Topologia

Insieme:

Un insieme si dice:

- **Aperto** se i punti di bordo non fanno parte dell'insieme. Ad esempio l'insieme $B_r = \{|x - x_0| < r\}$
- **Chiuso** se i punti di bordo fanno parte dell'insieme.

> Note
>
> Un insieme può essere né aperto e né chiuso come si vede da questo esempio:
>
> $$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } y < x^2\}$$

- **Limitato** se posso definire una sfera di raggio finito che contiene l'intero insieme.

Punti di un sottoinsieme:

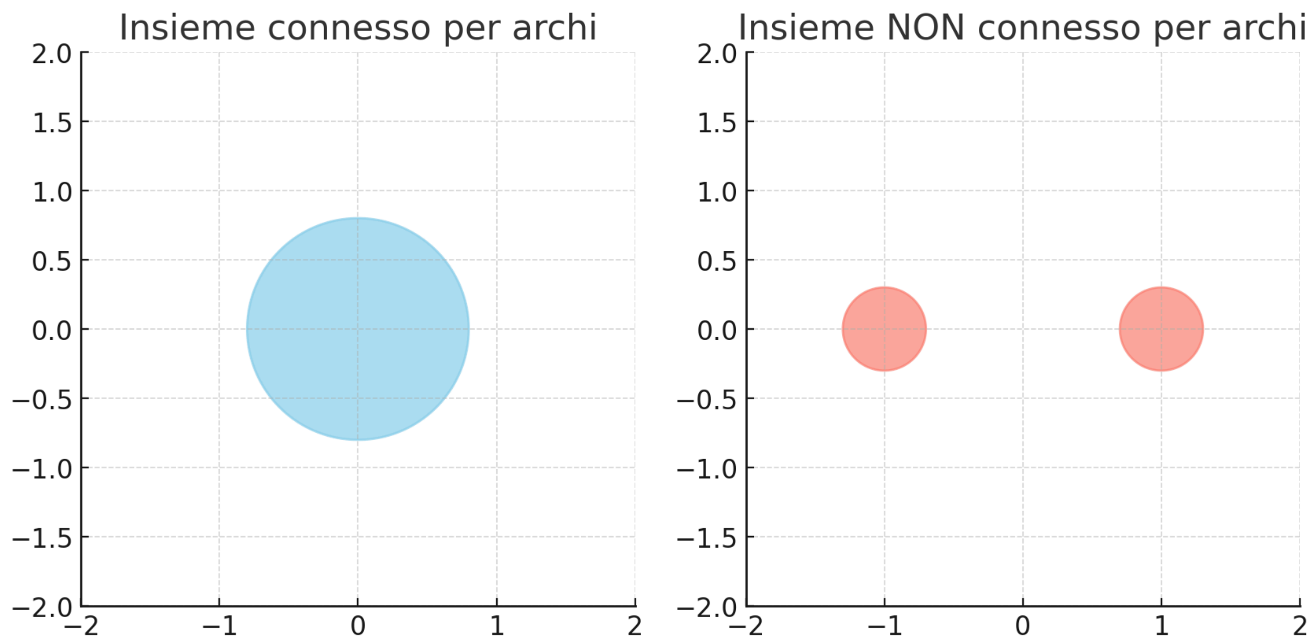
Considerato il sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ e un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice:

- **Interno** a E se esiste un intorno sferico di x_0 interamente contenuto in E. Ovvero è possibile considerare un intorno di quel punto che non esce dai confini dell'insieme
- **Esterno** a E se esiste un intorno sferico di x_0 interamente contenuto in E^c. Ovvero è possibile considerare un intorno di quel punto che rimane esterno ad E (Ovvero è interno al complementare di E).
- **Frontiera** se, preso un qualsiasi intorno sferico di x_0, è inevitabile prendere sia punti esterni che interni ad E. Il punto x_0 che è di frontiera può appartenere oppure no a E. Dipende se E è un insieme aperto (i punti di bordo *non* fanno parte dell'insieme) o un insieme chiuso (i punti di bordo fanno parte dell'insieme) ovvero

Dato un insieme solo una di queste tre condizione può verificarsi.21

Connesso per archi:

Un insieme si dice connesso per archi se, per ogni coppia di punti $x, y \in E$, esiste un arco di curva continuo contenuto in E che ha per estremi x e y. Ovvero E è composto da un pezzo solo.



Derivata Parziale:

Non posso definire l'incremento simultaneo di due variabili per una funzione a più variabili. Per ovviare a questo problema, fisso una delle due variabili ed incremento l'altra.

Si definisce derivata parziale, l'incremento di una funzione $f(x, y)$ una volta che si è fissato una della due variabili. Si usa il simbolo ∂ per indicare questa operazione.

Ad esempio la derivata parziale di f rispetto alla variabile x si scrive come:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

mentre rispetto alla variabile y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

In $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$ cambio la notazione per le derivate ma il concetto rimane il medesimo.

Altre notazioni includono:

$$f_x \quad \partial_x f \quad D_x f \quad D_I f$$

Gradiente:

Definisco gradiente il vettore che ha per componenti le derivate parziali della funzione f_{x_0} e si indica col simbolo ∇ chiamato *Nabla*:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

Funzione Derivabile:

Una funzione è detta derivabile in un punto x_0 se esistono tutte quante le sue derivate parziali in quel punto.

Piano Tangente:

Teoremi

Teorema di Weierstrass

#non_dimostrato

Enunciato: Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme chiuso e limitato e $f : E \to \mathbb{R}$ è continua. Allora f ammette massimo e minimo in E, ossia esistono $x_m, x_M \in E$ tali che:

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \; \forall x \in E$$

Praticamente mi sta dicendo che se f è una funzione continua e limitata in uno spazio allora è dotata di massimo e di minimo in quell'intervallo.

Teorema degli Zeri

#non_dimostrato
Enunciato: Sia E un insieme connesso per archi in $\mathbb{R}^2$ e $f : E \to \mathbb{R}$ sia continua in E. Presi due punti $x \text{ e } y$ tali che $f(x) \cdot f(y) < 0$ allora significa che esiste un punto z in cui f si annulla. Ovvero lungo l'arco che congiunge i due punti presi in considerazione, c'è un punto in cui l'arco si annulla.

Ricorda: i punti sono in $\mathbb{R}^n$ dunque sono definiti da n coordinate.