УТВЕРЖДЕНО В ПЕЧАТЬ
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Введение в математический анализ**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.04 «Программная инженерия»
физтех-школы: **ФПМИ, ВШПИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу составил

д. ф.-м. н., доцент А. И. Тюленев ____________

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 10 апреля 2025 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе

____________ А. А. Воронов
17 июня 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Введение в математический анализ**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.04 «Программная инженерия»
физтех-школы: **ФПМИ, ВШПИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу составил
д. ф.-м. н., доцент А. И. Тюленев

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 10 апреля 2025 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2025 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Введение в математический анализ**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.04 «Программная инженерия»
физтех-школы: **ФПМИ, ВШПИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу составил
д. ф.-м. н., доцент А. И. Тюленев

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 10 апреля 2025 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Действительные числа (аксиоматический подход). Отношения неравенства между действительными числами. Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу).

2. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Три эквивалентных формулировки аксиомы непрерывности вещественных чисел.

3. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

4. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Число e. Бесконечно большие последовательности и их свойства.

5. Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Теорема об зквивалентных определениях верхних и нижних пределов. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.

6. Топология числовой прямой. Компактность. Лемма Гейне–Бореля.

7. Предел функции одной переменной в классическом смысле. Определения в терминах последовательностей (по Гейне) и в терминах окрестностей (по Коши), их эквивалентность. Свойства пределов функции. Различные типы пределов. Критерий Коши существования конечного предела функции. Теорема о замене переменной под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

8. Предел по множеству. Колебание функции на множестве. Колебание функции в точке. Верхние и нижние пределы функции.

9. Непрерывность функции в точке и на множестве. Свойства непрерывных функций. Односторонняя непрерывность. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.

10. Полунепрерывность функции. Свойства функций, полунепрерывных на отрезке, — ограниченность снизу (сверху), достижение точных верхней или нижней граней (в зависимости от вида полунепрерывности). Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема об обратной функции. Равномерная непрерывность и теорема Кантора.

11. Непрерывность элементарных функций. Определение показательной функции. Свойства показательной функции. Замечательные пределы, следствия из них.

12. Сравнение величин (символы o, O, $\sim$). Вычисление пределов при помощи выделения главной части в числителе и знаменателе дроби.

13. Производная функции одной переменной. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменной.

14. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n-й производной произведения. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменной. Дифференциалы высших порядков.

15. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Следствие из теоремы Лагранжа о среднем. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной.

16. Формула Тейлора с остаточным членом в формах Пеано и Лагранжа. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

17. Применение производной к исследованию функций. Необходимые условия и достаточные условия монотонности, достаточные условия локального экстремума в терминах первой производной. Достаточные условия локального экстремума в терминах второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Построение графиков функций — асимптоты, исследование интервалов монотонности и точек локального экстремума, интервалов выпуклости и точек перегиба.

18. Комплексные числа. Модуль и аргумент, тригонометрическая форма. Арифметические операции с комплексными числами. Извлечение корня. Экспонента с комплексным показателем. Информация об основной теореме алгебры. Разложение многочлена с комплексными коэффициентами на линейные множители. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и неприводимые квадратичные множители. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей.

19. Первообразная и неопределенный интеграл. Линейность неопределенного интеграла, интегрирование подстановкой и по частям. Интегрирование рациональных функций. Основные приемы интегрирования иррациональных и трансцендентных функций.
20. Понятие об абстрактных метрических, линейных нормированных и евклидовых пространствах. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах. Свойство полноты, компакты. Критерий евклидовости Йордана–Фон Неймана.
21. Элементы дифференциальной геометрии. Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкие кривые, касательная к гладкой кривой. Оценка приращения вектор-функции через производную. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.

Литература

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2020.
2. *Дымарский Я. М.* Лекции по математическому анализу. В 3 ч. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2020.
3. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. В 3 ч. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2011.
4. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. В 3 ч. Ч. 1. Введение в математический анализ. — Москва : МФТИ, 2017.
5. *Редкозубов В. В.* Лекции по математическому анализу. Функции одной переменной. — Москва : МФТИ, 2023.
6. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : БИНОМ. Лаб. знаний, 2009, 2010, 2012, 2013.
7. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. В 2 ч. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

8. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. В 3 т. Т. 1. — Москва : Дрофа, 2008.
9. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. В 2 т. Т. 1. — Москва : Физматлит, 2008, 2009.
10. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. В 2 т. Т. 1. — Москва : Наука, 1983.
11. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. В 2 ч. Ч 1, 2. — Москва : Физматлит, 2021, 2022.
12. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т.1. — Москва : Физматлит, 2001, 2003, 2006, 2007.
13. *Зорич В. А.* Математический анализ. В 2 ч. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2021, 2022.
14. *Рудин У.* Основы математического анализа. — Санкт-Петербург : Лань, 2002, 2004.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. В 3 т. Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. Л.Д. Кудрявцев и др. — Москва : Физматлит, 2010, 2012. (цитируется — С1)
2. Сборник задач по математическому анализу. В 3 т. Т. 2. Интегралы. Ряды. Л.Д. Кудрявцев и др. — Москва : Физматлит, 2010, 2012. (цитируется — С2)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 6–11 октября)

I. Производная

С1, §13: 33; 79; 106; 149.

Т.1. Найдите производную функции (ответ не упрощать)

$$y = \left(\frac{\sin\left(2x^3+1\right)+\sqrt{x^2+\log_3 5x}}{5^{x^e}+\mathrm{ch}(\mathrm{arctg} x)}\right)^{\mathrm{ctg}^2\left(e^x\right)}.$$

II. Неопределенный интеграл

С2, §1: 2(17); 12(2); <u>13(7)</u>; 15(5, 12); 17(4); 23(5); <u>24(4)</u>.

III. Действительные числа

С1, §3: <u>2</u>; 8; 10.

Т.2. Найдите сумму $1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n$.

Т.3. Найдите сумму $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$.

IV. Последовательности. Предел последовательности

С1, §7: 275(4); 276(5); <u>279(2)</u>; 299(2); <u>300(3)</u>.

С1, §8: 2(2) (по определению); 13(3); <u>25(3)</u>; 27*; <u>28</u>; 39(1); 46; 53(3).

С1, §8: 7; 60 (для всех $a > 0$); 63(4); <u>64(3)</u>; 67; 71(1); 164(1); 220*.

С1, §8: 141(2); <u>143(3)</u>; 147(4); <u>158</u>; <u>91</u>; <u>119</u>; <u>120</u>; 121; <u>116(2)</u>; 117(1); 246(1, 2, 3*).

Т.4. Докажите, что множество всех частичных пределов произвольной числовой последовательности является замкнутым в $\overline{\mathbb{R}}$. Сформулировать критерий компактности множества частичных пределов.

Т.5. Пусть $\{x_n\}$–произвольная числовая последовательность. Может ли множество ее частичных пределов состоять только из изолированных точек? Только из предельных точек?

Т.6. Доказать, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \sin(n) = -1, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sin(n) = 1.$$

V. Функции. Предел функции. Непрерывность

С1, §9: 1(1); 8(1); 16; 18; 25(5); 30(4); 36(1); 61.

С1, §10: 5(2) (по определению); 14; 22; 41(1); 42; 47*; 56(4); 65; 66*; 76; 97.

Т.7. Доказать, что характеристическая функция любого открытого в $\mathbb{R}$ множества является полунепрерывной снизу, а характеристическая функция любого замкнутого в $\mathbb{R}$ множества является полунепрерывной сверху.

Т.8. Доказать, что не существует функции на числовой прямой которая была бы непрерывна в каждой рациональной точке и разрывна в каждой иррациональной.

Указание. Использовать определение непрерывности в точки в терминах колебания в точке. Рассуждая от противного, использовать принцип вложенных отрезков и счетность множества рациональных чисел.

Т.9. Пусть R – функция Римана, принимающая значение 0 в каждой иррациональной точке и значение $1/q$ в каждой рациональной точке, представимой несократимой дробью p/q. Вычислив колебания функции R в каждой точке, выяснить, в каких точках она непрерывна, а в каких разрывна?

Рекомендации по решению
первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С1, §13:**	33; 79; 106; 149; Т.1.
	С2, §1:	2(17); 12(2); 13(7); 15(5, 12); 17(4); 23(5); 24(4).
2 неделя	**С1, §3:**	2; 8; 10; Т.2; Т.3.
	С1, §7:	275(4); 276(5); 279(2); 299(2); 300(3).
	С1, §8:	2(2); 13(3); 25(3); 27*; 28; 39(1); 46; 53(3).
3 неделя	**С1, §8:**	7; 60; 63(4); 64(3); 67; 71(1); 164(1); 220*.
	С1, §8:	141(2); 143(3); 147(4); 158; 91; 119; 120; 121; 116(2); 117(1); 246(1, 2, 3*).
4 неделя	**С1, §7:**	218(5); 219(4).
	С1, §9:	1(1); 8(1); 16; 18; 25(5); 30(4); 36(1); 61.
5 неделя	**С1, §10:**	5(2); 14; 22; 41(1); 42; 47*; 56(4); 65; 66*; 76; 97.

$\boxed{67 + 5^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 17–22 ноября)

I. Дифференцируемость. Дифференциал

С1, §13: 179(4); 197(5); 201(2); 214(2); <u>173</u>.

С1, §14: 10(4).

II. Производные и дифференциалы высших порядков

С1, §15: 1(7); 10(1); <u>13(1)</u>; 14(2); 22(2); 24(9, 15); 25(3, <u>7</u>, 10); 26(2).

III. Теоремы о среднем

С1, §16: <u>5</u>; 15(2); <u>19</u>; <u>33</u>; 30; 20*.

IV. Формула Тейлора

С1, §9: 50; 51.

<u>Т.1</u>. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, x = 0; \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}), x \neq 0. \end{cases}$$

Является ли эта функция дифференцируемой в каждой точке? Является ли она дважды дифференцируемой в каждой точке?

Т.2. Докажите, что если $f(x) = x \cdot o(x^n)$ при $x \to 0$, то $f(x) = o(x^{n+1})$ при $x \to 0$.

Т.3. Докажите, что если при $x \to 0$ $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) \sim h(x)$, то $f(x) = o(h(x))$ при $x \to 0$.

Т.4. Разложите по формуле Маклорена с точностью до $o(x^5)$ функцию $(x + x^2 - x^3 + x^4)^3$.

С1, §18: 2(8); 3(5); 4(7); 5(4); 14(3); 20(7); 30(1); 38(6); 39(4,7).

Т.5. Представьте формулой Маклорена до $o(x^6)$ функции:
а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{arctg} x$; в) $y = \arcsin x$; г) $y = \operatorname{th} x$.

V. Вычисление пределов и другие приложения формулы Тейлора

С1, §17: 27; 47; 64; 76; 80*.

С1, §19: 7(1); 8(6); 14(5); 21(4); 30(4); 47(5); 58(3)*.

Т.6. Найдите многочлен Тейлора функции e^x в нуле, который позволял бы вычислить значения e^x на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 2$ с абсолютной точностью до 10^{-3}.

Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**С1, §13:** 179(4); 197(5); 201(2); 214(2); 173. **С1, §14:** 10(4). **С1, §15:** 1(7); 10(1); 13(1); 14(2); 22(2).
2 неделя	**С1, §15:** 24(9, 15); 25(3, 7, 10); 26(2). **С1, §16:** 5; 15(2); 19; 33; 30; 20*.
3 неделя	**С1, §9:** 50; 51; Т.1; Т.2; Т.3. **С1, §18:** 2(8); 3(5); 4(7); 5(4); 14(3); 20(7); 30(1).
4 неделя	**С1, §18:** 38(6); 39(4,7); Т.4. **С1, §17:** 27; 47; 64; 76; 80*.
5 неделя	**С1, §19:** 7(1); 8(6); 14(5); 21(4); 30(4); 47(5); 58(3)*; Т.5.

$\boxed{48 + 3^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–13 декабря)

I. Равномерная непрерывность

С1, §12: 2(1); 3(4, 9); 4(3, 8*); 7; 9; 17; 21; 23; 25.

Т.1. Пусть функция f дифференцируема на множестве $I = [a, +\infty)$. Докажите следующие утверждения:

а) если f' ограничена на I, то f равномерно непрерывна на этом множестве;

б) если f' бесконечно большая при $x \to +\infty$, то f не является равномерно непрерывной;

в)* если f' неограничена, но не является бесконечно большой на I, то f может быть, а может и не быть равномерно непрерывной на I.

С1, §12: 3(7, 9).

Т.2. Исследуйте на луче $(0, +\infty)$ равномерную непрерывность функций

а) $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$; б) $f(x) = xe^{\sin x}$.

II. Исследование функций

С1, §20: 2(3); 20(4); 23(8); 35*; 39(5); 42(2); 49(4); 69(<u>2</u>, 5); 71(4)*.

III. Построение графиков функций

С1, §21: 4(4); <u>5(2)</u>; 12(8, 10); 14(3); 15(5); 23(4)*; 31(1)*.

IV. Метрические, нормированные и евклидовы пространства

Т.3. Рассмотри пространство l_∞ ограниченных числовых последовательностей $x = (x_1, ..., x_m, ...)$ с нормой $\|x\|_\infty := \sup_n |x_n|$. Доказать, что единичная сфера в этом пространстве не является компактом.

Т.4. Пусть (X, d) – метрическое пространство. Верно ли, что замкнутый шар $\overline{B}_r(x) := \{y \in \mathrm{X} : \mathrm{d}(x, y) \le r\}$ является замыканием открытого шара $B_r(x) := \{y \in \mathrm{X} : \mathrm{d}(x, y) < r\}$?

Т.5. Пусть $C([a, b])$ – линейное пространство всех непрерывных на отрезке функций с нормой $\|f\|_C := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Можно ли задать в этом пространстве скалярное произведение так, чтобы норма $\|\cdot\|_C$ порождалась этим скалярным произведением?

V. Элементы дифференциальной геометрии

С1, §24: 48; 51; 78(3); <u>80(3)</u>; 81(1); 109(<u>1</u>, 3); 122(1); 118*.

Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**С1, §12:** 2(1); 3(4, 9); 4(3, 8*); 7; 9; 17; 21; 23; 25; Т.1(а, б, в*). **С1, §12:** 3(7, 9); Т.2.
2 неделя	**С1, §20:** 2(3); 20(4); 23(8); 35*; 39(5); 42(2); 49(4); 69(2, 5); 71(4)*. **С1, §21:** 4(4); 5(2); 12(8, 10); 14(3); 15(5); 23(4)*; 31(1)*.
3 неделя	**С1, §24:** 48; 51; 78(3); 80(3); 81(1); 109(1, 3); 122(1); 118*.

$\boxed{38 + 7^*}$

Составитель задания д. ф.-м. н., доцент А. И. Тюленев