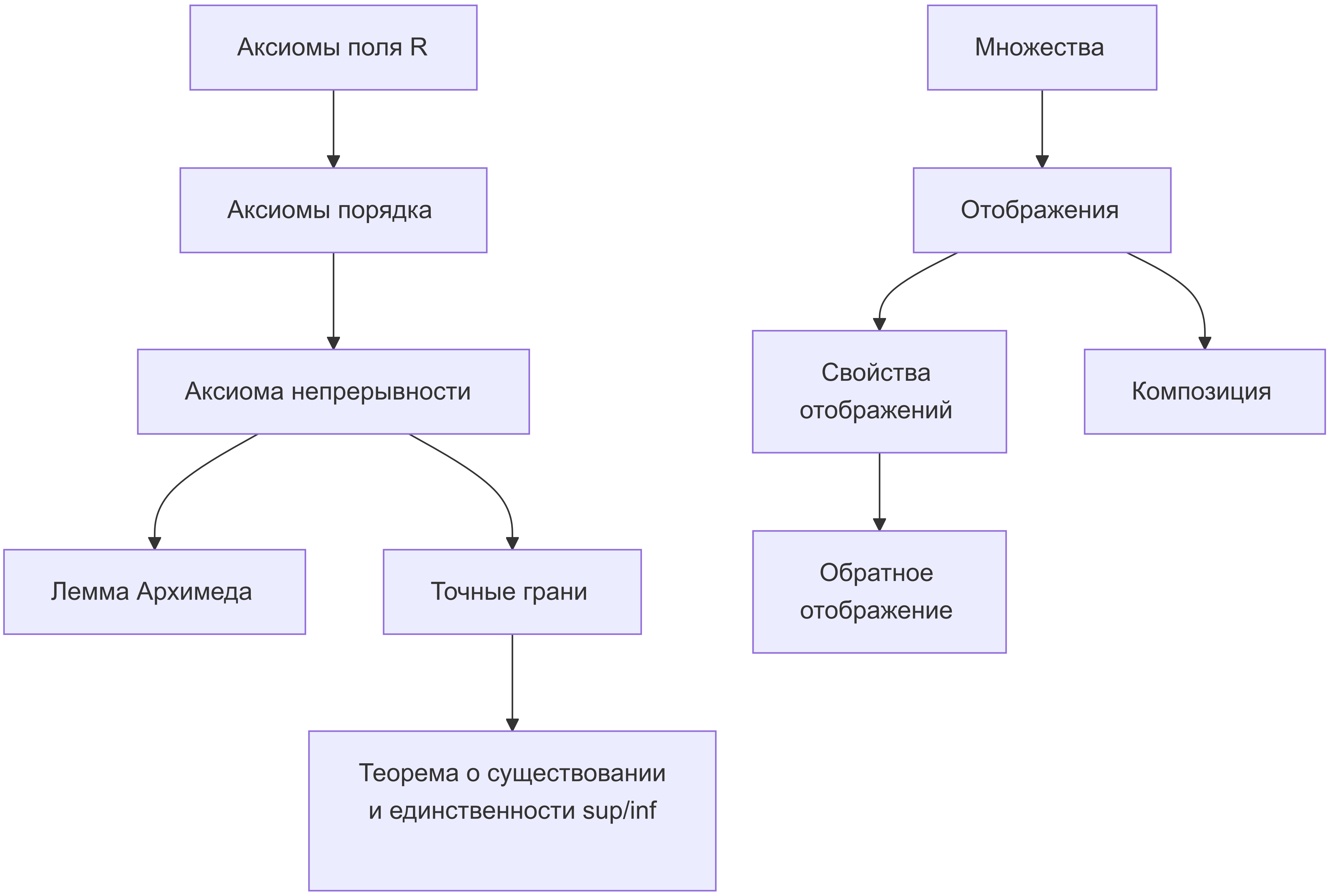
1. Фундамент вещественных чисел и отображений



Этот конспект закладывает основу всего математического анализа. Мы строим мост от интуитивных представлений о числах к строгой математической структуре, используя формулировку аксиомы непрерывности.

---

1. Действительные числа: аксиоматический подход

Мы все интуитивно знакомы с вещественными числами (числовая прямая). Но математике нужна строгая основа. Мы определяем множество **R** (действительные числа) как множество, удовлетворяющее трем группам аксиом.

1.1. Аксиомы поля (как числа складываются и умножаются)
Существуют операции сложения $+$ и умножения $*$, такие что для любых $a, b, c \in R$:

- **A1.** $a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
- **A2.** $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
- **A3.** Существует **0** (ноль): $a + 0 = a$ для любого a.
- **A4.** Для любого a существует $-a$ (противоположный элемент): $a + (-a) = 0$.
- **M1.** $a * b = b * a$ (коммутативность умножения)
- **M2.** $(a * b) * c = a * (b * c)$ (ассоциативность умножения)
- **M3.** Существует **1** (единица), $1 \neq 0$: $a * 1 = a$ для любого a.
- **M4.** Для любого $a \neq 0$ существует a^{-1} (обратный элемент): $a * a^{-1} = 1$.
- **Д.** $a * (b + c) = a * b + a * c$ (дистрибутивность).

🔍 *Интуиция:* Эти аксиомы описывают привычные правила арифметики. Они работают и для рациональных чисел **Q**. Значит, нам нужно что-то еще, чтобы отличить **R** от **Q**.

1.2. Аксиомы порядка (как числа сравниваются)
Существует отношение $<$ (меньше), которое для любых $a, b, c \in R$:

- **O1.** Либо $a < b$, либо $b < a$, либо $a = b$ (трихотомия).
- **O2.** Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (транзитивность).

- **O3.** Если $a < b$, то $a + c < b + c$ (согласованность со сложением).
- **O4.** Если $a < b$ и $0 < c$, то $a * c < b * c$ (согласованность с умножением).

🔍 *Интуиция:* Порядок позволяет расположить числа на прямой. Множество **Q** тоже упорядочено. Нам все еще не хватает главного.

1.3. Аксиома непрерывности (полноты)
Это ключевая аксиома, которая отличает **R** от **Q**. Она гласит, что числовая прямая не имеет «дырок».

- **Формально:** Пусть A и B – непустые подмножества **R**. Будем говорить, что A **располагается левее** B, если для любых $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \le b$.
  Тогда аксиома непрерывности утверждает:
  $\forall A, B \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing, B \neq \varnothing : (A \text{ располагается левее } B) \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a \le c \le b, \quad \forall a \in A, \forall b\, B.$
  То есть, между любыми двумя непустыми множествами, одно из которых лежит левее другого, существует число c, их разделяющее.

🔍 *Интуиция:* Если одно множество лежит целиком слева от другого, то между ними нельзя втиснуть "дырку"; всегда найдется число, заполняющее промежуток. Эта аксиома гарантирует полноту вещественной прямой.

---

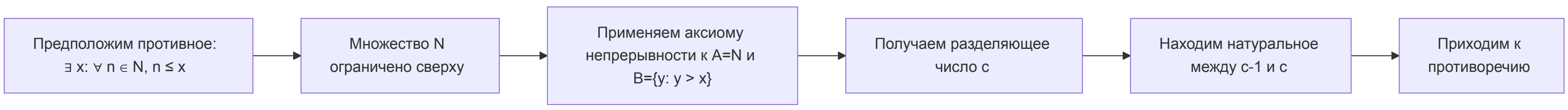
2. Важное следствие: Лемма Архимеда

Прежде чем перейти к точным граням, докажем фундаментальный факт, который часто используется в анализе.

Лемма (Архимеда): Для любого вещественного числа $x \in R$ существует натуральное число $n \in N$ такое, что $n > x$.

Доказательство (от противного):

1. **Логическая схема доказательства:**



2. **Доказательство:**
   Предположим, что лемма неверна. Тогда существует такое число $x \in R$, что для всех натуральных $n \in N$ выполняется $n \le x$.
   Это означает, что множество натуральных чисел **N** ограничено сверху.
   Рассмотрим два множества:

   - $A = N$ (все натуральные числа).
   - $B = \{y \in R : y > n \quad \forall n \in N\}$ (все числа, большие любого натурального).

   Оба множества непусты ($1 \in A$, $x + 1 \in B$ по нашему предположению). Кроме того, A располагается левее B по построению: любое натуральное n меньше любого $y \in B$ (иначе, если бы нашлось $y \in B$ и $n \in N$ такие, что $y \le n$, то y не могло бы быть больше всех натуральных чисел).

   Применим аксиому непрерывности. Существует число $c \in R$ такое, что:
   $n \le c \le y \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in B.$
   Рассмотрим число $c - 1$. Так как $c - 1 < c$, то $c - 1$ не может быть верхней границей для A (потому что c — наименьшая из верхних границ, как следует из неравенства $c \le y$ для всех $y \in B$). Значит, существует натуральное число $m \in N$ такое, что $m > c - 1$. Но тогда $m + 1 > c$. Однако $m + 1$ — натуральное число, значит, $m + 1 \in A$. Получаем, что элемент множества A оказался больше c, что противоречит условию $n \le c$ для всех $n \in A$.
   Следовательно, наше предположение неверно, и лемма Архимеда доказана. ∎

🔍 *Интуиция:* Какое бы большое число вы ни назвали, всегда найдется натуральное число, которое его больше. Это кажется очевидным, но строго следует из аксиомы непрерывности.

---

3. Точные верхняя и нижняя грани

Пусть $E \subset R$ — некоторое числовое множество.

- **Определение:** Число $M \in R$ называется **верхней гранью** множества E, если для любого $x \in E$ выполняется $x \le M$.
  Множество, имеющее верхнюю грань, называется **ограниченным сверху**.

- **Аналогично:** Число $m \in R$ называется **нижней гранью**, если для любого $x \in E$ выполняется $x \geq m$. Множество, имеющее нижнюю грань, называется **ограниченным снизу**.

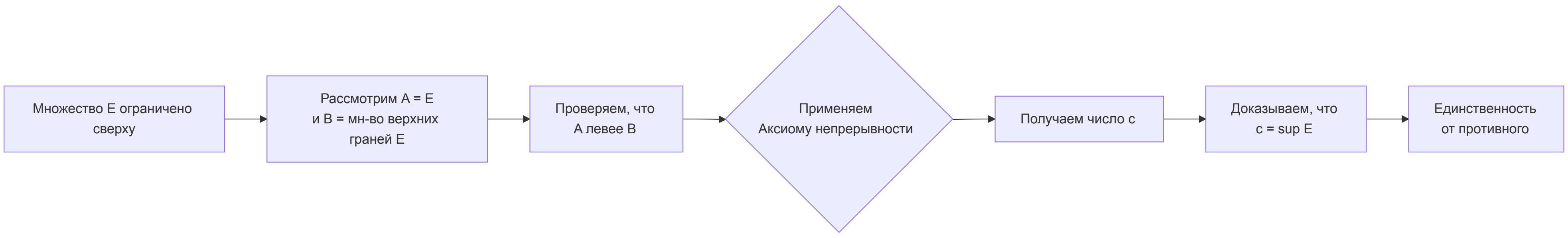
🔍 *Интуиция:* Верхняя грань — это "крышка" сверху для множества. Таких "крышек" может быть много (например, для отрезка $[0, 1]$ верхними гранями являются 1, 2, 100 и т.д.). Нас интересует самая маленькая из них.

- **Определение:** Наименьшая из всех верхних граней множества E называется **точной верхней гранью** (supremum) и обозначается $supE$.
- **Определение:** Наибольшая из всех нижних граней множества E называется **точной нижней гранью** (infimum) и обозначается $infE$.
- **Критерий точной верхней грани:** Число $M = \sup E$ тогда и только тогда, когда:
  1. $\forall x \in E : x \leq M$ (M — верхняя грань).
  2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E : x_\varepsilon > M - \varepsilon$ (никакое число меньшее M не является верхней гранью, так как мы всегда найдем элемент из E, который больше этого числа).

Теорема (о существовании и единственности точной верхней грани):
Всякое непустое ограниченное сверху множество действительных чисел имеет единственную точную верхнюю грань.

Доказательство:

1. **Логическая схема доказательства:**



2. **Доказательство:**

   - **Существование:** Пусть E — непустое ограниченное сверху множество. Рассмотрим два множества:
     - $A = E$ (само множество).
     - B — множество всех верхних граней множества E. Оно непусто, так как E ограничено сверху.

   Покажем, что A располагается левее B. Действительно, по определению верхней грани, для любого $a \in A$ (т.е. $a \in E$) и для любого $b \in B$ (т.е. b — верхняя грань E) выполняется $a \leq b$.

   Применим аксиому непрерывности. Существует число $c \in R$ такое, что:
   $a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$
   Докажем, что это число c и является точной верхней гранью $\sup E$.

   - *Проверим условие 1 критерия:* Левая часть неравенства ($a \leq c$ для всех $a \in E$) означает, что c является верхней гранью множества E. Следовательно, $c \in B$.
   - *Проверим условие 2 критерия:* Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Число $c - \varepsilon$ меньше c. Правая часть исходного неравенства ($c \leq b$ для всех $b \in B$) означает, что c — наименьший элемент множества B (наименьшая верхняя грань). Поэтому $c - \varepsilon$ уже не принадлежит B, т.е. не является верхней гранью. Значит, найдется элемент $x_\varepsilon \in E$ такой, что $x_\varepsilon > c - \varepsilon$.

   Оба условия критерия выполнены, следовательно, $c = \sup E$.
   - **Единственность:** Пусть $M_1 = \sup E$ и $M_2 = \sup E$. Предположим, что $M_1 \neq M_2$. Без ограничения общности, пусть $M_1 < M_2$. Так как M_2 — точная верхняя грань, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $x \in E$ такой, что $x > M_2 - \varepsilon$. Выберем $\varepsilon = M_2 - M_1 > 0$. Тогда существует $x \in E$ такой, что $x > M_2 - (M_2 - M_1) = M_1$. Но это означает, что $x > M_1$, что противоречит тому, что M_1 является верхней гранью (поскольку верхняя грань должна быть не меньше всех элементов множества). Следовательно, предположение неверно, и $M_1 = M_2$. ∎

🔍 *Интуиция:* Эта теорема — прямое следствие аксиомы непрерывности. Она гарантирует, что у любого разумного ограниченного сверху множества (например, множества значений функции) есть "самый верхний" предел.

---

4. Множества, отображения, композиция

4.1. Основные понятия

- **Множество** — совокупность элементов. $A \subset B$ (подмножество).

- **Отображение (функция)** $f : X \to Y$ — правило, которое каждому элементу $x \in X$ (область определения) ставит в соответствие **единственный** элемент $y \in Y$ (область значений). $y = f(x)$.
- **Образ множества:** Если $A \subset X$, то $f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subset Y$.
- **Прообраз множества:** Если $B \subset Y$, то $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subset X$.

4.2. Свойства отображений

- **Инъекция (отображение "вложение"):** Разные элементы переходят в разные. Формально: если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$. (Можно проверить так: $f(x_1) = f(x_2) => x_1 = x_2$).
  - *Интуиция:* Ничто не склеивается.
- **Сюръекция (отображение "на"):** Образ всего X совпадает со всем Y. Формально: $f(X) = Y$. То есть для любого $y \in Y$ найдется $x \in X$ такой, что $f(x) = y$.
  - *Интуиция:* Все элементы Y используются.
- **Биекция:** Отображение одновременно инъективно и сюръективно. Это взаимно однозначное соответствие между X и Y.

4.3. Композиция отображений

Если $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, то можно построить новое отображение $g \circ f : X \to Z$ по правилу: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.
🔍 *Интуиция:* Цепочка преобразований.

4.4. Обратное отображение

Если $f : X \to Y$ — биекция, то можно определить отображение $f^{-1} : Y \to X$, которое каждому $y \in Y$ ставит в соответствие тот **единственный** элемент $x \in X$, для которого $f(x) = y$.

- **Важное свойство:** $f^{-1} \circ f = id_X$ (тождественное отображение на X) и $f \circ f^{-1} = id_Y$.

Вопросы для самопроверки (Конспект 1)

1. Сформулируйте аксиому непрерывности в данной формулировке. Почему она гарантирует отсутствие "дырок" на числовой прямой?
2. Докажите, что если множество E имеет максимальный элемент $\max E$, то $\sup E = \max E$.
3. Пусть $E = \{1 - \frac{1}{n} : n \in N\}$. Найдите $\sup E$ и $\inf E$. Докажите свой ответ, используя критерий точной верхней грани.
4. Докажите, используя аксиому непрерывности, что для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует натуральное n такое, что $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (следствие леммы Архимеда).
5. Приведите пример отображения $f : N \to N$, которое:
   a) инъективно, но не сюръективно.
   b) сюръективно, но не инъективно.
   c) биективно.
6. Пусть $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ — биекции. Докажите, что $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
7. **На понимание аксиом:** Можно ли на множестве рациональных чисел **Q** определить отношение порядка, удовлетворяющее аксиомам O1-O4? Выполняется ли для **Q** аксиома непрерывности? (Рассмотрите множества $A = \{x \in Q : x^2 < 2\}$ и $B = \{x \in Q : x^2 > 2\}$).