Questi criteri si applicano per determinare la convergenza o divergenza di $\int_I f(x), dx$ quando f è continua sull'intervallo I, che può essere limitato con una singolarità o illimitato. Spesso è richiesto che $f(x)$ sia **positiva** sull'intervallo critico per l'applicazione dei criteri di confronto puntuale e asintotico.

1. Criterio del Confronto Puntuale

- **Condizioni:** $f, g : I \to \mathbb{R}$ continue e **positive** sull'intervallo I.
- **Regola:** Se $0 \le f(x) \le g(x)$ per ogni x in I (o vicino al punto critico):
  - Se $\int_I g(x), dx$ **converge** $\implies \int_I f(x), dx$ **converge**.
  - Se $\int_I f(x), dx$ **diverge** $\implies \int_I g(x), dx$ **diverge**.

2. Criterio del Confronto Asintotico

- **Condizioni:** $f, g : I \to \mathbb{R}$ continue e **positive** vicino al punto critico (singolarità o infinito). Sia c il punto critico.
- **Regola:** Si calcola il limite $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, dove c è il punto critico e $0 \le l \le +\infty$.
  - Se $0 < l < +\infty$ (limite finito e non nullo):
    - $\int_I f(x), dx$ e $\int_I g(x), dx$ hanno lo **stesso carattere** (entrambi convergono o entrambi divergono).
  - Se $l = 0$:
    - Se $\int_I g(x), dx$ **converge** $\implies \int_I f(x), dx$ **converge**.
  - Se $l = +\infty$:
    - Se $\int_I g(x), dx$ **diverge** $\implies \int_I f(x), dx$ **diverge**.
- **Corollari del Confronto Asintotico (con integrali campione)**:
  - **Singolarità in un estremo (es. in b su $[a, b)$):** $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ continua e positiva. Punto critico b. Si confronta con $g(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$. Si calcola $\lim_{x\to b^-} (b - x)^\alpha f(x) = l$.
    - $0 < l < +\infty$:
      - $\int_a^b f(x), dx$ **converge se e solo se** $\alpha < 1$, **diverge se e solo se** $\alpha \ge 1$. (f è un "infinito di ordine α" per $x \to b^-$).
    - $l = 0$:
      - $\int_a^b f(x), dx$ **converge se** $\alpha < 1$.
    - $l = +\infty$:
      - $\int_a^b f(x), dx$ **diverge se** $\alpha \ge 1$. *(Integrale campione $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$ converge per $\alpha < 1$, diverge per $\alpha \ge 1$).*
  - **Intervallo illimitato (es. $[a, +\infty)$):** $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua e positiva. Punto critico $+\infty$. Si confronta con $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Si calcola $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = l$.
    - $0 < l < +\infty$:
      - $\int_a^{+\infty} f(x), dx$ **converge se e solo se** $\alpha > 1$, **diverge se e solo se** $\alpha \le 1$. (f è un "infinitesimo di ordine α" per $x \to +\infty$).
    - $l = 0$:
      - $\int_a^{+\infty} f(x), dx$ **converge se** $\alpha > 1$.
    - $l = +\infty$:
      - $\int_a^{+\infty} f(x), dx$ **diverge se** $\alpha \le 1$. *(Integrale campione $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge per $\alpha > 1$, diverge per $\alpha \le 1$).*

3. Criterio della Convergenza Assoluta

- **Condizioni:** $f : I \to \mathbb{R}$ continua sull'intervallo I. Non richiede f positiva.
- **Regola:**
  - Se $\int_I |f(x)|, dx$ **converge**, allora $\int_I f(x), dx$ **converge**.
  - Se $\int_I |f(x)|, dx$ diverge, **non si può concludere nulla** sull'integrale originale con questo criterio.

Questi criteri, in particolare quelli di confronto, sono fondamentali perché permettono di stabilire il carattere (convergenza/divergenza) di un integrale generalizzato confrontandolo con altri integrali di cui il carattere è noto, senza necessariamente dover calcolare esplicitamente l'integrale stesso. Il criterio della convergenza assoluta è utile quando la funzione integranda non ha segno costante.