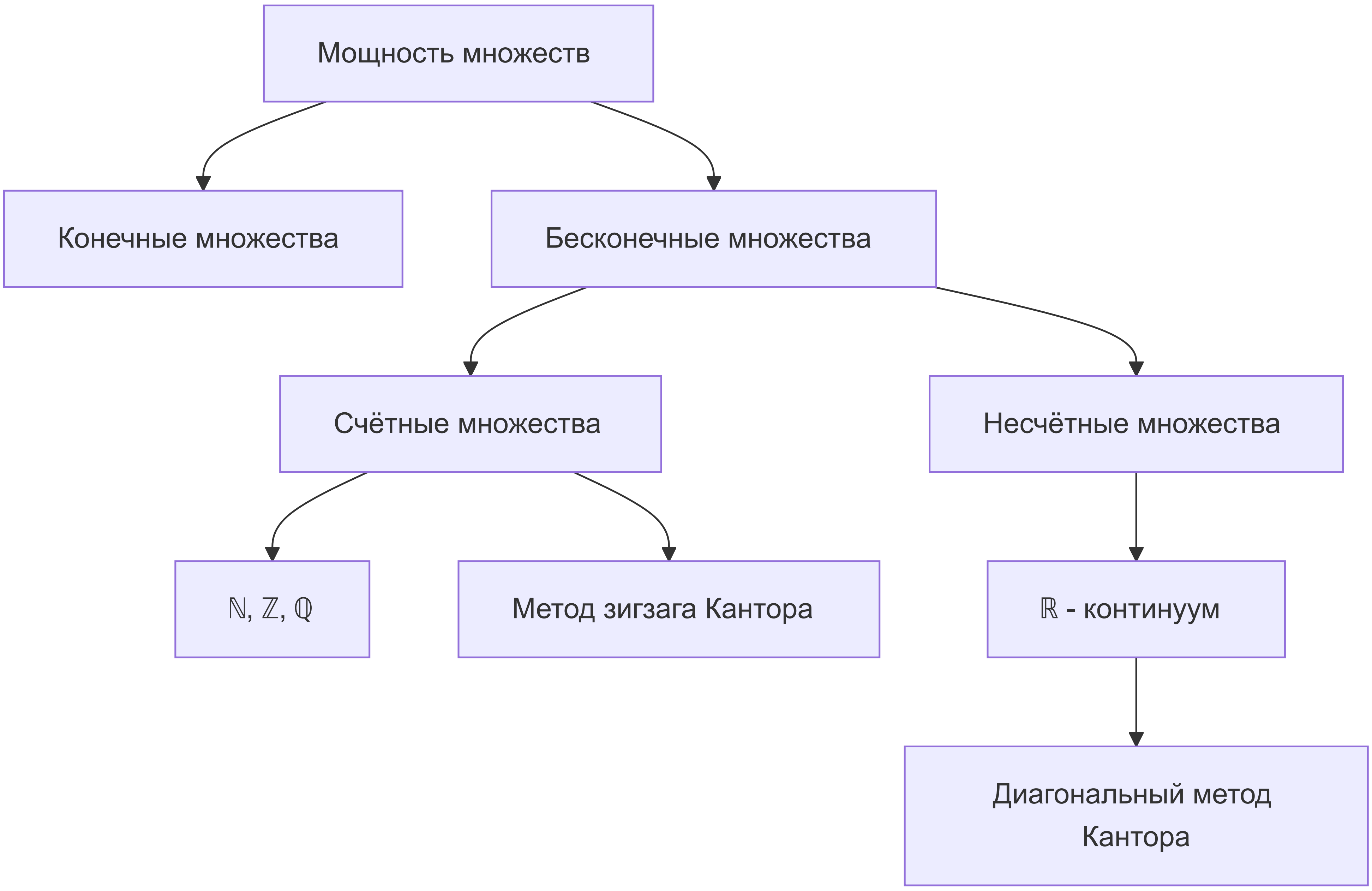
3. Счётность множества рациональных чисел, несчётность множества действительных чисел



1. Мощность множеств. Конечные и бесконечные множества

- **Определение:** Два множества A и B называются **равномощными**, если существует биекция $f: A \to B$.
  Обозначение: $|A| = |B|$.
- **Конечное множество:** Множество, равномощное некоторому отрезку натурального ряда $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- **Бесконечное множество:** Множество, не являющееся конечным.
- **Счётное множество:** Бесконечное множество, равномощное множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.
  Обозначение: $|A| = \aleph_0$.

---

2. Счётность множества рациональных чисел

2.1. Счётность $\mathbb{Z}$

Построим биекцию $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{если } n \text{ чётное}, \\ -\frac{n-1}{2}, & \text{если } n \text{ нечётное}. \end{cases}$$

Интуиция: Мы «перечисляем» целые числа в порядке:
$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$

2.2. Счётность $\mathbb{Q}$

Теорема: Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счётно.

Доказательство (метод Кантора):

1. Рациональные числа можно представить в виде дробей $\frac{p}{q}$, где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, и дробь несократима.
2. Расположим все такие дроби в таблицу:

$$\begin{array}{cccccc} \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & -\frac{2}{1} & \cdots \\ \frac{0}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & -\frac{2}{2} & \cdots \\ \frac{0}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

3. Проходим по таблице «зигзагом» и нумеруем все несократимые дроби.
   Это даёт биекцию между $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$.

Интуиция: Хотя рациональных чисел «очень много», их можно занумеровать.

---

3. Несчётность множества действительных чисел

3.1. Мощность континуума

Определение: Множество, равномощное отрезку ([0, 1]), называется **континуальным**.
Обозначение: $|[0,1]| = \mathfrak{c}$.

3.2. Теорема Кантора

Теорема: Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ несчётно.

Доказательство (метод диагонали Кантора):

1. Предположим, что $\mathbb{R}$ счётно. Тогда все числа из ([0, 1]) можно записать в виде последовательности:

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

2. Запишем каждое число в десятичной системе (бесконечная дробь):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ x_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

3. Построим число $y = 0.b_1b_2b_3\dots$, где

$$b_k = \begin{cases} 5, & \text{если } a_{kk} \neq 5, \\ 1, & \text{если } a_{kk} = 5. \end{cases}$$

4. Число y отличается от каждого x_k в k-м знаке ⇒ $y \notin \{x_1, x_2, \dots\}$.
   Противоречие с предположением о счётности.

Интуиция: Невозможно «занумеровать» все действительные числа — их «больше», чем натуральных.

---

4. Сравнение мощностей

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ — счётные множества.
- $|\mathbb{R}| = |[0,1]| = \mathfrak{c}$ — континуум.

Теорема Кантора: Для любого множества A выполняется $|A| < |\mathcal{P}(A)|$, где $\mathcal{P}(A)$ — множество всех подмножеств A.

Следствие: Существуют сколь угодно большие бесконечные мощности.

---

5. Вопросы для самопроверки

1. Что означает, что множество счётно? Приведите пример счётного множества, отличного от $\mathbb{N}$.
2. Объясните метод диагонали Кантора. Почему он доказывает несчётность $\mathbb{R}$?

3. Может ли объединение двух счётных множеств быть несчётным? Ответ обоснуйте.
4. Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей из 0 и 1 несчётно.
5. Верно ли, что любое подмножество счётного множества счётно? Если нет, приведите контрпример.
6. Что такое континуум? Приведите пример множества мощности континуума, отличного от $\mathbb{R}$.
