Informatique Théorique

Informatique Théorique 3

(MAM3-SI3)

October 5, 2021

1 Deux propositions

On considére une logique du premier ordre dont les seuls prédicats sont les deux propositions P et Q (pas de variables, pas de fonction). Le but de l'exercice est de montrer que toute formule peut s'écrire en forme normale disjonctive en utilisant au plus 3 connecteurs logiques binaires (forcement des $\wedge$ et des $\vee$)

1. Toute formule pouvant être ici assimilée à sa table de vérité, combien de formules différentes devez vous considérer ?
2. La manière la plus simple d'obtenir une forme normale disjonctive pour la formule est de dire que chaque ligne de la table où la formule est vrai (minterm) correspond à un $\wedge$ et de faire un $\vee$ de toutes les lignes où la formule est vraie, par exemple, la formule dont la table de vérité est :

P	Q	Φ
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	1

   correspond à $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$. C'est ce qu'on appelle la forme canonique disjonctive.

   Pouvez vous faire mieux pour cet exemple ?
3. Si vous utilisez ces formes canoniques, quelles sont les tables de vérité pour lesquelles vous obtenez une solution avec plus de trois connecteurs logiques ?
4. Pour chacune de ces tables , donner une solution avec au plus trois connecteurs logiques binaires.
5. De combien de connecteurs logiques binaires avez vous besoin pour exprimer le xor ?
6. Pouvez vous en déduire que dans ce cadre, on peut aussi écrire toute formule en forme normale conjonctive avec au plus trois connecteurs logiques binaires?

---

1. 16, car 4 lignes chacune d'elle étant vraie ou fausse
2. Oui, c'est équivalent à $\neg Q$.
3. Celles comportant au moins trois un dans la dernière colonne, il y en a donc 5.
4.

P	Q	Φ
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

correspond à $P \vee Q$

P	Q	Φ
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

correspond à $P \vee \neg Q$

P	Q	Φ
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

correspond à $\neg P \vee Q$

P	Q	Φ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

correspond à $\neg P \vee \neg Q$

P	Q	Φ
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

correspond à $\neg P \vee P$ soit 1

5.

P	Q	Φ
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

correspond à $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ et ne peut pas se simplifier. C'est en fait une des deux seules formules qui nécessitent trois connecteurs, l'autre étant $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ c'est-à-dire $P \iff Q$.

6. oui, car si Φ est une formule, il en est de même de $\Phi' = \neg\Phi$. On obtient une forme normale conjonctive pour Φ, en niant une forme normale disjonctive de Φ'.

---

2 Simplification "à la main"

Simplifier les formules suivantes

1. $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$
2. $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$
3. $(\neg A \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge D) \vee (A \wedge B \wedge C \wedge \neg D)$

---

1. B
2. $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C)$ ou $A \wedge (B \vee \neg C)$
3. $(\neg A \wedge \neg C) \vee (A \wedge B)$ en montrant que $(\neg C \vee D \vee (C \wedge \neg D))$ est universellement valide

---

3 Algorithme de Quine Mc Cluskey

1. Lister tous les minterms de f dans une table en les convertissant en mots de $\{0,1\}^*$
2. Les grouper selon leur poids, c'est à dire par le nombre de 1 dans chaque minterm
3. Unir les termes deux à deux, c'est à dire :
   - Comparer les termes d'un groupe avec ceux du groupe adjacent pour essayer de les combiner
   - Créer une nouvelle table avec les combinaisons trouvées : 0100 +0101 = 010-
   - Rayer chaque terme utilisé pour la combinaison et passer à la table suivante
4. Répéter l'étape (3) autant de fois que c'est possible
5. Identifier les impliquants premiers (qui correspondent aux termes non rayés)
6. Identifier les impliquants premiers essentiels

7. Vérifier si la fonction est entièrement exprimée par ses impliquants essentiels, auquel cas arrêter
8. Si on n'a pas fini à l'étape (7), choisir les impliquants premiers appropriés

Utilisez cet algorithme pour simplifier les fonctions logiques suivantes exprimées sous la forme d'une somme (représentant des $\vee$) de produits logique (représentant des $\wedge$) des variables a,b,c,d,e éventuellement niées, et toujours dans le même ordre . Chaque produit logique est représenté par la valeur en base 10 de l'ecriture binaire correspondante, par exemple a.b.c.d est identifié à 1111 puis à l'entier quinze, tandis que $\neg a \neg b \neg c d$ est identifié à 0001 puis à l'entier 1

1. $F_1 = \Sigma(0, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15)$ plusieurs solutions sont possibles
2. $F_2 = \Sigma(0, 1, 2, 3, 7, 14, 15, 22, 23, 29, 31)$ une seule solution possible
3. $F_3 = \Sigma(0, 1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15)$ plusieurs solutions sont possibles

---

1. $F_1 = \Sigma(0, 2, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15)$

(a) Etapes 1 et 2

poids	minterm	
0	0000	0
1	0010	2
	1000	8
2	0101	5
	0110	6
	1010	10
	1100	12
3	0111	7
	1101	13
	1110	14
4	1111	15

(b) Etape 3

poids	minterm	
0	~~0000~~	0
1	~~0010~~	2
	~~1000~~	8
2	~~0101~~	5
	~~0110~~	6
	~~1010~~	10
	~~1100~~	12
3	~~0111~~	7
	~~1101~~	13
	~~1110~~	14
4	~~1111~~	15

union	minterm
0,2	00x0
0,8	x000
2,6	0x10
2,10	x010
8,10	10x0
8,12	1x00
5,7	01x1
5,13	x101
6,7	011x
6,14	x110
10,14	1x10
12,13	110x
12,14	11x0
7,15	x111
13,15	11x1
13,14	111x

(c) On recommence l'Etape 3

union	minterm
0,2	~~00x0~~
0,8	~~x000~~
2,6	~~0x10~~
2,10	~~x010~~
8,10	~~10x0~~
8,12	~~1x00~~
5,7	~~01x1~~
5,13	~~x101~~
6,7	~~011x~~
6,14	~~x110~~
10,14	~~1x10~~
12,13	~~110x~~
12,14	~~11x0~~
7,15	~~x111~~
13,15	~~11x1~~
13,14	~~111x~~

union	minterm
0,2,8,10	x0x0
2,6,10,14	xx10
8,10,12,14	1xx0
5,7,13,15	x1x1
6,7,14,15	x11x
12,13,14,15	11xx

(d) On essaye de réiterer l'Etape 3

union	minterm
0,2,8,10	x0x0
2,6,10,14	xx10
8,10,12,14	1xx0
5,7,13,15	x1x1
6,7,14,15	x11x
12,13,14,15	11xx

et l'on s'aperçoit que c'est impossible

(e) Les impliquants premiers sont donc x0x0, xx10, 1xx0, x1x1, x11x et 11xx

(f) On doit maintenant identifier les impliquants premiers essentiels

	0000	0010	1000	0101	0110	1010	1100	0111	1101	1110	1111
x0x0	(x)	x	x			x					
xx10		x			x	x				x	
1xx0			x			x	x			x	
x1x1				(x)				x	x		x
x11x					x			x		x	x
11xx							x		x	x	x

Les impliquants premiers essentiels sont donc x0x0 et x1x1

(g) Ils ne couvrent pas tout, reste

	0110	1100	1110
xx10	x		x
1xx0		x	x
x11x	x		x
11xx		x	x

Aucun impliquant premier ne couvre les 4 midterms restant , il faut donc en prendre deux de plus. On a 4 solutions :

- x0x0+x1x1+11xx + x11x
- x0x0+x1x1+1xx0 + xx10
- x0x0+x1x1+11xx + xx10
- x0x0+x1x1+1xx0 + x11x

2. $F_2 = \Sigma(0, 1, 2, 3, 7, 14, 15, 22, 23, 29, 31)$

(a) etapes 1 et 2

poids	minterm	
0	00000	0
1	00001	1
	00010	2
2	00011	3
3	00111	7
	01110	14
	10110	22
4	01111	15
	10110	23
	11101	29
5	11111	31

(b) Etape 3

poids	minterm	
0	~~00000~~	0
1	~~0000~~	1
	~~00010~~	2
2	~~00011~~	3
3	~~00111~~	7
	~~01110~~	14
	~~10110~~	22
4	~~01111~~	15
	~~10110~~	23
	~~11101~~	29
5	~~11111~~	31

poids	minterm
0,1	0000x
0,2	000x0
1,3	000x1
2,3	0001x
3,7	00x11
7,15	0x111
7,23	x0111
14,15	0111x
22,23	1011x
15,31	x1111
23,31	1x111
29,31	111x1

(c) On réitère l'étape 3

poids	minterm
0,1	~~0000x~~
0,2	~~000x0~~
1,3	~~000x1~~
2,3	~~0001x~~
3,7	00x11
7,15	~~0x111~~
7,23	~~x0111~~
14,15	0111x
22,23	1011x
15,31	~~x1111~~
23,31	~~1x111~~
29,31	111x1

poids	minterm
0,1,2,3	000xx
7,15,23,31	xx111

3. On ne peut pas réitérer, les impliquants premiers sont 00x11, 0111x,1011x, 111x1, 000xx et xx111

4. On cherche les impliquants premiers essentiels

	00000	00001	00010	00011	00111	01110	01111	10110	10111	11101	11111
000xx	(x)	(x)	(x)	x							
xx111					x		x		x		x
00x11				x	x						
0111x						(x)	x				
1011x							x	(x)			
111x1										(x)	x

On a trouvé 4 impliquants premiers essentiels 000xx,0111x,1011x et 111x1

5. on regarde ce qui n'est pas couvert

	00111	10111
xx111	x	x
00x11	x	

On en en déduit que la seule solution minimale est 000xx+0111x+1011x+111x1+xx111

6. $F_3 = \Sigma(0, 1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15)$

(a) Etapes 1 et 2

poids	minterm	
0	0000	0
1	0001	1
	0010	2
2	0101	5
	0110	6
	1001	9
	1010	10
3	0111	7
	1011	11
	1101	13
	1110	14
4	1111	15

(b) Etape 3

poids	minterm	
0	~~0000~~	0
1	~~0001~~	1
	~~0010~~	2
2	~~0101~~	5
	~~0110~~	6
	~~1001~~	9
	~~1010~~	10
3	~~0111~~	7
	~~1011~~	11
	~~1101~~	13
	~~1110~~	14
4	~~1111~~	15

union	midterm
0,1	000x
0,2	00x0
1,5	0x01
1,9	x001
2,6	0x10
2,10	x010
5,7	01x1
5,13	x101
6,7	011x
6,14	x110
9,11	10x1
9,13	1x01
10,11	101x
10,14	1x10
7,15	x111
11,15	1x11
13,15	11x1
14,15	111x

(c) On réitère l'étape 3

union	midterm
0,1	000x
0,2	00x0
1,5	~~0x01~~
1,9	~~x001~~
2,6	~~0x10~~
2,10	~~x010~~
5,7	~~01x1~~
5,13	~~x101~~
6,7	~~011x~~
6,14	~~x110~~
9,11	~~10x1~~
9,13	~~1x01~~
10,11	~~101x~~
10,14	~~1x10~~
7,15	~~x111~~
11,15	~~1x11~~
13,15	~~11x1~~
14,15	~~111x~~

union	midterm
1,5,9,13	xx01
2,6,10,14	xx10
5,7,13,15	x1x1
6,7,14 ,15	x11x
9,11,13,15	1xx1
10,11,14,15	1x1x

(d) On essaye de réitèrer, c'est impossible

union	midterm	numéro
15 et 24	xx01	31
17 et 26	xx10	32
19 et 29	x1x1	33
21 et 30	x11x	34
23 et 29	1xx1	35
25 et 30	1x1x	36

(e) Les impliquants premiers sont donc 000x,00x0,x001,xx10,x1x1,x11x, 1xx1 et 1x1x

(f) On doit maintenant identifier les impliquants premiers essentiels

	0000	0001	0010	0101	0110	1001	1010	0111	1011	1101	1110	1111
000x	x	x										
00x0	x		x									
xx01		x		x		x				x		
xx10			x		x		x				x	
x1x1				x				x		x		x
x11x					x			x			x	x
1xx1						x			x	x		x
1x1x							x		x		x	x

il n'y en a pas !

(g) Les deux solutions minimales sont

- xx10+x1x1+1xx1+000x
- xx01+x11x+1x1x+000x

4 Avec ou sans algorithme de Quine Mc Cluskey

1. Écrire une expression logique minimale qui calcule la majorité de 4 bits c'est à dire la valeur (0 ou 1) qui a le plus grand nombre d'occurences parmi les 4 bits (en cas d'égalité, c'est 0 qui l'emporte).
2. Écrire une expression logique minimale qui calcule la plus grande valeur parmi 4 bits (un peu long avec l'algo ...).

---

1. majorite$(x_3, x_2, x_1, x_0) = x_2x_1x_0 + x_3x_1x_0 + x_3x_2x_0 + x_3x_2x_1$
2. max$(x_3, x_2, x_1, x_0) = x_0 + x_1 + x_2 + x_3$
