SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 6

Poszukiwanie zer wielomianów metodą iterowanego dzielenia
(metoda Newtona)

Tomasz Gajda
16.04.2020

1 Wstęp teoretyczny

Zadanie z którym spotkaliśmy się na laboratorium dotyczyło wyznaczania zer wielomianów korzystając z metody Newtona. Działa ona następująco:

Otrzymujemy na początku wielomian, którego zer będziemy szukać:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0 = 0 \tag{1}$$

Jeżeli wielomian ten podzielimy przez wyraz $(x - x_j)$ otrzymamy:

$$f(x) = (x - x_j)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + ... + b_0) + R_j \tag{2}$$

Aby wyznaczyć współczynniki nowego wielomianu korzystamy z rekurencji:

$$b_n = 0 \tag{3}$$

$$b_k = a_{k+1} + x_j b_{k+1}, k = n - 1, n - 2, ..., 0 \tag{4}$$

$$R_j = a_0 + x_j b_0 \tag{5}$$

Po wykonaniu kolejnego dzielenia otrzymalibyśmy:

$$f(x) = (x - x_j)^2 (c_{n-2} x^{n-2} + c_{n-3} x^{n-3} + ... + c_0) + Rj^{'}(x - x_j) + R_j \tag{6}$$

Współczynniki c_n oraz czynnik R$'_j wyznaczamytaksamojak$b$_n$ i R_j. W naszej metodzie możemy wyznaczać zera wielomianu iteracyjnie zgodnie z formułą:

$$x_{j+1} = x_j - \frac{R_j}{R_j^{'}} \tag{7}$$

gdzie to x_{j+1} to kolejne przybliżenie zera, a R_j i $R_j^{'}$ otrzymujemy ze wzoru 5.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Naszym głównym zadaniem było znalezienie wszystkich zer wielomianu:

$$f(x) = x^5 + 14x^4 + 33x^3 - 92x^2 - 196x + 240 \tag{8}$$

Oprócz tego, musieliśmy napisać funkcję licz_r(), służącą do obliczania wartości R_j. Argumentami funkcji miały być:

1. wektor zawierający współczynniki aktualnego wielomianu,
2. wektor do którego funkcja wpisze współczynniki wielomianu o stopień niższego,
3. stopień wielomianu,
4. wartość x_j dla którego funkcja ma zwracać wartość R_j

2.2 Przyjęte założenia

Założenia		
Symbol	Wielkość	Wartość
x_0	Pierwiastek dla poprzedniej iteracji	0
IT_{MAX}	Maksymalna liczba iteracji	30

2.3 Wyniki

Wyniki programu prezentują się w następujący sposób. Otrzymaliśmy 5 miejsc zerowych, każde otrzymane w róznych liczbach iteracji:

Pierwsze miejsce zerowe: x = 1				
L	Numer iteracji	Wartość x1	Wartość R_j	Wartość $R_j^{'}$
1	1	1.22449	240	196
1	2	0.952919	43.1289	158.813
1	3	0.999111	10.5714	228.86
1	4	1	0.195695	220.179
1	5	1	7.96468e05	220
1	6	1	1.32729e11	220

Drugie miejsce zerowe: x = -4				
L	Numer iteracji	Wartość x1	Wartość R_j	Wartość $R_j^{'}$
2	1	5.45455	240	44
2	2	4.46352	120.975	122.071
2	3	4.10825	24.2755	68.3304
2	4	4.00957	4.31754	43.7539
2	5	4.00009	0.347977	36.6891
2	6	4	0.00323665	36.0065
2	7	4	2.90891e07	36

Trzecie miejsce zerowe: x = 2				
L	Numer iteracji	Wartość x1	Wartość R_j	Wartość $R_j^{'}$
3	1	15	60	4
3	2	9.20218	5850	1009
3	3	5.53752	1687.53	460.488
3	4	3.38316	469.259	217.818
3	5	2.33534	118.159	112.767
3	6	2.0277	22.07	71.739
3	7	2.00021	1.67505	60.9441
3	8	2	0.0128842	60.0073
3	9	2	7.83733e07	60

Czwarte miejsce zerowe: x = -3				
L	Numer iteracji	Wartość x1	Wartość R_j	Wartość $R_j^{'}$
4	1	2.30769	30	13
4	2	2.94284	5.32544	8.38462
4	3	2.99954	0.403409	7.11433
4	4	3	0.00321531	7.00092
4	5	3	2.10929e07	7

Pierwsze miejsce zerowe: x = 1				
L	Numer iteracji	Wartość x1	Wartość R_j	Wartość $R_j^{'}$
1	1	1.22449	240	196
1	2	0.952919	43.1289	158.813
1	3	0.999111	10.5714	228.86
1	4	1	0.195695	220.179
1	5	1	7.96468e05	220
1	6	1	1.32729e11	220

Wyniki zgadzają się z oczekiwanymi - zera wielomianu to 1, -4, 2, -3 oraz 10. Algorytm potrzebował maksymalnie 9 iteracji (w przypadku x = 2) żeby określić miejsce zerowe z dokładnością którą zadaliśmy. Patrząc na to, że maksymalna liczba iteracji (IT_{MAX}) wynosiła 30, możemy przypuszczać że jest to całkiem wydajny algorytm.

3 Wnioski

Metoda Newtona jest całkiem szybką metodą - często używaną w solverach (funkcjach w kalkulatorach naukowych pozwalająca na rozwiązywanie równań), ze względu na to jak szybko się zbiega. Sporą wadą jej jest natomiast fakt, iż zbieżność nie zawsze wcale musi zachodzić. Istnieją przypadki (nawet wiele) gdzie metoda bywa **rozbieżna**, kiedy to punkt startowy jest zbyt daleko od pierwiastka równania, którego szukamy. W trakcie rozwiązywania równań nieliniowych kłopotliwe dla metody Newtona mogą się okazać również pierwiastki **wielokrotne**, dla których zbieżność algorytmu staje się liniowa (z kwadratowej). W takich przypadkach metoda Newtona może okazać się dużo wolniejsza od innych metod rozwiązywania równań o zbieżności liniowej.