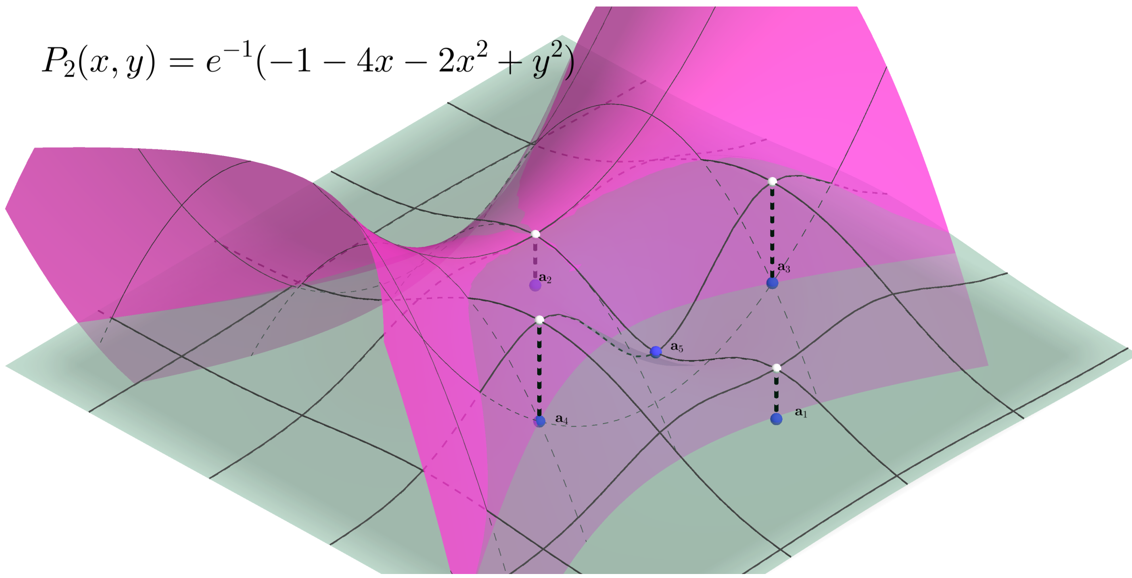
UNIDADES DIDÁCTICAS DE FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA



Lidia Huerga Pastor, Miguel Ángel Sama Meige

Universidad Nacional de Educación a Distancia
E.T.S. de Ingenieros Industriales
Departamento de Matemática Aplicada I

Índice

Unidad didáctica 1. Operaciones algebraicas, matrices y determinantes

Resumen y objetivos

La primera unidad temática está dedicada a los conceptos de operación algebraica, matrices y determinantes. Estos contenidos engloban los conceptos básicos del **Álgebra**, disciplina que no es más que el estudio de las operaciones definidas sobre conjuntos. Una de sus motivaciones históricas ha sido la resolución y clasificación de sistemas lineales. De los estudios de bachillerato el alumno está familiarizado con el algoritmo de Gauss-Jordan de matrices, coloquialmente **hacer ceros por filas** (o columnas) que se lleva a cabo aplicando una serie de operaciones elementales (permutación de filas, multiplicación por un escalar, etc) a la matriz. Se trata en este tema de entender que la resolución de sistema lineales es en parte un estudio de la operación producto en el conjunto de matrices, estrechamente ligado al algoritmo de Gauss-Jordan y a las denominadas **matrices elementales**. Empezamos dando los resultados más básicos de matrices, que van a ser una herramienta fundamental durante el curso. A continuación damos el concepto de **operación** y **estructura algebraica**, destacando la definición de **espacio vectorial** que va a ser la principal estructura algebraica que vamos a estudiar a lo largo del curso. El siguiente apartado está dedicado al **teorema de Gauss-Jordan**, en donde introducimos las matrices elementales. Además introducimos la noción de matriz escalonada y de rango de una matriz. En las dos últimas secciones establecemos el concepto de **determinante** y el teorema de caracterización de la **matriz inversa** que prueba que una matriz tiene inversa si y solamente si su determinante es no nulo. Relacionamos dichos resultados con las operaciones elementales, lo que nos permite razonar las principales propiedades de los determinantes y el algoritmo conocido de cálculo de la inversa mediante operaciones elementales.

OBJETIVOS

Al finalizar esta unidad didáctica, se pretende que el alumno sea capaz de:

- Verificar qué propiedades cumple una operación algebraica.
- Operar con matrices.

- Diferenciar los distintos tipos de matrices.
- Aplicar las propiedades más comunes para la traspuesta de una matriz.
- Calcular el determinante de una matriz cuadrada.
- Identificar las matrices elementales.
- Clasificar y resolver sistemas lineales aplicando el método de eliminación de Gauss-Jordan.
- Aplicar las propiedades de los determinantes para facilitar su cálculo.
- Calcular el rango de una matriz
- Reconocer si una matriz posee inversa y calcularla.

Capítulo 1

Operaciones algebraicas, matrices y determinantes

1.1. Matrices

Empezamos el capítulo dando la definición de matriz de números reales, sus propiedades y características más básicas. Las matrices de números reales son un objeto esencial dentro de las matemáticas y de este curso. En esta sección hacemos un recordatorio de los resultados más básicos. Empezamos con la definición formal de matriz de números reales junto con las notaciones que vamos a utilizar.

Definición 1.1 Una **matriz de números reales de orden** $n \times m$ es una tabla de n filas y m columnas de números reales. Cada número tiene asignada una posición (i, j) de modo que, fijado su orden, podemos representar una matriz genérica por (a_{ij}), en donde a_{ij} representa el valor situado en la fila i y columna j, para $i = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ..., m$, es decir

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2m} \\ ... & ... & .... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Al conjunto de todas las matrices de n filas y m columnas lo denotaremos por $\mathcal{M}_{n\times m}$.

Definición 1.2 Una matriz se dice **cuadrada** si el número de filas coincide con el de las columnas, es decir $n = m$. En caso contrario, si n distinto de m la matriz se dice **rectangular** . Al conjunto de matrices cuadradas $\mathcal{M}_{n\times n}$ se les dice matrices de orden n y se les suele denotar simplemente por $\mathcal{M}_n$.

Ejemplo 1.1. El conjunto de matrices de dos filas y tres columnas tiene la expresión general

$$\mathcal{M}_{2\times 3} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

y es un ejemplo de conjunto de matrices rectangulares. Ejemplo de matrices de dicho conjunto son

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$$

o la matriz

$$(a_{ij}) = (i+j) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}.$$

Un ejemplo de conjunto de matrices cuadradas es el conjunto de las matrices de orden 2

$$\mathcal{M}_{2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\},$$

siendo ejemplo de matrices de dicho conjunto la matriz unidad

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2.$$

Otro ejemplo de matriz cuadrada sería la matriz

$$(i+3j) = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}.$$

□

Observación 1.1. Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}$, una **submatriz** de A es cualquier matriz de tamaño menor formada por un subconjunto de las filas y columnas de A.

Por ejemplo si consideramos las matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son submatrices las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formadas por las segunda y tercera fila y las dos primera columnas,

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y la primera y cuarta filas y las cuatro columnas respectivamente

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

□

Definición 1.3 En el conjunto $\mathcal{M}_{n\times m}$ de las matrices de orden $n \times m$ se define la **suma** y el **producto por un número real** $\lambda \in \mathbb{R}$ de la forma siguiente

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij}).$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.2. Por ejemplo, si tomamos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

su suma viene dada por

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Asimismo, el producto de A por el escalar 2, viene dado por

$$2A = 2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

□

Definición 1.4 Dada dos matrices $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}$, $B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{m\times p}$, en donde asumimos que el número de columnas de la primera sea igual al número de filas de la segunda, entonces el **producto de** A **por** B, denotado por AB, es la matriz $C = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{n\times p}$ definida de la manera siguiente

$$(c_{ik}) = (a_{ij})(b_{jk}) = (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{im}b_{mk}) = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}\right)^{\text{a}}$$

Ejemplo 1.3. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3},$$

su producto

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 & 1\cdot 3 + 2\cdot(-2) \\ 0\cdot 1 + 3\cdot(-1) & 0\cdot 2 + 3\cdot 4 & 0\cdot 3 + 3\cdot(-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 10 & -1 \\ -3 & 12 & -6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3} \end{aligned}$$

tiene sentido ya que el número de columnas de A coincide con el de filas de B.

En cambio, en sentido opuesto, el producto

$$BA$$

no tiene sentido, ya que el número de columnas de B no coincide con el filas de A. □

Observación 1.2. En algunas referencias, se utiliza la notación $\times$ para denotar el producto de matrices. Es decir

$$AB = A \times B.$$

□

[a] **Notación**. Por $\sum$ denotamos el sumatorio que se utiliza para simplicar notación. Significa lo siguiente

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_m$$

Por ejemplo

$$\sum_{i=1}^{4} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$$

En general, a la matriz

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & .... & 0 \\ ... & ... & .... & ... \\ 0 & 0 & .... & 0 \end{pmatrix}$$

con todas sus entradas nulas la denominaremos **matriz nula** para cualquier tamaño de matriz. Se verifican las siguientes propiedades, en donde todas las matrices tiene un tamaño adecuado que hace que la operación correspondiente tenga sentido.

Proposición 1.1 Se cumplen las siguientes propiedades:

- $A + B = B + A$.
- $A(BC) = (AB)C$.
- $AO = O$.
- $A(B + C) = AB + AC$.
- $(A + B)C = AC + BC$.
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$

Veamos un ejemplo de estas propiedades.

Ejemplo 1.4. Tomemos por ejemplo las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Operando

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$$

y

$$(A + B)C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Por el otro lado

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix},$$

y

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Con lo que

$$AC + BC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$(A + B)C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 2 & 8 & 14 \end{pmatrix} = AC + BC.$$

□

Otro concepto fundamental es el de matriz traspuesta, que no es más que cambiar filas por columnas.

Definición 1.5 Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Se llama **matriz traspuesta** de A a la matriz $A^T \in \mathcal{M}_{m\times n}$ que se obtiene cambiando filas por columnas, es decir, si $A = (a_{ij})$, entonces $A^T = (a_{ji})$.

Se cumplen las siguientes propiedades.

Proposición 1.2 Sean A y B matrices de tamaño adecuado, se tienen las siguientes propiedades inmediatas.

- $A = (A^T)^T$.
- $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.

Ejemplo 1.5. Sea las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

del ejemplo anterior. Se tiene que sus matrices traspuestas respectivas vienen dadas por

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Compruébese que

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 10 & 12 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

y que efectivamente, teniendo en cuenta lo calculado en el ejemplo anterior,

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 10 & 12 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 10 & -1 \\ -3 & 12 & -6 \end{pmatrix}^T = (AB)^T.$$

□

1.1.1. Matrices cuadradas

Sea $\mathcal{M}_n$ el conjunto de la matrices cuadradas de orden n que ya hemos introducido anteriormente. En este sección definimos los conceptos más usuales relacionados con este tipo de matrices.

Definición 1.6 Sea $A \in \mathcal{M}_n$. Definimos los siguientes tipos de matrices.

- A es una **matriz diagonal** si todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son cero, es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
- A es una **matriz simétrica** si $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j = 1, 2, ..., n$.. Es decir, si

$$A = A^T.$$

Un ejemplo de matriz diagonal de gran importancia es la matriz unidad, es que aquella matriz diagonal con unos en todos los elementos de la diagonal.

Definición 1.7 La matriz cuadrada de orden n cuya diagonal principal está formada por unos y el resto ceros se llama **matriz unidad** o **identidad** y se denota por

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Al igual que en el producto de números reales, al multiplicar cualquier matriz por la unidad se vuelve a obtener la misma matriz. Es decir, dada $A \in \mathcal{M}_n$ se tiene

$$IA = AI = A. \tag{1.1}$$

Veamos un ejemplo de todo lo anterior.

Ejemplo 1.6. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2.$$

Es una matriz no simétrica ya que no coincide con su traspuesta

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq A$$

En cambio la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3$$

es una matriz simétrica, ya que

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = B.$$

En el conjunto de matrices de orden 3, la matriz unidad viene dada por

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Compruébese que la propiedad (1.1) se verifica,

$$BI = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = B$$

y

$$IB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = B.$$

□

Una vez que tenemos una matriz unidad, podemos definir el inverso de la misma manera que en el producto de números reales.

Definición 1.8 En general diremos que $B \in \mathcal{M}_n$ es la **matriz inversa** de una matriz no nula $A \in \mathcal{M}_n$ si

$$BA = AB = I. \tag{1.2}$$

En general denotaremos la matriz inversa por $B = A^{-1}$.

Observación 1.3. La matriz inversa, si existe, es única. Una matriz cuadrada A se dice que es **regular** si existe su matriz inversa, y **singular** en el caso de que no exista. □

Ejemplo 1.7. La matriz inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

viene dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ya que se verifica lo siguiente

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ A^{-1}A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Para un número real no nulo $a \neq 0$, su inverso (multiplicativo) $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ siempre existe. En cambio, no toda matriz no nula $O \neq A \in \mathcal{M}_n$ tiene inversa. En secciones posteriores vamos a volver sobre esta priopiedad, además veremos métodos para calcular algorítmicamente la matriz inversa.

1.2. Operaciones y estructuras algebraicas

En esta sección se introduce el concepto de operación algebraica, en el siguiente vídeo pueden encontar una introducción a dicho concepto.

***Enlace a vídeo* 1.** Introducción al concepto de operación algebraica

1.2.1. Definición de operación

Antes de introducir el concepto de operación algebraica necesitamos definir el concepto de producto cartesiano. Dado dos conjuntos M, N su **producto cartesiano** $M \times N$, (no confundir con el producto de matrices), viene dado por el conjunto de pares ordenados (m, n) de dichos conjuntos,

$$M \times N = \{(m, n) : m \in M, n \in N\}.$$

Por ejemplo, si $M = \{a, b, c\}$, $N = \{1, 2\}$, entonces

$$M \times N = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Definición 1.9 Una **operación** o **ley de composición interna** $\diamond$ en un conjunto cualquiera M, es una **aplicación** de $M \times M$ en M, es decir,

$$\begin{array}{rccc} \diamond : & M \times M & \to & M \\ & (a,b) & \mapsto & a \diamond b \end{array}$$

es una relación que a cada par de elementos a, b de M le hace corresponder un elemento de M que designamos por $a \diamond b$.

Veamos varios ejemplos.

Ejemplo 1.8. La suma usual $\diamond = +$ es una operación en el conjunto de los números naturales

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..., n, ...\},$$

y de igual forma en el conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{..., -n, .., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$$

y el conjunto de los números reales

$$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)^{\mathrm{b}}.$$

Es decir, por ejemplo, la suma de un número natural con otro vuelve a dar un número natural. Y lo mismo pasa con los números enteros y los números reales. Igualmente, la operación producto usual $\diamond = \cdot$ es una operación sobre los mismos conjuntos.

En cambio, para el intervalo cerrado $M = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, la suma usual $\diamond = +$ no es una operación. Por ejemplo, se pueden tomar dos elementos de dicho conjunto

$$m_1 = 0.8 \in M, \;\; m_2 = 0.4 \in M$$

tal que su suma no pertenezca al mismo.

$$m_1 + m_2 = 1.2 \notin M = [0, 1].$$

Mientras que el producto $\diamond = \cdot$ sí es una operación sobre el conjunto $M = [0, 1]$ ya que el producto de dos números de $[0, 1]$ es claramente otro elemento de $[0, 1]$. Como ejemplo, si $m_1 = 0.4$, $m_2 = 0.8$, entonces

$$m_1 \cdot m_2 = 0.8 \cdot 0.4 = 0.32 \in M.$$

$\square$

[b]Véase Sección **??** para una descripción detallada de los números reales y sus subconjuntos

1.3. Propiedades de una operación

Las operaciones se clasifican en función de las propiedades que verifiquen. A continuación definimos algunas de las propiedades más importantes.

Definición 1.10 Sea $\diamond$ una operación definida sobre un conjunto M.

- Una operación $\diamond$ es **conmutativa** si $a \diamond b = b \diamond a$ para todo $a, b \in M$.
- $\diamond$ es **asociativa** si $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$ para todo $a, b, c \in M$.
- $\diamond$ posee **elemento neutro** $e \in M$ si $a \diamond e = e \diamond a = a$ para todo $a \in M$.
- Si $\diamond$ posee elemento neutro e, se dice que $a' \in M$ es el elemento **inverso** de a si
$$a \diamond a' = a' \diamond a = e.$$

Ejemplo 1.9. Las operaciones usuales, suma $+$ y producto $\cdot$, cumplen las propiedades de conmutatividad y asociatividad en los conjuntos de números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$. De hecho, cuando operamos con dichos conjuntos de números aplicamos dichas propiedades constantemente. El elemento neutro para la suma $\diamond = +$ es el cero $e = 0$, mientras que para el producto $\diamond = \cdot$ es la unidad $e = 1$. Los números naturales no tienen inverso ni con respecto de la suma, ni del producto. Por ejemplo si tomamos

$$a = 2 \in \mathbb{N},$$

su inverso respecto de la suma necesariamente verifica [c]

$$a' + 2 = 0 \Rightarrow a' = -2 \notin \mathbb{N}$$

pero $a' = -2 \notin \mathbb{N}$ no es un número natural.

En cambio todo número entero $a \in \mathbb{Z}$ sí tiene inverso respecto de la suma dado por su opuesto $-a \in \mathbb{Z}$,

$$a + (-a) = 0,$$

pero no con respecto del producto. Por ejemplo, para el mismo número $a = 2$ el inverso necesariamente sería

$$\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

que no pertenece al conjunto. Todo número real tiene inverso con respecto de la suma y, exceptuando el cero, con respecto del producto. □

[c] **Notación**. Dado un conjunto $\mathbf{A}$ de $\mathbb{R}$. Por $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, denotamos que un elemento $\mathbf{a}$ pertenece a $\mathbf{A}$. Del mismo modo, por $\mathbf{a} \notin \mathbf{A}$ denotaremos que $\mathbf{a}$ no pertenece a $\mathbf{A}$.

Ejemplo 1.10. Consideremos la operación

$$\begin{array}{rcl} \diamond : \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (n,m) & \longmapsto & n\diamond m = |n-m| \end{array}$$

sobre el conjunto de los números naturales.

Efectivamente, $\diamond$ es una operación sobre el conjunto de los números naturales, ya que $|n-m| \in \mathbb{N}$ para cualesquiera números naturales $n, m \in \mathbb{N}$ que tomemos. Además se cumplen las siguientes propiedades.

- $\diamond$ es conmutativa

$$n\diamond m = |n-m| = |-(n-m)| = |m-n| = m\diamond n.$$

- $e = 0$ es el elemento neutro, ya que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} n\diamond 0 &= |n-0| = n, \\ 0\diamond n &= |0-n| = n. \end{aligned}$$

- $\diamond$ no es asociativa. Si tomamos $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, no se verifica la propiedad asociativa. Por un lado se tiene

$$(a\diamond b)\diamond c = (1\diamond 2)\diamond 3 = 1\diamond 3 = 2,$$

  y por el otro

$$a\diamond (b\diamond c) = 1\diamond (2\diamond 3) = 1\diamond 1 = 0.$$

  Con lo que

$$(1\diamond 2)\diamond 3 = 2 \neq 0 = 1\diamond (2\diamond 3).$$

□

Durante el curso nuestro interés estará puesto en las operaciones involucradas en la **resolución y clasificación de sistemas lineales**. Por ello, como iremos viendo en ésta y en la siguiente unidad didáctica, estamos interesados en las operaciones definidas sobre el conjuntos de vectores de n componentes reales.

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}.$$

La primera operación a considerar es la suma de vectores.

Observación 1.4. Sobre el conjunto de los vectores de n componentes reales

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

podemos definir una operación suma $+$ de manera natural. Para todos $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos la suma $+$ por

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n).$$

Por ejemplo, si tomamos $\mathbf{x} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{y} = (0, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$ su suma viene dada por

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (1, 0, 2) + (0, -1, 1) = (1, -1, 3) \in \mathbb{R}^3.$$

$+$ es conmutativa. Es claro que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3) \\ &= (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3) = \mathbf{y} + \mathbf{x}. \end{aligned}$$

$+$ es asociativa. Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}.$$

Por ejemplo, si tomamos $\mathbf{z} = (4, 1, 2)$, entonces por un lado

$$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (1, 0, 2) + [(0, -1, 1) + (4, 1, 2)] = (1, 0, 2) + (4, 0, 3) = (5, 0, 5),$$

mientras que por el otro

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = [(1, 0, 2) + (0, -1, 1)] + (4, 1, 2) = (1, -1, 3) + (4, 1, 2) = (5, 0, 5).$$

Existe elemento neutro dado por vector nulo $e = \mathbf{0} = (0, ..., 0)$, tal que

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}.$$

Por ejemplo,

$$\mathbf{x} + \mathbf{0} = (1, 0, 2) + (0, 0, 0) = (1, 0, 2) = \mathbf{x}.$$

Todo elemento $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tiene inverso dado por el vector opuesto

$$-\mathbf{x} = (-x_1, ..., -x_n) \in \mathbb{R}^n$$

para el que

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Por ejemplo $-\mathbf{z} = (-4, -1, -2)$ y se tiene

$$\mathbf{z} + (-\mathbf{z}) = (4, 1, 2) + (-4, -1, -2) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}.$$

$\square$

Otro tipo de operaciones fundamentales, asimismo involucradas en la resolución de sistemas lineales, son las operaciones suma y producto sobre el conjunto de matrices. En la Proposición 1.1 hemos enumerado algunas de las propiedades más importantes de este tipo de operaciones. En los siguientes observaciones comentamos algunos de los aspecto más destacados para este caso.

Observación 1.5. La suma de matrices de números reales de cualquier tamaño es conmutativa, asociativa, y tiene elemento neutro dado por la matriz nula. Es consecuencia directa de las mismas propiedades de los números reales. Por ejemplo, si consideramos las matrices de orden 2×3

$$\mathcal{M}_{2\times 3} = \left\{ A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\},$$

su suma se puede escribir del siguiente modo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}.$$

$+$ es conmutativa y asociativa, sin más que aplicar a cada entrada de la matriz las propiedades correspondientes de los números reales. Por otro lado, el elemento neutro es

$$e = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A + O = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = A.$$

Y siempre existe inverso (opuesto) de cualquier matriz A dado por

$$A' = -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{pmatrix},$$

ya que claramente

$$A + A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

□

Observación 1.6. Hemos visto que el producto se define entre matrices de determinado tamaño, y por tanto la operación solamente tiene sentido entre ciertos tipos de matrices. En el caso de la matrices cuadradas $\mathcal{M}_n$, la operación producto siempre tiene sentido, y además verifica las propiedades de asociatividad y existencia de elemento neutro, dado por la matriz identidad. En cambio no es conmutativo en general. Para ver esto, consideremos el conjunto de la matrices cuadradas de orden 2

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

con el producto de matrices

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

El producto de matrices es asociativo. Se puede comprobar directamente desarrollando los productos siguientes y viendo que son necesariamente iguales.

$$\begin{array}{c} \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \\ \| \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \right). \end{array}$$

En cambio, el producto de matrices no es conmutativo. Por ejemplo, tomando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por un lado se tiene

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

y por el otro

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con lo que

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = BA.$$

Tal como vimos en (1.1), existe elemento neutro dado por la matriz identidad

$$e = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, si tomamos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

entonces

$$AI = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

y

$$IA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Un aspecto muy destacado del producto de matrices, es que no toda matriz no nula tiene inversa. Por ejemplo, la matriz anterior A no tiene inversa. Si existiese inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

entonces necesariamente se tiene que cumplir [d]

$$A \times A^{-1} = I,$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lo que implica

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pero esta igualdad no tiene sentido, es imposible. Por ejemplo, igualando las coordenadas de la primera columna llegamos al absurdo

$$a + c = 1, \, a + c = 0.$$

□

[d]**Notación.** Dadas dos expresiones matemáticas `A` y `B`, por `A`⇒ `B` denotaremos que `A` implica `B`. Por ejemplo,

$$x = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 2 = 0$$

Por `A`⇔ `B`, denotaremos la doble implicación. Es decir, `A`⇒ `B` y `B`⇒ `A`. Por ejemplo

$$x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0$$

1.3.1. Ley de composición externa

Existen otro tipo de operaciones que involucran dos conjuntos diferentes, por ejemplo cuando multiplicamos una matriz o un vector por un escalar. En este caso, tenemos lo que se llama una **operación** o **ley de composición externa.** En el curso solamente consideraremos leyes de composición externa de tipo **producto por un escalar**. En donde dado un conjunto M, tenemos una **aplicación** de $\mathbb{R} \times M$ en M, es decir,

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times M & \to & M \\ & (\lambda, a) & \mapsto & \lambda \cdot a \end{array}$$

Un ejemplo de este tipo de operación, es el producto de un escalar por una matriz que ya vimos en la definición 1.3. Otro es el producto de un escalar por un vector de $\mathbb{R}^n$. Asi defininimos el producto de un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por un vector $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, que denotaremos simplemente por $\lambda\mathbf{x}$, como

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n).$$

Ejemplo 1.11. Consideremos

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Tomando $\mathbf{x} = (2, -1)$, $\lambda = -2$ se tiene que

$$\lambda\mathbf{x} = -2(2, -1) = (-4, 2).$$

$\square$

1.3.2. Estructuras algebraicas

Una **estructura algebraica** es un conjunto (no vacío) M en el que están definidas una o más operaciones que poseen determinadas propiedades. Un ejemplo de estructura algebraica es la de grupo que definimos a continuación.

Definición 1.11 Sea M un conjunto sobre el que hay definida una operación $\diamond$. Diremos que $(M, \diamond)$ es un grupo si para todos $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in M$ se verifica:

$\mathbf{a} \diamond (\mathbf{b} \diamond \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \diamond \mathbf{b}) \diamond \mathbf{c}$.	*Ley asociativa*
Existe $\mathbf{e}$ tal que $\mathbf{a} \diamond \mathbf{e} = \mathbf{e} \diamond \mathbf{a} = \mathbf{a}$.	*Existencia de elemento neutro*
Existe $\mathbf{a}'$ tal que $\mathbf{a} \diamond \mathbf{a}' = \mathbf{e}$.	*Existencia de elemento inverso*

Un grupo se dice **conmutativo o abeliano** si además se verifica

$$\mathbf{a} \diamond \mathbf{b} = \mathbf{b} \diamond \mathbf{a}. \quad \textit{Ley conmutativa de la suma}$$

Ejemplo 1.12. Por lo visto anteriormente, tenemos que los números enteros y los reales

$$(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{R}, +)$$

con la suma constituyen un grupo conmutativo.

Asimismo las matrices

$$(\mathcal{M}_{n\times m}, +)$$

con la suma constituyen grupo conmutativo.

Los números reales sin el cero

$$(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)^{\mathrm{e}}$$

constituyen asimismo un grupo conmutativo. Mientras que la matrices cuadradas

$$(\mathcal{M}_n, \times)$$

con el producto $\times$ constituyen un ejemplo de grupo no conmutativo para órdenes $n > 1$. □

La principal estructura algebraica que estudiaremos a lo largo del curso será la de **espacio vectorial**, avanzamos aquí su definición que estudiaremos con detenimiento en las siguientes unidades didácticas.

Definición 1.12 Sea un conjunto $\mathbb{V}$ dotado de una operación interna $+$ y una operación producto por escalar $\cdot$. $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ se dice **espacio vectorial** si

- $(\mathbb{V}, +)$ es un grupo conmutativo.
- Además, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ se tiene

$$\begin{array}{ll}
\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v}. & \textit{Distributiva respecto a } + \textit{ de } \mathbb{V} \\
(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{u} + \mu \cdot \mathbf{v}. & \textit{Distributiva respecto a } + \textit{ de } \mathbb{R} \\
\lambda(\mu \cdot \mathbf{u}) = (\lambda\mu) \cdot \mathbf{u}. & \textit{Asociativa respecto al producto por} \text{ un escalar de } \mathbb{V} \\
1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}. & 1 \textit{ es el elemento neutro de } \mathbb{V}
\end{array}$$

Observación 1.7.

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, el conjunto de vectores de n componentes con su suma usual $+$ y el producto por un escalar $\cdot$ es un espacio vectorial.

[e] **Notación.** $\mathbb{R}\backslash\{0\} = \{r \in \mathbb{R} : r \neq 0\}$ denota todos los números reales. En general, $\backslash$ es el símbolo de sustracion de conjuntos. Es decir, dados conjuntos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, por $\mathbf{A}\backslash\mathbf{B}$ denotamos todos los elementos de $\mathbf{A}$ no pertenecientes a $\mathbf{B}$. Es decir,

$$\mathbf{A}\backslash\mathbf{B} = \{x \in \mathbf{A} : x \notin \mathbf{B}\}$$

- $(\mathcal{M}_{m\times n}, +, \cdot)$ el conjunto de matrices de números reales de orden cualquiera $m \times n$ con la suma y producto por escalar verifican también la estructura de espacio vectorial.

Por ello, solemos referirnos a dichas operaciones globalmente como **operaciones vectoriales.** Junto con el producto de matrices son las operaciones involucradas en la **resolución y clasificación de sistemas lineales** y como veremos posteriormente tienen una especial relevancia en el curso. □

1.4. Métodos de eliminación de Gauss

Los **métodos de eliminación de Gauss** para resolver sistemas lineales, coloquialmente **hacer ceros por filas** (o columnas), busca reducir dicha matriz a una matriz equivalente más sencilla aplicando una serie de operaciones elementales (permutación de filas, multiplicación por un escalar, etc) a la matriz. Se trata en esta sección de entender desde una perspectiva práctica que dicho algoritmo no es más que la multiplicación reiterada por determinadas matrices denominadas elementales.

1.4.1. Operaciones y matrices elementales

Definimos en primer lugar las operaciones elementales.

Definición 1.13 Las **operaciones elementales por fila** son:

- Intercambiar dos filas $(F_i \longleftrightarrow F_j)$, $i \neq j$

- Multiplicar una fila por un escalar $\lambda \neq 0$ $(F_i \to \lambda F_i)$

- Sumar a una fila otra fila distinta multiplicada por un escalar $(F_i \to F_i + \lambda F_j)$ $j \neq i$.

Las operaciones elementales nos permiten simplificar un sistema lineal a uno equivalente fácilmente calculable. Veamos un ejemplo de como aplicar operaciones elementales consecutivamente sobre una matriz.

Ejemplo 1.13. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y apliquemos diversas operaciones elementales para encontrar una matriz que tengo ceros por debajo de la diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A' \quad \xrightarrow{F_3 \to F_3 - \frac{3}{2}F_1} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = A''$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - \frac{1}{2}F_2} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A''' \quad \xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{2}F_1} \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A''''$$

La matriz resultado de este algoritmo,

$$A'''' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz con todos ceros por debajo de la diagonal, estando la diagonal formada únicamente por unos y ceros. Dicha matriz es, como veremos, la **matriz escalonada reducida** de A. □

El proceso anterior se corresponde a **multiplicar por la izquierda** por una determinada **matriz elemental** en cada etapa. Veamos caso por caso.

Ejemplo 1.14. Intercambiar dos filas, por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

se corresponde a la multiplicación

$$A' = F_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

en donde

$$F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz resultado de permutar las filas 1 y 2 en la matriz identidad. □

Definición 1.14 Se define la **matriz elemental** F_{ij} como la matriz resultado de permutar las filas i y j en la matriz identidad.

Ejemplo 1.15. Multiplicar una fila por un escalar, por ejemplo

$$A''' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_1 \to \frac{1}{2}F_1}{} A'''' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se corresponde a la multiplicación

$$A'''' = F_1\left(\frac{1}{2}\right) A''' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en donde

$$F_1\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es el resultado de sustituir en la identidad el elemento 1 de la diagonal por el número $\lambda = \frac{1}{2}$. □

Definición 1.15 Se define la **matriz elemental** $F_i(\lambda)$ la matriz resultado de sustituir en la matriz identidad, la entrada (i, j) por el número λ.

Ejemplo 1.16. Sumarle a una fila otra multiplicada por un escalar, por ejemplo

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - \frac{3}{2}F_1}{} A'' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

se corresponde a la multiplicación

$$A'' = F_{31}\left(-\frac{3}{2}\right) A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

en donde

$$F_{31}\left(-\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es el resultado de añadir a la matriz identidad el número real $-\frac{3}{2}$ en la entrada $(3, 1)$. □

Definición 1.16 Se define la **matriz elemental** $F_{ij}(\lambda)$ como la matriz resultado de añadir a la matriz identidad el número real λ en la entrada (i, j).

Ejemplo 1.17. La transformación mediante cuatro operaciones elementales, de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a

$$A'''' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se corresponde a multiplicar por cuatro matrices elementales siguiendo el orden dado

$$A'''' = F_1\left(\frac{1}{2}\right) F_{32}\left(-\frac{1}{2}\right) F_{31}\left(-\frac{3}{2}\right) F_{12}A.$$

La matriz

$$P = F_1\left(\frac{1}{2}\right) F_{32}\left(-\frac{1}{2}\right) F_{31}\left(-\frac{3}{2}\right) F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

es fácilmente calculable aplicando la propiedades elementales a la matriz identidad. A dicha matriz P, producto de matrices elementales, se le suele denominar **matriz de paso** y verifica que

$$PA = A''''.$$

Efectivamente

$$\begin{aligned} PA &= \left(F_1\left(\frac{1}{2}\right) F_{32}\left(-\frac{1}{2}\right) F_{31}\left(-\frac{3}{2}\right) F_{12}\right) A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A''''. \end{aligned}$$

□

Observación 1.8. Téngase en cuenta que las transformaciones elementales no solamente se aplican a matrices cuadradas, sino a cualquier matriz rectangular. Por ejemplo, consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podemos aplicar las siguientes transformaciones elementales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to F_2 - 2F_1}{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -3 \end{pmatrix} = A'$$

$$\underset{F_2 \to \frac{1}{3} F_2}{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} = A''$$

En este caso la matriz de paso viene dada por

$$P = F_2\left(\frac{1}{3}\right) F_{21}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Se comprueba que efectivamente

$$PA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} = A''.$$

□

Observación 1.9. Aunque nuestro interés primordial está puesto en las operaciones elementales por filas, es evidente que también podemos considerar las correspondientes **operaciones elementales por columna**

- Intercambiar dos columnas ($C_i \longleftrightarrow C_j$), $i \neq j$.
- Multiplicar una columnas por un escalar $\lambda \neq 0$ ($C_i \to \lambda C_i$).
- Sumar a una columnas otra columnas distinta multiplicada por un escalar ($C_i \to C_i + \lambda C_j$) $j \neq i$.

En este caso, las operaciones elementales por columnas se corresponden con multiplicar por la derecha las correspondientes matrices elementales[f]

$$\begin{aligned} C_{ij} &= F_{ij}^T = F_{ij}, \\ C_i(\lambda) &= F_i(\lambda)^T = F_i(\lambda), \\ C_{ij}(\lambda) &= F_{ij}(\lambda)^T = F_{ji}(\lambda). \end{aligned}$$

[f] Se puede demostrar razonando mediante operaciones por filas aplicando la propiedad del producto de matrices traspuestas

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Por ejemplo, consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz que permuta las columnas 1 y 2 ($C_1 \longleftrightarrow C_2$) viene dada por la matriz

$$C_{12} = F_{12}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Efectivamente

$$AC_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Del mismo modo, la operación elemental sumar a la tercera columna la segunda columna se corresponde con la matriz

$$C_{32}(1) = F_{32}(1)^T = F_{23}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Efectivamente

$$AC_{23}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

1.4.2. Matriz escalonada. Rango de una matriz

Definición 1.17 Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ se dice **escalonada** si cumple:

- Si hay filas nulas están al final de la matriz.
- Cada fila debe comenzar con al menos un cero más que la fila anterior. Al primer elemento no nulo de cada fila lo denominamos **pivote**.

A partir de la noción de matriz escalonada podemos definir la noción de rango que como veremos es un concepto fundamental en Álgebra. Posteriormente daremos otras definiciones alternativas que justifican la siguiente definición. Para ello en primer lugar debemos definimos el concepto de matrices equivalentes.

Definición 1.18 Diremos que dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times m}$ son **equivalentes** si una es el resultado de aplicar operaciones elementales sobre la otra. En dicho caso lo denotaremos por $A \approx B$.

Mediante la matriz escalonada asociada podemos definir el rango de una matriz.

Definición 1.19 Sea una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$. El **rango** de A es el número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada equivalente[g]. Lo denotaremos por rango(A).

Ejemplo 1.18. En el caso de la matriz A del ejemplo 1.13

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

una matriz escalonada equivalente viene dada por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dicha matriz tiene dos pivotes y por tanto dos filas no nulas, luego rango$(A) = 2$. □

Ejemplo 1.19. *Determine una matriz escalonada asociada y calcule el rango de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Podemos transformar dicha matriz mediante operaciones elementales en una matriz escalonada equivalente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_2 + F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

La matriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

es una matriz escalonada equivalente con tres pivotes y ninguna fila nula, luego su rango es 3. Y por tanto rango$(A) = 3$. □

[g] Se puede probar que el número de filas no nulas es el mismo para cualquier matriz escalonada equivalente.

1.4.3. Teorema de Gauss-Jordan

Un caso de matriz escalonada es aquella en donde los pivotes valen 1 y son los únicos elementos no nulos de las columnas. El **teorema de Gauss-Jordan** nos asegura que para cada matriz existe una única matriz escalonada equivalente de este tipo que denominaremos matriz escalonada reducida.

Definición 1.20 Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ su **matriz escalonada reducida** viene dada por las siguientes propiedades:

- Está en forma escalonada.
- Los pivotes valen 1.
- En cada columna donde hay un pivote, el resto de los elementos son ceros.

La matriz escalonada reducida es **única** y se denotará por $\mathrm{red}(A)$.

Teorema 1.1 Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ se puede transformar en una matriz en forma escalonada reducida mediante operaciones elementales por filas. Es decir existe una **matriz de paso** $P \in \mathcal{M}_n$, producto de matrices elementales, tal que

$$\mathrm{red}(A) = PA.$$

Ejemplo 1.20. En el caso de la matriz A del ejemplo 1.13

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz tiene dos pivotes. Tenemos que hacer ceros por encima del segundo pivote para hallar su matriz escalonada reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_1\to F_1-\frac{1}{2}F_2}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{red}(A).$$

□

Ejemplo 1.21. *Calcular la matriz escalonada reducida, determinando la matriz de paso, de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para calcular la matriz escalonada reducida, continuamos las tranformaciones elementales dadas en el ejemplo 1.19 de manera que hagamos ceros por encima y debajo de los pivotes.

Para ello, en cada columna vamos haciendo ceros utilizando el correspondiente pivote que previamente hemos de normalizar a 1.

$$
\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to \frac{1}{2} F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \\
& \underset{F_3 \to F_3 + 2F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \underset{F_1 \to F_1 - 2F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \\
& \underset{F_3 \to \frac{1}{7} F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \underset{F_2 \to F_2 - \frac{1}{2} F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \\
& \underset{F_1 \to F_1 + 4F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Luego la matriz escalonada reducida viene dada por

$$
\operatorname{red}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

La matriz de paso viene dada por el producto de matrices elementales correspondiente a cada operación elemental siguiendo el mismo orden

$$
P = F_{13}\,(4)\, F_{23} \left(-\frac{1}{2} \right) F_3 \left(\frac{1}{7} \right) F_{12}\,(-2)\, F_{32}\,(2)\, F_2 \left(\frac{1}{2} \right) F_{31}(-1),
$$

operando explícitamente

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Efectivamente, se verifica

$$
\operatorname{red}(A) = PA = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

□

1.4.4. Sistemas lineales. Método de eliminación de Gauss-Jordan

Las transformaciones elementales sobre matrices nos permiten definir diversos algoritmos para clasificar y resolver sistemas lineales, es decir, para estudiar si un sistema lineal tiene o no solución y para calcular dichas soluciones explícitamente. Introducimos en esta sección de manera suscinta el **método de Gauss-Jordan** . En dicho método se transforman mediante operaciones elementales las matrices asociadas al sistema lineal hasta llegar a su matriz escalonada reducida que nos proporciona un sistema lineal equivalente y simplicado, que nos permite analizar de manera sencilla si tiene solución y hallar explícitamente las mismas. Empezamos con la definición de sistema lineal, contenido que veremos ampliado en la siguiente unidad didáctida cuando tratemos el **método de Rouché-Frobenius**, véase sección **??**. Así, consideramos ahora un sistema lineal estándar de k incógnitas y n ecuaciones

- Encontrar $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ verificando

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + ... + a_{1k}x_k & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nk}x_k & = & b_n \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

Denotando matricialmente

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nk} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

podemos expresar el sistema lineal de la siguiente manera, en donde $A \in \mathcal{M}_{n\times k}$ es la **matriz de coeficientes** del sistema lineal , $\mathbf{x}$ el **vector de incógnitas** y $\mathbf{b}$ el **término independiente** del sistema lineal.

-Encontrar $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ tal que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo consideremos el sistema lineal:

Encontrar $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ verificando

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 1 \\ 2x_2 + x_3 & = & -2 \\ x_1 + 3x_3 & = & 1 \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

se corresponde matricialmente con el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de coeficientes y el término independiente del sistema lineal vienen dados por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En el ejemplo 1.21 hemos calculado un matriz de paso

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

que transforma la matriz de coeficientes en una matriz diagonal. Luego si multiplicamos por la derecha a ambos lados del sistema lineal

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow PA\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

llegamos a un sistema lineal equivalente[h]es decir que tiene las mismas soluciones que el anterior. Y tal que la nueva matriz del sistema $\mathrm{red}(A) = PA$ es escalonada reducida.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

equivalentemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Esto es equivalente a un sistema lineal trivial

$$x_1 = \frac{13}{7}, \quad x_2 = -\frac{6}{7}, \quad x_3 = -\frac{2}{7},$$

[h]Los sistemas son equivalentes por ser P una matriz invertible. Esto hace que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow PA\mathbf{x} = P\mathbf{b},$$

y recíprocamente

$$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b} \Rightarrow P^{-1}PA\mathbf{x} = P^{-1}P\mathbf{b} \Rightarrow IA\mathbf{x} = I\mathbf{b} \Rightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

cuya única solución viene dada por

$$x_1 = \frac{13}{7}, x_2 = -\frac{6}{7}, x_3 = \frac{2}{7}.$$

Efecticamente, verifíquese

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El proceso anterior se corresponde con transformaciones elementales sobre la **matriz ampliada**

$$A^* = (A|\,\mathbf{b}) \tag{1.6}$$

resultado de adjuntar el termino independiente a la matriz de coeficientes. Veámoslo

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 \to \frac{1}{2} F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to F_3 + 2F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 - 2F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to \frac{1}{7} F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{2}{7} \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - \frac{1}{2} F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{2}{7} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 + 4F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{7} \end{array}\right)$$

En este ejemplo, la solución es única. En general, como veremos cuando estudiemos el teorema de Rouché-Frobenius en la siguiente unidad didáctica, un sistema lineal puede tener solución o no, y en caso de tenerla puede ser única o un conjunto de infinitas soluciones dependiendo de una serie de parámetros. La condición que determina si un sistema tiene solución es que el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada coincidan

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*). \tag{1.7}$$

En caso de que los rangos coincidan $r = \text{rango}(A) = \text{rango}(A^*)$, el números de parámetros del conjunto solución viene dado por la diferencia entre el número de incógnitas y el rango

$$p = k - r. \tag{1.8}$$

En el ejemplo que acabamos de ver se tiene que los rangos de A y A^* coinciden y son iguales a 3. Por coincidir con el número de incógnitas $p = 3 - 3 = 0$, el conjunto solución tiene 0 parámetros y por tanto existe una única solución.

El algoritmo de Gauss-Jordan nos permite clasificar y resolver un sistema en base a las dos condiciones siguientes:

[GJ1] La condición de resolubilidad (1.7) implica que una vez que hemos llegado mediante transformaciones elementales a la matriz escalonada reducida, el número de filas no nulas de la matriz ampliada coincide con el número de filas no nulas de la matriz escalonada equivalente a A. En caso contrario, el sistema lineal no tiene solución.

[GJ2] Cuando se cumple la condición (1.8), el sistema lineal tiene por tanto solución y el conjunto de soluciones se puede determinar por un conjunto finito de parámetros. Los parámetros no son más que las variables cuyas columnas no contienen un pivote. En caso de que todas las columnas contengan un pivote, entonces el sistema lineal tiene cero parámetros y por tanto solución única.

Aclaremos estas dos situaciones, mediante varios ejemplos.

Ejemplo 1.22. *Clasificar y resolver el siguiente sistema lineal aplicando transformaciones elementales*

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 & = & -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 & = & 1 \end{array}\right\}$$

Matricialmente el sistema lineal tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

siendo la matriz de coeficientes la matriz que ya vimos en la observación 1.8. Haciendo transformaciones elementales a la matriz ampliada, resulta

$$(A|\,\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - 2F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2 \to \frac{1}{3}F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Luego la matriz resultante es

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \tag{1.9}$$

con dos pivotes en la primera y segunda columna. El rango de la matriz y de la matriz ampliada es claramente 2, y por tanto se cumple la condición de solvabilidad

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2.$$

El sistema lineal asociado a (1.9) viene dada por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

es decir

$$\left. \begin{array}{rcl} \mathbf{1}x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 & = & 2 \\ \mathbf{1}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - x_5 & = & -\frac{1}{3} \end{array} \right\} \tag{1.10}$$

en donde los dos pivotes están asociados a las variables x_1 y x_3. En este caso tenemos $k = 5$ incógnitas, y por tanto un número de

$$p = 3 = 5 - 2 = k - r \text{ parámetros.}$$

Los parámetros vienen dados por las variables asociadas a las columnas que no contienen un pivote

$$\lambda_1 = x_2,\ \lambda_2 = x_4 \text{ y } \lambda_3 = x_5.$$

De esta manera, sustituyendo y despejando en (1.10)

$$\left. \begin{array}{rcl} \mathbf{1}x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & 2 \\ \mathbf{1}x_3 - \frac{2}{3}\lambda_2 - \lambda_3 & = & -\frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2 - \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3, \\ x_3 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda_2 + \lambda_3. \end{array}$$

Y por tanto el conjunto de soluciones del sistema viene dada por

$$\begin{aligned} \text{Sol} &= \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 = 2 - \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3, x_3 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda_2 + \lambda_3,\ x_2 = \lambda_1,\ x_4 = \lambda_2,\ x_5 = \lambda_3 \right\} \\ &= \left\{ \left(2 - \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3, \lambda_1, -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2, \lambda_3 \right) \in \mathbb{R}^5 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Compruébese que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 - \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ \lambda_1 \\ -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

para cualesquiera números reales λ_1, λ_2, λ_3 que tomemos. $\square$

Veamos un ejemplo de sistema lineal no resoluble, es decir sin solución.

Ejemplo 1.23. *Clasificar y resolver el siguiente sistema lineal aplicando transformaciones elementales*

$$\left.\begin{array}{rcl} x_2 - x_3 &=& 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &=& 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &=& 1 \end{array}\right\}$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz del sistema coincide con la del ejemplo 1.18. Aplicando el método de eliminación

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - \frac{3}{2}F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to F_3 - \frac{1}{2}F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to \frac{1}{2}F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 - \frac{1}{2}F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz resultante es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{1.11}$$

La tercera fila de la matriz escalonada reducida tiene una fila nula y su termino independiente es no nulo, luego por lo dicho anteriormente el sistema no tiene solución. Es fácil ver por qué ocurre esto si consideramos el sistema lineal asociado a (1.11)

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 &=& 0 \\ x_2 - x_3 &=& 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &=& 1 \end{array}\right\}$$

La tercera fila de (1.11) se corresponde con la tercera ecuación

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1,$$

lo que implica un absurdo

$$0 = 1.$$

Por tanto el sistema no tiene solución. Compruébese que el rango de la matriz del sistema no coincide con la matriz ampliada

$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 3 = \operatorname{rango}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Variando el término independiente del sistema lineal anterior, podemos encontrar un sistema lineal que sí tiene solución.

Ejemplo 1.24. *Clasificar y resolver el siguiente sistema lineal aplicando transformaciones elementales*

$$\left.\begin{array}{rcl} x_2 - x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 5 \end{array}\right\}$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el método de eliminación

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - \frac{3}{2}F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to F_3 - \frac{1}{2}F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1 \to \frac{1}{2}F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 - \frac{1}{2}F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz resultante es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

El término independiente asociado a la fila nula de la matriz escalonada reducida es cero, luego el sistema tiene solución. El rango de la matriz del sistema y la matriz ampliada coincide y es 2

$$\text{rango}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

El sistema lineal asociado es

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathbf{1}x_1 + x_3 & = & 1 \\ \mathbf{1}x_2 - x_3 & = & 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Podemos descartar la tercera ecuación ya que es una ecuación trivial $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$. Luego, el sistema asociado es

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathbf{1}x_1 + x_3 & = & 1 \\ \mathbf{1}x_2 - x_3 & = & 1 \end{array}\right\} \tag{1.12}$$

Es un sistema con tres incógnitas, y dos pivotes asociados a las variables x_1 y x_2. Por tanto la tercera variable queda como parámetro $\lambda = x_3$. Sustituyendo directamente en (1.12)

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathbf{1}x_1 + \lambda & = & 1 \\ \mathbf{1}x_2 - \lambda & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 - \lambda, \\ x_2 = 1 + \lambda. \end{array}$$

Luego el conjunto de soluciones viene dado

$$\text{Sol} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 1 - \lambda,\ x_2 = 1 + \lambda, x_3 = \lambda\right\} = \left\{(1 - \lambda, 1 + \lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Finalmente, verifíquese que efectivamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\lambda \\ 1+\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. □

1.5. Determinantes

A cualquier matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$ de orden cualquiera $n \geq 1$ le podemos asociar un número real que denominamos determinante y que nos permite determinar numerosas propiedades de dicha matriz, por ejemplo, su rango o si la matriz tiene inversa.

1.5.1. Definición de determinante

El **determinante** de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$ que denotaremos indistintamente por $\det A$, o $|A|$ cuando no es posible confundirlo con el valor absoluto, es una aplicación

$$\begin{array}{rccc} \det: & \mathcal{M}_n & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & \det(A) \end{array}$$

que tiene una definición general complicada. De una manera práctica, lo podemos definir de manera inductiva sobre el orden de la matriz. Es decir, podemos empezar definiendo el determinante para las matrices de orden 1, es decir los números reales, y posteriormente definir el determinante de una matriz orden n a partir de la definición del orden anterior $n-1$. Para orden $n=1$, el determinante es simplemente

$$\det(a_{11}) = a_{11}.$$

Mientras que para matrices de orden 2 toma la expresión

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

En general, dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$, designamos por $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n-1}$ la submatriz asociada al elemento a_{ij} obtenida al suprimir la fila i y la columna j de A. Podemos definir el **determinante,** $\det(A)$, de A como la suma

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\,|A_{i,j}| = a_{1j}(-1)^{1+j}\,|A_{1,j}| + a_{2j}(-1)^{2+j}\,|A_{2,j}| + ... + a_{nj}(-1)^{n+j}\,|A_{n,j}| \tag{1.13}$$

para cualquier columna $j \in \{1, ..., n\}$. El término

$$A_i^j := (-1)^{i+j}\,|A_{i,j}| \tag{1.14}$$

se dice **adjunto de** a_{ij}, siendo $|A_{i,j}|$ el **menor de** a_{ij}.

Ejemplo 1.25. *Calcule el determinante de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

desarrollando por elementos de su primera columna.

En este caso, los menores asociados a los elementos de la primera columna, $j=1$, vienen dados por

$$|A_{1,1}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \;\; |A_{2,1}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \;\; |A_{3,1}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Aplicando la fórmula (1.13) para $j = 1$, primera columna, tenemos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \mathbf{0} & 1 & -1 \\ \mathbf{2} & 1 & 1 \\ \mathbf{3} & 2 & 1 \end{vmatrix} &= \mathbf{0} \cdot (-1)^{1+1} |A_{1,1}| + \mathbf{2} \cdot (-1)^{1+2} |A_{2,1}| + \mathbf{3} \cdot (-1)^{1+2} |A_{3,1}| \\
&= 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 0 - 2(1+2) + 3(1+1) = 0.
\end{aligned}$$

La definición se corresponde al desarrollo por un elemento columna cualquiera $j \in \{1, ..., n\}$, todos darían el mismo resultado. Por ejemplo con respecto de la segunda columna, $j = 2$, el desarrollo del determinante de la matriz anterior viene dado por

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 2 & \mathbf{1} & 1 \\ 3 & \mathbf{2} & 1 \end{vmatrix} &= \mathbf{1} \cdot (-1)^{2+1} |A_{2,1}| + \mathbf{1} \cdot (-1)^{2+2} |A_{2,2}| + \mathbf{2} \cdot (-1)^{3+2} |A_{3,2}| \\
&= - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 + 3 - 4 = 0.
\end{aligned}$$

□

En general, la definición también funciona si desarrollamos por filas en vez de columnas. Se tiene que

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} |A_{i,j}| \tag{1.15}$$

para cualquier fila $i \in \{1, ..., n\}$. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.26. *Calcular el determinante de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

desarrollando por elementos de la primera fila.

Desarrollemos el determinante por la primera fila. Los menores asociados a los elementos de las primera fila, $i = 1$, viene dados por

$$|A_{1,1}| = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 23, \; |A_{1,2}| = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 19, \; |A_{1,3}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3.$$

Aplicando (1.15) para $j = 1$, primera columna, tenemos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} &= \mathbf{1}\cdot(-1)^{1+1}|A_{1,1}| + \mathbf{2}\cdot(-1)^{1+2}|A_{1,2}| + \mathbf{0}\cdot(-1)^{1+3}|A_{1,3}| \\
&= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 23 - 2\cdot 19 + 0 = -15.
\end{aligned}$$

Desarrollando por la segunda fila obtendríamos el mismo resultado

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} &= \mathbf{4}\cdot(-1)^{1+1}|A_{2,1}| + \mathbf{5}\cdot(-1)^{2+2}|A_{2,2}| + (-\mathbf{1})\cdot(-1)^{2+3}|A_{2,3}| \\
&= -4\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\
&= -24 + 15 - 6 = -15.
\end{aligned}$$

□

Siguiendo el proceso anterior, aplicando la definición para $n = 3$ hallamos la **regla de Sarrus** para el cálculo de un determinante de orden 3. Desarrollando por ejemplo por los elementos de la primera fila tenemos

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \mathbf{a}_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \mathbf{a}_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \mathbf{a}_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Del mismo modo para $n = 4$, desarrollando por la primera fila

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \mathbf{a}_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \mathbf{a}_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \mathbf{a}_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - \mathbf{a}_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}. \tag{1.16}$$

y así sucesivamente para ordenes superiores.

Ejemplo 1.27. *Calcular el determinante de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aplicando la fórmula (1.16)

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{0}\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \mathbf{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \mathbf{5}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 0 - 19 + 58 - 20.$$

□

1.5.2. Propiedades de los determinantes

En esta sección estudiamos las propiedades más destacadas de los determinantes. A partir de la definición es fácil ver que el determinante de una matriz cuadrada coincide con el de su traspuesta.

Proposición 1.3 Sea $A \in \mathcal{M}_n$, se cumple

$$\det A = \det A^T.$$

Ejemplo 1.28. Por ejemplo consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Compruébese que

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 5 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det A^T.$$

□

El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes.

Proposición 1.4 Sean A, $B \in \mathcal{M}_n$, se cumple

$$\det AB = \det A \det B. \tag{1.17}$$

Ejemplo 1.29. Consideremos por ejemplos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con determinantes

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2, \;\; \det B = \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2.$$

Su producto viene dado por

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Compruébese que su determinante viene dado por el producto de sus determinantes

$$\det AB = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = 4 = (-2) \cdot (-2) = \det A \det B.$$

□

Determinantes de las matrices elementales

Veamos ahora que muchas de las propiedades de los determinantes son el resultado de conocer los determinantes de las matrices elementales y de aplicar la propiedad del determinante de un producto. En primer lugar estudiemos los determinantes de las matrices elementales.

El determinante de la matriz elemental F_{ij} que permuta las filas i y j vale siempre -1, es decir

$$\det F_{ij} = -1 \text{ para } i \neq j \in \{1, ..., n\}. \tag{1.18}$$

Por ejemplo, la matriz de orden 2 que permuta las filas 1 y 2, viene dada por

$$F_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y se cumple que efectivamente

$$\det F_{12} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Luego si tenemos una matriz $A \in \mathcal{M}_n$, la matriz

$$F_{ij} A$$

resultado de intercambiar las filas i y j , aplicando la propiedad del producto (1.17) tiene determinante

$$\det F_{ij}A = \det F_{ij} \det A = -\det A \text{ para todo } i \neq j$$

de signo contrario al de A. De aquí deducimos que si **intercambiamos las filas de una matriz, su determinante cambia de signo.** Por ejemplo, consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2,$$

la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = F_{12}A$$

resultado de intercambiar las filas tiene determinante de signo contrario

$$\det B = \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 = -\det A.$$

El determinante de las matriz elemental correspondiente a multiplicar una fila por un escalar $\lambda \neq 0$ no nulo vale siempre dicho escalar λ. Es decir

$$\det F_i(\lambda) = \lambda, \text{ para todo } i \in \{1, ..., n\}. \tag{1.19}$$

Por ejemplo, el determinante de la matriz elemental

$$F_1(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que multiplica la fila 1 por el escalar 2 tiene como determinante

$$\det F_1(2) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Luego para una matriz arbitraria $A \in \mathcal{M}_n$, la matriz

$$F_i(\lambda)A$$

resultado multiplicar la fila i por λ, aplicando la propiedad del producto (1.17), tiene por determinante

$$\det F_i(\lambda)A = \det F_i(\lambda) \det A = \lambda \det A \text{ para todo } i.$$

De aquí deducimos que si **a una matriz le multiplicamos una fila por un número real, su determinante se multiplica asimismo por dicho numero.**

Por ejemplo, consideremos otra vez

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = F_1(2)A$$

resultado de multiplicar la primera fila por $\lambda = 2$, verifica que su determinante efectivamente es resultado de multiplicar por 2 el determinante de la matriz A

$$\det C = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -4 = 2 \cdot (-2) = 2 \det A.$$

Finalmente, el determinante de la matriz elemental $F_{ij}(\lambda)$ que a la fila i le suma la fila j multiplicada por un escalar λ vale siempre 1. Es decir

$$\det F_{ij}(\lambda) = 1, \text{para todo } i \neq j \in \{1, ..., n\}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por ejemplo, el determinante de la matriz elemental

$$F_{21}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

que suma a la segunda fila la primera multiplicada por -3 tiene por determinante

$$\det F_{21}(-3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Luego para una matriz arbitraria $A \in \mathcal{M}_n$, la matriz

$$F_{ij}(\lambda)A$$

resultado de sumar a la fila i la fila j multiplicada por λ, aplicando la propiedad del producto (1.17), tiene el mismo determinante

$$\det F_{ij}(\lambda)A = \det A \text{ para todo } i \neq j \in \{1, ..., n\}.$$

De aquí deducimos que si **a la fila de una matriz le sumamos otra fila multiplicada por un escalar, su determinante no varía.** Volviendo a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = F_{21}(-3)\, A$$

resultado de añadir a la primera la segunda fila la primera fila multiplicada por $\lambda = -3$ tiene el mismo determinante. Efectivamente

$$\det D = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2 = \det A.$$

A partir de estas propiedades se pueden deducir otras. Por ejemplo, si tenemos una matriz $A \in \mathcal{M}_n$ que tiene dos filas iguales, por ejemplo i_0, $j_0 \in \mathbb{N}$, restando a la fila j_0 la fila i_0 mediante la operacion elemental correspondiente llegamos a otra matriz

$$F_{i_0 j_0}(-1)A$$

que tiene una fila nula, luego su determinante es nulo. Como hemos visto que dicha operación elemental no varía el determinante, llegamos a la conclusión que el determinante de la matriz original A es nulo también, es decir,

$$\det A = \det F_{i_0 j_0}(-1)A = 0.$$

Esto prueba en general que si **una matriz tiene dos filas iguales su determinante es nulo**. Del mismo modo, se puede razonar otro tipo de propiedades. Resumimos en el siguiente resultado las propiedades más importantes de los determinantes, incluyendo las propiedades anteriores.

Proposición 1.5 Se cumplen las siguientes propiedades elementales:

- Si una matriz A tiene dos filas (o columnas) iguales, entonces su determinante es cero.
- Si dos filas (o columnas) de una matriz A se permutan entre si, el determinante de la nueva matriz B es $-|A|$.
- Si a una fila (o columna) de una matriz A le sumamos otra fila (o columna) de la matriz, entonces el determinante de la matriz B resultante es igual al determinante de A, es decir $|B| = |A|$.
- Si a una fila (o columna) la multiplicamos por un número λ, entonces el determinante de la matriz B resultante es igual al determinante de A multiplicado por λ, es decir $|B| = \lambda |A|$.
- Si una fila (o columna) de una matriz A es combinación lineal de otras filas (o columnas), entonces el determinante de A es cero.

- Si a una fila (o columna) de una matriz A se suma una combinación lineal de las demás el determinante de la nueva matriz B es igual al determinante de A.
- El determinante de una matriz diagonal es igual al producto de los elementos de su diagonal.
- El determinante de una matriz escalonada cuadrada es igual al producto de los elementos de su diagonal.

Veamos a continuación dos ejemplos de cómo calcular el determinante de una matriz mediante operaciones elementales.

Ejemplo 1.30. Mediante operaciones elementales podemos transformar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

en su matriz escalonada reducida

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to F_2 - 3F_1}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to -\frac{1}{2}F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$
$$\underset{F_1 \to F_1 - 2F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Su matriz escalonada reducida es por tanto la unidad

$$\operatorname{red}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene determinante 1, $|\operatorname{red}(A)| = 1$. Tenemos la siguiente factorización en matrices elementales

$$A = F_{12}(-2) F_2\left(\frac{-1}{2}\right) F_{21}(-3) \operatorname{red}(A),$$

La matriz de paso viene dada por

$$P = F_{12}(-2) F_2\left(\frac{-1}{2}\right) F_{21}(-3),$$

y su determinante se puede calcular fácilmente aplicando el determinante del producto y las propiedades de las matrices elementales que hemos visto anteriormente

$$|P| = |F_{12}(-2)| \left| F_2\left(\frac{-1}{2}\right) \right| |F_{21}(-3)| = 1 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot 1 = \frac{-1}{2}.$$

Como $\operatorname{red}(A) = PA$, se tiene que

$$|A| = \frac{|\operatorname{red}(A)|}{|P|} = \frac{1}{\frac{-1}{2}} = -2.$$

□

Ejemplo 1.31. Consideremos la matriz del ejemplo 1.21

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

en este caso hemos visto que la matriz de paso viene dada por

$$P = F_{13}(4)\, F_{23}\left(-\frac{1}{2}\right) F_3\left(\frac{1}{7}\right) F_{12}(-2)\, F_{32}(2)\, F_2\left(\frac{1}{2}\right) F_{31}(-1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

y su determinante se puede calcular directamente como producto de los determinantes de las matrices elementales

$$|P| = |F_{13}(4)| \left|F_{23}\left(-\frac{1}{2}\right)\right| \left|F_3\left(\frac{1}{7}\right)\right| |F_{12}(-2)|\, |F_{32}(2)| \left|F_2\left(\frac{1}{2}\right)\right| |F_{31}(-1)| = 1\cdot 1\cdot \frac{1}{7}\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{14}.$$

Compruébese que de hecho

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{vmatrix} = \frac{1}{14}.$$

Su matriz escalonada reducida viene dada por

$$\operatorname{red}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con determinante $|\operatorname{red}(A)| = 1$. Por tanto, como $\operatorname{red}(A) = PA$, se tiene

$$|A| = \frac{|\operatorname{red}(A)|}{|P|} = 14.$$

Compruébese directamente que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 14.$$

□

1.5.3. **Definición de rango mediante el determinante**

Como consecuencia de todo lo anterior, existe una relación directa entre el determinante de una matriz y de cualquier matriz escalonada asociada, en particular el de su matriz escalonada reducida. Esto nos permite usar los determinantes para dar una **definición equivalente de rango** de una matriz a la dada en la definición 1.19. Por ejemplo, en el caso de la matriz A del ejemplo 1.13

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

su matriz escalonada reducida venía dada por

$$\operatorname{red}(A) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta las operaciones elementales realizadas, tenemos la siguiente factorización en términos de matrices elementales

$$\operatorname{red}(A) = F_1\left(\frac{1}{2}\right) F_{32}\left(-\frac{1}{2}\right) F_{31}\left(-\frac{3}{2}\right) F_{12} A.$$

En este caso la matriz de paso viene dada por

$$P = F_1\left(\frac{1}{2}\right) F_{32}\left(-\frac{1}{2}\right) F_{31}\left(-\frac{3}{2}\right) F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$|P| = \left|F_1\left(\frac{1}{2}\right)\right| \left|F_{32}\left(-\frac{1}{2}\right)\right| \left|F_{31}\left(-\frac{3}{2}\right)\right| |F_{12}| = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$$

Como claramente

$$\det(\operatorname{red}(A)) = 0,$$

se tiene que

$$\det(\operatorname{red}(A)) = \det P \det A = -\det A$$

y necesariamente el determinante de A es nulo

$$\det A = 0.$$

En general, como las operaciones elementales nunca tienen determinante nulo, el determinante de la matriz de paso es siempre no nulo y por tanto no puede anular el determinante de la matriz. Este hecho lo podemos resumir en el siguiente resultado.

Proposición 1.6 En general, dada una matriz cuadrada $B \in \mathcal{M}_k$ se verifica que

$$\det B = \alpha\,\mathrm{red}(B),$$

con $\alpha \neq 0$. El factor $\alpha = |P|^{-1}$ se corresponde con el inverso del determinante de la matriz de paso que necesariamente es no nulo.

En la definición 1.19, hemos definido el rango de una matriz como el número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada asociada. En particular se puede probar que, debido a la especial forma de las matrices escalonadas, esto es equivalente al mayor orden para el que podemos encontrar una submatriz de determinante no nulo. De hecho, en el caso de las matrices escalonadas nos podemos ceñir a los determinantes de las **submatrices principales**, es decir aquellas submatrices que tiene el primer elemento de la primera fila, a_{11}, como extremo superior izquierdo. En el caso de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

el mayor orden es 2, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

por tener una fila nula, y la submatriz principal de orden 2 tiene determinante no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Luego $\mathrm{rango}(A) = \mathrm{rango}(\mathrm{red}(A)) = 2$. Como las operaciones elementales no pueden anular el determinante, razonado en general mediante el producto de submatrices se puede probar que **el rango de una matriz coincide con el mayor orden para el que podemos encontrar una submatriz**, no necesariamente principal, **de determinante no nulo**. Lo resumimos en el siguiente resultado.

Teorema 1.2 El rango[i] de una matriz cualquiera $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ viene dado como el mayor orden para el que podemos encontrar una submatriz cuadrada de determinante no nulo.

[i]En general, razónese que dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ su rango siempre es menor o igual que el número de filas y columnas

$$\mathrm{rango}(A) \leq \min\{n, m\}$$

Ejemplo 1.32. Aplicando el teorema 1.2, podemos ver que el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es 2 sin necesidad de calcular una matriz escalonada reducida. Descartamos rango 3 por ser el determinante de la matriz nulo

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Por otra parte es posible encontrar una submatriz de orden 2 con determinante no nulo, por ejemplo la submatriz marcada en negrita

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ 2 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene determinante no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

□

Ejemplo 1.33. El rango de la matriz del ejemplo 1.19

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

es 3, ya que el determinante de dicha matriz es no nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 14.$$

Como ése el mayor de orden de submatriz que podemos definir, entonces

$$\text{rango}(A) = 3.$$

□

Ejemplo 1.34. El rango de la matriz del sistema lineal del ejemplo 1.22

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es 2, ya que la mayor submatriz cuadrada que podemos definir es de orden 2 y podemos encontrar al menos una, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & 2 & 3 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

que tiene determinante no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3.$$

Luego rango$(A) = 2$. Eso no quiere decir que podamos encontrar una submatriz de orden 2 con determinante nulo, por ejemplo la formada por las dos primera columnas

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$\square$

1.6. Matrices inversas

1.6.1. Teorema de la caracterización de la inversa

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ recordemos que su **matriz inversa** $A^{-1} \in \mathcal{M}_n$ se define como el elemento inverso con respecto del producto

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Por ejemplo, recordemos que la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ya que

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}A$$

Pero en general, hemos visto que, contrariamente a los números reales, no toda matriz no nula tiene inversa. Por ejemplo, en (1.3) vimos que la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

no tiene inversa. La herramienta que determina si una matriz tiene o no inversa es el determinante. Mediante la definición de determinante se puede probar que **una matriz tiene inversa si y solamente si su determinante es no nulo**. Además podemos obtener una fórmula de la inversa mediante la matriz adjunta asociada. A este resultado se denomina **teorema de caracterización de la inversa.** Antes de enunciarlo recordemos que significa adjunto y matriz adjunta.

Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$ por

$$A_i^j := (-1)^{i+j} |A_{i,j}|$$

denotamos el **adjunto de** a_{ij}, siendo $|A_{i,j}|$ el **menor de** a_{ij}, es decir el determinante de la submatriz obtenida de suprimir en A la fila i y la columna j. De esta manera, por $\mathrm{Adj}(A) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ denotaremos la **matriz adjunta**[j]

$$\mathrm{Adj}(A) = (A_i^j).$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.35. *Calcule la matriz adjunta de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

En esto caso los adjuntos vienen dados por

$$\begin{aligned} A_1^1 &= 3, & A_1^2 &= -1, \\ A_2^1 &= -2, & A_2^2 &= 1. \end{aligned}$$

Luego la matriz adjunta viene dada por

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

[j]Algunos autores utilizan el nombre matriz de cofactores para referirse a la matriz adjunta, reservando el término de matriz adjunta para la traspuesta que nos aparece en la fórmula de la inversa (1.21) formada por los adjuntos.

Ejemplo 1.36. *Calcule la matriz adjunta de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

En primer lugar calculamos los adjuntos asociada a cada elemento de la matriz

$$A_1^1 := (-1)^{1+1}|A_{1,1}| = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 23, \quad A_1^2 = (-1)^{1+2}|A_{1,2}| = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -19, \quad A_1^3 = (-1)^{1+3}|A_{1,3}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_2^1 = (-1)^{1+3}|A_{2,1}| = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -6, \quad A_2^2 = (-1)^{2+3}|A_{2,2}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_2^3 = (-1)^{2+3}|A_{2,3}| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_3^1 = (-1)^{3+1}|A_{3,1}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_3^2 = (-1)^{3+2}|A_{3,2}| = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_3^3 = (-1)^{3+3}|A_{3,3}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Luego la matriz adjunta viene dada por

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 23 & -19 & -3 \\ -6 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

□

El **teorema de caracterización de la inversa** nos dice cuándo existe inversa y nos da una fórmula para calcularla.

Teorema 1.3 Sea una matriz cuadrada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$. A tiene inversa si y solamente si su determinate es no nulo, es decir, $\det(A) \neq 0$. En dicho caso, la matriz inversa viene dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{Adj}(A)^T. \tag{1.21}$$

Ejemplo 1.37. En (1.3) vimos que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

no tiene inversa.Y efectivamente se verifica que su determinante es nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

cumpliendo la condición del teorema de caracterización. □

Ejemplo 1.38. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

estudie si tiene o no inversa. En caso de que exista, calcule dicha inversa.

La matriz tiene determinante no nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

luego tiene inversa por el teorema de caracterización de la inversa. Aplicando la fórmula (1.21),

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj}(A)^T = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

que coincide efectivamente con la inversa calculada previamente. □

Ejemplo 1.39. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

estudie si tiene o no inversa. En caso de que exista, calcule dicha inversa.

La matriz tiene inversa por el teorema de caracterización de la inversa, ya que su determinante es no nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0.$$

Aplicando la fórmula (1.21), teniendo en cuenta que previamente hemos calculado la matriz adjunta en (1.26), podemos calcular la inversa

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj}(A)^T = \frac{1}{-15} \begin{pmatrix} 23 & -19 & -3 \\ -6 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{-15} \begin{pmatrix} 23 & -6 & -2 \\ -19 & 3 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{23}{15} & \frac{2}{5} & \frac{2}{15} \\ \frac{19}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Efectivamente, verifíquese que

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{23}{15} & \frac{2}{5} & \frac{2}{15} \\ \frac{19}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

□

1.6.2. Calculando la matriz inversa mediante operaciones elementales

Supongamos que $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ es una matriz cuadrada regular, es decir, una matriz que tiene inversa. Al calcular su matriz escalonada reducida estamos determinando una matriz de paso $P \in \mathcal{M}_n$ tal que

$$PA = \mathrm{red}(A).$$

Como la matriz es regular, por tanto de determinante no nulo por el teorema de caracterización de la inversa, no es difícil ver que la matriz escalonada reducida es necesariamente la matriz unidad. Piense que en caso contrario contedría una fila nula, lo que haría que su determinante fuese nulo y necesariamente también el de la matriz A lo que contradice que A es regular. Esto también prueba que el rango de A es maximal, es decir igual a n. Por tanto, $\mathrm{red}(A) = I$ y se tiene que

$$PA = \mathrm{red}(A) = I \Rightarrow PA = I.$$

Lo que prueba que **la matriz de paso en el caso de matrices regulares es la propia matriz inversa**

$$A^{-1} = P$$

y justifica el algoritmo conocido de cálculo de la matriz inversa mediante el método de eliminación de Gauss. Recordemos dicho algoritmo mediante un ejemplo.

Ejemplo 1.40. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

de los ejemplos anteriores. Es una matriz regular, con determinante no nulo. Mediante operaciones elementales podemos hallar su matriz escalonada reducida

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_2 - F_1}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_1 \to F_1 - 2F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectivamente por ser regular, su matriz escalonada reducida viene dada por

$$\mathrm{red}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y su matriz de paso $P \in \mathcal{M}_n$ determinada por el producto de matrices elementales

$$P = F_{12}(-2)F_{21}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

su matriz inversa. Una manera de escribir este desarrollo es el **método de eliminación gaussiana para calcular la matriz inversa** . Adjuntado en una misma matriz, a la izquierda la matriz A y a la derecha matriz identidad,

$$(A|\ I)$$

se realizan operaciones elementales en ambas matrices hasta llegar a la identidad en la derecha, matriz escalonada reducida de A,

$$(A|\ I) \to \left(I|\, A^{-1}\right)^{\mathrm{k}},$$

de manera que en la parte izquierda obtengamos la matriz de paso y por tanto su inversa. En el caso que nos ocupa

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow F_2 - F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 - 2F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Efectivamente de la matriz resultante, la submatriz izquierda recupera la matriz inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Resumamos todo lo anterior en el siguiente resultado que incluye los caracterizaciones de existencia de inversa más usuales y útiles, entre ellas el teorema de caracterización de la inversa.

Proposición 1.7 Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ una matriz cuadrada de orden n. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- $\operatorname{rango}(A) = n$.
- $\det(A) \neq 0$.
- $\operatorname{red}(A) = I$.
- A tiene inversa. Además podemos calcularla como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Adj}(A)^T.$$

[k] Razónese que el mismo método vale para calcular la matriz de paso

$$(A|\ I) \to (\operatorname{red}(A)|\, P)$$

de cualquier transformacion elemental, no necesariamente para matrices regulares.

Ejemplo 1.41. *Dada la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

calcule su matriz inversa aplicando operaciones elementales.

En primer lugar, la matriz inversa de A existe ya recordemos tiene determinante no nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 14.$$

En este caso, en el ejemplo 1.21 hemos calculado su matriz de paso que por el razonamiento anterior nos daría su matriz inversa. Reescribamos todo el proceso aplicando en este caso el método de eliminación gaussiana para el cálculo de la inversa, véase página posterior. Como resultado del método de eliminación, obtenemos la matriz inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

que coincide con la matriz de paso calculada en el ejemplo 1.21. Efectivamente, compruébese que la matriz calculada es la inversa.

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
&\underset{F_3 \to F_3 - F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{F_2 \to \frac{1}{2} F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{F_3 \to F_3 + 2F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{F_3 \to F_3 + 2F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{F_1 \to F_1 - 2F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \\
&\underset{F_3 \to \frac{1}{7} F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right) \\
&\underset{F_2 \to F_2 - \frac{1}{2} F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right) \\
&\underset{F_1 \to F_1 + 4F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejercicios de autoevaluación de la Unidad Didáctica 1

Ejercicio 1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Efectúese el producto AB.

(ii) Compruébese que $(AB)^T = B^T A^T$.

Ejercicio 2. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calcule la suma y producto de matrices que se enuncian a continuación.

$$AB, \; BA, \; B^T C, \, C^T B, \, I - C^T C, \; (I - CC^T)A.$$

Si alguna expresión no está definida señale el porqué.

Ejercicio 3. Determine la matriz X tal que

$$AXA = AB$$

para los siguientes casos:

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n$ se dice **idempotente** si

$$A^2 = A.$$

Razone que $B = I - A$ es asimismo idempotente y además $AB = BA = 0$.

Ejercicio 5. Responda a las siguientes preguntas razonadamente:

(i) Si una matriz A es de orden 5×3 y el producto AB es de orden 5×7, señale razonadamente cuál es el orden de la matriz B.

(ii) Señale razonadamente si se cumple la expresión

$$(AB)^T = A^T B^T.$$

(iii) Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix},$$

en donde k es un parámetro. Señale razonadamentes cuákes son los valores de k para los que

$$AB = BA.$$

(iv) Sabiendo que A, $B \in \mathcal{M}_{3\times 4}$ son tales que

$$A = (i + 2j),\ B = (2i - j).$$

Estudiar la relación entre las matrices $A + 2B$ y $-2A + B$.

Ejercicio 6. Sea $\mathcal{M}_2$ el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2. Consideramos en $*$ la operación definida por

$$A * B = B^T A^T \text{ para todo } A, B \in \mathcal{M}_2,$$

en donde $\times$ denota el producto usual de matrices. De las siguientes elecciones de subconjuntos señale el número de ellos para los que $*$ continúa siendo una operación. Es decir, compruebe si son ciertas las siguientes afirmaciones:

(i) $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices diagonales

$$\mathbf{D}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices

$$\mathbf{D}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}.$$

(iii) $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices triangulares inferiores

$$\mathbf{D}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

(iv) $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices

$$\mathbf{D}_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ejercicio 7. Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ el conjunto de los números naturales. Sobre dicho conjunto consideremos la operación $\diamond$ definida de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcl} \diamond : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto & n \diamond m = 1 + n \cdot m \end{array}$$

Señale razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas:

- $\diamond$ es asociativa.
- $\diamond$ es conmutativa.
- No existe elemento neutro para $\diamond$.

Ejercicio 8. Estúdiense las propiedades de la operación $*$ entre elementos de $\mathbb{Z}$ definida por

$$a * b = 2ab - b^2 + 1,$$

siendo a, $b \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 9. Sea

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} \right\}$$

el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2. Sobre dicho conjunto consideramos la siguiente operación

$$\begin{array}{rcl} \diamond : \mathcal{M}_2 \times \mathcal{M}_2 & \rightarrow & \mathcal{M}_2 \\ (A, B) & \longmapsto & A \diamond B = \dfrac{1}{2}(A \times B + B \times A) \end{array}$$

Estudie la veracidad de las siguientes afirmaciones:

- $\diamond$ es asociativa.
- $\diamond$ es conmutativa.
- Existe elemento neutro.

Ejercicio 10. Sea $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ el conjunto de los números enteros. Sobre dicho conjunto consideramos la operación $\diamond$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \diamond : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ (a, b) & \longmapsto & a \diamond b = a \cdot b - (a + b) \end{array}$$

Estudie la veracidad de las siguientes afirmaciones.

- $\diamond$ es asociativa.
- $\diamond$ es conmutativa.
- Existe elemento neutro.

Ejercicio 11. Dada la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

calcule su matriz escalonada reducida y determine la matriz de paso como producto de matrices elementales. Calcule asimismo su rango.

Ejercicio 12. Determine las matriz escalonada reducida y calcule el rango de las siguientes matrices

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(iii)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 13. Clasifique y resuelva los siguientes sistema lineales aplicando transformaciones elementales mediante el método de eliminación de Gauss.

(i)

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x_2 - 3x_3 + 3x_4 & = & 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 7x_4 & = & 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 & = & 1 \end{array}\right\}$$

(ii)

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 7x_1 + 4x_2 - x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

(iii)

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & = & -3 \\ 7x_1 + 4x_2 - x_3 & = & -12 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 14. Dada la matriz del ejercicio 12

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

calcule su determinante a partir de los determinantes de las matrices elementales y de una matriz escalonada asociada.

Ejercicio 15. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 16. Calcule el rango de las matrices de los ejercicios 11, 12 aplicando el criterio de los determinantes.

Ejercicio 17. Calcule la matriz inversa del ejemplo 1.39

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

aplicando operaciones elementales

Ejercicio 18. Calcule la matriz inversa del ejemplo 1.41

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

aplicando la fórmula del teorema de caracterización de la inversa.

Ejercicio 19. Consideremos la matriz del ejercicio 12

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Utilizando la operaciones elementales que se han realizado en dicho ejercicio, calcule y exprese la matriz inversa como producto de matrices elementales.

Ejercicio 20. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{pmatrix},$$

estudie si tiene inversa y en dicho caso calcule dicha matriz.

Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

Solución 1.

(i) Como $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}$, $B \in \mathcal{M}_{4\times 2}$ entonces $AB \in \mathcal{M}_{3\times 2}$. Aplicando la fórmula del producto de matrices

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 4\cdot(-3) + 0\cdot 0 & -1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 4\cdot(-2) + 0\cdot 3 \\ 3\cdot 2 + 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-3) + (-3)\cdot 0 & 3\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) + (-3)\cdot 3 \\ 6\cdot 2 + 0\cdot 1 + 1\cdot(-3) + 1\cdot 0 & 6\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot(-2) + 1\cdot 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -12 & -9 \\ 11 & -4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(ii) La matrices traspuestas verifican $B^T \in \mathcal{M}_{4\times 2}$, $A^T \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ luego

$$B^T A^T \in \mathcal{M}_{3\times 2}.$$

Tenemos que

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

operando directamente

$$
\begin{aligned}
B^T A^T &= \begin{pmatrix} 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 + (-3)\cdot 4 + 0\cdot 0 & 2\cdot 3 + 1\cdot 2 + (-3)\cdot(-1) + 0\cdot(-3) & 2\cdot 6 + 1\cdot 0 + (-3)\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot(-1) + 0\cdot 2 + (-2)\cdot 4 + 3\cdot 0 & 1\cdot 3 + 0\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) + 3\cdot(-3) & 1\cdot 6 + 0\cdot 0 + (-2)\cdot 1 + 3\cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -12 & 11 & 9 \\ -9 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -9 \\ 11 & -4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}^T = (AB)^T.
\end{aligned}
$$

Con lo que efectivamente

$$B^T A^T = \begin{pmatrix} -12 & 11 & 9 \\ -9 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -9 \\ 11 & -4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}^T = (AB)^T.$$

Solución 2. Se tiene

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

y

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

El producto B^TC no tiene sentido ya que el número de columnas de

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es 3 y no coincide con el número de filas de C que es 1. De igual modo, el producto C^TB tampoco tiene sentido ya que el número de columnas de

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

es 1 y no coincide con el número de filas de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ que es 3.

Por otro lado, como

$$C^TC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

la matriz identidad I se debe entender de orden 3 para que tenga sentido la matriz $I - C^TC$ en la operación. De hecho

$$\begin{aligned} I - C^TC &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego

$$CC^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 6.$$

En este caso la matriz unidad debe entenderse de orden 1, es decir la matriz identidad viene dada por el numero real unidad $I = 1$. Luego

$$I - CC^T = -5.$$

La matriz $\left(I - CC^T\right) A$ tiene sentido no como producto de matrices sino como producto de un número real por una matriz (operación producto por un escalar)

$$\left(I - CC^T\right) A = -5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ -10 & -15 & -5 \end{pmatrix}.$$

Solución 3. En primer lugar la matriz X debe ser tal que XA y AX tengan sentido, luego el número de columnas y filas de X deben coincidir con el número de filas y columnas de A. Por tanto, $X \in \mathcal{M}_2$ es necesariamente una matriz de orden 2.

(i) En este caso la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene inversa ya que su determinante es no nulo

$$|A| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = -1.$$

Por tanto podemos aplicar el teorema de caracterización de la inversa para calcularla, aplicando dicho teorema se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si la matriz X tiene inversa está univocamente determinada, es decir es única. Despejamos el valor de X multiplicando en ambas expresiones por la matriz inversa A^{-1}

$$AXA = AB \Leftrightarrow A^{-1}AXAA^{-1} = A^{-1}ABA^{-1} \Leftrightarrow IXI = IBA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}.$$

Por tanto

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 16 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) En este caso la matriz A no tiene inversa ya que su determinante es nulo

$$|A| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0.$$

Luego no sabemos a priori si la matriz X está univocamente determinada, de hecho como veremos no es única sino que existen infinitas matrices X. En este caso para determinar la matriz consideramos una matriz incógnita

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

en donde a, b, c, d son parámetros reales a determinar. En general como

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene que $AXA = AB$ si

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consecuentemente $a = 0$, mientras que los demás parámetros b, c y d pueden ser arbitrarios. Por tanto la solución X es una matriz de la forma

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} : b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por ejemplo tomando $b = -1$, $c = 2$, $d = 7$ se tiene que

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

y véase que efectivamente verifica la identidad ya que

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AB.$$

Solución 4. Hay que probar en primer lugar que la matriz $B = I - A$ es idempotente, es decir que

$$BB = (I - A)(I - A) = I - A = B.$$

Como $AA = A$, operando se tiene

$$(I - A)(I - A) = I - AI - IA + AA = I - A - A + A = I - A + 0 = I - A$$

en donde recordemos que I y O denotan la matriz identidad y la matriz nula respectivamente.

En segundo lugar

$$\begin{aligned} AB &= A(I - A) = AI - AA = A - A = 0, \\ BA &= (I - A)A = IA - AA = A - A = 0. \end{aligned}$$

Solución 5.

(i) El general dada una matriz A de orden $m \times n$ y una matriz B de $p \times k$ entonces la matriz producto AB solamente tiene sentido si $n = p$ y en dicho caso su orden sería $m \times k$. Para el caso particular del apartado se tiene $m = 5$, $n = 3$, $k = 7$ entonces necesariamente $p = 3$ y por tanto la matriz B es de orden 3×7.

(ii) En general no es cierto, veamos un contraejemplo. Tomemos por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} (AB)^T &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A^T B^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y por tanto

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^T B^T.$$

(iii) En general

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 5k - 10 \\ -9 & k + 15 \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 15 \\ 6 - 3k & k + 15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego para que se cumpla $AB = BA$ se tiene que verificar

$$\begin{pmatrix} 23 & 5k - 10 \\ -9 & k + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 15 \\ 6 - 3k & k + 15 \end{pmatrix}.$$

Omitiendo las dos igualdades evidentes de la diagonal, la igualdad de matrices es equivalente a que se cumpla

$$\begin{aligned} 5k - 10 &= 15, \\ 6 - 3k &= -9. \end{aligned}$$

Resolviendo, $k = 5$ y por tanto

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(iv) Efectivamente compruébese que se verifica

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 15 \\ -9 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

Denotando $C = A + 2B$ y $D = -2A + B$, entonces

$$c_{ij} = a_{ij} + 2b_{ij} = i + 2j + 4i - 2j = 5i$$

y

$$d_{ij} = -2a_{ij} + b_{ij} = -2i - 4j + 2i - j = -5j.$$

De donde se deduce que en general

$$c_{ij} = -d_{ji},$$

Es decir,

$$A + 2B = (-2A + B)^T.$$

Solución 6. Se trata de ver para cada subconjunto si para todo A, $B \in \mathbf{D}_i$ entonces

$$A * B \in \mathbf{D}_i \text{ para todo } i = 1, ..., 4.$$

(i) $*$ es una operación sobre $\mathbf{D}_1$ ya que la matriz operada $A * B$ vuelve a pertenecer al conjunto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} a_1 a_2 & 0 \\ 0 & b_1 b_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_1. \end{aligned}$$

(ii) Del mismo modo, $*$ es un operación sobre sobre $\mathbf{D}_2$ ya que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} a_1 b_2 & 0 \\ 0 & a_1 b_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_2. \end{aligned}$$

(iii) En cambio, $*$ no una operación sobre $\mathbf{D}_3$. Ya que tomando

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_3,$$

se tiene $A * A \notin \mathbf{D}_3$. Verifíquese

$$\begin{aligned} A * A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathbf{D}_3. \end{aligned}$$

(iv) Del mismo modo, se puede comprobar que $*$ no es una operación sobre $\mathbf{D}_4$. En este caso, tomando

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{D}_4,$$

se tiene

$$\begin{aligned} B * B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin \mathbf{D}_4. \end{aligned}$$

Solución 7. $\diamond$ no es asociativa. Tomemos $n = 1$, $m = 2$, $q = 3$, se tiene

$$\begin{gathered} (n \diamond m) \diamond q = (1 \diamond 2) \diamond 3 = 3 \diamond 3 = 10 \\ \neq \\ n \diamond (m \diamond q) = 1 \diamond (2 \diamond 3) = 1 \diamond 7 = 8. \end{gathered}$$

$\diamond$ es conmutativa. Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$n \diamond m = 1 + n \cdot m = 1 + m \cdot n = m \diamond n.$$

Por otra lado, si existiese un elemento neutro $e \in \mathbb{N}$, entonces para $n = 1$ se tendria

$$1 \diamond e = 1 \Leftrightarrow 1 + e = 1 \Leftrightarrow e = 0.$$

Luego, en caso de existir, el elemento neutro necesariamente es $e = 0$. Pero podemos comprobar que no es elemento neutro, tomando $n = 2$ no se cumple la condición

$$2 \diamond e = 2 \diamond 0 = 1 \neq 2,$$

y por tanto no existe elemento neutro.

Solución 8. En primer lugar, la operación $*$ es efectivamente una operación en $\mathbb{Z}$. En efecto, si a, $b \in \mathbb{Z}$ entonces

$$a * b = 2ab - b^2 + 1 \in \mathbb{Z}.$$

Por otro lado, $*$ no es conmutativa, ya que si tomamos por ejemplo $\bar{a} = 1$, $\bar{b} = 2$,

$$\begin{aligned} \bar{a} * \bar{b} &= 1 * 2 = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2^2 + 1 = 1, \\ \bar{b} * \bar{a} &= 2 * 1 = 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1^2 + 1 = 4. \end{aligned}$$

Lo que prueba que

$$\bar{a} * \bar{b} \neq \bar{b} * \bar{a}$$

y por tanto no se cumple la propiedad conmutativa. Del mismo modo, se puede ver que no se cumple la propiedad asociativa. Basta tomar $\bar{c} = 1$. Operando se comprueba entonces que

$$\begin{aligned} \left(\bar{a} * \bar{b}\right) * \bar{c} &= (1 * 2) * 1 = 1 * 1 = 2, \\ \bar{a} * \left(\bar{b} * \bar{c}\right) &= 1 * (2 * 1) = 1 * 4 = -7. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\left(\bar{a} * \bar{b}\right) * \bar{c} \neq \bar{a} * \left(\bar{b} * \bar{c}\right),$$

y la propiedad no es asociativa. Finalmente no existe tampoco elemento neutro. Si existiese, se debería verificar que

$$a * e = a \text{ para todo } a \in \mathbb{Z}.$$

Tomando $a = 1$, podemos determinar el valor del supuesto elemento neutro.

$$1 * e = 1 \Leftrightarrow 2e - e^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow e = 2.$$

Pero $e = 2$ no es elemento neutro, ya que por ejemplo tomando $a = -1$

$$(-1) * e = (-1) * 2 = -7 \neq -1.$$

Solución 9. La operación es conmutativa, por la conmutatividad de la suma de matrices,

$$A \diamond B = \frac{1}{2}(A \times B + B \times A) = \frac{1}{2}(B \times A + A \times B) = B \diamond A$$

para cualquier par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_2$.

La matriz identidad

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es el elemento neutro de la operación. Ya que

$$\begin{aligned} I\diamond A &= \frac{1}{2}\left(I\times A + A\times I\right) = \frac{1}{2}2A = A, \\ A\diamond I &= \frac{1}{2}\left(A\times I + I\times A\right) = \frac{1}{2}2A = A. \end{aligned}$$

En cambio, la operación no es asociativa. Si tomamos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

por un lado

$$\begin{aligned} A\diamond B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y se tiene

$$\begin{aligned} \left(A\diamond B\right)\diamond C &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por el otro lado

$$\begin{aligned} B\diamond C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A\diamond(B\diamond C) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \diamond \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego

$$(A\diamond B)\diamond C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A\diamond(B\diamond C)$$

y la propiedad no es asociativa.

Solución 10. La operación es conmutativa, por la conmutatividad de la suma de enteros,

$$a\diamond b = a\cdot b - (a+b) = b\cdot a - (b+a) = b\diamond a$$

para todos a, $b \in \mathbb{Z}$. La operación no es asociativa, si tomamos por ejemplo $\bar{a} = 1$, $\bar{b} = 2$, $\bar{c} = 3$ se tiene

$$(\bar{a}\diamond\bar{b})\diamond\bar{c} = -5 \neq -1 = \bar{a}\diamond(\bar{b}\diamond\bar{c}),$$

ya que operando directamente

$$\begin{aligned}(\bar{a}\diamond\bar{b})\diamond\bar{c} &= (1\diamond 2)\diamond 3 = -1\diamond 3 = -5,\\ \bar{a}\diamond(\bar{b}\diamond\bar{c}) &= 1\diamond(2\diamond 3) = 1\diamond 1 = -1.\end{aligned}$$

No existe elemento neutro. Si existiese un elemento neutro $e \in \mathbb{Z}$, entonces, en particular, se tiene

$$0\diamond e = 0$$

y esto implica que

$$0\cdot e - (0+e) = 0 \Rightarrow e = 0.$$

Pero $e = 0$ no es elemento neutro, ya que por ejemplo

$$0\diamond 1 = -1 \neq 1.$$

Solución 11. Aplicamos operaciones elementales a la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_1\leftrightarrow F_4}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_3\to F_3-2F_1}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_4\to F_4-\frac{5}{2}F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_2\to\frac{1}{2}F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_1\to F_4-F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3\to\frac{1}{3}F_3}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada reducida viene dada por

$$\operatorname{red}(A) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

con tres pivotes y una fila nula, luego rango$(A) = 3$. Por otro lado, la matriz de paso viene dada por el producto de matrices elementales

$$P = F_3\left(\frac{1}{3}\right) F_{43}\left(-1\right) F_2\left(\frac{1}{2}\right) F_{42}\left(-\frac{5}{2}\right) F_{32}(-2) F_{14}$$

que se corresponde con las operaciones elementales que hemos realizado en el mismo orden. Luego

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Compruébese que efectivamente

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{red}(A).$$

Solución 12. (i) Aplicando operaciones elementales

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to F_2+3F_1}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 8 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3+F_1}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_4 \to F_4-F_1}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to \frac{1}{5}F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_4 \to F_4+4F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & \frac{47}{5} \end{pmatrix} \underset{F_1 \to F_1-F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & \frac{47}{5} \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3 \to \frac{1}{4}F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 7 & \frac{47}{5} \end{pmatrix} \underset{F_4 \to F_4-7F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{10} \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_2 \to F_2-F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{10} \end{pmatrix} \underset{F_4 \to -\frac{10}{11}F_4}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3 \to F_3-\frac{3}{2}F_4}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \underset{F_2 \to F_2-\frac{1}{10}F_4}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_1 \to F_1-\frac{2}{5}F_4}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada reducida viene por tanto dada por la matriz identidad

$$\operatorname{red}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Como la matriz identidad tiene cuatro pivotes, el rango de la matriz es 4.

(ii) Aplicando operaciones elementales

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_2\to F_2+F_1}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_2\to F_3-3F_1}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_2\to \frac{1}{4}F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3\to F_3+5F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_1\to F_1-2F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada reducida viene dada por

$$\operatorname{red}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene dos pivotes y una fila nula. Luego su rango es 2.

(iii) Aplicando operaciones elementales

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_3\leftrightarrow F_1}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_2\to F_2+F_1}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_4\to F_4-3F_1}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_2\longleftrightarrow F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3\to F_3-3F_2}{\approx}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_4\to F_4-F_2}{\approx}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3\to \frac{-1}{7}F_3}{\approx}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_4\to F_4+2F_3}{\approx}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada reducida viene dada por

$$\text{red}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que tiene tres pivotes y una fila nula. Luego su rango es 3.

Solución 13.

(i) Matricialmente el sistema lineal toma la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos el método de eliminación

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1\leftrightarrow F_3}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{-1} & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1\to -F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -2 & -4 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2\to F_2-2F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -2 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 9 & 9 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2\to \frac{1}{7}F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{9}{7} & \frac{9}{7} & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3\to F_3-4F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & \frac{9}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{57}{7} & -\frac{15}{7} & -\frac{13}{7} \end{array}\right) \underset{F_1\to F_1+2F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{11}{7} & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{9}{7} & \frac{9}{7} & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{57}{7} & -\frac{15}{7} & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3\to -\frac{7}{15}F_3}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{11}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{9}{7} & \frac{9}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{19} & \frac{13}{57} \end{array}\right) \underset{F_2\to F_2-\frac{9}{7}F_3}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{10}{7} & \frac{11}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{19} & \frac{8}{19} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{19} & \frac{13}{57} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2\to F_2+\frac{10}{7}F_3}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{37}{19} & \frac{43}{57} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{19} & \frac{8}{19} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{19} & \frac{13}{57} \end{array}\right)$$

La matriz resultante de aplicar el método de eliminación es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{37}{19} & \frac{43}{57} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{18}{19} & \frac{8}{19} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{19} & \frac{13}{57} \end{array}\right).$$

En este caso, al no tener la matriz escalonada reducida filas nulas, coincide para la matriz del sistema y la matriz ampliada, siendo su rango común el número de pivotes

$$\text{rango}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{37}{19} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{18}{19} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{19} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{37}{19} & \frac{43}{57} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{18}{19} & \frac{8}{19} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{19} & \frac{13}{57} \end{pmatrix} = 3.$$

El sistema lineal asociado es

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathbf{1}x_1 + \frac{37}{19}x_4 & = & \frac{43}{57} \\ \mathbf{1}x_2 + \frac{18}{19}x_4 & = & \frac{8}{19} \\ \mathbf{1}x_3 + \frac{5}{19}x_4 & = & \frac{13}{57} \end{array}\right\} \tag{1.22}$$

Es un sistema con cuatros incógnitas, y tres pivotes asociados a las variables x_1, x_2, x_3. Por tanto la cuarta variable queda como parámetro $\lambda = x_4$. Sustituyendo directamente en (1.22)

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathbf{1}x_1 + \frac{37}{19}\lambda & = & \frac{43}{57} \\ \mathbf{1}x_2 + \frac{18}{19}\lambda & = & \frac{8}{19} \\ \mathbf{1}x_3 + \frac{5}{19}\lambda & = & \frac{13}{57} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 = \frac{43}{57} - \frac{37}{19}\lambda \\ x_2 = \frac{8}{19} - \frac{18}{19}\lambda \\ x_3 = \frac{13}{57} - \frac{5}{19}\lambda \end{array}\right\}$$

Luego el conjunto de soluciones viene dado

$$\begin{aligned} \text{Sol} &= \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = \frac{43}{57} - \frac{37}{19}\lambda,\ x_2 = \frac{8}{19} - \frac{18}{19}\lambda,\, x_3 = \frac{13}{57} - \frac{5}{19}\lambda,\, x_4 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\left(\frac{43}{57} - \frac{37}{19}\lambda, \frac{8}{19} - \frac{18}{19}\lambda, \frac{13}{57} - \frac{5}{19}\lambda, \lambda\right) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Compruebese que efectivamente se verifica

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{43}{57} - \frac{37}{19}\lambda \\ \frac{8}{19} - \frac{18}{19}\lambda \\ \frac{13}{57} - \frac{5}{19}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Matricialmente el sistema lineal toma la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{59}{130} \\ -\frac{19}{26} \\ \frac{3}{130} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de eliminación

$$
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)
\underset{F_2\to F_2+F_1}{\approx}
\left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)
\underset{F_3\to F_3-3F_1}{\approx}
\left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\underset{F_4\to F_4-7F_1}{\approx}
\left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & -15 & 0 \end{array}\right)
\underset{F_2\leftrightarrow F_3}{\approx}
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -15 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\underset{F_2\to -\frac{1}{2}F_2}{\approx}
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -15 & 0 \end{array}\right)
\underset{F_4\to F_4+3F_2}{\approx}
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)
$$

$$
\underset{F_1\to F_1-F_2}{\approx}
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)
\underset{F_3\to \frac{1}{5}F_3}{\approx}
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)
$$

$$
\underset{F_4\to F_4+\frac{15}{2}F_3}{\approx}
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)
\underset{F_2\to F_2-\frac{5}{2}F_3}{\approx}
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)
$$

$$
\underset{F_1\to F_1+\frac{1}{2}F_3}{\approx}
\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)
$$

En este caso, la matriz resultante de aplicar el método de eliminación viene dada por

$$
\left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \tag{1.23}
$$

La matriz escalonada reducida de la matriz del sistema tiene una fila nula, la cuarta, pero su correspondiente término independiente es $-\frac{3}{2}$ y por tanto no nulo. Por tanto, no se cumple la condición de resolubilidad `[GJ1]` y el sistema lineal no tiene solución. Tengase en cuenta que el sistema lineal asociado a (1.23), viene dada por

$$
\left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & -\frac{1}{2} \\ x_3 & = & 3 \\ 0 & = & -\frac{3}{2} \end{array}\right\}
$$

siendo un problema sin solución, en donde la última ecuación, correspondiente a la fila cuarta, es claramente un absurdo. Por tanto, no se cumple la condición de resolubilidad `[GJ1]` y el sistema lineal no tiene solución. De hecho, es fácil ver que el rango de la matriz del sistema es distinto al de la ampliada

$$\text{rango}(A) = \text{rango}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \neq 4 = \text{rango}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = \text{rango}(A^*)$$

y no se cumple la condición (1.7).

(iii) Matricialmente el sistema lineal toma la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$$

en donde comprobamos que la matriz del sistema es la misma que para el apartado anterior. Luego, seguimos las mismas operaciones elementales que en el apartado anterior variando solamente el término independiente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ 7 & 4 & -1 & -12 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 + F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \\ 7 & 4 & -1 & -12 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - 3F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \\ 7 & 4 & -1 & -12 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_4 \to F_4 - 7F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -15 & -12 \end{array}\right) \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{-2} & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -15 & -12 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2 \to -\frac{1}{2}F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -15 & -12 \end{array}\right) \underset{F_4 \to F_4 + 3F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 - F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \end{array}\right) \underset{F_3 \to \frac{1}{5}F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & -\frac{15}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_4 \to F_4 + \frac{15}{2}F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - \frac{5}{2}F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 + \frac{1}{2}F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Contrariamente al caso anterior, en este caso la matriz resultante de aplicar el método de eliminación

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{1.24}$$

tiene una fila nula y su correspondiente término es también nulo. Luego se cumple la condición [`GJ1`], de hecho se comprueba la condición (1.7)

$$r = \text{rango}(A) = \text{rango}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 = \text{rango}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rango}(A^*).$$

Como el número de incógnitas coincide con el de variables, $k = r = 3$, luego por (1.8) el número de parámetros es nulo,

$$p = k - r = 3 - 3 = 0,$$

y por tanto la solución es única. Este hecho se comprueba de (1.24), el sistema lineal asociado nos da directamente las soluciones

$$\begin{aligned} x_1 &= -1, \\ x_2 &= -1, \\ x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Compruébese finalmente que efectivamente es la solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Solución 14. Tenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Repasando la operaciones elementales que hemos hecho en el ejercicio 12, tenemos que la matriz de paso viene dada por

$$P = F_{14}\left(-\frac{2}{5}\right)F_{24}\left(-\frac{1}{10}\right)F_{34}\left(-\frac{3}{2}\right)F_{4}\left(-\frac{10}{11}\right)F_{23}(-1)F_{43}(-7)F_{3}\left(\frac{1}{4}\right)F_{12}(-1)F_{42}(4)F_{2}\left(\frac{1}{5}\right)F_{41}(-1)F_{31}(1)F_{21}(3)$$

siendo la matriz escalonada reducida

$$\operatorname{red}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

la matriz identidad. Aplicando las propiedades de los determinantes de las matrices elementales, el determinante de la matriz de paso viene dado por

$$\left|F_{14}\left(-\tfrac{2}{5}\right)\right|\left|F_{24}\left(-\tfrac{1}{10}\right)\right|\left|F_{34}\left(-\tfrac{3}{2}\right)\right|\left|F_4\left(-\tfrac{10}{11}\right)\right|\left|F_{23}(-1)\right|\left|F_{43}(-7)\right|\left|F_3\left(\tfrac{1}{4}\right)\right|\left|F_{12}(-1)\right|\left|F_{42}(4)\right|\left|F_2\left(\tfrac{1}{5}\right)\right|\left|F_{41}(-1)\right|\left|F_{31}(1)\right|\left|F_{21}(3)\right|$$

y por tanto

$$|P| = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{10}{11}\right) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{22}.$$

Como $\operatorname{red}(A) = PA$, entonces $|\operatorname{red}(A)| = |P|\,|A|$ y por tanto

$$|A| = \frac{|\operatorname{red}(A)|}{|P|} = \frac{1}{-\frac{1}{22}} = -22.$$

Solución 15. (i) Para calcular el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

reducimos la matriz mediante operaciones elementales a una más sencilla

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_1 \to \frac{1}{2}F_1}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to F_2 - F_1}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_4 \to F_4 - F_1}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 5 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to \frac{1}{5}F_2}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 5 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz resultante

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 5 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

es el resultado de aplicar tres operaciones elementales que podemos expresar matricialmente del siguiente modo

$$A' = F_{31}(1)F_{21}(-1)F_1\left(\frac{1}{2}\right)A.$$

Luego

$$|A'| = |F_{31}(1)|\,|F_{21}(-1)|\left|F_1\left(\frac{1}{2}\right)\right||A| = 1\cdot 1\cdot \frac{1}{2}\cdot |A| = \frac{|A|}{2},$$

y por tanto

$$|A| = 2\,|A'|\,. \tag{1.25}$$

El determinante de A' se puede calcular fácilmente desarrollando por la primera columna y aplicando la regla de Sarrus al determinante de orden 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 5 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 5 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix} = \frac{29}{2}.$$

Finalmente de (1.25) se tiene

$$|A| = 2\frac{29}{2} = 29.$$

(ii) Para calcular el determinante de la matriz

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

seguimos un proceso similar. Tomamos el segundo elemento de la primera columna y los usamos como pivote para hacer ceros en toda la columna.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_1 \to F_1 - 2F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3 \to F_3 - F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_4 \to F_4 - F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz resultante es

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = F_{42}(-1)F_{32}(-1)F_{12}(-2)B$$

y, como consecuencia de las propiedades de los determinantes de las matrices elementales,

$$|A'| = |F_{42}(-1)|\,|F_{32}(-1)|\,|F_{12}(-2)|\,|B| = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot |B| = |B|,$$

tiene el mismo determinante. El determinante de A' se puede calcular desarrollando por los elementos de la primera columna

$$|B| = \left|A'\right| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Del mismo modo, este último determinante podemos reducirlo haciendo operaciones elementales. Utilizando el cuatro elemento de la primera columna como pivote, podemos hacer ceros sobre dicha columna mediante la operación elemental de sumar a una fila otra multiplicada por un escalar que sabemos no modifica el valor del determinante. De esta manera

$$\begin{aligned} |B| &= -\begin{vmatrix} -3 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

Finalmente basta aplicar la regla de Sarrus,

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3.$$

Solución 16.

(i) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante desarrollando por la primera columna

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Como el determinante es 0, descartamos que la matriz tenga rango 4. En cambio, sí existe una submatriz de orden 3

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$$

con determinante no nulo

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Luego el rango de la matriz es 3, rango$(A) = 3$.

(ii) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

En este caso, véase ejercicio anterior,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -22,$$

luego determinante no nulo y por tanto el rango de la matriz es 4, rango$(A) = 4$.

(iii) Sea la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es una matriz de tres filas y cuatro columnas, luego como mucho podemos tomar una submatriz de orden 3. Las submatrices de orden 3 que se puede formar tienen necesariamente las tres filas y tres de las columnas de las cuatros posibles. Si consideramos el conjunto de columnas $\{1, 2, 3, 4\}$, tenemos cuatro posibles combinaciones de submatrices, las asociadas a las columnas

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}.$$

Todas ellas tienen determinante nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Luego el rango no es 3, sino necesariamente menor. Para submatrices de orden 2, podemos encontrar una submatriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & 3 & 1 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

con determinante no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Luego el rango es 2, $\text{rango}(B) = 2$.

(iv) Sea la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como es una matriz de tres filas y cuatro columnas, el rango puede ser 3 como mucho. Las submatriz dada por las tres filas y columnas

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

tiene determinante no nulo

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

Por tanto $\text{rango}(C) = 3$.

Solución 17. Queremos calcular la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

En primer lugar, la matriz tiene inversa ya que su determinante es no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -15.$$

Aplicamos el método de eliminación de Gauss, para ello adjuntamos la matriz A y la matriz identidad,

$$(A|\ I) \to \left(I|\, A^{-1}\right)$$

haciendo operaciones elementales para obtener la matriz identidad a la izquierda y la inversa a la derecha

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - 4F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to F_3 - 7F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 3 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2 \to \frac{-1}{3} F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 - 2F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to \frac{1}{5} F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2 \to F_2 - \frac{1}{3} F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{19}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 + \frac{2}{3} F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{23}{15} & \frac{2}{5} & \frac{2}{15} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{19}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Por tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{23}{15} & \frac{2}{5} & \frac{2}{15} \\ \frac{19}{15} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

lo que coincide con lo calculado en el ejemplo 1.39.

Solución 18. Queremos calcular la matriz inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

En primer lugar, calculamos el determinante de la matriz

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 14.$$

Como es no nulo, existe matriz inversa. Por otro lado, los adjuntos de cada elemento vienen dador por

$$A_1^1 := (-1)^{1+1}|A_{1,1}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad A_1^2 = (-1)^{1+2}|A_{1,2}| = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_1^3 = (-1)^{1+3}|A_{1,3}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_2^1 = (-1)^{1+3}|A_{2,1}| = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6, \quad A_2^2 = (-1)^{2+3}|A_{2,2}| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6, \quad A_2^3 = (-1)^{2+3}|A_{2,3}| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_3^1 = (-1)^{3+1}|A_{3,1}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8, \quad A_3^2 = (-1)^{3+2}|A_{3,2}| = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_3^3 = (-1)^{3+3}|A_{3,3}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

La matriz adjunta viene dada por

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ -6 & 6 & 2 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Aplicando la fórmula (1.21) obtenemos la matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{Adj}(A)^T = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ -6 & 6 & 2 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 8 \\ 1 & 6 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix},$$

que coincide con la matriz inversa calculada en el ejemplo 1.41.

Solución 19. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

En el ejercicio 12 realizamos operaciones elementales hasta llegar a su matriz reducida, que en este caso es la identidad. Luego la matriz es regular, es decir tiene inversa. Por el método de eliminación de Gauss,

$$(A|I) \to (I|A^{-1}),$$

podemos obtener la matriz inversa sin más que repetir las mismas operaciones elementales sobre la matriz identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2\to F_2+3F_1}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3\to F_3+F_1}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_4\to F_4-F_1}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2\to \frac{1}{5}F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_4\to F_4+4F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_1\to F_1-F_2}{\approx} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3\to \frac{1}{4}F_3}{\approx} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{7}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_4\to F_4-7F_3}{\approx} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{7}{20} & \frac{4}{5} & -\frac{7}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_2\to F_2-F_3}{\approx} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{7}{20} & \frac{4}{5} & -\frac{7}{4} & 1 \end{pmatrix} \underset{F_4\to -\frac{10}{11}F_4}{\approx} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{7}{22} & -\frac{8}{11} & \frac{35}{22} & -\frac{10}{11} \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3\to F_3-\frac{3}{2}F_4}{\approx} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{7}{20} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{5}{22} & \frac{12}{11} & -\frac{47}{22} & \frac{15}{11} \\ \frac{7}{22} & -\frac{8}{11} & \frac{35}{22} & -\frac{10}{11} \end{pmatrix} \underset{F_2\to F_2-\frac{1}{10}F_4}{\approx} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{7}{22} & \frac{3}{11} & -\frac{9}{22} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{22} & \frac{12}{11} & -\frac{47}{22} & \frac{15}{11} \\ \frac{7}{22} & -\frac{8}{11} & \frac{35}{22} & -\frac{10}{11} \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_1\to F_1-\frac{2}{5}F_4}{\approx} \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{7}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{7}{22} & \frac{3}{11} & -\frac{9}{22} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{22} & \frac{12}{11} & -\frac{47}{22} & \frac{15}{11} \\ \frac{7}{22} & -\frac{8}{11} & \frac{35}{22} & -\frac{10}{11} \end{pmatrix}$$

Luego la matriz inversa viene dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{7}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{7}{22} & \frac{3}{11} & -\frac{9}{22} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{22} & \frac{12}{11} & -\frac{47}{22} & \frac{15}{11} \\ \frac{7}{22} & -\frac{8}{11} & \frac{35}{22} & -\frac{10}{11} \end{pmatrix}.$$

Compruébese que

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{7}{11} & \frac{4}{11} \\ \frac{7}{22} & \frac{3}{11} & -\frac{9}{22} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{22} & \frac{12}{11} & -\frac{47}{22} & \frac{15}{11} \\ \frac{7}{22} & -\frac{8}{11} & \frac{35}{22} & -\frac{10}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Solución 20. Sea

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 x + 0 + 0 - 0 + \cos^2 x = 1$$

es no nulo, la matriz tiene inversa. Por otro lado, los adjuntos de la primera fila vienen dados por

$$\begin{aligned} A_1^1 &= (-1)^{1+1}\,|A_{1,1}| = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen} x, \\ A_1^2 &= (-1)^{1+2}\,|A_{1,2}| = -\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & 1 \end{vmatrix} = -\cos x, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} A_1^3 &= (-1)^{1+3}\,|A_{1,3}| = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x \end{vmatrix} \\ &= \cos x(\operatorname{sen} x - \cos x) - \operatorname{sen} x\,(\operatorname{sen} x + \cos x) \\ &= -\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = -1 \end{aligned}$$

Los de la segunda fila por

$$\begin{aligned} A_2^1 &= (-1)^{1+3}\,|A_{2,1}| = -\begin{vmatrix} -\cos x & 0 \\ \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{vmatrix} = \cos x, \\ A_2^2 &= (-1)^{2+2}\,|A_{2,2}| = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
A_2^3 &= (-1)^{2+3}\,|A_{2,3}| = -\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x \end{vmatrix} \\
&= -\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x - \cos x) - \cos x\,(\operatorname{sen} x + \cos x) \\
&= -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Del mismo modo, los adjuntos de la tercera fila son

$$\begin{aligned}
A_3^1 &= (-1)^{1+3}\,|A_{3,1}| = \begin{vmatrix} -\cos x & 0 \\ \operatorname{sen} x & 0 \end{vmatrix} = 0, \\
A_3^2 &= (-1)^{3+2}\,|A_{3,1}| = -\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 0 \\ \cos x & 1 \end{vmatrix} = 0,
\end{aligned}$$

y

$$A_3^3 = (-1)^{3+3}\,|A_{3,3}| = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Luego la matriz adjunta viene dada por

$$\operatorname{Adj}(A) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & -1 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando finalmente la fórmula (1.21) calculamos la matriz inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & -1 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, compruébese que efectivamente se verifica

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Índice Alfabético