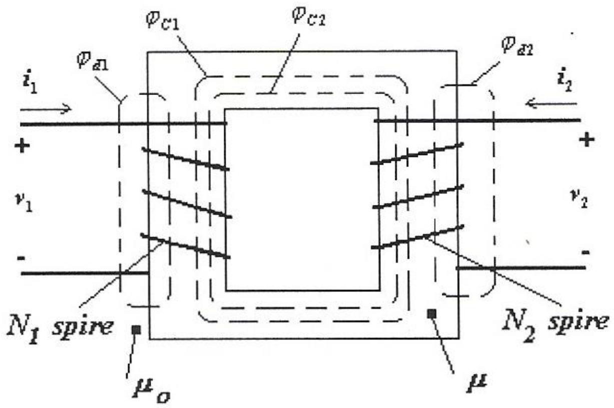
Modello mutue induttanze – Trasformatore ideale – Trasformatore reale

Prendiamo in considerazione il sistema rappresentato in figura:



Chiamiamo:

μ_0 e R_0 rispettivamente la permeabilità magnetica dell'aria (di valore $4\pi\cdot 10^{-7}$ H/m) e la riluttanza dell'aria;
μ e R_μ rispettivamente la permeabilità magnetica del nucleo ferromagnetico e la riluttanza dello stesso;
$\Phi_1 = N_1\varphi_1$ il flusso magnetico complessivamente generato dalle N_1 spire della bobina 1, che si suddivide in:

- φ_{C1} il flusso magnetico generato dalle N_1 spire della bobina 1 che si concatena con la bobina 2 (flusso concatenato);
- φ_{d1} il flusso magnetico generato dalle N_1 spire della bobina 1 che non si concatena con la bobina 2 (flusso disperso);

Analogo significato attribuiamo ai termini relativi alla bobina 2.

Assumiamo che il sistema sia lineare ed applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti:

1. Supponiamo innanzi tutto $i_2 = 0$ e facciamo scorrere i_1:

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{d}{dt}(N_1\varphi_1) = \dfrac{d}{dt}\Phi_1 = \dfrac{d}{dt}(N_1\varphi_{C1} + N_1\varphi_{d1}) \\ v_2' = \dfrac{d}{dt}(N_2\varphi_{C1}) \end{cases}$$

2. Supponiamo poi $i_1 = 0$ e facciamo scorrere i_2:

$$\begin{cases} v_2'' = \dfrac{d}{dt}(N_2\varphi_2) = \dfrac{d}{dt}\Phi_2 = \dfrac{d}{dt}(N_2\varphi_{C2} + N_2\varphi_{d2}) \\ v_1'' = \dfrac{d}{dt}(N_1\varphi_{C2}) \end{cases}$$

3. Combiniamo infine i due effetti:

$$\begin{cases} v_1 = v_1^{'} + v_1^{''} = \dfrac{d}{dt}\left(N_1\varphi_{C1} + N_1\varphi_{d1}\right) + \dfrac{d}{dt}\left(N_1\varphi_{C2}\right) \\ v_2 = v_2^{'} + v_2^{''} = \dfrac{d}{dt}\left(N_2\varphi_{C1}\right) + \dfrac{d}{dt}\left(N_2\varphi_{C2} + N_2\varphi_{d2}\right) \end{cases}$$

Indichiamo ora i vari termini in questo modo:

$$N_1\varphi_{C1} + N_1\varphi_{d1} = N_1\frac{N_1 i_1}{R_\mu} + N_1\frac{N_1 i_1}{R_0} = \left(\frac{N_1^2}{R_\mu} + \frac{N_1^2}{R_0}\right)i_1 = L_1 i_1$$

$$N_2\varphi_{C2} + N_2\varphi_{d2} = N_2\frac{N_2 i_2}{R_\mu} + N_2\frac{N_2 i_2}{R_0} = \left(\frac{N_2^2}{R_\mu} + \frac{N_2^2}{R_0}\right)i_2 = L_2 i_2$$

$$N_2\varphi_{C1} = N_2\frac{N_1 i_1}{R_\mu} = M_{2,1} i_1$$

$$N_1\varphi_{C2} = N_1\frac{N_2 i_2}{R_\mu} = M_{1,2} i_2$$

L_1 ed L_2 sono le induttanze proprie delle due bobine (o autoinduttanze) e rendono conto della caduta di tensione in ogni bobina generata dalla corrente che scorre nella stessa bobina.
$M_{1,2}$ ed $M_{2,1}$ sono le induttanze mutue e rendono conto della caduta di tensione in ogni bobina generata dalla corrente che scorre nell'altra bobina (accoppiata magneticamente).
Posso ora scrivere:

$$\begin{cases} v_1 = L_1\dfrac{d}{dt}i_1 + M_{1,2}\dfrac{d}{dt}i_2 \\ v_2 = L_2\dfrac{d}{dt}i_2 + M_{2,1}\dfrac{d}{dt}i_1 \end{cases}$$

Servendosi del principio di conservazione dell'energia è possibile dimostrare che $M_{1,2}$ ed $M_{2,1}$ sono uguali e, chiamando $M_{1,2} = M_{2,1} = M$, scrivere quindi:

$$\begin{cases} v_1 = L_1\dfrac{di_1}{dt} \pm |M|\dfrac{di_2}{dt} \\ v_2 = L_2\dfrac{di_2}{dt} \pm |M|\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Le due precedenti relazioni costitutive rappresentano il funzionamento della rete due porte "mutua induttanza" o "induttori mutuamente accoppiati". Il segno alternativo davanti al termine mutuo tiene conto del fatto che ogni avvolgimento può essere collocato in modo che la caduta di tensione che esso genera sia concorde ovvero discorde con quella dell'altro avvolgimento. Di tale fatto si rende conto mediante l'opportuna collocazione dei pallini neri sul simbolo.

La rete due porte "mutua induttanza" è anche un modello del trasformatore reale che tiene conto dei flussi dispersi (attraverso i termini φ_{d2} e φ_{d2}) e della "non-idealità" del materiale magnetico (attraverso la riluttanza di valore finito R_μ, che si traduce in valori finiti delle induttanze in gioco). Nello studio del trasformatore conviene di solito riferirsi ad un altro modello, ricavato da questo, ma che non contenga più il parametro M, che sarebbe più difficile da misurare operativamente.
Per ricavare il modello del trasformatore reale partiamo da quello appena ottenuto, poniamoci nell'ipotesi di regime sinusoidale e introduciamo quindi la notazione fasoriale:

$$\begin{cases}\overline{V_1} = j\omega L_1 \overline{I_1} \pm j\omega M \overline{I_2} \\ \overline{V_2} = j\omega L_2 \overline{I_2} \pm j\omega M \overline{I_1}\end{cases}$$

Attraverso questo modello è possibile dimostrare che condizione nec. e suff. affinché la mutua induttanza sia un elemento passivo è che L_1, $L_2 > 0$ e $|M| = k\sqrt{L_1 L_2} \quad 0 \le k \le 1$

La costante k è chiamata "coefficiente di accoppiamento" e la condizione $k = 1$ implica l'assenza di flussi dispersi.

La dimostrazione di quest'ultima affermazione è semplice, infatti se $k = 1$ allora

$$M = \sqrt{L_1 L_2} \quad \Rightarrow \quad M = \sqrt{\frac{N_1^2}{R}\frac{N_2^2}{R}} = \frac{N_1 N_2}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} = \frac{N_1}{N_2} = n$$

dove con n è indicato il "rapporto di trasformazione" o "rapporto spire" del trasformatore; ricordandoci ora che:

$$N_1 \varphi_{C1} + N_1 \varphi_{d1} = L_1 i_1$$

$$N_2 \varphi_{C1} = M i_1$$

ricaviamo:

$$\varphi_{d1} = \frac{L_1}{N_1} i_1 - \varphi_{C1} = \left(\frac{L_1}{N_1} - \frac{M}{N_2}\right) i_1 = 0 \quad \text{c.v.d} \quad (\text{analogamente per } \varphi_{d2})$$

Allora per k=1 otteniamo:

$$\begin{cases}\overline{V_1} = j\omega L_1 \left(\overline{I_1} \pm \frac{1}{n}\overline{I_2}\right) \\ \overline{V_2} = j\omega L_2 (\overline{I_2} \pm n\overline{I_1}) = \pm j\omega L_2 n \left(\overline{I_1} \pm \frac{1}{n}\overline{I_2}\right)\end{cases}$$

e quindi:

$$\frac{\overline{V_1}}{\overline{V_2}} = \frac{L_1}{\pm n L_2} = \frac{M \cdot n}{\pm \frac{M}{n} n} = \pm n \qquad \text{e} \qquad \begin{cases}\overline{I_1} = \frac{\overline{V_1}}{j\omega L_1} \pm \frac{1}{n}\overline{I_2} \\ \overline{I_2} = \frac{\overline{V_2}}{j\omega L_2} \mp n\overline{I_1}\end{cases}$$

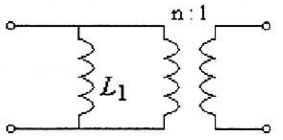
dove le ultime due equazioni a destra sono in realtà la stessa equazione.

Se il materiale tende ad un comportamento magnetico ideale, cioè $\mu \to \infty$ e quindi L_1, $L_2 \to \infty$, possiamo ritenere $\frac{\overline{V_1}}{j\omega L_1} << \overline{I_1}$ e $\frac{\overline{V_2}}{j\omega L_2} << \overline{I_2}$ ed ottenere quindi:

$$\begin{cases}\overline{V_1} = \pm n \overline{V_2} \\ \overline{I_1} = \mp \frac{1}{n}\overline{I_2}\end{cases}$$

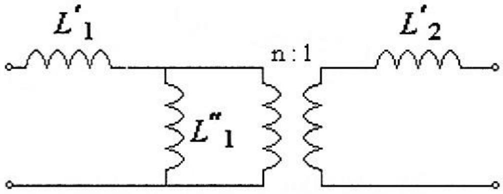
la quale rappresenta proprio la relazione costitutiva del trasformatore ideale. Essa è stata quindi ottenuta nelle condizioni di accoppiamento perfetto ($k = 1$) e di materiale magnetico ideale ($L_1 = L_2 = \infty$).

Procediamo ora a ritroso per tenere conto dei fattori di non-idealità. Se non è valida l'assunzione che $\frac{\overline{V_1}}{j\omega L_1} << \overline{I_1}$ e $\frac{\overline{V_2}}{j\omega L_2} << \overline{I_2}$ possiamo adottare il modello:



che comprende quindi L_1. La corrente assorbita da L_1 è chiamata "corrente di magnetizzazione" ed è associata ad una potenza reattiva $Q = \frac{V_1^2}{\omega L_1}$, evidentemente di natura induttiva.

Infine se non è valida l'assunzione che k =1, ma k < 1, possiamo allora scindere L_1 e L_2 è in due parti: $L_1 = L_1' + L_1''$ e $L_2 = L_2' + L_2''$ in modo tale che $L_1'' \cdot L_2'' = M^2$ ed ottenere quindi il modello:



Nel quale quindi L_1' e L_2' rendono conto dei flussi dispersi e L_1'' della permeabilità magnetica di valore finito del nucleo.