Независимост на криволинейния интеграл от пътя на интегриране

Целта оправдава средствата.
Игнаций Лойла

Да разгледаме криволинейния интеграл от II род

$$I = \int_{OAB} ydx + 1dy$$

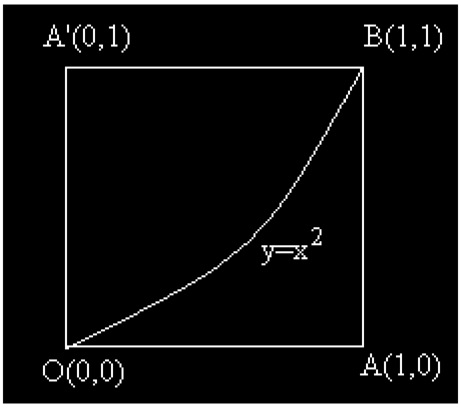
по начупената линия OAB , където координатите на точките са: O(0, 0) ; A(1, 0) ; B(1, 1)

$$I = \int_{OAB} ydx + 1dy = \int_{OA} (ydx + 1dy) + \int_{AB} (ydx + 1dy) = I_1 + I_2$$

По отсечката OA $y = 0$ и $dy = 0 \Rightarrow I_1 = 0$.

По отсечката AB $x = 1$ и $dx = 0$.

$$I_2 = \int_0^1 1dy = y\Big|_{y=0}^{y=1} = 1 \quad \Rightarrow \quad I = 1.$$



Сега да разгледаме същия интеграл по пътя OA'B.

$$I = \int_{OA'B} ydx + 1dy = \int_{OA'} (ydx + 1dy) + \int_{A'B} (ydx + 1dy) = I_1 + I_2$$

По отсечката OA' $x = 0$ и $dx = 0 \Rightarrow I_1 = 1$.

По отсечката A'B $y = 1$ и $dy = 0$

$$I_2 = \int_0^1 1dx = x\Big|_{x=0}^{x=1} = 1 \quad \Rightarrow \quad I = 2.$$

За същият интеграл по параболата с уравнение $y = x^2$, свързваща A с B имаме:

$y = x^2 \Rightarrow dy=2x.dx$.

$$I = \int_{\overset{\frown}{OB}} ydx + 1dy = \int_0^1 x^2dx + 2x.dx = \int_0^1 (x^2 + 2x).dx = \frac{x^3}{3} + x^2\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{3}$$

Изводът който можем да направим, е че този интеграл зависи от пътя на интегриране.
Предлагаме да покажете, че интегралът:

$$I = \int_{OA^\frown} y\,dx + x\,dy$$

не зависи от пътя на интегриране и по трите пътя той е равен на 1.
Когато интегралът не зависи от пътя на интегриране
а само от началната и крайната точка на този път - A(x_0 , y_0) и B(x_1 , y_1),
можем да използваме означенията:

$$\int_{AB^\frown} P\,dx + Q\,dy = \int_A^B P\,dx + Q\,dy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P\,dx + Q\,dy$$

Теорема:

Нека P и Q са непрекъснати функции на променливите x и y .
Интегралът

$$I = \int_{AB^\frown} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

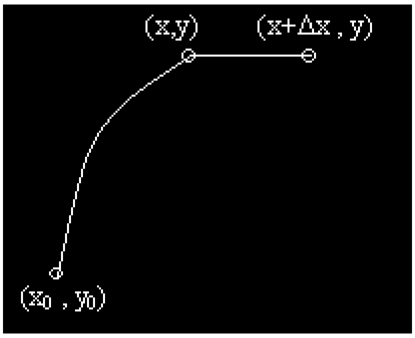
не зависи от пътя на интегриране а единствено от началната и крайната точка на този път $\Leftrightarrow$
когато съществува такава функция F = F(x,y), за която изразът:
P(x,y).dx+Q(x,y).dy е
пълен диференциал на функцията F.

Доказателство:

Необходимост: $(\longrightarrow)$
Да предположим, че интегралът I не зависи от пътя на интегриране.
Да положим:

$$F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy$$

Функцията F е дефинирана правилно точно поради независимостта от пътя.
Ще покажем че частната производна ∂F/∂x на F спрямо x е P(x,y).
За целта разглеждаме пътя на интегриране:
(x_0 , y_0) → (x , y) → (x + Δx , y), като последният участък е хоризонтална отсечка с дължина Δx.



$$F(x+\Delta x, y) - F(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P\,dx + Q\,dy - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P\,dx + Q\,dy$$

При последния интеграл dy=0, така, че той е равен на

$$\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)\,dx$$

От теоремата за крайните нараствания той е равен на Δx .P(x + θ.Δx , y),
където θ ∈(0,1) (ето къде се използва непрекъснатостта на P).
При Δx→0 получаваме:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} P(x+\theta\Delta x, y) = P(x,y)$$

Аналогично ∂F/∂y = Q(x,y).

Достатъчност: $(\longleftarrow)$

Ако изразът P.dx + Q.dy е пълен диференциал на функцията F то:

$$dF = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

Нека x = x(t) и y = y(t) където $t \in (t_0, t_1)$ е път,
свързващ точките $A(x_0, y_0)$ и B(x , y).
От формулата за диференциране на сложна функция получаваме:

$$F'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}y'(t)$$

а от начина за изчисляване на криволинеен интеграл при параметрично зададена крива получаваме:

$$I = \int_{AB^\frown} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_0}^{t_1} F'(t)dt = F(t_1) - F(t_0)$$

резултат който не зависи от конкретния път.

Използвайки теоремата за равенство на смесените производни: $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ получаваме:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(P) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(Q)$$

така, че условието за независимост от пътя може да се изрази и с равенството: .

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Какво ще научим:

Формула на Остроградски - Грин