Bartosz Brzoza*

Całka Clenshawa-Curtisa
Clenshaw-Curtis quadrature

Wrocław, 25 stycznia 2020

1. Abstract

We consider the problem of numerical integration. A particular method called the Clenshaw-Curtis quadrature is presented, explained and then evaluated. An efficient implementation in Julia is also provided as well as benchmarking code which shows off its effectiveness and limitations. A brief discussion of numerical results follows.

2. Specyfikacja problemu

Mając funkcję $f(x)$ określoną na przedziale $[-1,1]$
chcemy tak dobrać węzły $x_1, ..., x_n$ oraz wagi $w_1, ..., w_n$, aby suma

$$\sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

najlepiej przybliżała całkę

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \tag{1}$$

3. Węzły równoodległe

Przybliżanie całki (1) stosując metodę trapezów (lub metodę trapezów wyższych rzędów) w węzłach równoodległych nie przynosi dobrych efektów dla wielomianów wysokiego stopnia.

4. Algorytm Clenshawa-Curtisa

Podstawiając $x = cos\theta$ do rozważanej całki:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{\pi} f(cos\theta)sin\theta d\theta$$

przekształcamy problem całkowania $f(x)$ na całkowanie $f(cosx)sinx$. Możemy to zrobić rozwijając funkcję $f(cos\theta)$ w szereg Fouriera:

$$f(cos\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}{}' a_k cos(k\theta),$$

* *E-mail*: `309426@ii.uni.wroc.pl`

Nie pojawiają się współczynniki z $sin(k\theta)$, gdyż funkcja $f(cos\theta)$ jest parzysta. W powyższym wzorze współczynniki szeregu Fouriera wynoszą:

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(cos\theta)cos\theta d\theta \tag{2}$$

Te całki nadal musimy obliczyć numerycznie. Zauważmy, że funkcja $f(cos\theta)$ jest parzysta i okresowa. Można zatem przybliżyć całkę (2) dyskretną transformacją kosinusową w $N+1$ równoodległych punktach $\theta_n = \frac{n\pi}{N}$ $(n = 0, ..., N)$:

$$a_k \approx \frac{2}{N}\left(\sum_{n=0}^{N}{}'' f(\cos\frac{n\pi}{N})\cos\frac{nk\pi}{N}\right)$$

którą można obliczyć w czasie $O(NlogN)$ korzystając z algorytmu DCT typu I.
Zakłada on, że wartości w punktach ewaluacji po ekstrapolacji byłyby parzyste względem $n = 0$, oraz parzyste względem $n = N$.
Ostatecznie całkę (1) można przedstawić:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_0^{\pi} f(cos\theta)sin\theta d\theta \approx \sum_{k=0}^{N/2}{}'' \frac{2a_{2k}}{1-(2k)^2}$$

5. Powiązanie z wielomianami Czebyszewa

Zauważmy, że $T_k(cos\theta) = cos(k\theta)$, zatem szereg z poprzedniego działu to tak naprawdę wyrażenie funkcji $f(x)$ w bazie wielomianów Czebyszewa:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}{}' a_k T_k(x)$$

Zatem w istocie całkujemy przybliżenie funkcji $f(x)$ w bazie wielomianów Czebyszewa. Stosujemy węzły:

$$x_k = cos\frac{k\pi}{N} \ (k = 0, .., N)$$

które są ekstremami wielomianu Czebyszewa T_N.

6. Przeprowadzone doświadczenia

Wybrałem 4 klasy funkcji, na których testowane były powyższe metody:

1. Funkcje postaci $f'(x)$, gdzie $f(x) = \sum_i \alpha_i exp(-(\frac{x-\mu_i}{\sigma_i})^2)$ (RBF)
2. Funkcje postaci $f'(x)$, gdzie $f(x) = \sum_i \alpha_i cos(a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i)$
3. Funkcje przedziałami stałe o zbiorze wartości $\{0, 1\}$ (funkcje prostokątne)
4. Funkcje będące sumą funkcji z pierwszego punktu i funkcji prostokątnej

6.1. Doświadczenia

Dla każdej z klas wylosowałem po 1000 przykładów funkcji.
Za pomocą każdej z trzech metod obliczyłem całkę (1) oraz błąd względny kwadratury względem wyniku analitycznego dla każdej z funkcji. Wykorzystywałem 1024 węzły dla każdej kwadratury.
Przedstawiam ilość cyfr dokładnych dla średniej oraz maksymalnej wartości błędu względnego:

6.2. Wyniki

Ilość cyfr dokładnych dla średniego błędu

Ilość węzłów	RBF	Tryg-poly	Rect	RBF+Rect
4	-4.08	-3.17	-0.88	-2.76
16	0.75	14.56	-0.77	-1.26
64	28.01	48.72	-0.77	-1.14
256	48.99	49.0	-0.77	-1.12
1024	49.6	49.11	-0.77	-1.12

Ilość cyfr dokładnych dla najgorszego błędu

Ilość węzłów	RBF	Tryg-poly	Rect	RBF+Rect
4	-11.05	-9.57	-6.47	-10.75
16	-7.21	8.41	-6.2	-9.18
64	19.8	43.47	-6.1	-8.98
256	41.28	43.71	-6.11	-8.9
1024	42.44	43.85	-6.11	-8.9

7. Wnioski

1. Kwadratura Clenshawa-Curtisa dobrze przybliża całki funkcji, które są gładkie.
2. Ta kwadratura nie potrafi przybliżyć funkcji nieciągłych, nawet gdy owe funkcje są przedziałami ciągłe.
3. Dużą zaletą tej metody całkowania jest możliwość wykonania obliczeń w czasie $O(nlogn)$