Тюленев А.И. Математический анализ. 02.09.2025

Множество

Это понятие, которому невозможно дать определение.
Множество можно задать двумя способами:

1. перечислением элементов:
   $A = \{a, b, c, d\}$
2. указанием некоторого свойства:
   $X = \{y : \text{некоторое свойство}\}$

Операции

1. $A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ – пересечение.
2. $A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$ – объединение.
3. $A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ – разность.
4. $A \subset B \Leftrightarrow \forall a (a \in A \Rightarrow a \in B)$ – является подмножеством.
5. Пусть X, Y – непустые множества.
   $X \times Y := \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$ – декартово произведение.

Соответствие

Определение

Пусть X, Y – непустые множества.
Задать соответствие f – значит выделить подмножество G_f в декартовом произведении $X \times Y$.

G_f – график соответствия.
$D_f = \{x \in X : (\exists y \in Y : (x, y) \in G_f)\}$ – область определения соответствия f.
В таком случае говорят, что y поставлен в соответствие x.
$E_f = \{y \in Y : (\exists x \in X : (x, y) \in G_f)\}$ – множество значений соответствия f.

Отображение

Определение

$$\begin{cases} D_f = X \\ \forall x \in D_f, \exists! y \in Y : (x, y) \in G_f \end{cases} \Leftrightarrow \text{Задано отображение } f : X \to Y$$

При этом y обозначают $f(x)$.

Инъективное отображение

Отображение $f : X \to Y$ называется инъективным (или инъекцией), если для него выполнено:

$$(\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$$

Сюръективное отображение

Отображение $f : X \to Y$ назывется сюръективным (или сюръекцией), если для него выполнено:

$$(\forall y \in Y, \exists x \in X : (x, y) \in G_f) \Leftrightarrow (E_f = Y)$$

Композиция отображений

Пусть заданы отображения $f : X \to Y, g : Y \to Z$, где X, Y, Z - непустые множества.
Назовём композицией отображений g, f отображение $g \circ f : X \to Z$:
$g \circ f(x) = g(f(x)), \forall x \in X$

Тождественное отображение

Отображение $f : X \to X : f(x) = x, \forall x \in X$ называется тождественным отображением и обозначается id_X.

Обратное отображение

Пусть задано отображение $f : X \to Y$. Будем говорить, что отображение $g : Y \to X$ является обратным к f и писать $g = f^{-1}$, если выполнены все условия:

1. $(\forall x \in X) \Rightarrow (g(f(x)) = x)$, что эквивалентно $g \circ f = id_X$
2. $(\forall y \in Y) \Rightarrow (f(g(y)) = y)$, что эквивалентно $f \circ g = id_Y$.

Отображение, для которого существует обратное отображение, является инъективным и сюръективным одновременно.

Доказательство

Пусть задано отображение $f : X \to Y$ такое, что $g = f^{-1}$ существует.

1. **Предположим, что f не является инъективным отображением.**
Тогда $\exists x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$.

Поскольку $g = f^{-1}$ является обратным отображением к f, $(\forall x \in X) \Rightarrow (g(f(x)) = x)$.
Отсюда $g(f(x_1)) = x_1, g(f(x_2)) = x_2$. (1)

Поскольку $g = f^{-1}$ является отображением, $\forall y \in Y, \exists! x \in X : (y, x) \in G_g$. **(2)**
Пусть $y = f(x_1) = f(x_2)$.
Поскольку f является отображением и $x_1, x_2 \in X$, выполняется $y \in Y$.
Значит, в силу (2) $\exists! x \in X : x = g(y)$.

В силу (1) верны следующие утверждения:
а) $x = g(y) = g(f(x_1)) = x_1$;
б) $x = g(y) = g(f(x_2)) = x_2$.

Из этого следует, что $x_1 = x = x_2$. Но $x_1 \neq x_2$ – необходимое условие предположения.
Получили противоречие. Следовательно, f – инъективное отображение.

2. **Предположим, что f не является сюръективным отображением.**
Тогда $\exists y \in Y : (\forall x \in X) \Rightarrow ((x, y) \notin G_f)$.
Что эквивалентно $\exists y \in Y : (\forall x \in X) \Rightarrow (f(x) \neq y)$.

Поскольку $g = f^{-1}$ является обратным отображением к f, $(\forall y \in Y) \Rightarrow (y = f(g(y)))$
Поскольку $g = f^{-1}$ является отображением, $\forall y \in Y,\ \exists! x \in X : x = g(y)$

Значит, $(\forall y \in Y) \Rightarrow (\exists! x \in X : y = f(x))$.
Следовательно, $\nexists y \in Y : (\forall x \in X) \Rightarrow (f(x) \neq y)$.
Противоречие. Значит, f – сюръективное отображение.

Действительные числа

[От автора конспекта, с опорой на лектора] Что такое аксиома?

Эволюция понятия "аксиома" прошла путь от:
"Самоочевидная истина о мире" (Евклид) $\rightarrow$ "Утверждение, принимаемое без доказательств" (упрощённое школьное определение) $\rightarrow$ "Формула формальной системы, задающая правила логической игры и определяющая класс объектов" (современное, точное определение).

Определение

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ – это множество, на котором заданы два отображения:

1. $'+':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – сложение;
2. $'\cdot':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – произведение;

и отношение порядка $\leq$, удовлетворяющие следующим аксиомам:

1. $a+b=b+a,\ \forall a,b\in\mathbb{R}$
2. $(a+b)+c=a+(b+c),\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$
3. $\exists 0\in\mathbb{R}:0+a=a,\forall a\in\mathbb{R}$
4. $\forall a\in\mathbb{R},\exists(-a)\in\mathbb{R}:(-a)+a=0$
5. $a\cdot b=b\cdot a,\ \forall a,b\in\mathbb{R}$
6. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c),\ \forall a,b,c\in\mathbb{R}$
7. $\exists 1\neq 0:a\cdot 1=a,\ \forall a\in\mathbb{R}$
8. $\forall a\in\mathbb{R}:a\neq 0,\exists$ обратный элемент $a^{-1}:a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$
9. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\forall a,b,c\in\mathbb{R}$
10. $a\leq b\vee b\leq a,\forall a,b\in\mathbb{R}$
11. $\forall a,b,c\in\mathbb{R},(a\leq b\wedge b\leq c)\Rightarrow(a\leq c)$
12. если $a\leq b,$ то $a+c\leq b+c,\forall a,b,c\in\mathbb{R}$
13. если $a\leq b,$ то $a\cdot c\leq b\cdot c,\forall a,b,c\in\mathbb{R}:c\geq 0$
14. $(a\leq b\wedge b\leq a)\Leftrightarrow(a=b),\forall a,b\in\mathbb{R}$
15. аксиоме непрерывности.

Аксиома непрерывности

Пусть A,B – непустые числовые множества.
Будем говорить, что A располагается левее B, если $a\leq b,(\forall a\in A\wedge\forall b\in B)$.
Тогда аксиома непрерывности гласит, что:
$\forall A,B:(A \text{ располагается левее } B),\exists c\in\mathbb{R}:a\leq c\leq b,(\forall a\in A\wedge\forall b\in B)$

Замечание

Множество $\mathbb{Q}$ удовлетворяет аксиомам 1-14, но не удовлетворяет аксиоме непрерывности.

Доказательство

$A := \{x \in Q : x > 0, x^2 < 2\}$
$B := \{x \in Q : x > 0, x^2 > 2\}$

Заметим, что A располагается левее B.
Предположим, что $\exists c \in Q : a \leq c \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B$.
Тогда $(c^2 \geq 2 \wedge c^2 \leq 2) \Leftrightarrow (c^2 = 2)$.

Предположим, что $c \in \mathbb{Q}$.
Тогда $\exists m, n \in \mathbb{N} : c = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь.

$\frac{m^2}{n^2} = c^2 = 2$.
$(m^2 = 2n^2) \Rightarrow (m^2 - \text{чётное}) \Rightarrow (m - \text{чётное})$.

Пусть $m = 2k^2, k \in Q$.
$\frac{m^2}{n^2} = \frac{4k^2}{n^2} = 2$.
$(4k^2 = 2n^2) \Rightarrow (n^2 = 2k^2) \Rightarrow (n^2 - \text{чётное}) \Rightarrow (n - \text{чётное})$.

$(m, n - \text{чётные}) \Rightarrow (\frac{m}{n} \text{ сократима})$.
Противоречие. Следовательно, $c \notin Q$

Промежутки

Скажем, что $(a < b) \Leftrightarrow (a \leq b \wedge a \neq b)$.
Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$.

1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ – отрезок.
2. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ – интервал.
3. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ – открытый справа полуинтервал.
4. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ – открытый слева полуинтервал.