Зухба А.В. Дискретная математика. 05.09.2025

Комбинаторика

Правило произведения

Если необходимо выбрать пару объектов $(a, b) : a \in A, b \in B$. a можно выбрать из A n способами, а затем b выбрать из B ровно m способами, тогда пару (a, b) можно выбрать $n * m$ способами.

Правило суммы

Пусть $A \cap B = \emptyset$ $|A| = n$, $|B| = m$
Количество способов выбрать элемент из A или B равно $n + m$.

Перестановка

Биекция конечного множества на себя.
$f : X \to Y$ $|X| = n, |Y| = m$
X – 'нумерованные шарики'
Y – 'нумерованные ящики'
n различных шариков по n различным ящикам по 1 шт. в ящик.
$n!$ – количество перестановок.

Сочетание

Из n по k – выбор k-элементного подмножества из n-элементного множества без учёта порядка (без возвращений).
$C_n^k \Leftrightarrow \binom{n}{k}$
$C_n^k = \frac{n*(n-1)*...*(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!*(n-k)!}$

Размещение

Из n по k – упорядоченный выбор k элементов из n-элементного множества (без возвращений).
$A_n^k = n * (n-1) * \ldots * (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Размещения с повторениями

Из n по k – упорядоченный выбор k элементов из n-элементного множества (с возвращением).

$\overline{A_n^k} = \underbrace{n * n * \ldots * n}_{k} = n^k$

Сочетания с повторениями

Из n по k – выбор k-элементного неупорядоченного набора из n-элементного множества (с возвращениями).
$\overline{C_n^k} = C_{k+(n-1)}^{n-1}$

Количество инъективных и сюръективных отображений

$f : X \to Y$ – инъективное отображение.
В ящике не более одного шарика.
$n <= m$
$\underbrace{m * (m-1) * \ldots * (m-n+1)}_{n} = \frac{m!}{(m-n)!} = [m]_n$
$f : X \to Y$ – сюръективное отображение.
$\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$
Нет пустых ящиков.

Неразличимые объекты

Это некоторые объекты a, b, которые в рассматриваемой задаче являются равными.
[Пример от автора конспекта] Ответом на задачу "посчитать количество перестановок множества 'SUCCESS'" будет $\frac{7!}{2! * 3!}$. Подумайте почему.

Принцип Дирихле

Если n кроликов рассажены по m клеткам, то в хотя бы одной клетке не менее $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ кроликов.

Математическая индукция

Если утверждение зависит от $n \in \mathbb{N}$ и

1. верно для некоторого $n = k_0$ (база)
2. из истинности утверждения для $n = k$ следует истинность для $n = k + 1$

то утверждение верно для всех $n \geq k_0, n \in \mathbb{N}$