$z = f(x, y)$ - функция на две независими променливи величини
$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - функция на n независими променливи величини, (в случая f е определена над $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$)

Дефиниция

Метрика ρ дефинирана върху $\mathbb{X}$ разбираме
$\rho : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, където
$\mathbb{X} \times \mathbb{X} = \mathbb{X}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{X}\}$
удовлетворяващо
1. $\forall (x, y) \Rightarrow \rho(x, y) > 0$
2. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
4. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \forall z \in \mathbb{X}$

Пример:

$\mathbb{X} = \mathbb{R}$
$\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\forall x, y \in \mathbb{R} : \rho(x, y) = |x - y|$

Друг пример:
Трети пример:
$\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$
….
Ако остане време ще ги напиша

Дефиниция

$(\mathbb{X}, \rho)$ - метрично пространство
$x_1, \dots, x_n, \dots.$ има граница $a \in \mathbb{X}$, ако $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, a) = 0$
записано по друг начин
$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ или $x_n \to a$

Дефиниция

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ от $\mathbb{X}$ се нарича ограничена, ако
$\exists a \in \mathbb{X}, \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \rho(x_n, a) \leq M$

Теорема

Ако редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ има граница $a \in \mathbb{X}$, то тази граница е единствена

Доказателство:
Допускаме, че $b = \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow 0 \leq \rho(a,b) \leq \rho(a,x_n) + \rho(x_n,b)$ където
$n \to \infty$ и $\rho(a,x_n) \to 0, \rho(x_n,b) \to 0$ тогава
$\rho(a,b) \to 0 \Rightarrow a = b$

Теорема

Ако редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - сходяща, то тя е ограничена.

Доказателство:
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - сходяща, следователно
$\exists a \in \mathbb{X} : \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,a) = 0 \Rightarrow \{\rho(x_n,a)\}_1^{\infty}$ е ограничена,
т.е. $\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \rho(x_n,a) \leq M$

Дефиниция

Нека $(\mathbb{X},\rho)$ - метрично пространство и $a \in \mathbb{X}$.
δ - околност на т. a се нарича мно $B_\delta(a) = \{x \in \mathbb{X} : \rho(x,a) < \delta\}$
това е отворено кълбо(кръг в двумерния вариант)

Пример:

$\rho(\mu,N) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_1+y_2)^2}$
Сега си представяме една точка A с координати (a_1,a_2)
и $B_\sigma(A) = \{\mu(x,y) : \rho(\mu,A) = \sqrt{(x-a_1^2) + (y-a_2)^2} < \sigma\}$
$S_\sigma(A) = \{\mu : \rho(\mu,A) = \sigma\}$

Теорема

$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N \Leftrightarrow \rho(x_n,a) < \varepsilon$
последното може да се запише и така $x_n \in B_\varepsilon(a)$

Теорема

Нека
$\{M_n(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$
$\lim_{n\to\infty} M_n = M_0(x_0,y_0) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_1,\ldots,x_n,\ldots \to x_0 \\ y_1,\ldots,y_n,\ldots \to y_0 \end{array} \right.$

Доказателство:
$\Rightarrow$
Нека $\lim_{n\to\infty} M_n = M_0 \Leftrightarrow \rho(M_n,M_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
Тогава $\sqrt{(x_n-x_0)^2 + (y_n-y_0)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
След това имаме
$0 \leq |x_n - x_0| = \sqrt{(x_n-x_0)^2} \leq \sqrt{(x_n-x_0)^2 + (y_n-y_0)^2}$, където
$\sqrt{(x_n-x_0)^2 + (y_n-y_0)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Следователно $\sqrt{(x_n-x_0)^2} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$ следователно $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$
или $|x_n - x_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Аналогично $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$

Сега доказателството в другата посока
$\Leftarrow$

Нека $x_1,\ldots,x_n,\ldots \to x_0$ и $y_1,\ldots,y_n,\ldots \to y_0$
$\Longrightarrow \begin{cases} x_n - x_0 \to 0 \\ y_n - y_0 \to 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x_n-x_0)^2 \to 0 \\ (y_n-y_0)^2 \to 0 \end{cases}$

Следователно и $(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 \to 0$ следователно
$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \to 0$ т.е. $\rho(M_n, M_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Пример:
$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n^2})$ = (0,1)

Дефиниции

Нека $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^2$
1. т. $M_0 \in \mathbb{X}$ - вътрешна т. на $\mathbb{X}$, ако $\exists B_\sigma(M_0) \subset \mathbb{X}$
2. $Int\ \mathbb{X} = \{\mu, \mu$ - вътрешна на $\mathbb{X}\}$$
3. Ако $\mathbb{X} = Int\ \mathbb{X}$, то казваме, че $\mathbb{X}$ е отворено
4. $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^2, \mu_0 \in \mathbb{R}^2$ т. μ_0 - точка на сгъстяване на $\mathbb{X}$, ако
$\forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(\mu_0) \cap (\mathbb{X} \setminus \{\mu_0\}) \neq \varnothing$
5. Ако $\mathbb{X} \supset \{\forall$т. на сг на $\mathbb{X}\}$, то $\mathbb{X}$ е затворено множество

Пример за затворено множество: за момента няма, трябва му картинка

Дефиниция граница на функция на две променливи

Нека $f(x,y) = f(M) = z$ е деф. върху $\mathbb{X}$ и $M_0(x_0, y_0)$ - т. сг. на $\mathbb{X}$ и "предполагаме", че $(B_\sigma(M_0) \setminus M_0) \subset \mathbb{X}$ тогава
$A = \lim\limits_{(x_0,y_0)\to(x,y)} f(x,y) = \lim\limits_{M\to M_0} f(M)$, ако е изпълнено
$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0 : \forall M \in \mathbb{X}, M \neq M_0, \rho(M, M_0) \leq \sigma \Rightarrow |A - f(M)| < \varepsilon$
т.е.
$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{X}, (x,y) \neq (x_0,y_0), \rho((x,y),(x_0,y_0)) < \sigma \Rightarrow |A - f(x,y)| < \varepsilon$

Дефиниция

Нека $z = f(M) = f(x,y)$ е деф. фърху $\mathbb{X}$ и $M_0(x_0, y_0)$ - т. на сгъстяване на $\mathbb{X}$, и $Y \subset \mathbb{X}$ и M_0 - т. на сг. Y....acdasd
Тогава
$A = \lim_{\substack{M\to M_0 \\ M\in Y}} f(M) = \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0) \\ (x,y)\in Y}} f(M)$
ако
$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0 : \forall M \in Y, M \neq M_0, \rho(M, M_0) < \sigma \Rightarrow |A - f(M)| < \varepsilon$

Пример:
$f(x,y) = (x^2 + y^2)^a, a > 0$ и $D(f) = \mathbb{R}^2$
о$(0,0)$ - точка на сг. на $\mathbb{R}$

и сега се питаме дали $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^a = 0(??)$
сега ще проверим дали това е вярно, чрез дефиницията
$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma = \sigma(\varepsilon) > 0, \forall (x,y) \neq (0,0) : \rho((x,y),(0,0)) < \sigma \Rightarrow$
$\Rightarrow |(x^2+y^2)^a - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow (x^2+y^2)^a < \varepsilon$
Метриката е разстоянието между двете точки - в случая
$\rho((x,y),(0,0)) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$

$\forall \varepsilon > 0$ - фиксираме си ε, $\exists \sigma = \sigma(\varepsilon) > 0, \forall (x,y) \neq (0,0) :$
$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} < \sigma \Longrightarrow (x^2+y^2)^a < \varepsilon$
$(x^2+y^2) < \varepsilon^{\frac{1}{a}}$
$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon^{\frac{1}{2a}}$
$\Longrightarrow$ Ако $\sigma \leq \varepsilon^{\frac{1}{2a}} \Rightarrow$ е изп.
$\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^a = 0$

Дефиниция: Повторна граница

Нека $z = f(x,y)$ е дефинирана върху мн. $(x_0 - \triangle, x_0 + \triangle) \times (y_0 - \triangle, y_0 + \triangle)$

$\forall x \in (x_0 - \triangle, x_0 + \triangle)$ - ако го 'фиксираме' и разгледаме границата(разбира се ако съществува тази граница)
$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = g(x)$ и нека (за това фиксирано x) $\exists \lim_{y\to y_0} g(x) = A$
$\Rightarrow A$ е повторна граница на $f(x,y)$
Записваме я така

$A = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x,y)$
Аналогично за y
$B = \lim_{y \to y_0} h(y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x,y)$

Теорема

Нека $f(x,y)$ - деф. в околност на т. (x_0, y_0) (без евентуално самата точка $O(x_0,y_0)$). Тогава, ако $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ и $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) : (x, y_0) \in$ околността на $O(x_0,y_0) \Rightarrow \exists \lim_{y \to y_0} f(x,y)$
Тогава $\exists \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

Дефиниция : Пробита околност

Нека O е околност на (x_0, y_0), пробита околност на т. (x_0, y_0) е мн. $O^0(x_0,y_0) = O(x_0,y_0) \backslash \{(x_0,y_0)\}$.
Свойства:
Нека $f(M), g(M), h(M)$ са дефинирани върху $O^0(M_0)$
1. Ако $\exists \lim_{M \to M_0} f(M) = A$, то A е !
2. Ако $\exists \lim_{M \to M_0} f(M) \Rightarrow \exists \overline{O}^0(M_0) : f(M)$ е ограничено върху $\overline{O}^0(M_0)$
3. Ако
$\exists \lim_{M \to M_0} f(M) = A > 0 (< 0) \Rightarrow \exists \overline{O}^0(M_0) : \forall M \in \overline{O}^0(M_0) \implies f(M) > 0 (< 0)$
4. Ако $f(M) \leq g(M)$ върху $O^0(M_0)$ и $\exists \lim_{M \to M_0} f(M) = A$ и $\exists \lim_{M \to M_0} g(M) = B$ следователно $A \leq B$
5. Ако $\exists \lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{M \to M_0} g(M)$ и
$\forall M \in O^0(M_0) : f(M) \leq h(M) \leq g(M) \implies \lim_{M \to M_0} h(M) = A$
6-9. Ако $\exists \lim_{M \to M_0} f(M)$ и $\lim_{M \to M_0} g(M)$ тогава
$\exists \lim_{M \to M_0} [f(m) \underset{\frac{-}{\div}}{+} g(m)] = \lim_{M \to M_0} f(m) \underset{\frac{-}{\div}}{+} \lim_{M \to M_0} g(m)$

Доказателство:
1. Доп., че $B = \lim_{M \to M_0} f(M), B \neq A$ (нека $A < B$ б.о.о.) тогава
$\exists \varepsilon > 0 : (A-\varepsilon, A+\varepsilon) \cap (B-\varepsilon, B+\varepsilon) \neq \varnothing$
Тогава $\exists \varepsilon > 0, A = \lim_{M \to M_0} f(M), \exists \sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon) > 0,$
$\forall M \in B_{\sigma_1}(M_0), M \neq M_0 \implies |f(M) - A| < \varepsilon.$
$B = \lim_{M \to M_0} f(M) \Rightarrow \exists \sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon) > 0,$
$\forall M \in B_{\sigma_2}(M_0), M \neq M_0 \Rightarrow |f(M) - B| < \varepsilon$

Сега си избираме
$$\sigma = min \sigma_1, \sigma_2 \Rightarrow \forall M \in B_\sigma(M_0), M \neq M_0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} |F(M) - A| < \varepsilon \\ |F(M) - B| < \varepsilon \end{array} \right.$$
$M \in B_\sigma(M_0) \Rightarrow A - \varepsilon < f(M) < A + \varepsilon < B - \varepsilon < f(M) < B + \varepsilon$ - противоречие, следователно A е !.

Дефиниция: непрекъснатост в точка

Нека $f(M)$ е деф. в околност $O(M_0)$. $f(M)$ е непрек. в т. M_0, ако $\lim_{M \to M_0} = f(M_0)$. Казано по друг начин
$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma = \sigma(\varepsilon) > 0 : \forall M \in B_\sigma(M_0) \Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \varepsilon.$

Дефиниция: непрекъснатост над множество

Нека $f(M)$ е деф. върху $\mathbb{X}$ и $M_0 = X \setminus \ intX$ (грани..)acdasd. $f(M)$ е непрекъсната в т. M_0 по мн. $\mathbb{X}$ ако
$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in X}} f(M) = f(M_0)$

Теорема

$f(x)$ - деф. върху $X \subset \mathbb{R}, x_0 \in X$ и $f(x)$ - непрек. в т.
$x_0 \Rightarrow f(x,y) = f(x), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X \ (D(f) = X \times \mathbb{R})$ е непрек. за всички т. $(x_0, y), y \in \mathbb{R}$

Доказателство:
Ако $(x, \bar{y}) \to (x_0, y_0), (x, \bar{y}) \in D(f)$
$f(x, \bar{y}) = f(x) \to f(x_0) = f(x_0, y)$

Дефиниция: графика на функция на две променливи

Ако $f(x,y)$ е деф. върху $X \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow G_f = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in X\}$

Дефиниция:

$X \subset \mathbb{R}^2$ - огранич., ако $\exists B_r((0,0)) : x \subset B_r((0,0))$

Теорема

Нека $f(x,y)$ е непрек. върху огранич. и затв.(компакнто) мн. X. Тогава:
1. $f(x,y)$ е огранич. върху X, т.е. $\exists k > 0, \forall (x,y) \in X : |f(x,y)| \leq k$
2. $\exists (x_0,y_0),(x_1,y_1) \in X : \forall (x,y) \in X \Rightarrow f(x_0,y_0) \leq f(x,y) \leq f(x_1,y_1)$ т.е. $\max_{(x,y)\in X} f(x,y) = f(x_1,y_1)$ и $\min_{(x,y)\in X} f(x,y) = f(x_0,y_0)$

Дефиниция

Нека $f(M)$ е деф. върху $X \subset \mathbb{R}^2$. $f(M)$ - равномерно непрек. върху X, ако $\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma = \sigma(\varepsilon) : \forall M', M'' \in X, \rho(M',M'') < \sigma \Rightarrow |f(M') - f(M'')| < \varepsilon$

Теорема

Ако $f(x,y)$ - непрек. върху комп. мн. X, то $f(x,y)$ е равномерно непрекъсната върху X.
(Доказателствата са аналогични на тези от анализ 1. На изпита няма да се изискват.)

Дефиниция : крива линия

Мн.
$$l : \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array} \right.$$
$\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - непрек. функции върху $[a,b]$.
Се наричка крива линия в $\mathbb{R}^2$, с краища $A = (\varphi(a),\psi(a)), B = (\varphi(b),\psi(b))$

Дефиниция : свързано множество

Нека $X \subset \mathbb{R}^2 : \forall A, B \in X, \exists l$ - кр. линия : т. A, B - краиюа на $l, l \subset X$. Тогава X се натича свързано множество.

Дефиниция :

Ако $X \subset \mathbb{R}^2$ е свързано и отворено(затворено), то е област(затворена област).

Теорема

Ако $f(x,y)$ е непрек. върху X и
$\exists A, B \in X : f(A).\, f(B) < 0 \Rightarrow \exists C \in X : f(C) = 0$

Доказателство:
Т.к. X е област $\Rightarrow \exists$ кр. линия l с краищя A и B, т.е.
$$\exists \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array} \right.$$
непрекъсната върху $[a,b]$ и $A(\varphi(a),\psi(a)), B(\varphi(b),\psi(b))$.
$f(t) = f(\varphi(t),\psi(t))$ - непрекъсната върху $[a,b]$ и
$f(a) = f(\varphi(a),\psi(a)) = F(A)$
$f(b) = f(\varphi(b),\psi(b)) = F(B)$
$\Rightarrow f(b).\, f(a) = f(A).\, f(B) < 0$
$\Rightarrow \exists c \in (a,b) : f(c) = 0 \Rightarrow f(\varphi(c),\psi(c)) = 0 \iff f(c) = 0$
т. $C(\varphi(c),\psi(c))$