Informatique Théorique
Sémantique: Interprétation et validité
(MAM3-SI3)

September 28, 2021

1 Vrai/Faux

Soient les formules :

a) $p(a, b) \wedge \neg p(f(a), b)$

b) $\exists y \; p(y, b)$

c) $\exists y \exists x \; p(y, x)$

d) $\forall x \exists y \; p(x, y)$

e) $\forall x \; p(x, x)$

f) $\exists y \forall x \; p(x, y)$

g) $\exists y \; ((p(y, a) \vee p(f(y), b))$

1. Les formules précédentes sont elles vraies dans l'interprétation I_1?
   Interprétation I_1 :
   - le domaine est l'ensemble **N** des entiers naturels
   - a est l'entier 0
   - b est l'entier 1
   - f est la fonction successeur
   - p est la relation $<$
2. Même question pour l'interprétation I_2 :
   - domaine : les listes de longueur quelconque contenant des 0 et des 1
   - a est la liste vide
   - b est la liste [1, 1, 1, 1, 1]
   - f est la fonction $cons_1$ qui ajoute un 1 en tête d'une liste
   - p est la relation length(x) $<$ length(y)

2 Interprétation

1. Trouver (si possible) une interprétation I_1 qui prouve que la formule
   $\Phi_1 \; [(\exists x \; p(x)) \wedge (\exists x \; q(x))] \Leftrightarrow [\exists x \; (p(x) \wedge q(x))]$
   n'est pas universellement valide et une interprétation I_2 où la formule Φ_1 est vraie.
2. Même question en remplaçant dans Φ_1 tous les $\wedge$ par des $\vee$, c'est à dire : Trouver (si possible) une interprétation I_3 qui prouve que la formule
   $\Phi_2 \; [(\exists x \; p(x)) \vee (\exists x \; q(x))] \Leftrightarrow [\exists x \; (p(x) \vee q(x))]$
   n'est pas universellement valide et une interprétation I_4 où la formule Φ_2 est vraie.

3. Même question en remplaçant dans Φ_2 tous les $\exists$ par des $\forall$, c'est à dire : Trouver (si possible) une interprétation I_5 qui prouve que la formule

   Φ_3 $[(\forall x\ p(x)) \vee (\forall x\ q(x))] \Leftrightarrow [\forall x\ (p(x) \vee q(x))]$

   n'est pas universellement valide et une interprétation I_4 où la formule Φ_2 est vraie.

4. Même question en remplaçant dans Φ_3 tous les $\vee$ par des $\wedge$, c'est à dire : Trouver (si possible) une interprétation I_7 qui prouve que la formule

   Φ_4 $[(\forall x\ p(x)) \wedge (\forall x\ q(x))] \Leftrightarrow [\forall x\ (p(x) \wedge q(x))]$

   n'est pas universellement valide et une interprétation I_8 où la formule Φ_4 est vraie.

5. Dans tous les cas précédents, si la formule n'est pas universellement valide qu'en est il si on remplace le $\Leftrightarrow$ par $\Leftarrow$ ou $\Rightarrow$?

6. Trouver une interprétation I dans laquelle la formule : $(\forall x \exists y \quad p(x,y)) \wedge (\forall x\ \neg p(x,x))$ est vraie. Cette formule peut-elle être vraie pour une interprétation dont le domaine a un seul élément ?

3 Interprétation et véracité

Soit le langage :

- variables : x , y
- symboles fonctionnels : f (arité 2), a (arité 0)
- symboles de prédicat : p (arité 2)

Soit l'interprétation I :

- domaine : les entiers positifs
- f est la fonction somme, a la constante 0
- p est l'égalité

Caractériser la véracité des formules suivantes :

1. Φ_1 :$\exists y \forall x\ p(f(x,y),x)$
2. Φ_2 :$(\forall x \exists y\ p(f(x,y),x))) \Rightarrow (\exists x \exists y\ p(f(x,y),x))$
3. Φ_3 :$\forall x \exists y\ p(f(x,y),a)$
4. Φ_4 :$\forall x \forall y\ p(f(x,y),f(y,x))$