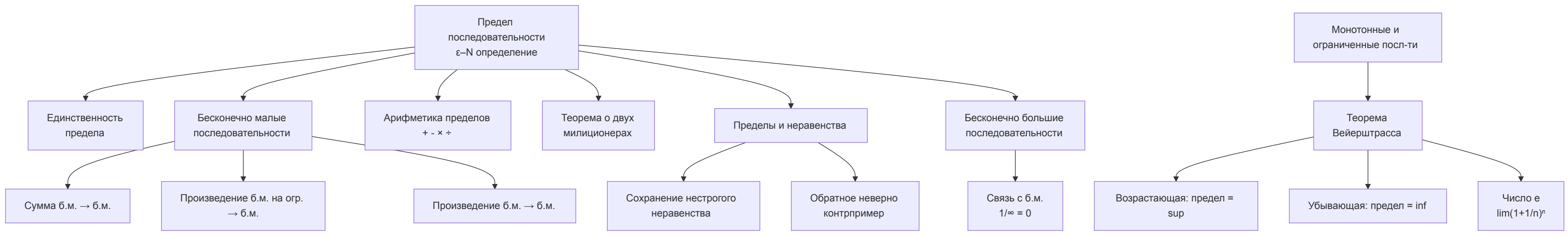
4. Предел числовой последовательности. Теорема Вейерштрасса. Число e



---

1. Предел числовой последовательности

1.1. Интуитивное представление

Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если с ростом номера n члены x_n неограниченно приближаются к a.
Обозначение: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$.

1.2. Строгое определение (ε–N-формализм)

Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

---

2. Единственность предела

Теорема: Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Доказательство (от противного):

1. Предположим, $\lim x_n = a$ и $\lim x_n = b$, где $a \neq b$. Пусть $\varepsilon = \frac{|a-b|}{3} > 0$.
2. По определению:
   - $\exists N_1 : \forall n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$
   - $\exists N_2 : \forall n \geq N_2 \Rightarrow |x_n - b| < \varepsilon$
3. Возьмём $n \geq \max(N_1, N_2)$. Тогда:

$$|a-b| \leq |a-x_n| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a-b| < |a-b|$$

   Противоречие. Значит, $a = b$.

---

3. Бесконечно малые последовательности

3.1. Определение

Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется **бесконечно малой**, если $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

3.2. Свойства с доказательствами

1. Сумма конечного числа бесконечно малых — бесконечно малая.

Доказательство:
Пусть $\{\alpha_n^{(1)}\}, \{\alpha_n^{(2)}\}, \ldots, \{\alpha_n^{(k)}\}$ — бесконечно малые.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для каждого $i = 1, \ldots, k$ найдём N_i такой, что $\forall n \geq N_i \Rightarrow |\alpha_n^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{k}$.
Возьмём $N = \max(N_1, \ldots, N_k)$. Тогда для $n \geq N$:

$$|\alpha_n^{(1)} + \cdots + \alpha_n^{(k)}| \leq |\alpha_n^{(1)}| + \cdots + |\alpha_n^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{k} + \cdots + \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

2. Произведение бесконечно малой на ограниченную последовательность — бесконечно малая.

Доказательство:
Пусть $\{\alpha_n\}$ — б.м., $\{b_n\}$ — ограничена ($|b_n| \le M$).
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для α_n найдём N такой, что $\forall n \ge N \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$.
Тогда для $n \ge N$:

$$|\alpha_n b_n| = |\alpha_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

3. Произведение двух бесконечно малых — бесконечно малая.

Доказательство:
Пусть $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ — б.м.
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдём N_1 такой, что $\forall n \ge N_1 \Rightarrow |\alpha_n| < \sqrt{\varepsilon}$.
Найдём N_2 такой, что $\forall n \ge N_2 \Rightarrow |\beta_n| < \sqrt{\varepsilon}$.
Тогда для $n \ge \max(N_1, N_2)$:

$$|\alpha_n \beta_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon.$$

---

4. Арифметические операции с пределами

Теорема: Если $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, то:

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$
2. $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
3. Если $b \neq 0$, то $\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

Доказательство для суммы:
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдём $N_1 : \forall n \ge N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$
Найдём $N_2 : \forall n \ge N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$
Для $n \ge \max(N_1, N_2)$:

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$$

---

5. Пределы и неравенства

5.1. Теорема о сохранении нестрогого неравенства

Теорема: Если $x_n \le y_n$ для всех $n \ge N_0$ и пределы существуют, то $\lim x_n \le \lim y_n$.

Доказательство (от противного):
Пусть $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$. Предположим, что $a > b$.
Возьмём $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Тогда:

- $\exists N_1 : \forall n \ge N_1 \Rightarrow x_n > a - \varepsilon = \frac{a+b}{2}$
- $\exists N_2 : \forall n \ge N_2 \Rightarrow y_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2}$
  Для $n \ge \max(N_0, N_1, N_2)$ получаем:

  $$x_n > \frac{a+b}{2} > y_n$$

  что противоречит условию $x_n \le y_n$.

5.2. Обратное утверждение неверно

Контрпример: $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = 0$.
$\lim x_n = 0 \le 0 = \lim y_n$, но $x_n > y_n$ для всех n.

5.3. Теорема о двух милиционерах

Если $x_n \le y_n \le z_n$ и $\lim x_n = \lim z_n = a$, то $\lim y_n = a$.

Доказательство:
Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдём N такой, что для $n \ge N$:

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$$

Следовательно, $|y_n - a| < \varepsilon$.

6. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности

Теорема: Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел. При этом:

- Если последовательность возрастает и ограничена сверху, то её предел равен точной верхней грани: $\lim x_n = \sup\{x_n\}$
- Если последовательность убывает и ограничена снизу, то её предел равен точной нижней грани: $\lim x_n = \inf\{x_n\}$

Доказательство (для возрастающей ограниченной сверху):
Пусть $a = \sup\{x_n\}$. Покажем, что $\lim x_n = a$.

1. Так как a — верхняя грань, то $x_n \leq a$ для всех n.
2. Так как a — точная верхняя грань, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что $x_N > a - \varepsilon$ (иначе $a - \varepsilon$ была бы верхней гранью, что меньше a).
3. Из монотонного возрастания следует, что для всех $n \geq N$ выполняется $x_n \geq x_N > a - \varepsilon$.
4. Таким образом, для всех $n \geq N$ имеем:

$$a - \varepsilon < x_n \leq a < a + \varepsilon$$

   то есть $|x_n - a| < \varepsilon$.

Следовательно, по определению предела $\lim x_n = a = \sup\{x_n\}$.

Доказательство (для убывающей ограниченной снизу) проводится аналогично с заменой sup на inf.

---

7. Число e

7.1. Определение

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

7.2. Существование предела

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Можно доказать, что:

1. Последовательность возрастает (используя неравенство Бернулли)
2. Последовательность ограничена сверху (например, $x_n < 3$)

Так как последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, по теореме Вейерштрасса она имеет предел, который обозначается через e.

---

8. Бесконечно большие последовательности

8.1. Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если:

$$\forall E > 0\ \exists N(E) : \forall n \geq N \Rightarrow |x_n| > E$$

8.2. Связь с бесконечно малыми

Если $x_n \to \infty$, то $\frac{1}{x_n} \to 0$. Обратное верно, если x_n не обращается в ноль.

---

9. Вопросы для самопроверки

1. Докажите, что произведение бесконечно малой на ограниченную последовательность есть бесконечно малая.
2. Приведите пример, когда $x_n < y_n$, но $\lim x_n = \lim y_n$.
3. Докажите, что если $x_n \to a$ и $x_n \geq 0$, то $a \geq 0$.
4. Верно ли, что из $\lim x_n > \lim y_n$ следует $x_n > y_n$ для всех достаточно больших n?
5. Докажите теорему о двух милиционерах.

6. Объясните, почему последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает.
7. Сформулируйте и докажите теорему Вейерштрасса для убывающей ограниченной снизу последовательности.
