homework1

孙启尧

2018/9/16

0.1 说明

课后作业题目见课程主页上**“Exercise book.pdf”**，不是课本后的每章习题！课程主页链接为`staff.ustc.edu.cn/~sjue`，相关课程通知也会发布在 QQ 群：574543042
作业分值分布：证明题 (3,5) 每题 1.5 分，有多问的题目每问 0.5 分，单独题目每题 1 分，书写规范性 0.5 分，共计 10 分。

0.2 第一题

标量场在该点处沿固定方向的导数是**数值！**。有两种理解：

1) 梯度在该方向上的投影：
$\nabla\varphi \to \nabla\varphi\big|_{(2,0,-1)} = (-4,0,12)$ ，又 $\vec{\ell}\big|_{(2,0,-1)} = (4,0,3)$，所以

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\ell} = \frac{(-4,0,12)\cdot(4,0,3)}{5} = 4 \tag{1}$$

2) 方向导数的方向余弦表示法：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\ell} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma \tag{2}$$

其中 $\hat{\ell} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$。

0.3 第二题

考察的是复合函数的梯度求解，由

$$\begin{aligned}\nabla f(r) &= f'(r)(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \\ &= f'(r)(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}) \\ &= \frac{f'(r)}{r}\vec{r}\end{aligned} \tag{3}$$

故：

$$\begin{aligned}\nabla \ln r &= \frac{\vec{r}}{r^2} \\ &= \frac{\hat{r}}{r}\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\nabla r^n &= nr^{n-2}\vec{r} \\ &= nr^{n-1}\hat{r}\end{aligned} \tag{5}$$

0.4 第三题

从梯度定义出发，可以利用反证法，证明梯度在等值面上的分量必为 0，并且梯度的方向是方向导数取最大值的方向，说明指向场增加的方向。
言之有理，让我理解即可。

0.5 第四题

三道关于复合函数梯度、散度、旋度的证明题。

1)

$$\frac{\partial}{\partial i}\varphi(f(\vec{r})) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}f}\cdot\frac{\partial f}{\partial i} \tag{6}$$

其中 $i = \{x, y, z\}$，那么

$$\begin{aligned}\nabla\varphi(f(\vec{r})) &= \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}f}(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}) \\ &= \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}f}\nabla f(\vec{r})\end{aligned} \tag{7}$$

2)

$$\begin{aligned}\nabla\vec{A}(f(\vec{r})) &= (\frac{\partial}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{z})\cdot\vec{A}(f(\vec{r})) \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}+\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}f}\cdot\nabla f(\vec{r})\end{aligned} \tag{8}$$

3)

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A}(f(\vec{r})) &= \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}\frac{\partial f}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}f} & \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}f} & \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}f}\end{vmatrix} \\ &= \nabla f\times\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}f} \\ &= -\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}f}\times\nabla f\end{aligned} \tag{9}$$

0.6 第五题

Stokes 定理的证明。建议从 PPT 涡量定义推导：

$$\Omega = \nabla\times\vec{A}\cdot\vec{n} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_\ell \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}}{\Delta S} \tag{10}$$

那么当 $\Delta S\to 0$ 时有，

$$(\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_\ell \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} \tag{11}$$

那么对整个待积分区域 S 的所有小面元求和，

$$\sum(\nabla\times\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \sum\oint_\ell \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell} \tag{12}$$

均取逆时针方向为曲线积分的正向，区域内部的曲线积分因为方向相反，相互抵消，最后只剩下区域边界的线积分，

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_\ell \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \tag{13}$$

得证。

0.7 第六题

关于 ∇ 算子的运用，不能改变 ∇ 算子对变量的作用性。

1)

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \nabla &= (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) \cdot (\frac{\partial}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}) \\ &= A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{14}$$

2)

$$\begin{aligned} (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} &= (A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z})\vec{B} \\ &= A_x \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \end{aligned} \tag{15}$$

0.8 第七、八题

标量乘矢量的散度、旋度与矢量乘矢量的梯度的展开。采用分别视为常数的方法。对第一问和第二问可以将 ∇ 算子在直角坐标系展开来做，此处不再写出证明。这里以第八题为例展示一下运算过程。

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \nabla(\vec{A}_c \cdot \vec{B}) + \nabla(\vec{B}_c \cdot \vec{A}) \\ &= \vec{A}_c \times (\nabla \times \vec{B}) + (\nabla \cdot \vec{A}_c)\vec{B} + \vec{B}_c \times (\nabla \times \vec{A}) + (\nabla \cdot \vec{B}_c)\vec{A} \\ &= \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} \end{aligned} \tag{16}$$