

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая геометрия**

по направлению:

подготовки:

03.03.01 «Прикладная математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
09.03.04 «Программная инженерия»,
11.03.04 «Электроника и нанoeлектроника»,
16.03.01 «Техническая физика»,
19.03.01 «Биотехнология»

физтех-школы:

ФАКТ, ФЭФМ, ФПМИ, ФБМФ, ФРКТ, ВШПИ, ПИШ ФАЛТ

кафедра:

высшей математики

курс:

1

семестр:

1

лекции — 30 часов

Экзамен — 1 семестр

практические (семинарские)

занятия — 30 часов

лабораторные занятия — нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 18 часов

Программу составили:

к. ф.-м. н., доцент А. Н. Бурмистров

к. ф.-м. н., доцент О. К. Поддипский

к. ф.-м. н., доцент Д. А. Степанов

к. п. н., доцент Д. А. Терёшин

к. ф.-м. н., доцент И. А. Чубаров

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 10 апреля 2025 г.

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Направленные отрезки и векторы, линейные операции над ними. Свойства линейных операций. Коллинеарность и компланарность векторов. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь линейной зависимости с коллинеарностью и компланарностью векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Действия с векторами в координатах.
2. Определения общей декартовой и прямоугольной (ортонормированной) системы координат. Матрица перехода и ее основное свойство. Изменение координат вектора при замене базиса. Изменение координат точки при переходе к новой системе координат. Формулы перехода от одной прямоугольной системы координат на плоскости к другой.
3. Скалярное произведение и его свойства. Ортогональные проекции. Выражение скалярного произведения в координатах, выражение в ортонормированном базисе. *Матрица Грама*¹. Формулы для определения расстояния между точками и угла между векторами.
4. Ориентация на плоскости и в пространстве. Смешанное и векторное произведения векторов, их свойства и геометрический смысл. Выражение смешанного и векторного произведений через координаты векторов. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Формула двойного векторного произведения. Биортогональный (взаимный) базис.
5. Алгебраические линии и поверхности, их порядок. Теорема об инвариантности порядка линии на плоскости (поверхности в пространстве) при переходе к новой декартовой системе координат.
6. Векторные и координатные формы уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Условия параллельности (или совпадения), перпендикулярности прямых на плоскости, заданных в координатной форме. *Пучок прямых на плоскости*² Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве. Расстояние от точки до прямой на плоскости и в пространстве. Расстояние между двумя прямыми в пространстве.
7. Векторные и координатные формы уравнения плоскости. Условия параллельности (или совпадения) плоскостей, заданных в координатной форме. Расстояние от точки до плоскости в пространстве и расстояние между параллельными плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Прямая как линия пересечения двух плоскостей. *Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых*³. *Связка и пучок плоскостей*⁴.

¹Для всех, кроме потока О.К. Подлипского.

²Для всех, кроме потока Д.А. Терёшина.

³Для потоков О.Г. Подлипской и И.А. Чубарова.

⁴Для потока А.Н. Бурмистрова.

8. Алгебраические линии второго порядка на плоскости, их классификация. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Центр линии второго порядка, центральные и нецентральные линии.
9. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе. *Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат*⁵.
10. *Асимптотические направления и диаметры линий второго порядка*.⁶
11. *Цилиндрические и конические поверхности*⁷. Поверхности вращения. Эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды и конус второго порядка, их основные свойства. Прямолинейные образующие.
12. Отображения и преобразования плоскости. Произведение (композиция) отображений. Взаимно однозначное отображение, обратное отображение. Линейные преобразования плоскости. Координатное представление линейных преобразований плоскости.
13. Аффинные преобразования плоскости и их основные свойства. Геометрический смысл модуля и знака определителя аффинного преобразования плоскости. Аффинная классификация линий второго порядка. Ортогональные преобразования плоскости и их свойства. Разложение аффинного преобразования плоскости в произведение ортогонального преобразования и двух сжатий. *Понятие о группе преобразований*⁸.
14. Алгебраические операции с матрицами. *Элементарные преобразования матриц*⁹. Обратная матрица.
15. Определение детерминанта. Свойства детерминанта. Миноры, алгебраические дополнения. Детерминант произведения матриц. Правило Крамера. Критерий обратимости. Формула для элементов обратной матрицы.

Литература

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Санкт-Петербург : Лань, 2022.
2. Умнов А. Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. — Москва : МФТИ, 2011, <http://www.umnov.ru>.
3. Чезалов В. И. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.
4. Кострикин А. И. Введение в алгебру. В 3 ч. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 2. Линейная алгебра. — Москва : МЦНМО, 2020.

⁵Для потоков А.Н. Бурмистрова, Д.А. Терёшина и И.А. Чубарова.

⁶Для всех, кроме потоков Д.А. Степанова и Д.А. Терёшина.

⁷Для всех, кроме потока Д.А. Терёшина.

⁸Для всех, кроме потока А.Н. Бурмистрова.

⁹Для всех, кроме потока И.А. Чубарова.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. *Беклемышева Л. А., Беклемышев Д. В., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* — Санкт-Петербург : Лань, 2023. (цитируется — С)

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 сентября – 04 октября)

I. Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков. Системы линейных уравнений. Правило Крамера

С: 14.4(3,4); 14.7(5, 9); 14.8*; 15.2(2, 4); 15.5(2, 8, 13); 15.12(4); 15.22(2)*.

Т.1. Пусть все элементы квадратной вещественной матрицы третьего порядка отличны от нуля. Доказать, что все 6 произведений в определителе этой матрицы не могут быть одного знака.

Т.2. Найти все квадратные матрицы второго порядка, перестановочные с любой квадратной матрицей второго порядка.

С: 17.1(2, 4); 17.2(5).

II. Векторы

С: 1.4; 1.6; 1.9; 1.11(2); 1.22; 1.24(1,2); 1.28(1,2); 1.37; 1.50*.

III. Замена базиса и системы координат

С: 4.1; 4.5; 4.8; 4.19; 4.25*.

IV. Скалярное, векторное и смешанное произведения

С: 2.7(2); 2.10(2, 3); 2.11; 2.21; 2.27(2); 2.30; 2.32; 2.42*; 3.1(2); 3.2(1); 3.8; 3.9; 3.12; 3.13(1, 2); 3.19(2); 3.20; 3.24*; 3.26(3)*; 3.32.

Т.3. Тройка векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} такова, что $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Обязательно ли это тройка компланарных векторов?

Т.4. Решить уравнение $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] = -\frac{1}{3}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{a}$ относительно неизвестного вектора \mathbf{x} , считая вектор \mathbf{a} известным.

Рекомендации по решению

первого домашнего задания по неделям

1 неделя	С: 14.4(3, 4); 14.7(5, 9); 14.8 [*] ; 15.2(2, 4); 15.5(2, 8, 13); 15.12(4); 15.22(2) [*] ; Т.1; Т.2; 17.1(2,4); 17.2(5).
2 неделя	С: 1.4; 1.6; 1.9; 1.11(2); 1.22; 1.24(1,2); 1.28(1, 2); 1.37; 1.50 [*] .
3 неделя	С: 4.1; 4.5; 4.8; 4.19; 4.25 [*] ; 2.7(2); 2.10(2, 3); 2.11; 2.21; 2.27(2); 2.30; 2.32; 2.42 [*] .
4 неделя	С: 3.1(2); 3.2(1); 3.8; 3.9; 3.12; 3.13(1, 2); 3.19(2); 3.20; 3.24 [*] ; 3.26(3) [*] ; 3.32; Т.3; Т.4.

39 + 7 [*]

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 03–08 ноября)

I. Прямая на плоскости

С: 5.2; 5.4; 5.7(2); 5.8(2, 3); 5.11; 5.16; 5.19; 5.29; 5.34; 5.36; 5.53; 5.56^{*}.

II. Плоскость и прямая в пространстве

С: 6.1(1,3, 4); 6.2(1, 2, 3); 6.3(2); 6.4(1); 6.10(1, 4); 6.11(3, 8); 6.15; 6.18(2,5); 6.20(2); 6.26^{*}; 6.28; 6.29; 6.37^{*}; 6.68(2); 6.74(1, 2, 3, 4, 5).

III. Линии второго порядка

С: 7.25(5, 7); 7.26(5); 7.27^{*}; 7.38(1); 7.40(2); 7.49(1)^{*}; 7.54(3); 7.56^{*}; 7.62(2, 4); 8.1(1, 3); 8.6(1); 8.9(1, 4); 8.14(1); 8.24(4); 8.25(1); 8.26(3); 8.28(2, 4); 9.1(4); 9.4(5, 6); 9.15(1); 9.19(2).

Рекомендации по решению

второго домашнего задания по неделям

1 неделя	С: 5.2; 5.4; 5.7(2); 5.8(2, 3); 5.11; 5.16; 5.19; 5.29; 5.34; 5.36; 5.53; 5.56 [*] ; 6.1(1, 3, 4); 6.2(1, 2, 3); 6.3(2); 6.4(1); 6.10(1, 4).
2 неделя	С: 6.11(3, 8); 6.15; 6.18(2,5); 6.20(2); 6.26 [*] ; 6.28; 6.29; 6.37 [*] ; 6.68(2); 6.74(1, 2, 3, 4, 5).
3 неделя	С: 7.25(5, 7); 7.26(5); 7.27 [*] ; 7.38(1); 7.40(2); 7.49(1) [*] ; 7.54(3); 7.56 [*] ; 7.62(2, 4).
4 неделя	С: 8.1(1,3); 8.6(1); 8.9(1, 4); 8.14(1); 8.24(4); 8.25(1); 8.26(3); 8.28(2, 4); 9.1(4); 9.4(5, 6); 9.15(1); 9.19(2).

42 + 6 [*]

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 08–13 декабря)

I. Поверхности второго порядка

С: 10.3(2,6, 8); 10.9(1, 2, 4); 10.14(3); 10.15; 10.22^{*}; 10.32; 10.38; 10.40; 10.65; 10.81.

Т.1. Будет ли линия пересечения двух поверхностей второго порядка линией второго порядка?

II. Аффинные преобразования плоскости

С: 12.28(1, 3); 12.33; 12.38(1); 12.39(1); 12.40(1, 2); 12.43(5); 12.53(1, 6); 12.55(2,8); 12.69(2, 3); 9.13(2); 12.82 (для преобразования 12.81(5,7)).

III. Определители n -го порядка

С: 14.12(2); 14.15; 14.21(3, 4); 14.22(3); 14.23(1, 2, 11,16); 14.24(2, 7); 14.33.

Т.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$. Найти $\det(A^{51} + A^{49} - 2 \cdot A^{50})$.

IV. Операции с матрицами. Обратная матрица

С: 15.11(4, 5, 6); 15.18(1); 15.22(2, 3); 15.24(2,3); 15.45(1, 4, 8); 15.48(3,6); 15.56^{*}.

Т.3^{*}. Опишите такие обратимые (вещественные) матрицы A порядка n , что все элементы как матрицы A , так и обратной матрицы A^{-1} неотрицательны.

Рекомендации по решению

третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	С: 10.3(2, 6, 8); 10.9(1, 2, 4); 10.14(3); 10.15; 10.22 [*] ; 10.32; 10.38; 10.40; 10.65; 10.81; Т.1.
2 неделя	С: 12.28(1, 3); <u>12.33</u> ; 12.38(1); 12.39(1); 12.40(1, 2); 12.43(5); 12.53(1, 6); 12.55(2,8); 12.69(2, 3); 9.13(2); 12.82 (для преобразования 12.81(5, <u>7</u>)).
3 неделя	С: 14.12(2); 14.15; 14.21(3, 4); 14.22(3); 14.23(1, 2, 11, 16); 14.24(2, 7) 14.33; Т.2.
4 неделя	С: 15.11(4, 5, 6); 15.18(1); 15.22(2, 3); 15.24(2, 3); 15.45(1, 4, 8); 15.48(3,6); 15.56 [*] ; Т.3 [*] .

36 + 3^{*}