Informatique Théorique

Sémantique: Interprétation et validité

(MAM3-SI3)

September 28, 2021

1 Vrai/Faux

Soient les formules :

a) $p(a, b) \wedge \neg p(f(a), b)$

b) $\exists y\ p(y, b)$

c) $\exists y \exists x\ p(y, x)$

d) $\forall x \exists y\ p(x, y)$

e) $\forall x\ p(x, x)$

f) $\exists y \forall x\ p(x, y)$

g) $\exists y\ ((p(y, a) \vee p(f(y), b))$

1. Les formules précédentes sont elles vraies dans l'interprétation I_1?
   Interprétation I_1 :
   - le domaine est l'ensemble **N** des entiers naturels
   - a est l'entier 0
   - b est l'entier 1
   - f est la fonction successeur
   - p est la relation $<$
2. Même question pour l'interprétation I_2 :
   - domaine : les listes de longueur quelconque contenant des 0 et des 1
   - a est la liste vide
   - b est la liste [1, 1, 1, 1, 1]
   - f est la fonction $cons_1$ qui ajoute un 1 en tête d'une liste
   - p est la relation length(x) $<$ length(y)

---

1. Dans I_1, on se place dans **N**, les formules s'interprètent alors comme
   (a) $(0 < 1) \wedge \neg(1 < 1))$. Cette formule est vraie
   (b) $\exists y\ (y < 1)$ Cette formule est vraie (on peut choisir $y = 0$, c'est d'ailleurs le seul choix possible)
   (c) $\exists y \exists x\ y < x$. Cette formule est vraie.
   (d) $\forall x \exists y\ x < y$ qui est vraie (car on peut choisir pour y l'entier successeur de x).
   (e) $\forall x\ x < x$ est une formule fausse car $<$ est un ordre strict dans **N**
   (f) $\exists y \forall x\ x < y$ est une formule fausse car de toutes façons on n'a pas y<y.
   (g) $\exists y\ (y < 0 \vee y + 1 < 1)$ est une formule fausse, car il n'existe aucun entier naturel négatif.
2. Dans la seconde interprétation I_2, on se place dans l'ensemble des listes de longueur quelconque contenant des 0 et des 1, les formules s'interprètent alors comme

(a) $0 < 5 \wedge \neg(1 < 5)$, cette formule est fausse

(b) $\exists y\ (length(y) < 5)$ cette formule est vraie (par exemple en choisissant pour y la liste vide)

(c) $\exists y \exists x\ length(y) < length(x)$ est vraie.

(d) $\forall x \exists y\ length(x) < length(y)$ cette formule est vraie dans I_2 on peut choisir $y = f(x)$

(e) $\forall x\ length(x) < length(y)$ formule fausse, car fausse pour x=y.

(f) $\exists y\ \forall x length(x) < length(y)$ formule fausse, car x peut prendre la valeur y.

(g) $\exists y\ ((length(y) < 0 \vee length(cons_1(y)) < 5))$. Cette formule est vraie, par exemple en choisissant pour y la liste vide , car $1 < 5$

---

2 Interprétation

1. Trouver (si possible) une interprétation I_1 qui prouve que la formule

   Φ_1 $[(\exists x\ p(x)) \wedge (\exists x\ q(x))] \Leftrightarrow [\exists x\ (p(x) \wedge q(x))]$

   n'est pas universellement valide et une interprétation I_2 où la formule Φ_1 est vraie.

2. Même question en remplaçant dans Φ_1 tous les $\wedge$ par des $\vee$, c'est à dire : Trouver (si possible) une interprétation I_3 qui prouve que la formule

   Φ_2 $[(\exists x\ p(x)) \vee (\exists x\ q(x))] \Leftrightarrow [\exists x\ (p(x) \vee q(x))]$

   n'est pas universellement valide et une interprétation I_4 où la formule Φ_2 est vraie.

3. Même question en remplaçant dans Φ_2 tous les $\exists$ par des $\forall$, c'est à dire : Trouver (si possible) une interprétation I_5 qui prouve que la formule

   Φ_3 $[(\forall x\ p(x)) \vee (\forall x\ q(x))] \Leftrightarrow [\forall x\ (p(x) \vee q(x))]$

   n'est pas universellement valide et une interprétation I_4 où la formule Φ_2 est vraie.

4. Même question en remplaçant dans Φ_3 tous les $\vee$ par des $\wedge$, c'est à dire : Trouver (si possible) une interprétation I_7 qui prouve que la formule

   Φ_4 $[(\forall x\ p(x)) \wedge (\forall x\ q(x))] \Leftrightarrow [\forall x\ (p(x) \wedge q(x))]$

   n'est pas universellement valide et une interprétation I_8 où la formule Φ_4 est vraie.

5. Dans tous les cas précédents, si la formule n'est pas universellement valide qu'en est il si on remplace le $\Leftrightarrow$ par $\Leftarrow$ ou $\Rightarrow$?

6. Trouver une interprétation I dans laquelle la formule : $(\forall x \exists y\ \ p(x,y)) \wedge (\forall x\ \neg p(x,x))$ est vraie. Cette formule peut-elle être vraie pour une interprétation dont le domaine a un seul élément ?

---

1. C'est possible

   - Pour I_1 on peut choisir comme domaine les entiers naturels, pour p(x) le prédicat "x est inférieur à 5" et pour q(x) " x est supérieur à 6". La formule $((\exists x\ p(x)) \wedge (\exists x\ q(x)))$ peut se réécrire comme $((\exists x_1\ p(x_1)) \wedge (\exists x_2\ q(x_2)))$. Elle est vraie par exemple en choisissant $x_1 = 3$ et $x_2 = 9$

     Dans I_1, la formule $(\exists x\ (p(x) \wedge q(x)))$ est fausse, aucun entier n'étant à la fois inférieur à 5 et supérieur à 6.

     Φ_1 n'est donc pas vraie pour l'interprétation I_1.

     Φ_1 n'est donc pas universellement valide.
   - Pour I_2, on peut choisir un domaine dans lequel il n'y a qu'un seul élément et p et q deux prédicats quelconques, ou on peut choisir n'importe quel domaine et p=q. On aura alors $I_2 \models \Phi_1$

2. Ce n'est pas possible car Φ_2 est universellement valide. C'est à dire que pour toute interprétation I_4, on a $I_4 \models \Phi_2$.

   En effet dans toute interprétation

   - Si $((\exists x\ p(x)) \vee (\exists x\ q(x)))$ alors
     - soit $((\exists x\ p(x))$ et alors soit x_1 tel que $p(x_1)$. On a aussi $p(x_1) \vee q(x_1)$ donc $(\exists x (p(x) \vee q(x)))$
     - soit $((\exists x\ q(x))$ et alors soit x_2 tel que $q(x_2)$. On a aussi $p(x_2) \vee q(x_2)$ donc $(\exists x (p(x) \vee q(x)))$

Dans les deux cas, on a bien $(\exists x(p(x) \vee q(x)))$.

Réciproquement,

si $(\exists x(p(x) \vee q(x)))$, soit x_1 tel que $(p(x_1) \vee q(x_1))$ alors

- soit $p(x_1)$ et donc $((\exists x\ p(x))$ et donc $((\exists x\ p(x)) \vee (\exists x\ q(x)))$
- soit $q(x_1)$ et donc $((\exists x\ q(x))$ et donc $((\exists x\ p(x)) \vee (\exists x\ q(x)))$

Dans les deux cas, on a bien $((\exists x\ p(x)) \vee (\exists x\ q(x)))$.

3. C'est possible

   - Pour I_3 on peut choisir comme domaine les entiers naturels, pour p(x) le prédicat "x est pair" et pour q(x) " x est impair". La formule $((\forall x\ p(x)) \vee (\forall x\ q(x)))$ s'interprète alors comme tous les entiers sont pairs ou tous les entiers sont impairs, ce qui est faux

     La formule $(\forall x\ (p(x) \vee q(x)))$ s'interprète comme chaque entier est soit pair soit impair ce qui est vrai

     Φ_3 n'est donc pas vraie pour l'interprétation I_3
   - Pour I_4, on peut choisir un domaine dans lequel il n'y a qu'un seul élément et p et q deux prédicats quelconques, ou on peut choisir n'importe quel domaine et p=q

4. Ce n'est pas possible car Φ_4 est universellement valide. C'est à dire que pour toute interprétation I_8, on a $I_8 \models \Phi_4$

5. - L'interprétation I_1 donnée pour prouver que Φ_1 n'est pas universellement valide, prouve en fait que la formule $\Phi_{1\Rightarrow}$ $((\exists x\ p(x)) \wedge (\exists x\ q(x))) \Rightarrow (\exists x(p(x) \wedge q(x)))$ n'est pas vraie dans I_1. En revanche $\Phi_{1\Leftarrow}$ $((\exists x\ p(x)) \wedge (\exists x\ q(x))) \Leftarrow (\exists x(p(x) \wedge q(x)))$ est universellement valide.
   - L'interprétation I_3 donnée pour prouver que Φ_3 n'est pas universellement valide, prouve en fait que la formule $\Phi_{3\Leftarrow}$ $((\forall x\ p(x)) \vee (\forall x\ q(x))) \Leftarrow (\forall x\ (p(x) \vee q(x)))$ n'est pas vraie dans I_1. En revanche $\Phi_{3\Rightarrow}$ $((\forall x\ p(x)) \vee (\forall x\ q(x))) \Rightarrow (\forall x\ (p(x) \vee q(x)))$ est universellement valide.

6. - Pour I, on peut choisir comme domaine les entiers naturels pour p la relation $<$
   - Cette formule n'est jamais vraie si le domaine contient un unique élément a, car on devrait alors avoir $p(a, a) \wedge \neg(p(a, a)$, ce qui est impossible

---

3 Interprétation et véracité

Soit le langage :

- variables : x , y
- symboles fonctionnels : f (arité 2), a (arité 0)
- symboles de prédicat : p (arité 2)

Soit l'interprétation I :

- domaine : les entiers positifs
- f est la fonction somme, a la constante 0
- p est l'égalité

Caractériser la véracité des formules suivantes :

1. $\Phi_1 : \exists y \forall x\ p(f(x, y), x)$
2. $\Phi_2 : (\forall x \exists y\ p(f(x, y), x))) \Rightarrow (\exists x \exists y\ p(f(x, y), x))$
3. $\Phi_3 : \forall x \exists y\ p(f(x, y), a)$
4. $\Phi_4 : \forall x \forall y\ p(f(x, y), f(y, x))$

Sur le domaine des entiers naturels et dans l'interprétation donnée les formules peuvent se réécrire.

- Φ_1 : $\exists y \forall x\ x + y = x$. Cette formule est vraie.

- Φ_2: $(\forall x \exists y\ x+y=x))) \Rightarrow (\exists x \exists y\ x+y=x))$. Non seulement $I \models \Phi_2$, mais Φ_2 est universellement valide. En fait plus généralement la formule Ψ :$(\forall x \Phi) \Rightarrow (\exists x \Phi)$ est vraie quelque soit l'interprétation [le domaine est toujours non vide]. On a donc $\models \Psi$
- Φ_3: $\forall x \exists y\ x+y=0$ est faux pour les entiers naturels. On a $I \not\models \Phi_3$. En revanche l'interprétation I' ou l'on changerait simplement le domaine de **N** en **Z** serait un modèle de Φ_3.
- Φ_4: $\forall x\ \forall y\ (x+y=y+x)$ I est un modèle pour Φ_4 , Φ_4 est valide dans I, $I \models \Phi_4$. Dans ce modèle, Φ_4 exprime la commutativité de l'addition dans **N**
