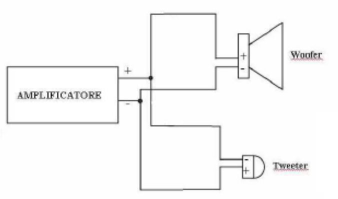
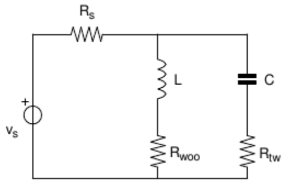
1 Esercizio:





Il sistema rappresenta un filtro di crossover per la riproduzione di un segnale in banda udibile (0 ÷ 15 kHz), separando le componenti in bassa frequenza nell'altoparlante Woofer e quelle di alta frequenza nell'altoparlante Tweeter. Assumendo che la resistenza interna del generatore/amplificatore di segnale sia RS = 5 Ω, così come quelle degli altoparlanti Rwoo = Rtw = 5 Ω, si dimensioni il filtro in modo da avere frequenza di crossover di 1 kHz e massimo trasf. di potenza per qualsiasi frequenza, eventualmente aiutandosi con SapWin per il calcolo dell'impedenza e per il tracciamento della risposta in frequenza. Si ricordi che per "frequenza di crossover" si intende quella frequenza alla quale coincidono i moduli delle impedenze del tweeter e del woofer. Si determini inoltre la potenza (attiva) convertita dai due altoparlanti, rispettivamente a 500 Hz e a 2000 Hz, assumendo un valore di picco (V_m) del segnale V_s di 15 V.

2 Svolgimento:

2.1 Frequenza di crossover:

$R_s = R_{woo} = R_{tw} = 5\,\Omega$
frequenza di crossover $= 1\,\text{kHz}$

Calcolo le impedenze dei due rami del tweeter e del woofer:

$$\mathbf{Z_w} = R + jwL, \qquad \mathbf{Z_t} = R + \frac{1}{jwC}$$

I rispettivi moduli:

$$|\mathbf{Z_w}| = \sqrt{R^2 + (wL)^2} \qquad |\mathbf{Z_t}| = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{wC})^2}.$$

La pulsazione di crossover si ha quando i moduli delle impedenze sono uguali:

$$R^2 + w^2L^2 = R^2 + \frac{1}{w^2C^2} \implies w^2L^2 = \frac{1}{w^2C^2} \implies w^4L^2 = \frac{1}{w^2C^2} \implies w^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\implies \mathrm{w}_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ pulsazione di crossover.}$$

Alle basse frequenze, il modulo dell'impedenza del tweeter è elevato, perciò la potenza erogata dal generatore viene ceduta in gran parte al woofe. All'aumentare della frequenza invece, aumenta l'impedenza del woofer e quindi la potenza erogat viene gradualmente trasferita al tweeter. Il nostro obiettivo è ripartire la potenza per avere il massimo trasferimento di potenza tra il generatore e gli altoparlanti ad ogni frequenza.
Per il Teorema del massimo trasferimento di potenza attiva, $\mathbf{Z_c} = \mathbf{Z_g}$,
quindi nel nostro caso: $\mathbf{Z}_{//} = R$.

2.2 Calcolo dei parametri per dimensionare il filtro:

Calcolo $\mathbf{Z}_{//}$:

$$\mathbf{Z}_{//} = \frac{(R+jwL)(R+\frac{1}{jwC})}{R+jwL+R+\frac{1}{jwC}} = \frac{R^2+\frac{R}{jwC}+jwRL+\frac{jwL}{jwC}}{2R+jwL+\frac{1}{jwC}} = \frac{jwR^2C+R-w^2RLC+jwL}{-w^2LC+jw2RC+1}$$

$$= \frac{R(1-w^2LC)+jw(R^2C+L)}{-w^2LC+jw2RC+1} \implies \mathbf{Z}_{//} = R\frac{(1-w^2LC+jw(R^2C+L)}{jw2RC-w^2LC+1}.$$

Per soddisfare l'ipotesi del Teorema del massimo trasferimento di potenza attiva:

$\frac{(1-w^2LC+jw(R^2C+L)}{jw2RC-w^2LC+1} = 1$, e ciò accade se $2RC = R^2C+L \longrightarrow 2RC = RC+\frac{L}{R} \implies L = R^2C$

Per dimensionare il filtro in modo che la frequenza di crossover sia $f_c = 1\,\text{kHz}$

$\implies w_0 = 2\pi 1000$ rad/s, determino L e C tali che: $\begin{cases} L = R^2C = 25C \\ w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi 1000 = 6.28\times 10^3 \text{ rad/s} \end{cases}$

quindi: $(2\pi 1000)^2 = \frac{1}{25C^2} \implies C^2 = \frac{1}{(2\pi 1000)^2 * 25}$

da cui si ottiene: $\begin{cases} C = 3.18\times 10^{-5}F = 31.8\times 10^{-6}F \approx 32\mu F \\ L = 25\cdot 32\times 10^{-6} = 8\times 10^{-4}H \approx 800\mu H \end{cases}$

Calcolo ora

$$\mathbf{Z}_{//} = \frac{5(1-w^2\cdot 800\mu H\cdot 32\mu F)+jw(5^2\cdot 32\mu F+800\mu H)}{-w^2\cdot 800\mu H\cdot 32\mu F+jw\cdot 10\cdot 32\mu F+1} = \frac{-w^2 1.3\times 10^{-7}+jw1.6\times 10^{-3}+5}{-w^2 2.5\times 10^{-8}+jw3.2\times 10^{-4}+1}$$

2.3 Risposta in frequenza:

Tramite la formula del partitore di tensione, mi ricavo la tensione sull'impedenza $\mathbf{Z}_{//}$. Per semplicità il valore del generatore di tensione ideale è pari a 1 V.

$$\mathbf{V_{out}} = \frac{\mathbf{Z}_{//}}{Z_{//}+5}\cdot 1 = \frac{\frac{N(jw)}{D(jw)}}{\frac{N(jw)}{D(jw)}+5} = \frac{\frac{N(jw)}{D(jw)}}{\frac{N(jw)+5D(jw)}{D(jw)}} = \frac{N(jw)}{D(jw)}\cdot\frac{D(jw)}{N(jw)+5D(jw)} = \frac{N(jw)}{N(jw)+5D(jw)} =$$

$$= \frac{-w^2\cdot 1.3\times 10^{-7}+jw\cdot 1.6\times 10^{-3}+5}{(-w^2\cdot 1.3\times 10^{-7}+jw\cdot 1.6\times 10^{-3}+5)+5(-w^2\cdot 2.5\times 10^{-8}+jw\cdot 3.2\times 10^{-4}+1)} =$$

$$= \frac{-w^2\cdot 1.3\times 10^{-7}+jw\cdot 1.6\times 10^{-3}+5}{-w^2\cdot 2.5\times 10^{-7}+jw\cdot 3.2\times 10^{-3}+10}$$

Pertanto, la funzione di rete $\mathbf{H}(jw) = \frac{\mathbf{V_{out}}}{\mathbf{V_{in}}} = \mathbf{V_{out}}$. Ciò significa che $\mathbf{V_{out}}(jw)$ corrisponde alla funzione di trasferimento.

2.4 Potenza attiva a 500Hz e 2000Hz:

$$V_m = 15V$$

Calcolo a 500Hz:

$$w_1 = 2\pi 500 = 3141.6 \text{ rad/s} \implies \begin{cases} \mathbf{Z_{L1}} = R + jwL = 5 + j2.5 \\ \mathbf{Z_{C2}} = R + \frac{1}{jwC} = 5 - j9.95 \end{cases}$$

Calcolo a 2000Hz:

$$w_2 = 2\pi 2000 = 12566.3 \text{ rad/s} \implies \begin{cases} \mathbf{Z_{L2}} = R + jwL = 5 + 10j \\ \mathbf{Z_{C2}} = R + \frac{1}{jwC} = 5 - 2.25j \end{cases}$$

$$\mathbf{Z_{eq}} = 5\angle 0.01 \approx 5 \quad \text{sia a 500Hz che a 2000Hz} \implies \mathbf{Z_{tot}} = R + \mathbf{Z_{eq}} = 10.$$
$$V_{eff} = \frac{15}{\sqrt{2}}, \quad I_{eff} = \frac{V_{eff}}{\mathbf{Z_{tot}}} = 1.06 \text{ A}, \quad V_{//} = \frac{\mathbf{Z_{eq}}}{\mathbf{Z_{tot}}} = \frac{15}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = 5.3\text{V}$$

Per $f = 500Hz$:

$$\begin{cases} \mathbf{I_{w_1}} = \frac{V_{//}}{\mathbf{Z_{L_1}}} = 0.94\angle - 26.56° \implies P_{w_1} = |I_{w_1}| \cdot V_{//} \cdot \cos(26.56°) = 4.5W \\ \mathbf{I_{t_1}} = \frac{V_{//}}{\mathbf{Z_{C_1}}} = 0.47\angle 63.3° \implies P_{t_1} = |I_{t_1}| \cdot V_{//} \cdot \cos(-63.3°) = 1.1W \end{cases}$$

Per $f = 2000Hz$:

$$\begin{cases} \mathbf{I_{w_2}} = \frac{V_{//}}{\mathbf{Z_{L_2}}} = 0.47\angle - 63.3° \implies P_{w_2} = |I_{w_2}| \cdot V_{//} \cdot \cos(-63.3°) = 1.1W \\ \mathbf{I_{t_2}} = \frac{V_{//}}{\mathbf{Z_{C_2}}} = 0.94\angle 26.56° \implies P_{t_2} = |I_{t_2}| \cdot V_{//} \cdot \cos(26.56°) = 4.5W \end{cases}$$