Содержание

1 Съждения и логически операции. Множества. Операции с множества. Алгебрични свойства на операциите. Принцип на пълната математическа индукция

1.1 Множества
Множествата са първично понятие. Те нямат дефиниция

1.1.1 Задаване на множества
$A = a, b, 1, cd$ - чрез изброяване на елементите
$A = x|x = 5k + 3, 1 \leq k \leq 10$ - чрез задаване на условие
$A = 1, 2, 3, ...$ - чрез задаване на първите елементи и индуктивна стъпка

1.1.2 Празното множество - $\emptyset$

1.1.3 Подмножества
$A = a, b, c, d, e$
$B = b, c, d$

Същински и несъщински подмножества
Теорема: $a = b \iff A \leq B$ и $B \leq A$

Доказателство: Теоремата има 2 посоки. Първата следва от дефиницията за подмножество $A \leq B \Rightarrow$ Всеки елемент о А е елемент от В.
За втората, допускаме, че $A \neq B$, т.е считаме че съществува елемент от А, който не е част от В. По дефиниция за подмножество следва, че А не е подмножество на В, което противоречи на даденото - че $a \leq B$ и $B \leq A$

1.1.4 Основни операции:
- Обединение - $A \cup B = \{x|x \in A \text{ or } x \in B\}$
- Сечение - $A \cap B = \{x|x \in A \text{ and } x \in B\}$
- Разлика - $A\ B = \{x|x \in A \text{ and } x \notin B\}$

1.1.5 Свойства на операциите

Комутативност - $A \cup B = B \cup A$
Асоциативност - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Комутативност - $A \cap B = B \cap A$
Асоциативност - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Дистрибутивни:
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

2 Аксиматично изграждане на множеството на реалните числа. Аксиома на Архимед и аксиома за непрекъснатост

2.1.1 Рационални числа - $Q = \{\frac{p}{q} | \quad p, q \in Z, q \neq 0\}$
2.1.2 Ирационални числа - Всички числа, които не са рационални, образуват множеството на ирационалните числа - e, π, $\sqrt{2}$, ... $\in I$; $I \cup Q = \emptyset$
2.1.3 Реални числа - $R = Q \cup I$

2.2 Аксиома на Архимед
Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, тогава:
1. $m.a < n.b \Rightarrow m.c < n.d$
2. $m.a = n.b \Rightarrow m.c = n.d$
3. $m.a > n.b \Rightarrow m.c > n.d$

Ако AB и CD са две отсечки, $\exists$ краен брой точки $A_1, a_2, ..., A_n$ върху $A \cup B$, такива, че $CD = AA_1 = A_1A_2 = ... = A_{n-1}A_n$
2.3 Аксиома за непрекъснатост: Всяко непразно ограничено отгоре множество от реални числа има точна горна граница
2.3.1 Следствие: Всяко непразно ограничено отдолу множество от реални числа има точна долна граница

3 Числови редици. Граница на числова редица. Свойства на сходящите числови редици. Пресмятане на някои основни граници

Деф: Числова редица се получава, когато на $\forall n \in N$ се съпостави $a_n \in R$
$\{a_n\}_n = 1^{\infty} \iff \{a_n\} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
Примери:
$\{1, 2, 3, 4, ..., n\}, a_n = n, n = [1, \infty)$
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...; a_n = \frac{1}{n}$

Деф: Ограничена редица: $\exists c : |a_n| < c, c \in R$
Ограничена отгоре: $\exists c : a_n < c \Rightarrow$ Горна граница
Ограничена отдолу: $\exists c : a_n > c \Rightarrow$ Долна граница
Пример: $\{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}\}, 0 < \frac{1}{n} \leq 1$ - Ограничена отгоре
Деф: Сходимост на числова редица
Казва се, че числото а е граница на $\{a_n\}$ при $n \to \infty$, когато всеки член на редицата от известно място нататък, е.т извън ϵ-околността има краен брой елементи на редицата
Деф: Числото $a, a \in R$ е граница на редицата $\{a_n\}$, когато за всяка ϵ околоност $\epsilon > 0, \exists n_0 : |a_n - a| < \epsilon, \forall n > n_n$
Казва се, че $\{a_n\} \to a$ (редицата клони към а) при $n \to \infty$ и се записва $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
Сходяща - Съществува граница а, единствена и а е крайно число (условие)
Разходяща - в противен случай (т.е ако поне едно от условията не е изпълнено)

Свойства

$\{a_n\} \to a, \{b_n\} \to b, \{c_n\} \to c$
1)$\{a_n \pm b_n\} \to a \pm b$
2)$\{a_n.b_n\} \to a.b$
3)$\{a_n/b_n\} \to a/b, b_n \neq 0, b \neq 0$
4)$q = const, \{q.a_n\} \to q.a$
5) Теорема за двамата полицаи $a_n \leq b_n \leq c_n$

$a_n \to b, c_n \to b \Rightarrow b + n \to c$
6) Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0, a_n$ - безкрайно малка
7) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, когато за $\forall m \exists n_0 < m \Rightarrow a_m > M$

4 Монотонни редици. Теорема на Кантор. Неперово число

1. Монотонни редици
Теорема: Всяка сходяща редица е ограничена (не може да клони към безкрайност). Но ограничението не означава, че е сходяща.

1) $a_{n+1} \geq a_n$ - всеки следващ елемент от редицата е по-голям - монотонно растяща
2) $a_{n+1} \leq a_n$ - всеки следващ член от редицата е по-малък - монотонно намаляваща

Теорема:
1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонна редица
2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отгоре
Тогава a_n е сходяща или $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Стъпки: (за $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n}), a > 0, a_n > 0)$
1) Вероятни граници (допускаме, че a_n е сходяща и има граница $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}, L = \pm\sqrt{a}$
2) Показва се, че $\{a_n\}$ е ограничена
$a_1 > 0, a > 0 \Rightarrow a_n > 0$ - ограничение отдолу - 0
3) Монотонност
$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n}) - a_n \Rightarrow \frac{1}{2}a_n + \frac{a}{2a_n} - a_n = \frac{a}{2a_n} - \frac{a_n}{2} = \frac{a - a_n^2}{2a_n} < 0 \Rightarrow a_n + 1 - a_n < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow \{a_n\}$ е монотонно намаляваща и ограничена => сходяща
2. Теорема на Кантор $\{a_n\}$ е сходяща $\iff$ Тя е ограничена и има единствена точка на сгъстяване
3. Неперово число

$e \approx 2,71$
$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^2 = e$

5 Теорема на Болцано-Вайерщрас. Принцип на компактност

1. Теорема на Болцано-Вайерщрас
Теорема: Всяка безкрайна и ограничена редица притежава сходяща подредица
Д-во: Чрез допускане на противното. Тогава за $\forall x \in [a,b] \exists U_x$, съдържаща само краен брой членове на r. Ux - околност
Тогава обединението $\omega = \cup U_x$ е покритие на интервала $[a,b]$. От теоремата наХайне-Борел следва че ω има крайно подпокритие $\omega\prime$, състоящо се от краен брой интервали, всеки от които съдържа само краен брой членове в интервала $[a,b]$, което е противоречие $\Rightarrow$ r има точка на сгъстяване.

6 Критерий на Коши за сходимост на редица. Най-лява и най-дясна точка на сгъстяване. Редици, клонящи към +- безкрайност

1. Критерий на Коши
Безкрайната редица $\{a_n\}$ е сходяща $\iff \forall \epsilon > 0, \exists N = N_\epsilon : \forall n > N, \forall \in N \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \epsilon$

7 Функция на една реална променлива. Граница на функция. Еквивалентност на дефинициите на Коши и Хайне. Леви и десни граници. Граници при x -> +- безкрайност

1. Определение на функция на реална променлива $D \subset R, E \subset R$; Ако на $\forall x, x \in D$ съпоставим точно един елемент $y, y \in E$, то казваме, че y е функция на една независима променлива x и записваме $y = f(x)$, нарича се еднозначна функция
Стойността на функцията $y = f(x)$ в точка x_0 е $y_0 = f(x_0)$
Множеството D - дефиниционно множество
множеството E - област на стойностите
$x, x \in D$ - независима променлива (аргумент)
$y, y \in E$ - зависима променлива - функция

2. Графики на функции
$f(x) : D \to R$
$x_0 \in D : \lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$
x_0 - точка на сгъстяване
{графика на функция отстрани със 3 променливи по x = x0-делта, x0, x0+делта и 3 стойности на y - f(всяка една) lol} Коши
за $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ от $|x - x_0| < \delta \Rightarrow (f(x) - l) < \epsilon$
{графики на прекъсната и непрекъсната функция (когато не можеш да рисуваш)}
Деф. f(x) е непрекъсната в т x_0 ако: 1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
Ако съществува граница на функцията при $x \to a$ със стойности по-малки от a, то казваме, че функцията има лява граница в точка a и пишем $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a - 0)$
аналожично - дясна граница (със a+0 вместо -)

8 Непрекъснати функции. Локални и глобални свойства на непрекъснатите функции. Равномерна непрекъснатост

1. Непрекъснатост на фунцкия
$y = f(x)$, D - дефиниционна област, $x_0 \in D$. Функцията $y = f(x)$ се нарича непрекъсната в точката $x = x_0$, ако границата на функцията при $x \to x_0$ е равна на стойността на функцията в тазо точка
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0})$

Ако е изпълнено равенството $f(x_0-0) = f(x_0)$, то функцията се нарича непрекъсната отляво в точка x_0. Ако $f(x_0+0) = f(x_0)$ - непрекъсната отдясно в т. x_0
$\Rightarrow y = f(x_0)$ е непрекъсната в т. x_0 ако изпълнява следните 3 условия:
1) $\exists f(x_0)$
quad $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и 3) $f(x_0) = A$

2. Свойства на непрекъснатите функции
а) Сума, разлика, произведение от краен брой непрекъснати функции е непрекъсната функция
б) Частно на 2 непрел. ф-ции е непрек. ф-ция, ако знаменателя не се анулира
в) Всяка сложна функция, съставена от непре. ф-ции е непрек, ф-ция
г) Ако една ф-ция е непрек. в затворения интервал [a,b], то в този интервал, тя е ограничена и достига най-малката си и най-голямата си стойност поне веднъж и всички стойности между тях поне веднъж

9 Обратни функции. Основни елементарни функции

1. Обратни тригонометрични функции
Примери за непрекъснати функции
$Pn(x)$ - полиноми от n-та степен
$\forall$ тригоном. и обратни тригоном. ф-ции, e^x, lnx

Обратни ф-ции $f(x), f^{-1}(x)$ - обратна ф-ция
(графика, от едната страна $x0$, от другата $f(x0)$, стрелка от x_0 kym $f(x0)$ sys text $f(x)$ i strelka ot $f(x0)$ kym $x0$ sys text $f^-1(x)$)
Графиките на $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ са симетрични относно правата $y = x$
(графика на симетрични крифи относно y=x)

$f(x) = x^2, f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ - взаимно обратни

$f(x) = e^x, f^{-1}(x) = lnx \quad f(f^{-1}(x)) = f(lnx) = e^{lnx} = x$

1) $arcsin \quad f(x) = sinx, f^{-1}(x) = arcsinx$
$arcsinx : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
Примери: [...]

2) $arccosx \quad f(x) = cosx, f^{-1}(x) = arccosx$
$arccosx : [-1, 1] \to [0, \pi]$
Примери: [...]

3) $arctgx \quad f(x) = tgx, f^{-1}(x) = arctgx$
$arctgx : R \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

4) arccotg x [същото]
$...R \to [0, \pi]$

10 Производна на ф-ция. Диференцируемост и непрекъснатост. Правила за диференциране. Произодни на основните елементарни ф-ции

1. Операцията на намиране на производна на ф-ция се нарича диференциране на функцията. Когато се намери производната на една ф-ция се казва, че тя е диференцирана. Ако за една ф-ция съществува производна в дадена точка, по ф-цията се нарича диференциране в тази точка. Ако една ф-ция е диференцируема (има производна) във всяка точка от даден интервал, тя се нарича диференцируема в този интервал.

Свойства:
1) $(c.f(x)\prime = c.f\prime(x), c = const$
2) $(f(x) \pm g(x))\prime = f\prime(x) \pm g\prime(x)$
3) $(f(x).g(x))\prime = f\prime(x), g(x) + f(x).g\prime(x)$
4) $(\frac{f(x)}{g(x)})\prime = \frac{f\prime(x).g(x)-f(x).g\prime(x)}{g^2(x)}$

Таблица на производните
1) $c\prime = 0$
2) $(x^n)\prime = n.x^{n-1}, (x)\prime = 1.x^{1-1} = 1$
3) $(a^x)\prime = a^x.lna$
$(e^x)\prime = e^x$
4) $(log_a x)\prime = \frac{1}{x.lna}$
5) $(sinx)\prime = cosx$
6) $(cosx)\prime = -sinx$
7) $(tgx)\prime = \frac{1}{cos^2 x}$
8) $(cotgx)\prime = -\frac{1}{sin^2 x}$
9) $(arcsin(x))\prime = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10) $(arccosx)\prime = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11) $(arctgx)\prime = \frac{1}{x^2+1}$
12) $(arccotgx)\prime = -\frac{1}{x^2+1}$

Деф. f(x) е непрекъсната в т. x_0, ако:
1)$\exists \lim\limits_{x->x_0} f(x)$ 2) $\lim\limits_{x->x_0} f(x) = f(x_0)$
Принцип на непрекъснатост
Всяко ограничено отгоре множество от реални числа притежава точна горна граница

11 Производни и диференциали от по-висок ред. Формула на Тейлър

Дадена е ф-цията $y = f(x)$, дефинирана и диференцирана в дад. интервал, като $y\prime = f\prime(x) \neq 0$юю dy или df(x) - диференциал на ф-цията y $\Rightarrow dy = f\prime(x)dx$ или $f\prime(x) = \frac{dy}{dx}$
Свойства на диференциала
1) $dc = 0$

2) $d(c.f(x)) = c.df(x)$
3) $d(f \pm g) = df \pm dg$
4) $d(f.g) = df.g + f.dg$
5) $d(d(\frac{f}{g}) = \frac{g.fg - f.dg}{g^2}$
6) $df(\phi(x)) = f\prime(\phi).\phi\prime(x)dx = f\prime(\phi)d\phi$

Производни и диференциали от по-висок ред, производна на една диференцируема ф-ция в даден интервал е във ф-ция на x: $y\prime = f\prime(x)$ се нарича първа производна
$y\prime\prime = (y\prime)\prime$ - втора производна
$y^n = (y^{n-1})\prime = f^n(x)$ - n-та производна
Теорема на Лопитал
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} =$ неопределена форма $= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f\prime(x)}{g\prime(x)}$
Формула на Тейлър
$\exists f^{n+1}$ непрекъсната производна на f, тогава:
$f(x) = f(a) + f\prime(a)(x-a) + \frac{f\prime\prime(a)(x-a)^2}{2!} + ... + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} + Rn(f,x)$

$Rn(f,x) = \frac{f^{n+1}(z)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$
Полином на Тейлър (Tn(x))
$f(x) = Tn(x) + R_n + 1$

12 Локални екстремуми на ф-ция. Теорема на Ферма. Теорема на Рол. Теорема за средните стойности. Правила на Лопитал за намиране на граници

Екстремуми на ф-ция
x_0 - вътрешна точка от дефиниционната област на ф-цията $f = f(x)$
Казваме, че функцията има максимум в точката x0, ако съществува околност на тази точка, че за всяко x от тази околност да е изпълнено $f(x_0) > f(x) \Rightarrow$ минимум при $f(x_0) < f(x)$
Мин и макс на ф-циите се наричат локални екстремуми, тъй като стойността на ф-цията в т x_0 е най-голяма или най-малка само в една околност на точката.
Определяне на интервали на монотонност и екстремуми (при изследване

на ф-ция)
$f\prime(x) = 0 \Rightarrow$ лок. екстремуми (min, max)
$f\prime(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ е растяща
$f\prime(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ е намаляваща

Тероема на Рол
Теорема: 1) f дефинирана и непрекъсната в краен и затворен интервал [a, b]
2) f дефинирана в отворен интервал (a, b)
3) $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists$ т. $x_0 \in (a, b), f\prime(x_0) = 0$

Теорема на Ферма
Теорема: 1) f има локален екстремум в т. x_0
2) f е диференцируема
Тогава $f\prime(x_0) = 0$

Теореми за средните стойности
отразяват някои важни свойства на диференциуремите ф-ции. Това са Теорема на Рол, Лагранж и Коши

Теорема: $y = f(x)$, диференцируема в затворения интервал [a,b] и f(a)=f(b), то съществува поне 1 вътрешна точка $x- \in (a, b)$, в която $f\prime(x-) = 0$
(x- = x със чертичка отгоре)
Теорема (на крайните нараствания)
$y = f(x)$, диф. в затв. интервал [a,b], то съществува поне една точка $x- \in (a, b)$, за която е изпълнено

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} . f\prime(x-)$$

Теорема: f(x), g(x) - непрекъснати в [a, b], диф в интервала (a, b), и $g\prime(x) \neq b$ в интервала (a, b). Тогава съществува поне 1 точка $x- \in (a, b)$, за която е изпълнено

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} . \frac{f\prime(x-)}{g\prime(x-)}$$

Правило на Лопитал

Неопределени форми: $[\frac{0}{0}], [\infty.\infty], [\frac{\infty}{\infty}], [0^{\infty}], [\infty^{0}], [0.\infty], [0^{0}], [1^{\infty}]|$ За пресмятане на граници се прилага теорема на Лопитал

13 Достатъчни условия за локален екстремум. Изпъкнали и вдлъбнати ф-ции. Инфлексна точка. Асимтоти

Достатъчни условия за локален екстремум
1) ако y=f(x) има непрекъснати производни до втори ред в околност на точката x_0, то ако $f\prime(x_0) = 0$ и $f\prime\prime(x_0) < 0$, ф-цията има лок. max втази точка, а при $f\prime(x_0) = 0$, и $f\prime\prime(x_0) > 0$ - лок. min
$f\prime\prime\prime(x_0) \neq 0$, тогава f(x) няма лок. екстремум в т. x_0
Пример от изследване а ф-ция
$f(x) = \frac{x^3}{x-a} \Rightarrow$ ДМ: $x \neq a$
Асимптоти
- вертикални асимптоти:
$x \to a \Rightarrow f(x) \to \pm\infty \Rightarrow \exists$ верт. ас. x=a
- хоризонтални (в от изсл. в нр. т. на ДМ)
$x \to \pm\infty \Longrightarrow f(x) = b \Rightarrow \exists x$ ас. y=b
Пр. $x^3 - x^3 + 1$
- наклонена
Ако $x \to \pm\infty \Rightarrow f(x) \to \pm\infty$, но $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \neq 0 \Rightarrow \exists$ накл. ас. $y = k.x+n$
$n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - k.x]$
Определяне интервали на монотонност и екстремуми
$f\prime(x) = 0 \Rightarrow$ лок. екст. (min, max)
$f\prime(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ е разстяща
$f\prime(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ е намаляваща

Интервали на изпъкнатост и инфл. точки
1) $f\prime\prime(x) = 0 \Rightarrow$ инфл. точки
Точката $M_0[x_0, f(x_0)]$, която отделя изпъкналата от вдълнатата част на кривата, която е графика на непрекъснатата ф-ция y = f(X) се нарича инфл. точка, x_0 - инфл. точка на f(x)
2) $f\prime\prime(x) > 0$ - изпъкнала ($\cup$)

3) $f''(x) < 0$ - вдлъбната ($\cap$)

14 Изследване на ф-ция и скициране на графиката и

1) Определяна не ДМ
пр. $f(x) = \frac{x^3}{x-a} \Rightarrow$ Дм: $x \neq a; x \in R/\{a\}$
$x \in (-\infty; a) \cup (a; \infty)$
(графика на линия -безкрайност — a — +безкр)
2) четност, нечетност и периодичност (проверка)
- четна: $f(-x) = f(x)$
пр. $f(x) = x^2 \Rightarrow f(-x) = x^2$ - симетрия отн. OY (графика)
- нечетна: $f(-x) = -f(x)$
пр. $f(x) = x^3 \Rightarrow f(-x) = -x^3$ - симетрия отн O
- периодична: $\exists$ педиод $T > 0$
$f(x+T) = f(x)$
пр. $sinx, cosx, \forall$ триг. ф-ции

Но: пр. $f(x) = x^3 + 1, f(-x) = -x^3 - 1 = -(x^3 + 1)$ - нито четна, нито нечетна

3) изследване в крайни точки на ДМ в първия пример
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x); \lim\limits_{x \to a} f(x), \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$
4) Асимптоти - вертикална, хоризонтална, наклонена (виж предната тема)

5) Определяне на интервали на монотонност и екст.
6) Интервали на изпъкналост и вдлъбнатост и инфлексни точки - (виж предната тема)
7) Таблица
8) Графика

15 Примитивна на ф-ция и неопределен интеграл. Основни с-ва. Непосредствено интегриране

Деф. Нека f(x) е ф-ция, дефинирана в интервала (a, b). Казваме, че f(x) (ако съществува) е примитивна (първообразна) на f(x), ако $f\prime(x) = f(x)$.

Тогава f(x) се нарича производна.
Множеството от всички примитивни ф-ции на f(x) се нарича неопределен интеграл от тази ф-ция и се означава $\int f(x)dx$

Твърдение: Ако $f_1(x)$ и $f_2(x)$ са примитивни на ф-цията f(x), то $f_1(x) = f_2(x) + c, c = const$

Основни свойства
1) $d\int f(x)dx = f(x)dx, \int df(x) = f(x)$
2) $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
3) $\int c.f(x)dx = c. \int f(x)dx, c = const$
4) $\int f(x)dx = \int f(x)d(x \pm c)$
5) $\int f(x)dx = \frac{1}{c} \int f(x)dc.x$
6) ако $\int f(x)dx = f(x) + c$, то при $u = \phi(x) \Rightarrow \int f(u).du = f(u) + c = \int f(\phi(x))d\phi(x) = \int f(\phi(x)).\phi\prime(x)dx$
7) Интегриране по части
$\int f(x)dg(x) = f(x).g(x) - \int g(x)df(x) = f(x).g(x) - \int g(x)f\prime(x)dx$

Таблични (основни) интеграли
1) $\int 0dx = c$
2) $\int 1dx = x$
3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
4) $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = lnx + c$
5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + c$
6) $\int e^x dx = e^x + c$
7) $\int sinxdx = -cosx + c$
8) $\int cosxdx = sinx + c$
9) $\int \frac{1}{cos^2 x}dx = tgx + c$
10)$\int \frac{1}{sin^2 x}dx = cotgx + c$
11)$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}dx = arcsinx + cor - arccotgx + c$

12) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + xor - arccotgx + c$

16 Основни методи за пресмяане на неопределен интеграл. Интегриране по части, някои специални случаи на интегриране, интегриране чрез субституции

Внасяне под знака на интеграла
$\int f(x).g(x)d$
ако $\int g(x)dx = G(x) \Rightarrow \int f(x).g(x)dx = \int f(x)gG(x)$
$f(x)x^n dx = \int f(x)d\frac{x^{n+1}}{n+1}$
Примери
1) $\int e^{sinx}cosxdx = \int e^{sinx}dsinx = e^{sinx}$
2) $\int 2e^{x^2}dx = \int e^{x^2}d2\frac{x^2}{2} = \int e^{x^2}$
3) $\int \frac{lnx}{x}dx = \int lnx\frac{1}{x}dx = \int lnxdlnx = \frac{ln^2x}{2}$
Интегриране по части - виж предната тема
$P(x)$ - полином
$R(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ - рационална функция

$$\int P(x).\begin{cases} e^x \\ sinx \\ cosx \end{cases} dx$$

$$\int R(x).\begin{cases} lnx \\ arcsinx \\ arccosx \\ arctgx \\ arccotgx \end{cases} dx$$

Пример:

$$\int lnxdx = lnx.x - \int x(lnx)\prime dx = lnx.x - \int x.\frac{1}{x}dx = lnx.x - x$$

17 Интегриране на рационални ф-ции

$$\int \frac{Pm(x)}{Qn(x)}dxm = degPm(X)n = degQn(x)$$

1) $m < n$
1.1) разлагане в сума от елементарни дроби
1.2) интегриране
2) $m \geq n$
2.1) делене на полинома Pm(x) на Qn(x)
2.2) разлагане в сума от елементарни дроби
2.3) интегриране

Разлагане на сума от елементарни дроби

$\frac{Pm(x)}{Qn(x)} = ---+---+----+...+---$
Qn(x) - разлагане на неразложими на R множители
$Qn(x) = (x-a_1)(x-a_2)^k(...)(x^2+b_1)(x^2+b_2)...$
$\Rightarrow \frac{Pm(x)}{Qn(x)} = \frac{A_1}{x.a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \frac{A_3}{(x-a_2)^2} + \frac{A_4}{(x-a_2)^k} + \frac{C^1x+B_1}{x^2+b_1} + ...$

Делене на полиноми
(не мога да го напиша в LaTeX това хд, пропусни или виж снимките)
$5x^3+7x^2-3x-2 \quad [x^2+x]$
$= \frac{5x^3+5x^2}{2x^2-3x-2}$ (не мога да го напиша в LaTeX това хд, пропусни или виж снимките)

18 Интегриране на някои класове ирационални ф-ции. Субституции на Ойлер. Интегриране на биномен диференциал

Интегриране на някои видове ирационални фции Интеграли от вида

$$\int R(x, \sqrt[r_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[r_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, ..., \sqrt[r_n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$$

a, b, c, d са дадени числа, $ad - bc \neq 0$
Полагаме $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, където к е най-малко общо кратно на коренните показатели $r_1, r_2, ..., r_n$
Интегралът се свежа до интеграл от рационална ф-ция на t

някои от коефициентите a,b,c,d могат да бъдат 0 и готава се получават частни случаи
Най често срещаните частни случаи са
а) Ако a=1, b=0, c=0, d=1
$\int R(x, \sqrt[r_1]{x}, \sqrt[r_2]{x}, ..., \sqrt[r_n]{x})dx$
полагаме $x = t^k$
Така интегралът се свежда до интеграл от ред ф-цията на t
б) Ако c = 0, d = 1, тогава получаваме:
$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx, a \neq 0$
полагаме $ax + b = t^k$
Така интегралът се свежда до интеграл от ред-фцията на t

Интеграли от вида
$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx, a \neq 0$
Тези интеграли се свеждат до интеграли от рационални ф-ции чрез подходящи смени на променлиата, които се наричат Ойлерови субституции
а) ако a>0, полагаме $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a}.x + t$
б) ако c > 0, полагаме $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x, t + \sqrt{c}$
в) ако ax^2+bx+c има реални корени $x_1 and c_2$, то полагаме $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x^1)t$

Всеки интеграл от този вид се свежда до някой от трите случая, а някои интеграли се свеждат към два или три от случаите

19 Интегриране на рационални ф-ции от ф-циите sin x и cos x

Интеграли от вида
$\int R(sinx, cosxdx$ - интегралът може да се сведе до интеграл от рационална ф-ция на t чрез полагането $tg\frac{x}{2} = t$, което наричаме универсална субституция. От нея получаваме
$arctg(tg\frac{x}{2}).arctgt \Rightarrow \frac{x}{2} = arctgt \Rightarrow x = 2arctgt$ и $dx = d(2arctgt)\prime = (2arctgt)\prime dt = 2(arctgt)\prime dt = \frac{2dt}{1+t^2}$,
a sin x и cos x изразяваме по формулите:
$sinx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{a+tg^2\frac{x}{2}} \quad cosx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{a+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
Пример: да се реши интегралът
$\int \frac{dx}{2+cosx}$
Решение: прилагаме универсална субституция и получаваме
$\int \frac{dx}{2+cosx} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{\frac{2dt}{2+t^2}}{\frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}} + c = \frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t^{\frac{?v}{2}}}{\sqrt{3}} + c$

20 Определен интеграл. Суми на Дарбу. С-ва на сумите на Дарбу. Критерий за интегруемост

(графика)

$\int f(x)dx$ наричаме ориентираното лице на фигурата а ограничена от а и в, т.е фиг. S, ако тази фиг. е измерима

Суми на Дарбу Разбиваме [a, b] на m равни части

$$([a_1, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], ..., [x_{n-1}, b])$$

Нека $p_x = sup\{f(x)|x \in [x_{k-1}, x_k]\}$
Образуваме сумите на Дару

$S_n = \frac{b-a}{n} . \sum_{k=1}^{n} p_k$ и $S_n = \frac{b-a}{n} . \sum_{k=1}^{n} q_k$

Тогава f(x) е интегруема в интервала [a, b] $\iff$ $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ и $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ съществуват и са равни

Теорема: Всяка непрекъсната в интервала [a, b] функция е интегруема, $\Rightarrow \forall$ частична непрекъсната ф-ция е интегруема

С-ва на сумите на Дарбу
1) Ако f(x) и g(x) са интегруеми ф-ции в интервала [a, b] и ако $\lambda, \mu \in R$, то $\lambda f(x) + \mu g(x)$ е интегруема и

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

2) Ако f(x) е интегруема в [a,b] и $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

3) Ако F(x) е интегруема в [a, b], то |f(x)| също е интегруема и е в сила:

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

4) Ако f(x) е интегруема в [a, b] и c е число, a<c<b, то f(x) е интегруема в [a, c] и [c, b]и е в сила

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dxx + \int_a^b f(x)dx$$

5) Теорема за срадните стойности
Нека f(x) и g(x) са интегруеми в $[a, b]$ и $g(x) \geq 0$. Тогава $\exists \mu \in R$, за което $\int_a^b (fx).g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$

Критерий за интегруемост Тероема: Ако F(x) е примитивна за f(x) в интервала [a, b], то:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

21 Суми на Риман. Класове интегруеми ф-ции. С-ва на определения интеграл - адитивност, линейност, позивитност. Интегриране на неравенство. Теорема за средните стойности

Разбиваме интервала [a, b] на n равни подинтервала $[a, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, b]$
$a \Rightarrow x_0; b \Rightarrow x_n$
Във всеки от интервалите избираме произволна точка. Получаваме точките $z_1 \in [a, x_1], z_2 \in [x_1, x_2], ..., z_n \in [x_{n-1}, b]$ Разгл. правоъгълниците $\Pi k, k = 1, 2, 3, ..., n, \Pi k$ е основа $[x_{k-1}, x_k], f(z_k)$. Ако $f(z_k) < 0$, то Пк лежи под абсцисата.
Разгл. сумата от ориентираните лица

$$Rn = (z_1, ..., z_n) \equiv \mu(\Pi_1) + \mu(\Pi_2) + ... + \mu(\Pi_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n}.f(z_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(z_k)$$

Това е сума на Риман
Ако съществува границата $L = \lim_{n\to\infty} Rn(z_1, ..., z_n)$, независимо от избора на $z_1, ..., z_n$ за $\forall n$, то казваме, че функцията f(x) е интегруема в интервала [a, b] и означаваме $\int_a^b f(x)dx = L = \lim_{n\to\infty} Rn(z_1, ..., z_n)$

С-ва на определения интеграл
1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx, A = const$

2) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \int_a^a f(x)dx = 0$

4) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx, \forall a, b, c$

5) $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx, b > a$

6) Ако за $\forall x \in [a, b]$ е изпълнено $f(x) \geq 0$ и $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, а ако $f(x) \leq 0$, то $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

7) Ако за $\forall x \in [a,b]$ е изпълнено $f(x) \leq g(x)$ и $a < b$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

8) Ако $f(x)$ е непрекъсната ф-ция в затворения интервал [a, b], то $\exists c \in [a,b] : \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$. Това свойство се нарича теорема за средните стойности при определен интеграл

22 Пресмятане на неопределни интеграли. Интегриране по части и чрез субституции при определен интеграл

23 Числови редоже. С-ва на сходящите редове

Определение
Нека е дадена безкрайна числова редица от реални числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$.
Изразът

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}$$

(1) се нарича числов ред с реални членове $a_1, a_2, ..., a_n, ...a_n$ се нарича общ член на реда
Пример: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ е числов ред с общ член $\frac{1}{n}$

Сума на числов ред
Сумата Sn от първите n члена на един ред се нарича n-та частична сума на реда
$Sn = a_1 + a_2 + ... + a_n$
Ако редицата S1, S2, S2, ..., Sn, ... има граница числото S, когато $n \to \infty$, то редът (1) се нарича сходящ, а числото S се нарича негова сума и записваме $S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + a_{n+1} + ...$
Ако пък няма граница или тя е безкрайност при $n \to \infty$, то редът (1) се

нарича разходящ и няма сума

С-ва на сходящите редове
1) Ако премахнем краен брой членове от даден ред, то сходимостта му не се променя (същото е и при прибавяне на краен брой членове)
2) Ако редът $a1 + a2 + a3 + ... + an + ...$ е сходящ и има сума S, то и редът $ca_1 + ca_2 + ca_3 + ...$, където c е произволно число, е също сходящ и има сума c.S. Т.е при почленно умножаване на членовете на сходящ ред с дадено число получаваме отново сходящ ред.
3) Ако редовете $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$ и $b_1 + b_2 + ...$ са сходящи и имат суми съответно S и S', то редът $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + ... + (a_n + b_n) + ...$ е също сходящ и сумата е равна на S + S'