2. Эквивалентность принципов непрерывности

Этот конспект показывает, что разные интуитивные представления о полноте вещественной прямой — это одно и то же свойство, выраженное в разных формах.

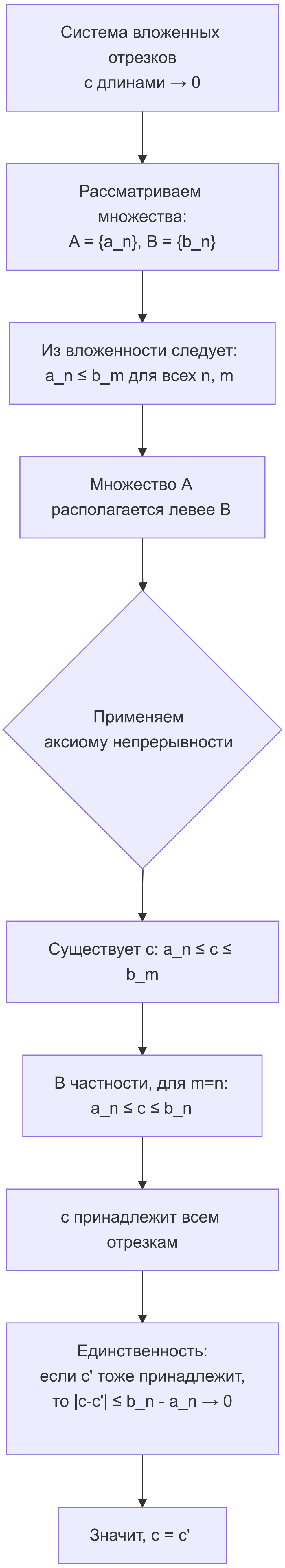
---

1. Теорема Кантора о вложенных отрезках

Теорема (Кантора):
Для любой системы вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ (т.е. $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$), у которых длины $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$, существует единственная точка $c \in R$, принадлежащая всем отрезкам системы.

Доказательство:

1. **Логическая схема доказательства:**



2. **Доказательство:**
   - **Существование:**
     Рассмотрим множества $A = \{a_n\}$ (левые концы) и $B = \{b_n\}$ (правые концы). Из вложенности отрезков следует, что для любых $n, m \in N$ выполняется $a_n \leq b_m$ (любой левый конец лежит левее любого правого). Значит, A располагается левее B.

По **аксиоме непрерывности** существует число $c \in R$ такое, что $a_n \le c \le b_m$ для всех n, m.
В частности, при $m = n$ получаем $a_n \le c \le b_n$ для всех n, то есть c принадлежит каждому отрезку $[a_n, b_n]$.

- **Единственность:**
  Предположим, есть другая точка c', также принадлежащая всем отрезкам. Тогда для любого n верно: $|c - c'| \le b_n - a_n$.
  Поскольку $b_n - a_n \to 0$, единственное неотрицательное число, которое меньше любой сколь угодно малой положительной величины — это ноль. Значит, $|c - c'| = 0$, откуда $c = c'$. ∎

---

2. Эквивалентность трёх формулировок непрерывности

Докажем, что следующие три утверждения эквивалентны:

1. **(I) Аксиома непрерывности**: $\forall A, B \subset R, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset : (A \text{ левее } B) \Rightarrow \exists c \in R : a \le c \le b, \forall a \in A, b \in B$.
2. **(II) Принцип супремума**: Всякое непустое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань.
3. **(III) Принцип Кантора**: Для любой системы вложенных отрезков с длинами, стремящимися к нулю, существует единственная общая точка.

Доказательство эквивалентности:

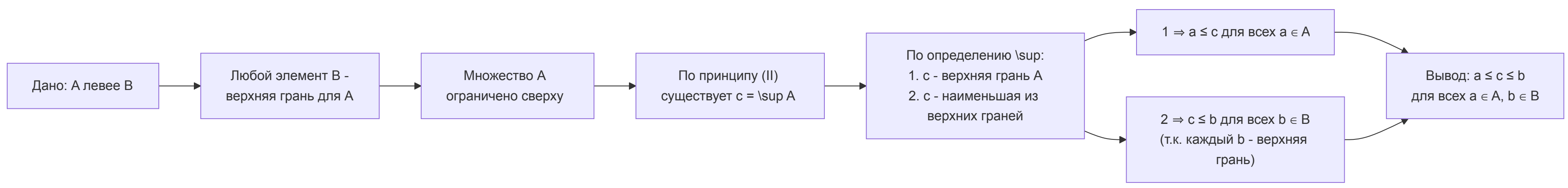
Мы уже знаем:

- $(I) \Rightarrow (II)$ (доказано в Конспекте 1 как теорема о существовании \sup).
- $(I) \Rightarrow (III)$ (только что доказанная теорема Кантора).

Осталось доказать $(II) \Rightarrow (I)$ и $(III) \Rightarrow (II)$, чтобы цепочка замкнулась.

Доказательство $(II) \Rightarrow (I)$:

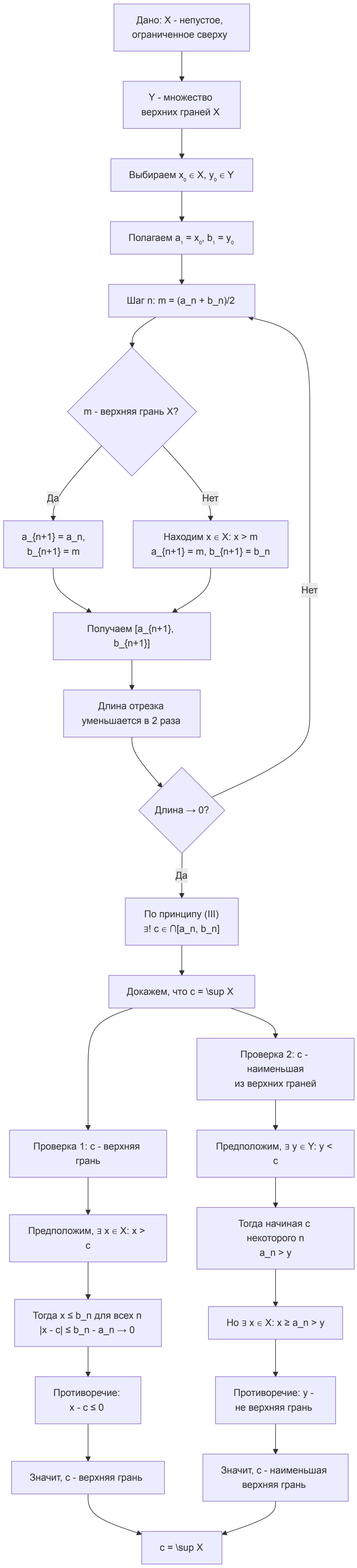
1. **Логическая схема доказательства:**



2. **Доказательство:**
   Пусть верен принцип супремума (II). Возьмём множества A и B, где A левее B. Тогда любой элемент $b \in B$ является верхней гранью для A. Значит, A ограничено сверху. По принципу (II) существует $c = \sup A$.
   По определению точной верхней грани:
   - c — верхняя грань A ⇒ $a \le c$ для всех $a \in A$.
   - c — наименьшая верхняя грань ⇒ $c \le b$ для всех $b \in B$ (так как каждый b — верхняя грань).
     Получаем $a \le c \le b$ для всех $a \in A, b \in B$, что и есть утверждение (I). ∎

Доказательство $(III) \Rightarrow (II)$:

1. **Логическая схема доказательства:**



2. **Доказательство:**
Пусть верен принцип Кантора (III). Возьмём непустое ограниченное сверху множество X. Пусть Y — множество всех верхних граней X (оно непусто). Выберем $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$. Положим $a_1 = x_0$, $b_1 = y_0$.
Будем строить систему вложенных отрезков методом деления пополам:

- На шаге n имеем отрезок $[a_n, b_n]$, где a_n не является верхней гранью X (есть элемент X ≥ a_n), а $b_n \in Y$.
- Пусть $m = (a_n + b_n)/2$.
  - Если m — верхняя грань X, то положим $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = m$.
  - Если m не является верхней гранью, то найдётся $x \in X$ такой, что $x > m$. Положим $a_{n+1} = m$, $b_{n+1} = b_n$.
- В любом случае длина отрезка уменьшается в 2 раза: $b_{n+1} - a_{n+1} \leq (b_n - a_n)/2$. Значит, $b_n - a_n \to 0$.

По принципу Кантора (III) существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Докажем, что $c = \sup X$.

- c **— верхняя грань** X**:** Предположим, что существует $x \in X$ такой, что $x > c$. Так как b_n — верхние грани, то $x \leq b_n$. Тогда $0 < x - c \leq b_n - a_n \to 0$ → противоречие. Значит, $x \leq c$ для всех $x \in X$.
- c **— наименьшая верхняя грань:** Предположим, что существует верхняя грань $y \in Y$ такая, что $y < c$. Так как $a_n \to c$ и $c > y$, то начиная с некоторого n будет $a_n > y$. Но по построению для a_n существует элемент $x \in X$ такой, что $x \geq a_n > y$. Значит, y не является верхней гранью — противоречие. ∎

Теперь цепочка эквивалентности замкнута: $(I) \Leftrightarrow (II)$ и $(I) \Leftrightarrow (III)$.

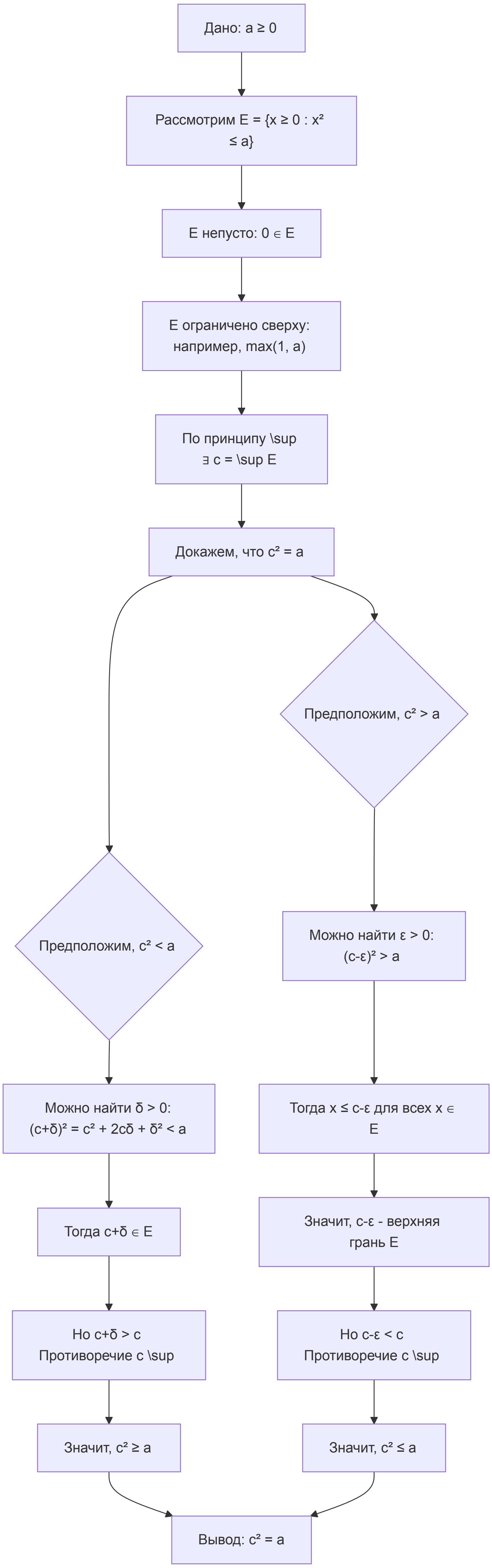
---

3. Пример применения: Существование квадратного корня

Теорема: Для любого $a \geq 0$ существует единственное число $x \geq 0$ такое, что $x^2 = a$.

Доказательство (с использованием принципа супремума):

1. **Логическая схема доказательства:**



2. **Доказательство:**
Пусть $a \geq 0$. Рассмотрим множество $E = \{x \in R : x \geq 0, x^2 \leq a\}$.
   - E непусто ($0 \in E$) и ограничено сверху (например, числом $max(1, a)$).
   - По принципу супремума существует $c = \sup E$.
   - Докажем, что $c^2 = a$ от противного.

- Если $c^2 < a$, то можно подобрать $\delta > 0$ так, что $(c+\delta)^2 < a$ (например, $\delta = (a - c^2)/(2c+1)$). Тогда $c + \delta \in E$, но $c + \delta > c$ — противоречие с тем, что c — верхняя грань.
- Если $c^2 > a$, то можно подобрать $\varepsilon > 0$ так, что $(c-\varepsilon)^2 > a$. Тогда для всех $x \in E$ будет $x^2 \leq a < (c-\varepsilon)^2 \Rightarrow x < c - \varepsilon$. Значит, $c - \varepsilon$ — верхняя грань E, но $c - \varepsilon < c$ — противоречие с тем, что c — точная верхняя грань.

- Следовательно, $c^2 = a$. ∎

Вопросы для самопроверки (Конспект 2)

1. Сформулируйте три эквивалентных принципа непрерывности вещественных чисел.
2. Докажите, что из принципа Кантора следует принцип супремума (кратко воспроизведите ключевые шаги построения системы отрезков).
3. Приведите пример системы вложенных отрезков с рациональными концами, пересечение которой пусто. Что это говорит о множестве рациональных чисел?
4. **На понимание доказательства:** В доказательстве существования корня, почему мы рассматриваем множество $E = \{x \geq 0 : x^2 \leq a\}$, а не $x \geq 0 : x^2 \geq a$?
5. Докажите, что уравнение $x^3 = 3$ имеет решение на отрезке $[1, 2]$, используя метод деления отрезка пополам и принцип Кантора.
