1 Metodo ai Nodi - Generatori di corrente e resistori

- Scegliere un nodo di riferimento
- Assumere come incognite le N-1 tensioni tra ogni nodo e il riferimento
- Scrivere N-1 equazioni di equilibrio in corrente (KCL) sulle superfici che raccolgono i nodi, inserendo opportunamente le relazioni costitutive dei bipoli connessi al nodo in esame.

Il numero delle equazioni da identificare in un circuito sono dettate dalla seguente equazione:

$$N_{eq} = N - 1 + N_{gv} + N_{gc} \tag{1}$$

Dove N_{gv} sono i generatori di tensione (non canonici) e N_{gc} sono i generatori controllati.
E' bene far notare che nel caso in cui nel circuito da analizzare si presentino del generatori di tensione controllati (VCVS, CCVS), essi vanno contati sia tra i generatori di tensione che tra quelli controllati.
I generatori indipendenti di tensione vanno considerati come generatori di corrente: gli associamo una corrente **in convenzione dell'utilizzatore** da inserire tra le incognite. Il suo segno sarà quindi negativo se entrante nel nodo e positivo se uscente dal nodo.
Allo stesso modo, quelli controllati vanno considerati come i loro corrispettivi indipendenti.

Se un generatore di tensione è collegato al nodo di riferimento (terra), posso evitare di scrivere la sua equazione poichè la sua tensione è nota. Ne risulta che il numero di equazioni diminuisce di quanti sono i generatori di tensione collegati al nodo di terra.

2 Metodo alle maglie - Generatori di tensione e resistori

- Individuare le R-N+1 maglie planari
- Associare ad ogni maglia la sua corrente fittizia che la percorre in senso orario
- Scrivere le R-N+1 equazioni di equilibrio di tensione (KVL) inserendovi opportunamente le relazioni costitutive degli elementi che insistono sulle maglie in esame

Il numero delle equazioni da identificare in un circuito sono dettate dalla seguente equazione:

$$N_{eq} = R - N + 1 + N_{gi} + N_{gc} \tag{2}$$

Dove N_{gi} sono i generatori di corrente (non canonici) e N_{gc} sono i generatori controllati.
E' bene far notare che nel caso in cui nel circuito da analizzare si presentino del generatori di corrente controllati (VCCS, CCCS), essi vanno contati sia tra i generatori di corrente che tra quelli controllati.
I generatori indipendenti di corrente vanno considerati come generatori di tensione: gli associamo una tensione **in convenzione dell'utilizzatore** da inserire fra le incognite. Il suo segno sarà quindi negativo se la corrente di maglia entra dal suo polo negativo, mentre sarà positivo se la corrente di maglia la percorre partendo dal polo positivo.
I generatori controllati, invece vanno considerati come i loro corrispettivi indipendenti.

Se nel circuito è presente un generatore di corrente su un ramo periferico, posso evitare di scrivere la sua equazione poichè la sua corrente è nota. Evito quindi di scrivere l'equazione di maglia (nel caso sia l'unico generatore che insiste sulla maglia).
Ne consegue che il numero di equazioni diminuisce di quanti sono i generatori di corrente posti su un ramo periferico.

3 Principio di sovrapposizione degli effetti

In un circuito resistivo lineare, qualunque tensione o corrente è la somma degli effetti dei singoli generatori indipendenti, quando agiscono uno alla volta.

Un generatore indipendente di tensione equivale ad un cortocircuito quando è spento, poichè la tensione diventa nulla per qualsiasi corrente.
Allo stesso modo, un generatore di corrente spento equivale ad un circuito aperto perchè la corrente è nulla per qualsiasi tensione.

L'analisi di un circuito tramite l'applicazione del principio di sovrapposizione si svolge in questo modo:

1. Inserire un generatore alla volta, con gli altri spenti, e ricavare la grandezza desiderata (partitori, MNA, MMA, sostituzione).
   - Generatore di tensione → cortocircuito
   - Generatore di corrente → circuito aperto
2. Sommare algebricamente i risultati ottenuti al punto 1.

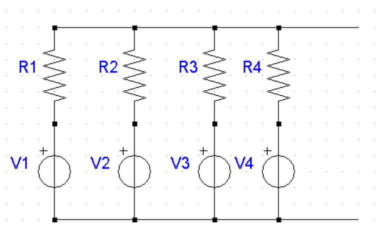
Gli unici bipoli trattati finora nel corso che producono un effetto sono i generatori indipendenti. Ne consegue che i generatori controllati e i resistori rimangono invariati all'applicazione del principio di sovrapposizione.

La sovrapposizione degli effetti vale per correnti e tensioni ma non vale per le potenze.
Questo perchè la relazione che c'è tra la potenza, tensione e corrente non è lineare. La sovrapposizione degli effetti infatti è una proprietà che deriva dalla linearità del circuito.
Per calcolare la potenza dopo aver applicato la sovrapposizione degli effetti bisogna usare le seguenti equazioni:

- Nel caso del calcolo della potenza di un generatore: $\mathcal{P} = (v^{(1)} + v^{(2)})(i^{(1)} + i^{(2)})$
- Nel caso del calcolo della potenza di un resistore: $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = R(i^{(1)} + i^{(2)})^2$

4 Teorema di Millman

Si applica quando in un circuito elettrico abbiamo n-generatori di tensione reali collegati in parallelo tra loro. Se nel parallelo si ha anche un generatore ideale di corrente, nel calcolo della tensione è sufficiente sommare il suo valore.



$$V_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{V_{gi}}{R_{gi}}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_{gi}}}, \qquad i_{gi} = \frac{V_{AB} - V_{gi}}{R_{gi}} \tag{3}$$

5 Principio di sostituzione

In un circuito elettrico è possibile sostituire un elemento (bipolo, porta ecc...) con un altro elemento con le stesse relazioni costitutive, senza alterare le grandezze elettriche della porta che non è stata sostituita.

Caso particolare
Una porzione accessibile attraverso una coppia di terminali può essere sostituita con un generatore di indipendente ideale che stabilisca la tensione o la corrente risultante.
È importante notare **non posso sostituire con un generatore indipendente se il resto della rete si comporta come un generatore indipendente dello stesso tipo.**

***

Le prime importanti conseguenze del principio di sostituzione riguardano delle particolari connessioni fra bipoli:

5.1 Connessioni in serie

2 o più bipoli sono connessi in serie se sono attraversati dalla stessa corrente.

$$R_{eq_s} = \sum_{i=1}^{N_r} R_i \tag{4}$$

5.2 Connessioni in parallelo

2 o più bipoli sono connessi in parallelo se attraverso i loro terminali c'è la stessa differenza di potenziale.

$$R_{eq_p} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{Nr} \frac{1}{Ri}} \tag{5}$$

Spesso, per il calcolo di due resistori in parallelo si può anche usare la formula:

$$R_{eq_p} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{6}$$

Nota! Un generatore di tensione <u>ideale</u> collegato in parallelo con altri elementi, corrisponde ad un generatore di tensione ideale! Allo stesso modo, un generatore di corrente <u>ideale</u> in serie con altri elementi, corrisponde ad un generatore di corrente ideale!

5.3 Trasformazioni stella $\Leftrightarrow$ triangolo

- Stella $\rightarrow$ Triangolo:

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_C} \tag{7}$$

$$R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_A} \tag{8}$$

$$R_A C = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_B} \tag{9}$$

  Nel caso in cui le resistenze della stella abbiano lo stesso valore:

$$R_\Delta = 3R_\lambda \tag{10}$$

- Triangolo $\rightarrow$ Stella:

$$R_A = \frac{R_{AB} + R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} \tag{11}$$

$$R_B = \frac{R_{AB} + R_{AC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} \tag{12}$$

$$R_C = \frac{R_{AC} + R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{AC}} \tag{13}$$

  Nel caso in cui le resistenze del triangolo abbiano lo stesso valore:

$$R_\lambda = \frac{R_\Delta}{3} \tag{14}$$

6 Circuiti canonici

Si chiamano così perchè sono circuiti molto frequenti.

6.1 Partitore di tensione - circuiti con una maglia

In questo circuito gli elementi sono in serie.

$$V_k = \frac{R_k}{\sum_{i=1}^{n} Ri} Vg \tag{15}$$

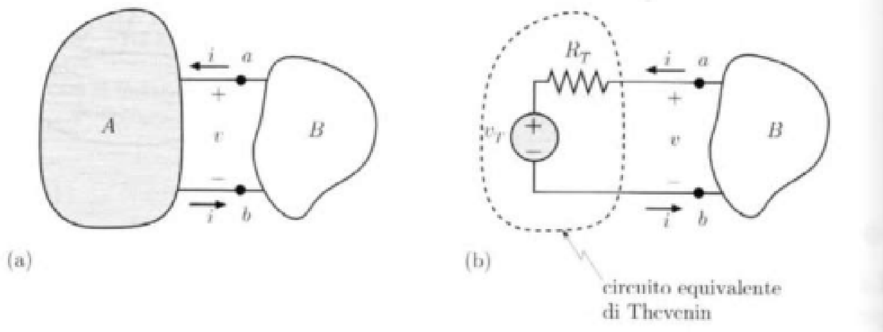
6.2 Partitore di corrente - circuiti con due nodi

In questo circuito gli elementi sono collegati in parallelo

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_g \longrightarrow i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_g \tag{16}$$

7 Teoremi delle sorgenti equivalenti - Norton e Thevenin

Figure 1: I teoremi delle sorgenti equivalenti si applicano alla seguente situazione:



Il bipolo $\mathcal{A}$ è un circuito resistivo *lineare*, accessibile da due terminali.
Il bipolo $\mathcal{B}$ è del tutto arbitrario.

> Un circuito resistivo lineare, accessibile da due terminali è equivalente ad un generatore indipendente di tensione in serie ad un resistore. La tensione V_{Th} del generatore è la tensione che si ha tra i terminali quando sono aperti (a vuoto). La resistenza R_{Th} è la resistenza equivalente al circuito con i generatori indipendenti spenti.

Per calcolare una tensione equivalente possiamo utilizzare alcuni degli strumenti risolutivi già illustrati sopra, come la sovrapposizione degli effetti, il principio di sostituzione o i metodi generali.

7.1 Estensione - Circuito con generatori controllati

Nel caso in cui in un circuito si ha un generatore pilotato, **il calcolo della R_{eq} va fatto in un modo diverso.** Ci sono due possibili soluzioni:

- Usare la **legge di Ohm** calcolando prima la corrente di Norton o la tensione di Thevenin, a seconda di quale teorema abbiamo applicato prima.

$$R_{eq} = \frac{V_{Th}}{I_N} \tag{17}$$

- Usare il **metodo amperometrico.** Dopo aver eliminato tutti i generatori indipendenti all'interno del circuito, fisso la grandezza che non ho modo di valutare inserendo un generatore ideale e infine faccio il rapporto con la grandezza già calcolata per ricavare R_{eq}.

8 Bipoli fondamentali - Proprietà

- ***Resistore***

Resistenza $\rightarrow v(t) = Ri(t)$ [R] $= \frac{V}{A} = \Omega$ (ohm)
Conduttanza $\rightarrow i(t) = GV(t)$ [G] $= \frac{A}{V} = \Omega^{-1}$ (Siemens / mho)

Il resistore è **lineare** nella sua idealità, **tempo invariante** e **passivo** del 1° tipo (irreversibile). Può diventare attivo se R o G diventano negative.

- ***Induttore***

Relazione costitutiva $\rightarrow v(t) = L\frac{di}{dt}$ [L] $= \Omega \cdot s$ (Henry)

L'induttore è idealmente **lineare**, **tempo invariante** e **passivo** del 2° tipo.

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\tau} L\frac{di}{d\tau}i(\tau)d\tau = \frac{1}{2}Li^2(\tau) \geq 0\, \forall\tau$$

Essendo la Potenza $P = L\frac{di}{dt}i(t) \gtrless 0$, può assumere qualsiasi segno. Perciò può sia erogare che assorbire energia.

- ***Condensatore***

Relazione costitutiva $\rightarrow i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$ [C] $= \frac{A}{V} \cdot s$ (Farad)

Il condensatore è idealmente **lineare**, **tempo invariante** e **passivo** del 2° tipo.

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} C\frac{dv}{dt}i(\tau)d\tau = \frac{1}{2}Li^2(t) \geq 0\, \forall t$$

Essendo la Potenza $P = C\frac{dv}{dt}v(t) \gtrless 0$, può assumere qualsiasi segno. Perciò può sia erogare che assorbire energia.

- ***Trasformatore ideale (n:m)***

Lo diventa se soddisfa queste tre proprietà: $L_1 \rightarrow \infty, \quad L_2 \rightarrow \infty, \quad K = 1$

Relazioni costitutive $\rightarrow \begin{cases} mV_1 = n \cdot V_2 \\ \frac{i_1}{m} = -\frac{1}{n}i_2 \end{cases}$ dove $\frac{n}{m}$ è detto rapporto di trasformazione

È **lineare**, **tempo invariante** e **passivo**:

$$P(t) = V_1 i_1 + V_2 i_2 = \frac{n}{m}V_2(-\frac{m}{n}i_2) + V_2 i_2 = 0, \quad \forall t$$

E' del tutto trasparente alla potenza poichè l'energia che entra nella prima porta esce dalla seconda.

Significato dei punti $\rightarrow$ I punti nello schema denotano la posizione interna delle bobine e sono collegati ai segni nelle relazioni costitutive:

1. Se le tensioni sono entrambe positive o entrambe negative in corrispondenza dei terminali con i puntini allora la prmia relazione costitutiva diventa:

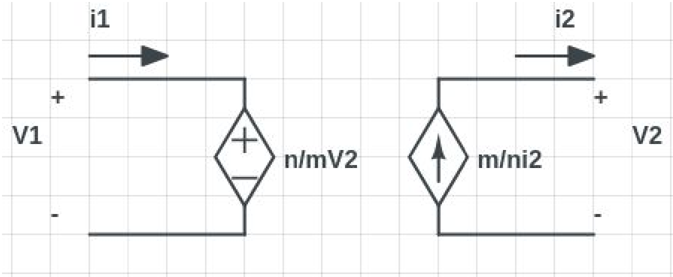
$$mV_1 = nV_2 \qquad \text{altrimenti } mV_1 = -nV_2$$

2. Se le correnti sono entrambe entranti o entrambe uscenti dai nodi con i puntini, la seconda relazione costitutiva risulta:

$$\frac{i_1}{m} = -\frac{1}{n}i_2 \qquad \text{altrimenti } \frac{i_1}{m} = \frac{1}{n}i_2$$

Modelli interscambiabili per i trasformatori

Il seguente modello è interscambiabile con un **trasformatore ideale n:m.**



È necessario far notare che non è possibile inserire dei generatori indipendenti ideali dello stesso tipo in parallelo a questa configurazione.

9 Generatori controllati

- ***VCVS - Voltage Controlled Voltage Source***
  $\begin{cases} V_2 = A_V \cdot V_1 \\ i_1 = 0 \end{cases}$ A_V è il guadagno di tensione, ed è adimensionale.
- ***CCVS - Current Controlled Voltage Source***
  $\begin{cases} V_2 = r \cdot i_1 \\ V_1 = 0 \end{cases}$ r è la transresistenza e si misura in Ohm (Ω).
- ***VCCS - Voltage Controlled Current Source***
  $\begin{cases} i_2 = g \cdot V_1 \\ i_1 = 0 \end{cases}$ g è la transconduttanza e si misura in Siemens (Ω^{-1}).
- ***CCCS - Current Controlled Current Source***
  $\begin{cases} i_2 = A_I \cdot i_1 \\ V_1 = 0 \end{cases}$ A_I è il guadagno di corrente ed è adimensionale.