

確率モデル入門

確率の用語整理、確率変数、確率分布

nepia271

Liberal Arts for Tech

2020/05/30

講義（セミナー前半） 40～60分

講義（セミナー前半） 40～60分

目標

確率がわかり、確率モデルが身近になること

講義（セミナー前半） 40～60分

目標

確率がわかり、確率モデルが身近になること

アジェンダ

- ▶ 試行
- ▶ 標本空間と事象
- ▶ 確率変数
- ▶ 確率分布
 - ▶ 離散確率分布
 - ▶ 連続確率分布

全体の構成

- ▶ なぜ「確率」が必要なのか？
- ▶ 確率の用語整理
- ▶ 確率変数とは？確率分布とは？
- ▶ Python で例を見る
 - ▶ 離散確率分布
 - ▶ 連続確率分布
 - ▶ 観測データの分布への収束

なぜ「確率」が必要なのか？（1）

なぜ「確率」が必要なのか？（1）

- ▶ 「記述統計」ならば「確率」は不要でした

なぜ「確率」が必要なのか？（１）

- ▶ 「記述統計」ならば「確率」は不要でした
 - ▶ ヒストグラムを書いてデータを概観する
 - ▶ 平均値、中央値を算出してデータの中心傾向を知る
 - ▶ 分散を算出してデータの散らばり具合を知る

なぜ「確率」が必要なのか？（１）

- ▶ 「記述統計」ならば「確率」は不要でした
 - ▶ ヒストグラムを書いてデータを概観する
 - ▶ 平均値、中央値を算出してデータの中心傾向を知る
 - ▶ 分散を算出してデータの散らばり具合を知る

これだけならば、確率の知識は不要！

なぜ「確率」が必要なのか？（2）

- ▶ 「統計モデル」になぜ興味があるのか

なぜ「確率」が必要なのか？（２）

- ▶ 「統計モデル」になぜ興味があるのか
 - ▶ データそのものではなく、
その背後にある "原則" "真理" が知りたいから

なぜ「確率」が必要なのか？（２）

- ▶ 「統計モデル」になぜ興味があるのか
 - ▶ データそのものではなく、
その背後にある "原則" "真理" が知りたいから
例) データからわかる、コインの歪み方とは？

なぜ「確率」が必要なのか？（２）

- ▶ 「統計モデル」になぜ興味があるのか
 - ▶ データそのものではなく、
その背後にある "原則" "真理" が知りたいから
例) データからわかる、コインの歪み方とは？
 - ▶ しかも "定量的" に知りたい

なぜ「確率」が必要なのか？（２）

- ▶ 「統計モデル」になぜ興味があるのか
 - ▶ データそのものではなく、
その背後にある "原則" "真理" が知りたいから
例) データからわかる、コインの歪み方とは？
 - ▶ しかも "定量的" に知りたい
→ (データから) どれくらいの数値で歪んでいるのか

なぜ「確率」が必要なのか？（２）

- ▶ 「統計モデル」になぜ興味があるのか
 - ▶ データそのものではなく、
その背後にある "原則" "真理" が知りたいから
例) データからわかる、コインの歪み方とは？
 - ▶ しかも "定量的" に知りたい
 - (データから) どれくらいの数値で歪んでいるのか
 - (数値の推定が) どれくらい信頼できるのか

なぜ「確率」が必要なのか？（２）

- ▶ 「統計モデル」になぜ興味があるのか
 - ▶ データそのものではなく、
その背後にある "原則" "真理" が知りたいから
例) データからわかる、コインの歪み方とは？
 - ▶ しかも "定量的" に知りたい
 - (データから) どれくらいの数値で歪んでいるのか
 - (数値の推定が) どれくらい信頼できるのか
(「一般に、サンプル数が多いほど信頼できる」とは言うけれど？)

なぜ「確率」が必要なのか？（２）

- ▶ 「統計モデル」になぜ興味があるのか
 - ▶ データそのものではなく、
その背後にある "原則" "真理" が知りたいから
例) データからわかる、コインの歪み方とは？
 - ▶ しかも "定量的" に知りたい
 - (データから) どれくらいの数値で歪んでいるのか
 - (数値の推定が) どれくらい信頼できるのか
(「一般に、サンプル数が多いほど信頼できる」とは言うけれど？)
- ▶ たとえば「統計モデリング」

なぜ「確率」が必要なのか？（２）

- ▶ 「統計モデル」になぜ興味があるのか
 - ▶ データそのものではなく、
その背後にある "原則" "真理" が知りたいから
例) データからわかる、コインの歪み方とは？
 - ▶ しかも "定量的" に知りたい
 - (データから) どれくらいの数値で歪んでいるのか
 - (数値の推定が) どれくらい信頼できるのか
(「一般に、サンプル数が多いほど信頼できる」とは言うけれど？)
- ▶ たとえば「統計モデリング」

なぜ「確率」が必要なのか？（２）

- ▶ 「統計モデル」になぜ興味があるのか
 - ▶ データそのものではなく、
その背後にある "原則" "真理" が知りたいから
例) データからわかる、コインの歪み方とは？
 - ▶ しかも "定量的" に知りたい
→ (データから) どれくらいの数値で歪んでいるのか
→ (数値の推定が) どれくらい信頼できるのか
(「一般に、サンプル数が多いほど信頼できる」とは言うけれど？)
- ▶ たとえば「統計モデリング」
 - ▶ 実世界のデータから筋のよい「確率モデル」を記述したい
 - ▶ そのモデルがどれくらい本当なのかを議論したい

なぜ「確率」が必要なのか？（２）

- ▶ 「統計モデル」になぜ興味があるのか
 - ▶ データそのものではなく、その背後にある "原則" "真理" が知りたいから
例) データからわかる、コインの歪み方とは？
 - ▶ しかも "定量的" に知りたい
 - (データから) どれくらいの数値で歪んでいるのか
 - (数値の推定が) どれくらい信頼できるのか
(「一般に、サンプル数が多いほど信頼できる」とは言うけれど？)
- ▶ たとえば「統計モデリング」
 - ▶ 実世界のデータから筋のよい「確率モデル」を記述したい
 - ▶ そのモデルがどれくらい本当なのかを議論したい

データがまず与えられる。

なぜ「確率」が必要なのか？（２）

- ▶ 「統計モデル」になぜ興味があるのか
 - ▶ データそのものではなく、
その背後にある "原則" "真理" が知りたいから
例) データからわかる、コインの歪み方とは？
 - ▶ しかも "定量的" に知りたい
→ (データから) どれくらいの数値で歪んでいるのか
→ (数値の推定が) どれくらい信頼できるのか
(「一般に、サンプル数が多いほど信頼できる」とは言うけれど？)
- ▶ たとえば「統計モデリング」
 - ▶ 実世界のデータから筋のよい「確率モデル」を記述したい
 - ▶ そのモデルがどれくらい本当なのかを議論したい

データがまず与えられる。

その背後にある "原則" "真理" が知りたくてモデルを考える。

なぜ「確率」が必要なのか？（２）

- ▶ 「統計モデル」になぜ興味があるのか
 - ▶ データそのものではなく、その背後にある "原則" "真理" が知りたいから
例) データからわかる、コインの歪み方とは？
 - ▶ しかも "定量的" に知りたい
 - (データから) どれくらいの数値で歪んでいるのか
 - (数値の推定が) どれくらい信頼できるのか
(「一般に、サンプル数が多いほど信頼できる」とは言うけれど？)
- ▶ たとえば「統計モデリング」
 - ▶ 実世界のデータから筋のよい「確率モデル」を記述したい
 - ▶ そのモデルがどれくらい本当なのかを議論したい

データがまず与えられる。

その背後にある "原則" "真理" が知りたくてモデルを考える。

→ データの背後について定量的に議論するためには、
確率の知識は必要！

まずは確率の用語整理から……

※資料からかいつまんで紹介

まずは確率の用語整理から……

※資料からかいつまんで紹介

> 試行 (trial)

実験や観測などを行うことです。確率モデルに基づいて論理展開を行っていくにあたっては、試行を行った結果を確率的に解釈していきます。

まずは確率の用語整理から……

※資料からかいつまんで紹介

> 試行 (trial)

実験や観測などを行うことです。確率モデルに基づいて論理展開を行っていくにあたっては、試行を行った結果を確率的に解釈していきます。

> 標本空間 (sample space)

試行の結果を要素とする集合です。

まずは確率の用語整理から……

※資料からかいつまんで紹介

> 試行 (trial)

実験や観測などを行うことです。確率モデルに基づいて論理展開を行っていくにあたっては、試行を行った結果を確率的に解釈していきます。

> 標本空間 (sample space)

試行の結果を要素とする集合です。

> 事象 (event)

標本空間の部分集合です。

確率変数とは？

確率変数とは？

確率変数とは、値が確率である変数です。
ランダムに値を取るのが特徴です。

確率変数とは？

確率変数とは、値が確率である変数です。
ランダムに値を取るのが特徴です。

- ▶ （注意）確率変数は〇〇ではありません

確率変数とは？

確率変数とは、値が確率である変数です。
ランダムに値を取るのが特徴です。

- ▶ （注意）確率変数は○○ではありません
 - ▶ 確率変数は「とる値の集合」ではありません

確率変数とは？

確率変数とは、値が確率である変数です。
ランダムに値を取るのが特徴です。

- ▶ (注意) 確率変数は○○ではありません
 - ▶ 確率変数は「とる値の集合」ではありません
それは「標本空間」です

確率変数とは？

確率変数とは、値が確率である変数です。
ランダムに値を取るのが特徴です。

- ▶ (注意) 確率変数は○○ではありません
 - ▶ 確率変数は「とる値の集合」ではありません
それは「標本空間」です
 - ▶ 確率変数は「具体的な実現値」ではありません

確率変数とは？

確率変数とは、値が確率である変数です。
ランダムに値を取るのが特徴です。

- ▶ (注意) 確率変数は○○ではありません
 - ▶ 確率変数は「とる値の集合」ではありません
それは「標本空間」です
 - ▶ 確率変数は「具体的な実現値」ではありません
それは「試行の結果」です

確率変数とは？

確率変数とは、値が確率である変数です。
ランダムに値を取るのが特徴です。

- ▶ (注意) 確率変数は○○ではありません
 - ▶ 確率変数は「とる値の集合」ではありません
それは「標本空間」です
 - ▶ 確率変数は「具体的な実現値」ではありません
それは「試行の結果」です
 - ▶ 確率変数はサイコロを振ることでもありません

確率変数とは？

確率変数とは、値が確率である変数です。
ランダムに値を取るのが特徴です。

- ▶ (注意) 確率変数は○○ではありません
 - ▶ 確率変数は「とる値の集合」ではありません
それは「標本空間」です
 - ▶ 確率変数は「具体的な実現値」ではありません
それは「試行の結果」です
 - ▶ 確率変数はサイコロを振ることでもありません
それは「試行」です

確率変数とは？

確率変数とは、値が確率である変数です。
ランダムに値を取るのが特徴です。

- ▶ (注意) 確率変数は○○ではありません
 - ▶ 確率変数は「とる値の集合」ではありません
それは「標本空間」です
 - ▶ 確率変数は「具体的な実現値」ではありません
それは「試行の結果」です
 - ▶ 確率変数はサイコロを振ることでもありません
それは「試行」です
 - ▶ 確率変数は「起こりうる事柄」ではありません

確率変数とは？

確率変数とは、値が確率である変数です。
ランダムに値を取るのが特徴です。

- ▶ (注意) 確率変数は○○ではありません
 - ▶ 確率変数は「とる値の集合」ではありません
それは「標本空間」です
 - ▶ 確率変数は「具体的な実現値」ではありません
それは「試行の結果」です
 - ▶ 確率変数はサイコロを振ることでもありません
それは「試行」です
 - ▶ 確率変数は「起こりうる事柄」ではありません
それは「事象」です

確率変数とは？

確率変数とは、値が確率である変数です。
ランダムに値を取るのが特徴です。

- ▶ (注意) 確率変数は○○ではありません
 - ▶ 確率変数は「とる値の集合」ではありません
それは「標本空間」です
 - ▶ 確率変数は「具体的な実現値」ではありません
それは「試行の結果」です
 - ▶ 確率変数はサイコロを振ることでもありません
それは「試行」です
 - ▶ 確率変数は「起こりうる事柄」ではありません
それは「事象」です
 - ▶ 確率変数は「取りうる値を確率で表したもの」ではありません

確率変数とは？

確率変数とは、値が確率である変数です。
ランダムに値を取るのが特徴です。

- ▶ (注意) 確率変数は○○ではありません
 - ▶ 確率変数は「とる値の集合」ではありません
それは「標本空間」です
 - ▶ 確率変数は「具体的な実現値」ではありません
それは「試行の結果」です
 - ▶ 確率変数はサイコロを振ることでもありません
それは「試行」です
 - ▶ 確率変数は「起こりうる事柄」ではありません
それは「事象」です
 - ▶ 確率変数は「取りうる値を確率で表したもの」ではありません
それは「確率分布」です

確率変数とは？

確率変数とは、値が確率である変数です。
ランダムに値を取るのが特徴です。

- ▶ (注意) 確率変数は○○ではありません
 - ▶ 確率変数は「とる値の集合」ではありません
それは「標本空間」です
 - ▶ 確率変数は「具体的な実現値」ではありません
それは「試行の結果」です
 - ▶ 確率変数はサイコロを振ることでもありません
それは「試行」です
 - ▶ 確率変数は「起こりうる事柄」ではありません
それは「事象」です
 - ▶ 確率変数は「取りうる値を確率で表したもの」ではありません
それは「確率分布」です

(難しい)

余談：ランダムという概念は実はとっても難しい

余談：ランダムという概念は実はとっても難しい

- ▶ 長年、確率のことについては、
すべての事象が等確率で起こるとして、
場合の数で考えられていた

余談：ランダムという概念は実はとっても難しい

- ▶ 長年、確率のことについては、
すべての事象が等確率で起こるとして、
場合の数で考えられていた
- ▶ 確率 = 求める事象/全事象

余談：ランダムという概念は実はとっても難しい

- ▶ 長年、確率のことについては、すべての事象が等確率で起こるとして、場合の数で考えられていた
- ▶ 確率 = 求める事象/全事象
(ラプラスによる定義 古典的確率)
- ▶ しかしこれでは、上手に表現することができないこともあった (すべての場合の数を数えるの無理なことがある)

余談：ランダムという概念は実はとっても難しい

- ▶ 長年、確率のことについては、すべての事象が等確率で起こるとして、場合の数で考えられていた
- ▶ 確率 = 求める事象/全事象
(ラプラスによる定義 古典的確率)
- ▶ しかしこれでは、上手に表現することができないこともあった (すべての場合の数を数えるの無理なことがある)
- ▶ だが、20 世紀初頭のこと

余談：ランダムという概念は実はとっても難しい

- ▶ 長年、確率のことについては、
すべての事象が等確率で起こるとして、
場合の数で考えられていた
- ▶ 確率 = 求める事象/全事象
(ラプラスによる定義 古典的確率)
- ▶ しかしこれでは、上手に表現することができないこともあった (すべての場合の数を数えるの無理なことがある)
- ▶ だが、20 世紀初頭のこと
アンドレイ・コルモゴロフというロシアの数学者が、
確率論の公理化を、みごと完成させた！
(公理的確率論)

余談：ランダムという概念は実はとっても難しい

- ▶ 長年、確率のことについては、すべての事象が等確率で起こるとして、場合の数で考えられていた
- ▶ 確率 = 求める事象/全事象
(ラプラスによる定義 古典的確率)
- ▶ しかしこれでは、上手に表現することができないこともあった (すべての場合の数を数えるの無理なことがある)
- ▶ だが、20 世紀初頭のこと
アンドレイ・コルモゴロフというロシアの数学者が、確率論の公理化を、みごと完成させた！
(公理的確率論)
- ▶ ただし、集合論・測度論・ルベーグ積分を駆使して……

余談：ランダムという概念は実はとっても難しい

- ▶ 長年、確率のことについては、すべての事象が等確率で起こるとして、場合の数で考えられていた
- ▶ 確率 = 求める事象/全事象
(ラプラスによる定義 古典的確率)
- ▶ しかしこれでは、上手に表現することができないこともあった (すべての場合の数を数えるの無理なことがある)
- ▶ だが、20 世紀初頭のこと
アンドレイ・コルモゴロフというロシアの数学者が、確率論の公理化を、みごと完成させた！
(公理的確率論)
- ▶ ただし、集合論・測度論・ルベーグ積分を駆使して……

(結論) ランダムも、確率変数も、むずかしいので、深く考えないことがオススメです。

確率分布とは？

確率分布とは？

- ▶ 「各々の値をとる確率」を表す分布
 - ▶ 例：コインを投げたとき……
 - ▶ コインが表を取る確率： 50%
 - ▶ コインが裏を取る確率： 50%

確率分布とは？

- ▶ 「各々の値をとる確率」を表す分布
 - ▶ 例：コインを投げたとき……
 - ▶ コインが表を取る確率：50%
 - ▶ コインが裏を取る確率：50%
- ▶ ヒストグラムをサンプル数で割ったものと「似ています」
 - ▶ じつのところ「そうではない」のですが
 - ▶ 無限にデータ数があるなら一致していきます

離散確率分布、連続確率分布

離散確率分布、連続確率分布

- ▶ 離散確率分布とは？

離散確率分布、連続確率分布

- ▶ 離散確率分布とは？
 - ▶ 確率変数 X が離散値をとる場合の確率分布です

離散確率分布、連続確率分布

- ▶ 離散確率分布とは？
 - ▶ 確率変数 X が離散値をとる場合の確率分布です
 - ▶ 例) コインの表裏、サイコロの出目

離散確率分布、連続確率分布

- ▶ 離散確率分布とは？
 - ▶ 確率変数 X が離散値をとる場合の確率分布です
 - ▶ 例) コインの表裏、サイコロの出目
 - ▶ 離散一様分布、二項分布

離散確率分布、連続確率分布

- ▶ 離散確率分布とは？
 - ▶ 確率変数 X が離散値をとる場合の確率分布です
 - ▶ 例) コインの表裏、サイコロの出目
 - ▶ 離散一様分布、二項分布
- ▶ 連続確率分布とは？

離散確率分布、連続確率分布

- ▶ 離散確率分布とは？
 - ▶ 確率変数 X が離散値をとる場合の確率分布です
 - ▶ 例) コインの表裏、サイコロの出目
 - ▶ 離散一様分布、二項分布
- ▶ 連続確率分布とは？
 - ▶ 確率変数 X が連続値をとる場合の確率分布です

離散確率分布、連続確率分布

- ▶ 離散確率分布とは？
 - ▶ 確率変数 X が離散値をとる場合の確率分布です
 - ▶ 例) コインの表裏、サイコロの出目
 - ▶ 離散一様分布、二項分布
- ▶ 連続確率分布とは？
 - ▶ 確率変数 X が連続値をとる場合の確率分布です
 - ▶ 例) 花卉の長さ、16 歳男子の身長

離散確率分布、連続確率分布

- ▶ 離散確率分布とは？
 - ▶ 確率変数 X が離散値をとる場合の確率分布です
 - ▶ 例) コインの表裏、サイコロの出目
 - ▶ 離散一様分布、二項分布
- ▶ 連続確率分布とは？
 - ▶ 確率変数 X が連続値をとる場合の確率分布です
 - ▶ 例) 花卉の長さ、16 歳男子の身長
 - ▶ 正規分布、ポアソン分布、連続一様分布

離散確率分布、連続確率分布

- ▶ 離散確率分布とは？
 - ▶ 確率変数 X が離散値をとる場合の確率分布です
 - ▶ 例) コインの表裏、サイコロの出目
 - ▶ 離散一様分布、二項分布
- ▶ 連続確率分布とは？
 - ▶ 確率変数 X が連続値をとる場合の確率分布です
 - ▶ 例) 花卉の長さ、16 歳男子の身長
 - ▶ 正規分布、ポアソン分布、連続一様分布

離散ならとりうる値ごとに確率が出せますが、連続ではそうはいきません。

離散確率分布、連続確率分布

- ▶ 離散確率分布とは？
 - ▶ 確率変数 X が離散値をとる場合の確率分布です
 - ▶ 例) コインの表裏、サイコロの出目
 - ▶ 離散一様分布、二項分布
- ▶ 連続確率分布とは？
 - ▶ 確率変数 X が連続値をとる場合の確率分布です
 - ▶ 例) 花卉の長さ、16 歳男子の身長
 - ▶ 正規分布、ポアソン分布、連続一様分布

離散ならとりうる値ごとに確率が出せますが、
連続ではそうはいきません。

「身長が 170cm ジャスト」とはいえないからです。

よくわからない

よくわからない

- ▶ Python で動かしてみよう
- ▶ 実際に動いている様子で理解のヒントになるかも

離散確率分布の例：サイコロ

連続確率分布の例：正規分布

サンプルを増やすと真の分布に漸近する

講義のまとめ

講義のまとめ

- ▶ データが与えられ、背後の法則を考えたい

講義のまとめ

- ▶ データが与えられ、背後の法則を考えたい
- ▶ 法則を考えるために「確率モデル」が利用される

講義のまとめ

- ▶ データが与えられ、背後の法則を考えたい
- ▶ 法則を考えるために「確率モデル」が利用される
- ▶ 確率への理解が必要になる（出力を理解することが必要）

講義のまとめ

- ▶ データが与えられ、背後の法則を考えたい
- ▶ 法則を考えるために「確率モデル」が利用される
- ▶ 確率への理解が必要になる（出力を理解することが必要）
- ▶ しかし、確率の基礎事項は混乱しやすい
確率を一発で理解しようとするのは大変……

講義のまとめ

- ▶ データが与えられ、背後の法則を考えたい
- ▶ 法則を考えるために「確率モデル」が利用される
- ▶ 確率への理解が必要になる（出力を理解することが必要）
- ▶ しかし、確率の基礎事項は混乱しやすい
確率を一発で理解しようとするのは大変……

ではどうすれば？

講義のまとめ

- ▶ データが与えられ、背後の法則を考えたい
- ▶ 法則を考えるために「確率モデル」が利用される
- ▶ 確率への理解が必要になる（出力を理解することが必要）
- ▶ しかし、確率の基礎事項は混乱しやすい
確率を一発で理解しようとするのは大変……

ではどうすれば？

- ▶ ゆっくり丁寧にやることで理解する

講義のまとめ

- ▶ データが与えられ、背後の法則を考えたい
- ▶ 法則を考えるために「確率モデル」が利用される
- ▶ 確率への理解が必要になる（出力を理解することが必要）
- ▶ しかし、確率の基礎事項は混乱しやすい
確率を一発で理解しようとするのは大変……

ではどうすれば？

- ▶ ゆっくり丁寧にやることで理解する
- ▶ Python で動かすことで理解する

講義のまとめ

- ▶ データが与えられ、背後の法則を考えたい
- ▶ 法則を考えるために「確率モデル」が利用される
- ▶ 確率への理解が必要になる（出力を理解することが必要）
- ▶ しかし、確率の基礎事項は混乱しやすい
確率を一発で理解しようとするのは大変……

ではどうすれば？

- ▶ ゆっくり丁寧にやることで理解する
- ▶ Python で動かすことで理解する
 - ▶ 紙とペンでやるよりも
 - ▶ Python のほうがカンタンです

講義のまとめ

- ▶ データが与えられ、背後の法則を考えたい
- ▶ 法則を考えるために「確率モデル」が利用される
- ▶ 確率への理解が必要になる（出力を理解することが必要）
- ▶ しかし、確率の基礎事項は混乱しやすい
確率を一発で理解しようとするのは大変……

ではどうすれば？

- ▶ ゆっくり丁寧にやることで理解する
- ▶ Python で動かすことで理解する
 - ▶ 紙とペンでやるよりも
 - ▶ Python のほうがカンタンです

少し休憩をしたのち、ハンズオンに入ります。

ハンズオン

ハンズオン

- ▶ `sklearn.dataset` を読み込む

ハンズオン

- ▶ `sklearn.dataset` を読み込む
- ▶ 適当なヒストグラムを書く

ハンズオン

- ▶ `sklearn.dataset` を読み込む
- ▶ 適当なヒストグラムを書く
- ▶ 何の数学的分布に近いか見てみる

ハンズオン

- ▶ `sklearn.dataset` を読み込む
- ▶ 適当なヒストグラムを書く
- ▶ 何の数学的分布に近いか見てみる

その他、素朴な疑問について
確率に限らず拾っていく時間とします