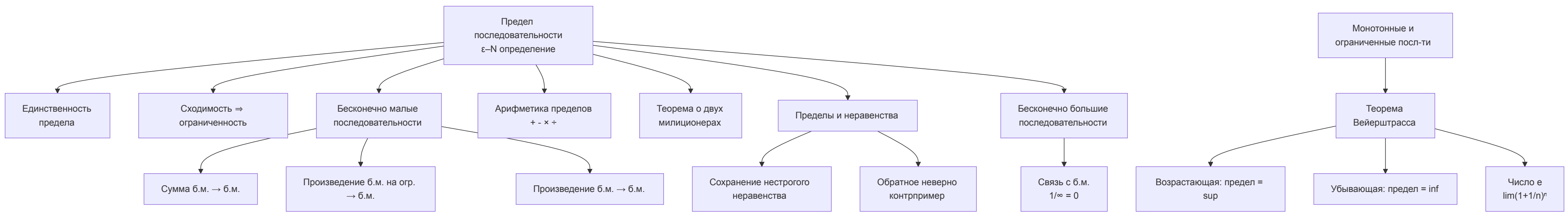
4. Предел числовой последовательности. Теорема Вейерштрасса. Число е



---

1. Предел числовой последовательности

1.1. Интуитивное представление

Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если с ростом номера n члены x_n неограниченно приближаются к a.
Обозначение: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$.

1.2. Строгое определение (ε–N-формализм)

Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

---

2. Единственность предела

Теорема: Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Доказательство (от противного):

1. Предположим, $\lim x_n = a$ и $\lim x_n = b$, где $a \neq b$. Пусть $\varepsilon = \frac{|a-b|}{3} > 0$.
2. По определению:
   - $\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$
   - $\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$
3. Возьмём $n \geq \max(N_1, N_2)$. Тогда:

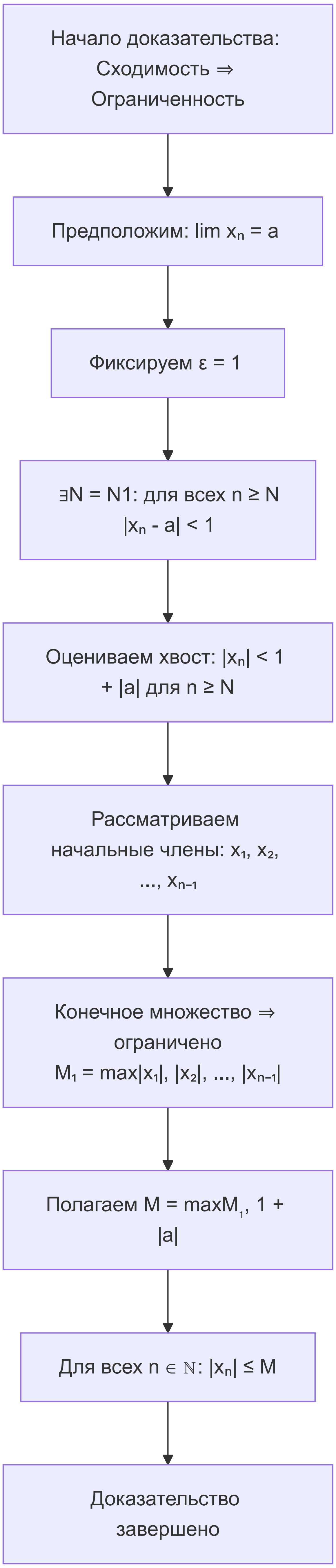
   $$|a-b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a-b| < |a-b|$$

   Противоречие. Значит, $a = b$.

Теорема (Сходимость ⇒ ограниченность)

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена.

Доказательство:



Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. По определению предела:

Для $\varepsilon = 1$ существует номер $N = N(1) \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n \geq N$ выполняется:

$$|x_n - a| < 1.$$

Используя неравенство треугольника, получаем:

$$|x_n| = |x_n - a + a| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a| \quad \text{для всех } n \ge N.$$

Теперь рассмотрим конечное множество первых $N-1$ членов: $\{x_1, x_2, \dots, x_{N-1}\}$. Оно ограничено, так как является конечным. Пусть

$$M_1 = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|\}.$$

Положим $M = \max\{M_1, 1 + |a|\}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$:

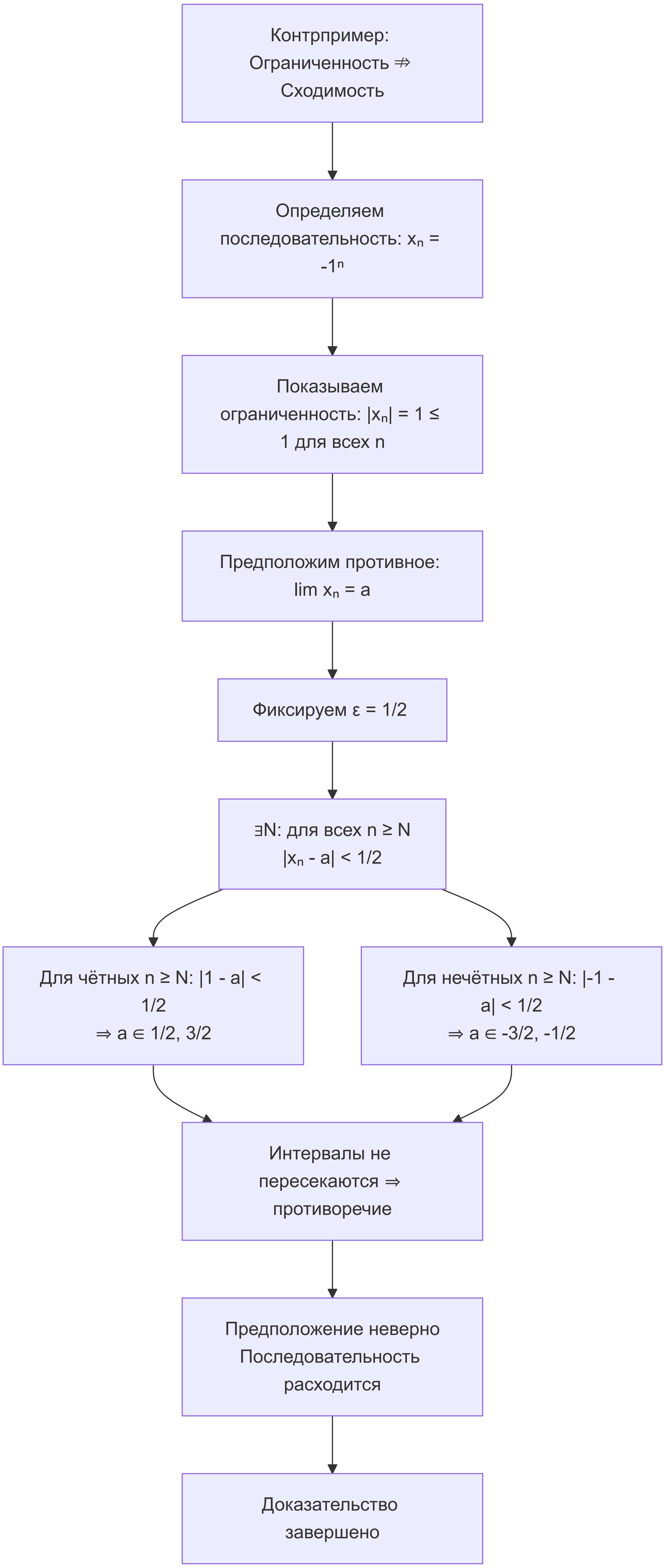
- Если $n < N$, то $|x_n| \le M_1 \le M$.
- Если $n \ge N$, то $|x_n| < 1 + |a| \le M$.

Следовательно, $|x_n| \le M$ для всех $n \in \mathbb{N}$, что означает ограниченность последовательности. ∎

Контрпример (Ограниченность $\nRightarrow$ сходимость)

Последовательность $x_n = (-1)^n$ ограничена, но не сходится.

Доказательство:



1. **Ограниченность:** $|x_n| = |(-1)^n| = 1 \leq 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.
2. **Расходимость:** Предположим, что $\lim_{n\to\infty} (-1)^n = a$. Тогда для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n \geq N$:

$$|(-1)^n - a| < \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим:

- Для чётных $n = 2k \geq N$: $|1 - a| < \frac{1}{2} \Rightarrow a \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
- Для нечётных $n = 2k+1 \geq N$: $|-1 - a| < \frac{1}{2} \Rightarrow a \in (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

Эти интервалы не пересекаются — противоречие. Следовательно, последовательность расходится. ∎

Блок-схема общего утверждения

3. Бесконечно малые последовательности

3.1. Определение

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

3.2. Свойства с доказательствами

1. Сумма конечного числа бесконечно малых — бесконечно малая.

Доказательство:
Пусть $\{\alpha_n^{(1)}\}, \{\alpha_n^{(2)}\}, \dots, \{\alpha_n^{(k)}\}$ — бесконечно малые.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для каждого $i = 1, \dots, k$ найдём N_i такой, что $\forall n \geq N_i \Rightarrow |\alpha_n^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{k}$.
Возьмём $N = \max(N_1, \dots, N_k)$. Тогда для $n \geq N$:

$$|\alpha_n^{(1)} + \dots + \alpha_n^{(k)}| \leq |\alpha_n^{(1)}| + \dots + |\alpha_n^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{k} + \dots + \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

2. Произведение бесконечно малой на ограниченную последовательность — бесконечно малая.

Доказательство:
Пусть $\{\alpha_n\}$ — б.м., $\{b_n\}$ — ограничена ($|b_n| \leq M$).
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для α_n найдём N такой, что $\forall n \geq N \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$.
Тогда для $n \geq N$:

$$|\alpha_n b_n| = |\alpha_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

3. Произведение двух бесконечно малых — бесконечно малая.

Доказательство:
Пусть $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ — б.м.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдём N_1 такой, что $\forall n \geq N_1 \Rightarrow |\alpha_n| < \sqrt{\varepsilon}$.
Найдём N_2 такой, что $\forall n \geq N_2 \Rightarrow |\beta_n| < \sqrt{\varepsilon}$.
Тогда для $n \geq \max(N_1, N_2)$:

$$|\alpha_n \beta_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon.$$

---

4. Арифметические операции с пределами

Теорема: Если $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, то:

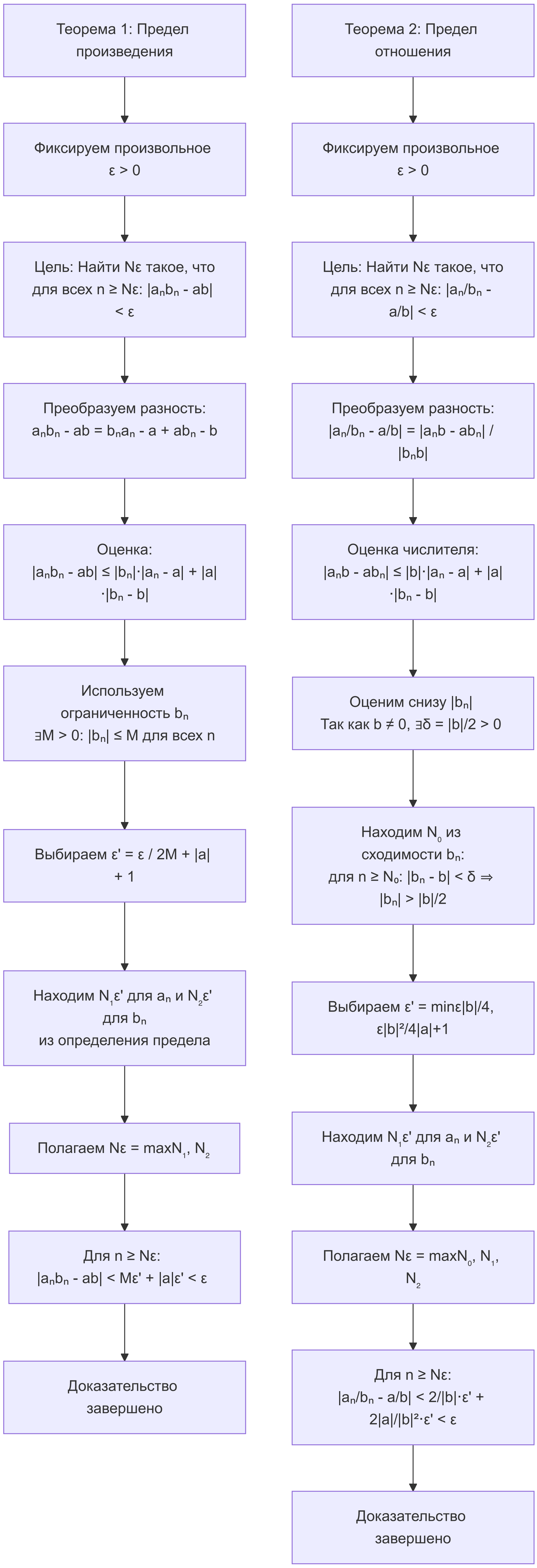
1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$
2. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
3. Если $b \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

Доказательство для суммы

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдём $N_1 : \forall n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$
Найдём $N_2 : \forall n \geq N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$
Для $n \geq \max(N_1, N_2)$:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$$

Доказательство для произведения и отношения



Доказательство для произведения

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Требуется найти такое $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq N$ выполняется $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$.

Преобразуем выражение:

$$a_nb_n - ab = a_nb_n - ab_n + ab_n - ab = b_n(a_n - a) + a(b_n - b).$$

Тогда:

$$|a_nb_n - ab| \le |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|.$$

Поскольку последовательность $\{b_n\}$ сходится, она ограничена: существует $M > 0$ такое, что $|b_n| \le M$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Из сходимости $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ следует:

- Для $\varepsilon' > 0$ существует $N_1 = N_1(\varepsilon')$ такое, что для всех $n \ge N_1$: $|a_n - a| < \varepsilon'$.
- Для того же ε' существует $N_2 = N_2(\varepsilon')$ такое, что для всех $n \ge N_2$: $|b_n - b| < \varepsilon'$.

Выберем ε' так, чтобы:

$$M\varepsilon' + |a|\varepsilon' \le \varepsilon.$$

Например, положим $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(M+|a|+1)}$ (чтобы избежать деления на ноль; если $M + |a| = 0$, то $a = 0$ и $b = 0$, и оценка упрощается).
Теперь возьмем $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для всех $n \ge N$:

$$|a_nb_n - ab| < M\varepsilon' + |a|\varepsilon' \le (M + |a|) \cdot \frac{\varepsilon}{2(M + |a| + 1)} < \varepsilon.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = ab$. ∎

Доказательство для отношения

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, причём $b \ne 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Требуется найти $N = N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n \ge N$:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \varepsilon.$$

Преобразуем разность:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a_nb - ab_n}{b_nb}\right| = \frac{|a_nb - ab_n|}{|b_n||b|}.$$

Оценим числитель:

$$|a_nb - ab_n| \le |b||a_n - a| + |a||b_n - b|.$$

Таким образом:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \le \frac{|b||a_n - a| + |a||b_n - b|}{|b_n||b|} = \frac{|a_n - a|}{|b_n|} + \frac{|a||b_n - b|}{|b_n||b|}.$$

Так как $b \ne 0$, существует $\delta > 0$ такое, что $|b| > \delta$. Выберем $\delta = \frac{|b|}{2}$. Из сходимости $\{b_n\}$ следует, что существует $N_0 = N_0(\delta)$ такое, что для всех $n \ge N_0$: $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$. Тогда для $n \ge N_0$:

$$|b_n| \ge |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

Для $n \ge N_0$ получаем:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{2}{|b|}|a_n - a| + \frac{2|a|}{|b|^2}|b_n - b|.$$

Выберем $\varepsilon' > 0$ так, чтобы:

$$\frac{2}{|b|}\varepsilon' + \frac{2|a|}{|b|^2}\varepsilon' < \varepsilon.$$

Например, положим:

$$\varepsilon' = \min\left(\frac{\varepsilon|b|}{4}, \frac{\varepsilon|b|^2}{4(|a| + 1)}\right).$$

Из сходимости $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$:

- Существует $N_1 = N_1(\varepsilon')$ такое, что для $n \ge N_1$: $|a_n - a| < \varepsilon'$.
- Существует $N_2 = N_2(\varepsilon')$ такое, что для $n \ge N_2$: $|b_n - b| < \varepsilon'$.

Возьмём $N = \max(N_0, N_1, N_2)$. Тогда для всех $n \ge N$:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{2}{|b|}\varepsilon' + \frac{2|a|}{|b|^2}\varepsilon' \leq \frac{2}{|b|} \cdot \frac{\varepsilon|b|}{4} + \frac{2|a|}{|b|^2} \cdot \frac{\varepsilon|b|^2}{4(|a|+1)} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|a|\varepsilon}{2(|a|+1)} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$. ∎

---

5. Пределы и неравенства

5.1. Теорема о сохранении нестрогого неравенства

Теорема: Если $x_n \leq y_n$ для всех $n \geq N_0$ и пределы существуют, то $\lim x_n \leq \lim y_n$.

Доказательство (от противного):
Пусть $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$. Предположим, что $a > b$.
Возьмём $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Тогда:

- $\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \Rightarrow x_n > a - \varepsilon = \frac{a+b}{2}$
- $\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \Rightarrow y_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2}$
  Для $n \geq \max(N_0, N_1, N_2)$ получаем:

$$x_n > \frac{a+b}{2} > y_n$$

  что противоречит условию $x_n \leq y_n$.

5.2. Обратное утверждение неверно

Контрпример: $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = 0$.
$\lim x_n = 0 \leq 0 = \lim y_n$, но $x_n > y_n$ для всех n.

5.3. Теорема о двух милиционерах

Если $x_n \leq y_n \leq z_n$ и $\lim x_n = \lim z_n = a$, то $\lim y_n = a$.

Доказательство:
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдём N такой, что для $n \geq N$:

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon$$

Следовательно, $|y_n - a| < \varepsilon$.

---

6. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности

Теорема: Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел. При этом:

- Если последовательность возрастает и ограничена сверху, то её предел равен точной верхней грани: $\lim x_n = \sup\{x_n\}$
- Если последовательность убывает и ограничена снизу, то её предел равен точной нижней грани: $\lim x_n = \inf\{x_n\}$

Доказательство (для возрастающей ограниченной сверху):
Пусть $a = \sup\{x_n\}$. Покажем, что $\lim x_n = a$.

1. Так как a — верхняя грань, то $x_n \leq a$ для всех n.
2. Так как a — точная верхняя грань, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что $x_N > a - \varepsilon$ (иначе $a - \varepsilon$ была бы верхней гранью, что меньше a).
3. Из монотонного возрастания следует, что для всех $n \geq N$ выполняется $x_n \geq x_N > a - \varepsilon$.
4. Таким образом, для всех $n \geq N$ имеем:

$$a - \varepsilon < x_n \leq a < a + \varepsilon$$

   то есть $|x_n - a| < \varepsilon$.

Следовательно, по определению предела $\lim x_n = a = \sup\{x_n\}$.

Доказательство (для убывающей ограниченной снизу) проводится аналогично с заменой sup на inf.

---

7. Число e

7.1. Определение

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

7.2. Существование предела

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Можно доказать, что:

1. Последовательность возрастает (используя неравенство Бернулли)
2. Последовательность ограничена сверху (например, $x_n < 3$)

Так как последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, по теореме Вейерштрасса она имеет предел, который обозначается через e.

---

8. Бесконечно большие последовательности

8.1. Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если:

$$\forall E > 0 \; \exists N(E) : \forall n \geq N \Rightarrow |x_n| > E$$

8.2. Связь с бесконечно малыми

Если $x_n \to \infty$, то $\frac{1}{x_n} \to 0$. Обратное верно, если x_n не обращается в ноль.

---

9. Вопросы для самопроверки

1. Докажите, что произведение бесконечно малой на ограниченную последовательность есть бесконечно малая.
2. Приведите пример, когда $x_n < y_n$, но $\lim x_n = \lim y_n$.
3. Докажите, что если $x_n \to a$ и $x_n \geq 0$, то $a \geq 0$.
4. Верно ли, что из $\lim x_n > \lim y_n$ следует $x_n > y_n$ для всех достаточно больших n?
5. Докажите теорему о двух милиционерах.
6. Объясните, почему последовательность $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает.
7. Сформулируйте и докажите теорему Вейерштрасса для убывающей ограниченной снизу последовательности.
