

Mathematische Optimierung - Abgabebblatt

Prof. Dr. Nathan Sudermann-Merx

Sommersemester 2022

Aufgabe 1.....

Herr Schmidt arbeitet mit Ihnen im gleichen Unternehmen als Data Scientist und würde gern verstehen, worum es sich bei „Mathematischer Optimierung handelt“.

- (a) (3 Punkte) Erklären Sie ihm den Begriff nichtmathematisch in eigenen Worten anhand eines kleinen Beispiels aus welchem sich der Anwendungsbezug für seinen Arbeitsbereich herleiten lässt.

Aufgabe 2.....

Gegeben sind die folgenden nichtlinearen Optimierungsprobleme.

a)

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \max(x, 2 - 2x) \quad \text{s.t.} \quad |x - 3| \leq 2$$

b)

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \ln(x + 2y) \quad \text{s.t.} \quad \min(x, y) \geq 1, |x - y| \leq 5$$

- (a) (10 Punkte) Formulieren Sie äquivalente LPs der folgenden nichtlinearen Optimierungsprobleme. Geben Sie hierzu die einzelnen Umformulierungsschritte an.
- (b) (10 Punkte) Lösen Sie die Optimierungsprobleme graphisch, d.h. geben Sie einen Optimalpunkt sowie den Optimalwert *des nichtlinearen Originalproblems* an.
- (c) (2 Punkte) Begründen Sie, warum das Optimierungsproblem in b) wohldefiniert ist (Hinweis: Definitionsbereich des natürlichen Logarithmus)

Aufgabe 3.....

Konstruieren Sie eine polyedrische Menge M , sodass das zweidimensionale LP

$$P : \quad \max_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} x_1 + x_2 \quad \text{s.t.} \quad (x_1, x_2) \in M.$$

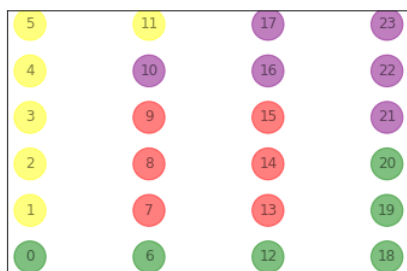
- (a) (4 Punkte) lösbar ist, einen eindeutigen Optimalpunkt x^* besitzt und
- (b) (6 Punkte) *eine beliebige* Restriktion aus M entfernt werden kann, ohne, dass sich der Optimalpunkt ändert.

Aufgabe 4.....

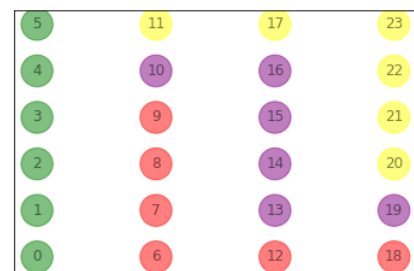
„Mathe-Würmchen“ ist eine vereinfachte Form des Ein-Personen-Brettspiels „Glastropfenspiel“, welches 1990 im Ravensburger Verlag erschien.

Das Ziel des Spiels ist es, ausgehend von Startpositionen zusammenhängende Perlenketten auf einem Gitter so zu platzieren, dass durch die Anordnung keine Rechtecke derselben Farbe entstehen.

Im untenstehenden Beispiel sind auf einem 6x4-Gitter die folgenden Startpunkte vorgegeben: Gelb: 11, Lila: 10, Rot: 9 und Grün: 0. Ausgehend von diesen Startsteinen müssen nun die benachbarten Steine derselben Farbe in Ketten auf dem Spielfeld untergebracht werden. Dabei muss der nächste Stein in direkter vertikaler oder horizontaler Nachbarschaft des vorherigen gleichfarbigen Steins liegen. Es dürfen keine Rechtecke entstehen, die nur Steine derselben Farbe enthalten.



(a) Eine falsche Anordnung mit Rechtecken der Farben lila und rot



(b) Eine korrekte Anordnung ohne Rechtecke einer Farbe

Modellieren Sie das Mathe-Glühwürmchenspiel mit fünf Farben und zehn Steinen pro Farbe auf einem 10x5-Gitter als gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem. Lösen Sie es für die Startpositionen Gelb: 22, Lila: 43, Rot: 27, Grün 12 und Schwarz 14.

Hierzu können Sie sich an folgenden Zwischenschritten orientieren:

- (15 Punkte) Modellieren Sie das Mathe-Glühwürmchenspiel schriftlich als lineares binäres Optimierungsproblem.
- (15 Punkte) Implementieren Sie eine Visualisierung des Graphen in Python.
Hinweis: Sie können dazu zum Beispiel das Paket *networkx* verwenden.
- (15 Punkte) Implementieren Sie das Optimierungsmodell zunächst ohne die “Rechtecks-Bedingung”, lösen es und visualisieren Sie das Ergebnis.
- (20 Punkte) Implementieren Sie nun Restriktionen, die gewährleisten, dass die Lösung keine Rechtecke enthält.