TD IT1 Feuille 1 – MAM3 - SI3

1 Tables de vérité

Écrire la table de vérité des expressions :

1. $A \Rightarrow B$
2. $\neg A \vee B$
3. $\neg(A \vee B)$
4. $\neg A \wedge \neg B$
5. $A \wedge (B \vee C)$
6. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

Que peut-on dire de : $\neg A \vee \neg B$ et $\neg(A \wedge B)$?

Que peut-on dire de : $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$ et $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$?

---

1. $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	V

2. $\neg A \vee B$

A	B	$\neg A \vee B$
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	V

On a donc deux écritures différentes pour la même expression... il y a donc équivalence sémantique entre $A \Rightarrow B$ et $\neg A \vee B$

3. $\neg (A \vee B)$

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	F	F	V
F	V	V	F

4. $\neg A \wedge \neg B$

A	B	$\neg A \wedge \neg B$
V	V	F
V	F	F
F	F	V
F	V	F

On a là aussi deux écritures différentes pour la même expression. Il y a équivalence entre $\neg(A \vee B)$ et $\neg A \wedge \neg B$

5. $A \wedge \ (B \vee \ C)$

A	B	C	$A \wedge (B \vee C)$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

6. $(A \wedge \ B) \vee \ (A \wedge \ C)$

A	B	C	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	F

Et à nouveau deux écritures différentes pour la même expression. Il y a équivalence entre $A \wedge (B \vee C)$ et $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ De même il y a équivalence entre $\neg(A \wedge B)$ et $\neg A \vee \neg B$ et équivalence entre $A \vee (B \wedge C)$ et $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

---

2 NAND

1. crire la table de vérité du $\barwedge$, c'est à dire la table de de la négation du $\wedge$.

A	B	$A \barwedge B$
V	V	F
V	F	V
F	F	V
F	V	V

---

2. Donner une formule propositionnelle qui n'utilise que $\barwedge$ comme connecteur et dont la table de vérité est celle du $\neg$

$A \barwedge A$

---

3. Donner une formule propositionnelle qui n'utilise que $\not\wedge$ comme connecteur et dont la table de vérité est celle du $\Rightarrow$

$A \Rightarrow B$ a la même table de vérité que $\neg A \vee B$ donc que $A \not\wedge \neg B$ donc que $A \not\wedge (B \not\wedge B)$

---

4. Donner une formule propositionnelle qui n'utilise que $\not\wedge$ comme connecteur et dont la table de vérité est celle du $\vee$

$(A \not\wedge A) \not\wedge (B \not\wedge B)$

---

5. Donner une formule propositionnelle qui n'utilise que $\not\wedge$ comme connecteur et dont la table de vérité est celle du $\wedge$

$(A \not\wedge B) \not\wedge (A \not\wedge B)$

---

3 Formes normales

Transformer les expressions :

- $\neg((((A \Rightarrow B) \vee C) \wedge A) \vee (D \wedge \neg C)) \wedge B$
- $(A \Leftrightarrow B) \vee \neg((C \wedge D) \vee \ (\neg D \vee A))$

pour qu'elles soient en forme normale conjonctive c'est à dire de la forme $p_1 \wedge\ p_2 \wedge\ p_3 \wedge\ .... \wedge\ p_n$

avec p_i de la forme $t_1 \vee t_2 \vee t_3 \vee .... \vee t_m$ où t_i est une variable ou la négation d'une variable.

Ici les variables sont A, B, C et D.

-
  - $\neg[\{((A \Rightarrow B) \vee C) \wedge A\} \vee (D \wedge \neg C)] \wedge B$
  - $[\neg\{((A \Rightarrow B) \vee C) \wedge A\} \wedge \neg(D \wedge \neg C)] \wedge B$
  - $[\{\neg((A \Rightarrow B) \vee C) \vee \neg A\} \wedge (\neg D \vee C)] \wedge B$
  - $[\{((A \wedge \neg B) \wedge \neg C) \vee \neg A\} \wedge (\neg D \vee C)] \wedge B$
  - $[(\{(A \wedge \neg B) \vee \neg A\} \wedge \{\neg C \vee \neg A\}) \wedge (\neg D \vee C)] \wedge B$
  - $[(\{(A \vee \neg A) \wedge (\neg B \vee \neg A)\} \wedge \{\neg C \vee \neg A\}) \wedge (\neg D \vee C)] \wedge B$
    Et on obtenu une forme normale conjonctive, que l'on peut simplifier en
    $(\neg B \vee \neg A) \wedge (\neg C \vee \neg A) \wedge (\neg D \vee C) \wedge B$
    puis en
    $\neg A \wedge (\neg C \vee \neg A) \wedge (\neg D \vee C) \wedge B$
    et enfin en $\neg A \wedge B \wedge (\neg D \vee C)$
-
  - $(A \Leftrightarrow\ B) \vee \neg\{(C \wedge D) \vee (\neg D \vee A)\}$
  - $(A \Leftrightarrow\ B) \vee \{(\neg C \vee \neg D) \wedge (D \wedge \neg A)\}$
  - $[(A \Leftrightarrow\ B) \vee (\neg C \vee \neg D)] \wedge [(A \Leftrightarrow\ B) \vee (D \wedge \neg A)]$
  - $[((A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)) \vee (\neg C \vee \neg D)] \wedge [((A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)) \vee (D \wedge \neg A)]$
  - $([((A\vee\neg B)\vee(\neg C\vee\neg D)]\wedge[((\neg A\vee B))\vee(\neg C\vee\neg D)])\wedge([(A\vee\neg B)\vee(D\wedge\neg A)]\wedge[(\neg A\vee B)\vee(D\wedge\neg A)])$
  - $(A\vee\neg B\vee\neg C\vee\neg D)\wedge(\neg A\vee B\vee\neg C\vee\neg D)\wedge(A\vee\neg B\vee D)\wedge(A\vee\neg B\vee\neg A)\wedge(\neg A\vee B\vee D)\wedge(\neg A\vee B\vee\neg A)$

  forme normale conjonctive,

---

4 Formules

On considère les symboles suivants :

Symboles de prédicat : {P(0-aire), Q(0-aire), p(2-aire), q(2-aire)}

Symboles de fonction : {a(0-aire), b(0-aire), f(3-aire), g(2-aire)}

Parmi les expressions suivantes, lesquelles sont des formules logiques du premier ordre ?

1. $\forall x(((P \vee p(x, f(Q, a, b))) \wedge \neg a))$
2. $(\forall x(P \vee p(x, f(x, a, b))) \wedge \neg Q)$
3. $(\forall P((P \vee p(x, f(y, a, b)))) \wedge \neg Q)$
4. $\exists x(\forall y((q(x, g(x, a)) \vee (p(x, y) \wedge \neg Q))))$

---

1. 1 n'est pas une formule logique du premier ordre car on n'a pas le droit de nier une constante
2. 2 est une formule logique du premier ordre car
   - Q proposition est un atome, donc une formule donc $\neg Q$ est une formule
   - x, a et b sont des termes , f est une fonction d'arité 3 donc $f(x, a, b)$ est un terme
   - p est un prédicat d'arité 2, x et $f(x, a, b)$ sont des termes, donc $p(x, f(x, a, b))$ est un atome et donc une formule
   - P étant une proposition est un atome et donc est une formule
   - donc $(P \vee p(x, f(x, a, b))$ est une formule dont x est une variable
   - donc $\forall x(P \vee p(x, f(x, a, b))$ est une formule
   - donc $\forall x(P \vee p(x, f(x, a, b)) \wedge \neg Q$ est une formule
3. 3 n'est pas une formule, car P n'étant pas une variable, on ne peut écrire $\forall P$....
4. - Q proposition est un atome, donc une formule donc $\neg Q$ est une formule
   - p est un prédicat d'arité 2, x et y sont des termes, donc $p(x, y)$ est un atome et donc une formule
   - donc $(p(x, y) \wedge \neg Q)$ est une formule
   - g est une fonction d'arité 2, x et a sont des termes, donc $g(x, a)$ est un terme
   - $g(x, a)$ et x sont des termes, q est un prédicat d'arité 2 donc $q(x, g(x, a))$ est une formule
   - donc $q(x, g(x, a)) \vee (p(x, y) \wedge \neg Q)$ est une formule dont x et y sont des variables
   - $\forall\ yq(x, g(x, a)) \vee (p(x, y) \wedge \neg Q)$ est donc une formule dont x et y sont des variables
   - $\exists\ x \forall y\ q(x, g(x, a)) \vee (p(x, y) \wedge \neg Q)$ est donc une formule

---

5 Un peu de formalisation

Soit le prédicat $H(x)$ qui signifie *x est un humain*, le prédicat $LG(x)$ qui signifie *x est une langue* et le prédicat $p(x, y, z)$ signifie *x et y parlent la langue z.*

Exprimer :

- *tous les humains parlent une langue*

- *il existe une langue universelle pour les humains*
- *il existe une personne qui parle toutes les langues*
- *deux humains quelconques peuvent communiquer par le biais d'un interprète*

où *personne* et *interprète* sont des humains.

- tout les humains parle une langue : $\forall x(H(x) \Rightarrow (\exists y\ (LG(y)\ \wedge P(x,x,y))$
- il existe une langue universelle pour les humains: $\exists y(LG(y) \wedge (\forall x(H(x) \Rightarrow p(x,x,y)))$
- il existe une personne qui parle toutes les langues : $\exists x(H(x) \wedge (\forall y(LG(y) \Rightarrow p(x,x,y)))$
- deux humains quelconques peuvent communiquer par le biais d'un interprète.
  $\forall x_1 \forall x_2[(H(x_1) \wedge H(x_2)) \Rightarrow (\exists x_3\ \exists y_1\ \exists y_2\ H(x_3) \wedge LG(y_1) \wedge LG(y_2) \wedge p(x_1,x_3,y_1) \wedge p(x_2,x_3,y_2)]$

---

6 Ambiguïté de la langue naturelle

En notant $H(x)$ le fait que *x est un humain*, $M(x)$ le fait que *x est mortel*, $F(x)$ le fait que *x est un menteur*, $A(x)$ le fait que *x est un animal* et $B(x)$ le fait que *x est bienvenu* et exprimer :

- *tous les humains sont mortels*
- *tous les humains ne sont pas des menteurs*
- *humains et animaux sont bienvenus*

- $\forall x\ (H(x) \Rightarrow M(x))$
- $\exists x\ (H(x) \wedge \neg M(x))$
- $\forall x((H(x) \vee F(x)) \Rightarrow B(x))$

---

7 Que du vent

Soit le langage du premier ordre formé de l'ensemble des variables $V = \{x,\ y,\ z\}$, des symboles fonctionnels 0-aire *n,s*, du symbole fonctionnel 1-aire *emp*, du symbole de prédicat 1-aire *renouv* et des symboles de prédicat 2-aire *plusPerf, inf.*

Dans ce langage, exprimer les énoncés suivants :

1. *Il existe des énergies renouvelables plus performantes que l'énergie nucléaire*
2. *L'énergie solaire est l'unique énergie renouvelable qui est plus performante que l'énergie nucléaire*
3. *Il existe une énergie renouvelable qui est plus performante que l'énergie nucléaire et qui est plus performante que les autres énergies renouvelables*

4. *Si deux énergies renouvelables ont la même empreinte écologique, alors si l'empreinte écologique de la première est inférieure à l'empreinte écologique du nucléaire, l'empreinte écologique de la seconde est aussi inférieure à l'empreinte écologique du nucléaire.*

En supposant que

- n représente l'énergie nucléaire
- s représente l'énergie solaire
- emp est une fonction d'arité un qui calcule l'empreinte écologique d'une énergie
- le domaine (pas encore défini à ce moment du cours) est celui des énergies et des empreintes écologiques.
- $renouv$ est un prédicat unaire tel que $renouv(x)$ est vrai si et seulement si x est une énergie renouvelable
- $plusPerf(x, y)$ est vrai si et seulement si l'énergie x est strictement plus performante que l'énergie y
- $inf(x, y)$ est vrai si et seulement si l'empreinte écologique de x est strictement inférieure à l'empreinte écologique de y

---

Les énoncés peuvent s'exprimer comme

1. Est ce qu'on veut dire qu'il en existe au moins une ou au moins deux ?

   Si c'est au moins une on écrira $\exists x\ (renouv(x) \wedge plusPerf(x, n))$

   Si c'est au moins deux on écrira:

   $\exists x_1 \exists x_2\ (renouv(x_1) \wedge renouv(x_2) \wedge plusPerf(x_1, n) \wedge plusPerf(x_2, n) \wedge \neg(x_1 = x_2))$
2. L'énergie solaire est l'unique énergie renouvelable qui est plus performante que l'énergie nucléaire. $plusPerf(s, n) \wedge renouv(s) \wedge \forall x[(renouv(x) \wedge plusPerf(x, n)) \Rightarrow x = s]$
3. Il existe une énergie renouvelable qui est plus performante que l'énergie nucléaire et qui est plus performante que les autres énergies renouvelables.

   $\exists x[renouv(x) \wedge plusPerf(x, n) \wedge (\forall y\ renouv(y) \Rightarrow plusPerf(x, y) \vee x = y)]$
4. Si deux énergies renouvelables ont la même empreinte écologique, alors si l'empreinte écologique de la première est inférieure à l'empreinte écologique du nucléaire, l'empreinte écologique de la seconde est aussi inférieure à l'empreinte écologique du nucléaire.

   $\forall x_1 \forall x_2((renouv(x_1) \wedge renouv(x_2) \wedge empp(x_1) = emp(x_2)) \Rightarrow (inf(x_1, n) \Rightarrow inf(x_2, n)))$

---

8 Quantificateurs

On considère l'ensemble de couleurs *{bleu, vert, rouge, jaune }* et les deux phrases :

F1 : *il existe une couleur primaire,*

F2 : *toutes les couleurs sont des couleurs primaires.*

Formaliser ces deux phrases sans utiliser de quantificateur.

En notant primaire (x) le prédicat " x est une couleur primaire"

$F1$ peut se formuler comme $primaire(bleu) \vee primaire(vert) \vee primaire(rouge) \vee primaire(jaune)$

$F2$ peut se formuler comme $primaire(bleu) \wedge primaire(vert) \wedge primaire(rouge) \wedge primaire(jaune)$
