Тема 19

Формула на Тейлор

Fold

Table of Contents

Съдържание

Полином на Тейлор

Ще започнем с малък пример, илюстриращ полином на Тейлор от степен 1.

Покажи

Сега ще видим как стоят нещата с производни от по-висок ред.

Лема 1:
Нека $f(x)$ е дефинирана върху $(x_0-\delta, x_0+\delta)$
и нека $\exists f^{(k)}(x_0)\ (k=1,2,\cdots,n)$.
Тогава съществува полином $P_n(x)$ от степен не по-голяма от n, такъв че
$P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)\quad (k=1,2,\cdots,n)$

Такъв полином ще наричаме *полином на Тейлор в точка* x_0.

Доказателство:

Покажи

Развитие на функция в ред на Тейлор

Преди да се докопаме до теоремата за развитие в ред на Тейлор, трябва да докажем още една лемичка.
Лема 2:
Нека $\varphi(x), \psi(x)$ са дефинирани върху $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и такива, че:

$$\begin{array}{ll} 1. & \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\Rightarrow \exists\varphi^{(k)}(x),\psi^{(k)}(x)\quad (k=1,2,\cdots,n+1) \\ 2. & \varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=\cdots=\varphi^{(n)}(x_0)=0 \\ & \psi(x_0)=\psi'(x_0)=\cdots=\psi^{(n)}(x_0)=0 \\ 3. & \psi^{(k)}\neq 0\ \forall x\neq x_0,\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\quad (k=0,1,2,\cdots,n,n+1) \end{array} \tag{8}$$

$$\Longrightarrow\quad \forall x\neq x_0,\ x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\quad \exists c\in\left\{\begin{array}{l}(x,x_0)\\(x_0,x)\end{array}\right\}:$$

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{\psi^{(n+1)}(c)}$$

Както може да се досетите тука всичко е много нагласено с цел да се използва по-нататък, така че **без паника**!

Доказателство:

Покажи (по скоро продължи нататък :D)

Вече сме на прага на теоремата на Тейлор. Какво гласи тя? Ами че всяка функция дефинирана върху околност на точка, и имаща производни до n+1 ред

може да бъде разписана като полином.
Теорема*(За равзитие на функция в ред на Тейлор)*:
Нека $f(x)$ е дефинирана върху $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и има производни до $(n+1)$ ред върху $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Тогава
$\forall x \neq x_0,\ x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\ \exists c = c(x) \in \begin{Bmatrix} (x, x_0) \\ (x_0, x) \end{Bmatrix}:$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{c_n(x)} \tag{14}$$

Едната част от израза (познайте от 3 пъти коя) за изненада се оказва полинома на Тейлор, докато оставащата частичка наричаме *остатък във формулата на Тейлор във вид на Лагранж*, и понеже ни мързи ще му викаме само *остатък*. Нарочно оставих във остатъка $c(x)$, за да не забравяте, че всъщност това c е различно за различните x.

Доказателство:

Скрий

$$c_n(x) = f(x) - P_n(x) \tag{15}$$

Сега ще си образуваме 2 функции, който по случайност ще изпълняват условията на Лема 2, така че ще може да я приложим.

$$\text{Let}\left|\begin{matrix} \varphi(x) & = & c_n(x) \\ \psi(x) & = & (x-x_0)^{n+1} \end{matrix}\right. \tag{16}$$

$$\begin{gathered} \varphi^{(k)}(x_0) = \left(c_n(x_0)\right)^{(k)} = f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(x_0) \overset{\text{Lema 1}}{=} f^{(k)}(x_0) - f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \forall k < n+1 \\ \psi(x) = (x-x_0)^{n+1} \neq 0 \quad \forall x \neq x_0 \\ \forall k = \overline{1..n}\ \psi^{(k)}(x) = \left((n+1)n(n-1)\cdots(n+1-(k-1))\right)(x-x_0)^{n+1-k} \neq 0 \text{ for } x \neq x_0 \\ \psi^{(k)}(x_0) = 0 \text{ for } k < n+1 \end{gathered} \tag{17}$$

Следователно са изпълнени условията на Лема 2.
Тогава:

$$\begin{gathered} \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \quad \exists c \in (x, x_0): \\ \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{\psi^{(n+1)}(c)} = \frac{f^{(n+1)}(c) - \overbrace{P_n^{(n+1)}(x)}^{0}}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \\ \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad || \\ \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \end{gathered} \tag{18}$$

Умножаваме по $(x-x_0)^{n+1}$ и сме готови:

$$\Longrightarrow f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{19}$$

Формула на Маклорен

Дефиниция:
Формула на Тейлор при $x_0 = 0$ наричаме *формула на Маклорен*

Пример*(развитие на e във ред на Тейлор)*:

Скрий

$$f(x)=e^x\ \forall x\in\mathbb{R}\ x\neq 0\ \ \exists c\in(0,c): \tag{20}$$

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(e^x)^{(k)}_{x=x_0}}{k!}x^k+\frac{(e^x)^{(n+1)}_{k=c}}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{e^{x_0}.x^k}{k!}+r_n(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^c.x^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} e^1 &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{e^c.1^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{e^c}{(n+1)!}, \quad \text{като } \lim_{n\to\infty}\frac{e^c}{(n+1)!}=0, \end{aligned} \tag{22}$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \tag{23}$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+r_{n+2}(x) \qquad \left(\text{hint: }\sin^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right) \tag{24}$$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+r_{2n+1}(x) \qquad \left(\text{hint: }\cos^{(k)}(x)=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right) \tag{25}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k+1}^{n}\frac{(-1)^{n-1}.x^n}{n}+r_n(x) \qquad \left(\text{hint: }\ln^{(k)}(1+x)=(-1)^{k-1}.(k-1)!\right) \tag{26}$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{k+1}^{n}\frac{x^n}{n}+r_n(x) \qquad \left(\text{hint: }\ln^{(k)}(1-x)=-(k-1)!\right) \tag{27}$$