Тюленев А.И. Математический анализ. 03.09.2025

Расширенная числовая прямая

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$
Арифметические операции на этом множестве не определены.
Определено отношение порядка: $-\infty < c < +\infty, \forall c \in \mathbb{R}$

Верхние и нижние грани числовых множеств

Пусть X – непустое числовое множество.

Верхняя грань

Определение

Будем говорить, что $M \in \mathbb{R}$ является верхней гранью множества X, если:

$$(\forall x \in X) \Rightarrow (x \leq M)$$

Нижняя грань

Определение

Будем говорить, что $m \in \mathbb{R}$ является нижней гранью множества X, если:

$$(\forall x \in X) \Rightarrow (x \geq m)$$

Ограниченное сверху множество

Множество называется ограниченным сверху, если существует конечная верхняя грань.
E ограничено сверху $\Leftrightarrow$ $(\exists M \in \mathbb{R} : (\forall x \in E) \Rightarrow (x \leq M))$.
E неограничено сверху $\Leftrightarrow$ $(\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in E : x > M)$.

Ограниченное снизу множество

Множество называется ограниченным снизу, если существует конечная нижняя грань.
E ограничено снизу $\Leftrightarrow$ $(\exists m \in \mathbb{R} : (\forall x \in E) \Rightarrow (x \geq m))$.
E неограничено снизу $\Leftrightarrow$ $(\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in E : x < m)$.

Ограниченное множество

Множество называется неограниченным, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Точная верхняя грань

Пусть $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$.
Будем говорить, что $M \in \mathbb{R}$ является точной верхней гранью E (супремумом E) и обозначать $M = \sup E$, если выполняются два условия:

1. M – верхняя грань E.
2. $\forall M' \in \mathbb{R} : (M' - \text{верхняя грань } E) \Rightarrow (M' \geq M)$
   Если множество E неограничено сверху, то его супремум считается равным $+\infty$.

Теорема

Для любого ограниченного сверху непустого числового множества $E \subset \mathbb{R}$ супремум существует и единственный.

Доказательство

1. **Существование**
   Поскольку E ограничено сверху, то существует хотя бы одна верхняя грань E.
   Пусть B – множество всех верхних граней E.
   $B \neq \emptyset$, E располагается левее B.
   Следовательно, по аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R}$, разделяющее эти множества.
   $(*)\ a \leq c, (**)\ c \leq b, \forall a \in E, \forall b \in B$
   Покажем, что c – супремум.
   Пункт 1 определения супремума выполнен, поскольку в силу $(*)$ c – верхняя грань.
   В силу $(**)$ выполнен пункт 2 определения супремума, поскольку B – множество всех верхних граней.
2. **Единственность**
   Пусть M_1, M_2 – различные супремумы множества E.
   $M_1 = \sup E$
   В силу пункта 2 определения супремума $\forall M' \in \mathbb{R} : (M' - \text{верхняя грань } E) \Rightarrow (M' \geq M_1)$
   Но M_2 тоже супремум $\Rightarrow$ в силу пункта 1 определения супремума M_2 является верхней гранью $\Rightarrow M_2 \geq M_1$.
   Аналогично доказывается, что $M_1 \geq M_2$.

$$\begin{cases} M_2 \geq M_1 \\ M_1 \geq M_2 \Rightarrow \text{Противоречие.} \\ M_1 \neq M_2 \end{cases}$$

Точная нижняя грань

Пусть $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$.
Будем говорить, что $m \in \mathbb{R}$ является точной нижней гранью E (инфинумом E) и обозначать $m = \inf E$, если выполняются два условия:

1. m – нижняя грань E.
2. $\forall m' \in \mathbb{R} : (m' - \text{нижняя грань } E) \Rightarrow (m' \leq m)$
   Если множество E неограничено снизу, то его инфинум считается равным $-\infty$.

Теорема

Для любого ограниченного снизу непустого числового множества $E \subset \mathbb{R}$ инфинум существует и единственный.

Доказывается аналогично.

Точная верхняя грань (в общем виде)

Теорема. Если E – непустое числовое множество, $M \in \mathbb{R}$ – супремум E, если выполняются два условия:

1. $a \leq M, \forall a \in E$
2. $\forall M' < M, \exists \tilde{a} \in E : M' < \tilde{a} \leq M$

Точная нижняя грань (в общем виде)

Теорема. Если E – непустое числовое множество, $m \in \mathbb{R}$ – инфинум E, если выполняются два условия:

1. $a \geq m, \forall a \in E$
2. $\forall m' > m, \exists \tilde{a} \in E : m \leq \tilde{a} < m'$

Максимальный и минимальный элемент

Максимум

Пусть $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$.
Тогда назовём $M \in \mathbb{R}$ максимумом множества E и писать $M = \max E$, если выполняются оба условия:

1. M – верхняя грань E
2. $M \in E$

Минимум

Пусть $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$.
Тогда назовём $m \in \mathbb{R}$ минимумом множества E и писать $m = \min E$, если выполняются оба условия:

1. m – нижняя грань E
2. $m \in E$

Теорема. $E \subset \mathbb{R}, E \neq \emptyset$.
Если $\exists \min E, \text{ то } \min E = \inf E$.
Если $\exists \max E, \text{ то } \max E = \sup E$.
Доказательство тривиально.

Лемма Архимеда

Множество натуральных чисел неограничено сверху.

Доказательство

Предположим противное, что $\mathbb{N}$ ограничено сверху.
Тогда $\exists M \in \mathbb{R} : M = \sup \mathbb{N}$.

Тогда в силу пункта 2 определения супремума:
$\forall M' < M, \exists n' \in \mathbb{N} : n' > M'$

Положим $(M' = M - 1) \Rightarrow (\exists n' \in \mathbb{N} : n' > M - 1) \Rightarrow (\exists n' \in \mathbb{N} : n' + 1 > M) \Rightarrow (\exists n \in \mathbb{N} : n > M)$.
Но по пункту 1 определения супремума $n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.
Противоречие.

Последовательность отрезков

Пусть $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется $a_n \leq b_n$ и зафиксирован отрезок $[a_n, b_n]$.
Тогда будем говорить, что задана последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$

Последовательность вложенных отрезков

Будем говорить, что последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью вложенных отрезков, если $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$.

Принцип вложенных отрезков Кантора

Любая последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ имеет хотя бы одну общую точку.
$(\exists c \in \mathbb{R} : c \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (\text{пересечение непусто})$.
$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.

Доказательство

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ – левые концы.
$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$ – правые концы.

Покажем, что A располагается левее B: $\forall a \in A, \forall b \in B, a \leq b$.
Достаточно доказать, что $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, a_n \leq b_m$
Будем считать, что $m > n$ ($m = n$ очевидно).
Отрезки вложенные $(a_{n+1} \geq a_n) \Rightarrow (a_m \geq \dots \geq a_n)$ (по индукции).
Но $[a_m, b_m]$ – отрезок, из чего следует $a_n \leq \dots \leq a_m \leq b_m$.

В силу аксиомы 15 существует $c \in \mathbb{R}$: c разделяет A и B.
$a_n \leq c \leq b_m, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$.
$c \in [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}$.
$c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n], \forall n \in \mathbb{N}$.

Стягивающаяся последовательность вложенных отрезков

[От автора конспекта] Стягивающейся называется такая последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, отрезки которой при стремлении n к ∞ имеют длину, стремящуюся к 0.
$\forall l \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : |a_n - b_n| < \frac{1}{l}$.

Теорема (Кантора)

Стягивающаяся последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ имеет единственную общую точку.

Доказательство

По принципу вложенных отрезков Кантора, $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$.
Предположим, что пересечение состоит из более чем одной точки.

Тогда $\exists c, c' \in \mathbb{R} : c \neq c'$, $(c, c' \in \{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty})$.
Пусть $c' \geq c$. Заметим, что $[c, c'] \in \{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$

По лемме Архимеда, множество натуральных чисел неограничено сверху.
Из этого следует, что $(\exists l \in \mathbb{N} : l > \frac{1}{|c-c'|}) \Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N} : \frac{1}{l} < |c - c'|)$

По определению стягивающейся последовательности вложенных отрезков:
$\forall l \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : |a_n - b_n| < \frac{1}{l}$

Тогда в силу леммы Архимеда $\exists n \in \mathbb{N} : |a_n - b_n| < |c - c'|$.
Но поскольку $([c, c'] \subset [a_n, b_n]) \Rightarrow (|a_n - b_n| \geq |c - c'|)$

$$\begin{cases} \exists n \in \mathbb{N} \\ |a_n - b_n| < |c - c'| \\ |a_n - b_n| \geq |c - c'| \end{cases} \Rightarrow \text{Противоречие.}$$