SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 3

Iteracyjne rozwiązywanie układu równań liniowych
metodą Jakobiego

Tomasz Gajda
22.03.2020

1 Wstęp teoretyczny

W tym laboratorium do rozwiązywania układu równań liniowych korzystaliśmy z metody Jakobiego. Metoda ta polega iteracyjnym rozwiązywaniu układu równań korzystając z wektora rozwiązań do jego obliczenia - oznacza to, że im więcej iteracji wykonamy tym bliżej rozwiązaniu analitycznemu będzie ostateczne rozwiązanie. Algorytm ten jest uproszczoną wersją metody diagonalizacji macierzy Jakobiego.

Rozpisując metodę po współrzędnych, otrzymujemy układ rozczepionych równań:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum a_{ij}x_j^{(k)}) \tag{1}$$

Oznacza to, że w i-tym równaniu ostatecznego układu równań przyjmujemy za współrzędne x wartości z poprzedniej iteracji i na ich podstawie wyznaczamy wartość x_i. W tym przypadku wyjątkowo numer iteracji zaznaczamy za pomocą górnego indeksu.

Macierz trójprzekątniowa to macierz, która składa się jedynie z trzech głównych przekątnych. Jest ona nieredukowalna. Przykładem takiej macierzy jest przedstawiona poniżej macierz A.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} d_1 & e_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & d_2 & e_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & d_3 & e_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & d_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{n-1} & d_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Zadanie z którym spotkaliśmy się na laboratorium dotyczyło rozwiązania równania różniczkowego opisującego ruch ciała, które zostało poddane działaniom trzech sił: sprężystej, tarcia, oraz wymuszającej ruch:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - \beta V + F_0 sin(\Omega t) \tag{3}$$

Problem jest rozwiązywany w czasie, dlatego musimy ustalić kolejne chwile czasowe zależne od i:

$$t = t_i = h * i, \qquad i = 0, 1, 2, ... \tag{4}$$

Teraz zamieniamy drugą pochodną na iloraz różnicowy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2} \tag{5}$$

Jako że wiemy, że prędkość to pierwsza pochodna położenia po czasie, to zastępujemy ją ilorazem różnicowym i wstawiamy do naszego równania różniczkowego:

$$\frac{x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}}{h^2} = -\omega^2 x_i - \beta V_i + F_0 sin(\Omega hi) \tag{6}$$

Teraz porządkujemy nasze równanie przenosząc niewiadome na lewą stronę, a wyrazy wolne na prawą:

$$x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1} + \omega^2 h^2 x_i + \beta h(x_{i+1} - x_i) = F_0 sin(\Omega hi) h^2 \tag{7}$$

Co symbolicznie możemy zapisać jako:

$$a_1 x_{i-1} + a_2 x_i + a_3 x_{i+1} = b_i, \tag{8}$$

gdzie poszczególne czynniki odpowiadają wyrazom ze wzoru (7). Jak widzimy otrzymaliśmy teraz układ równań w postaci:

$$\mathbf{A}x = b \tag{9}$$

Tak jak w pierwszym laboratorium, musimy podać dwa warunki początkowe:

$$x(t=0) = x_0 = 1, \qquad V(t=0) = V_0 = \frac{x_{i+1} - x_i}{h} = 0 \tag{10}$$

Po dodaniu ich do naszego układu wygląda on następująco:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ \dots \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Ponieważ macierz naszego układu jest trójprzekątniowa, możemy ją przechowywać w postaci trzech n-elementowych wektorów, reprezentując jedną z przekątnych każdy:

$$d_0 = [1, 1, a_3, a_3, ..., a_3] \tag{11}$$

$$d_1 = [0, -1, a_2, a_2, ..., a_2] \tag{12}$$

$$d_2 = [0, 0, a_1, a_1, ..., a_1] \tag{13}$$

Podążając dalej za metodą Jakobiego, aby wyznaczyć i-ty element tego przybliżenia dysponując przybliżeniem z poprzedniej iteracji, musimy skorzystać ze wzoru:

$$x_n[i] = \frac{1}{d_0[i]}(b[i] - d_1[i]x_s[i-1] - d_2[i]x_s[i-2] \tag{14}$$

gdzie x_n to wektor nowych przybliżeń, x_s to wektor przybliżeń z poprzedniej iteracji. Tą operację powtarzamy dla każdego i = 0, 1, 2, ..., n.

W naszym zadaniu mieliśmy wykonać powyższe kroki dla trzech przypadków:

1. $\beta = 0.0, \quad F_0 = 0.0, \quad \Omega = 0.8$
2. $\beta = 0.4, \quad F_0 = 0.0, \quad \Omega = 0.8$
3. $\beta = 0.4, \quad F_0 = 0.1, \quad \Omega = 0.8$

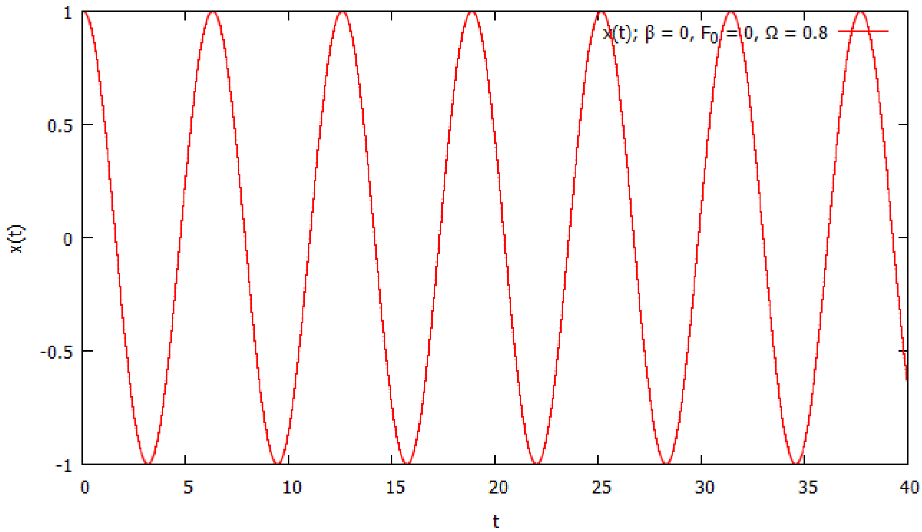
2.2 Przyjęte założenia

Założenia		
Symbol	Wielkość fizyczna	Wartość
V_0	Prędkość początkowa	0
x_0	Wychylenie początkowe	1
ω	Częstość kątowa	1
n	Liczba kroków czasowych	2000
h	Krok całkowania	0.02

2.3 Wyniki

Wyniki programu przedstawione za pomocą konsolowej wersji programu gnuplot prezentują się zgodnie z oczekiwaniami. Pierwszy przypadek, w którym przyjęte wartości wynosiły:

$$\beta = 0.0, \quad F_0 = 0.0, \quad \Omega = 0.8$$

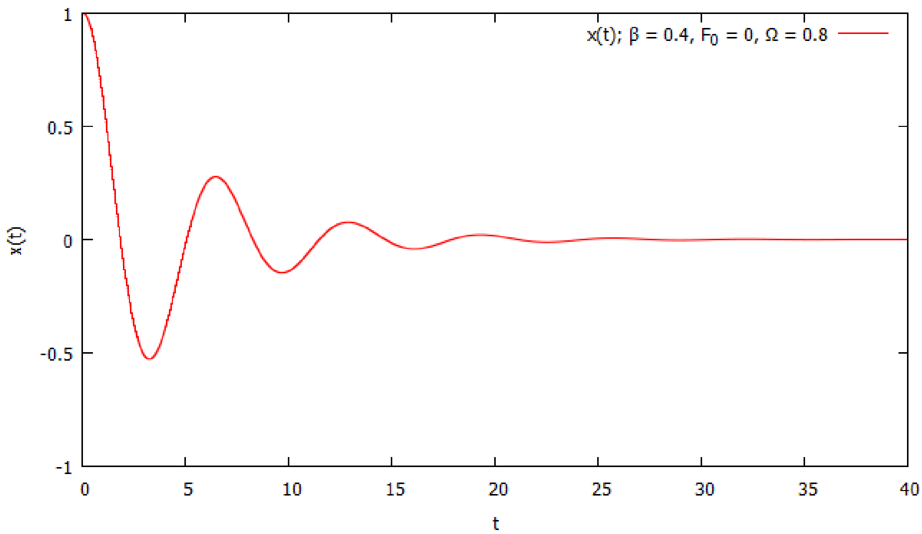


Rysunek 1: Wykres wyników programu dla 1 przypadku

W tym przypadku nie występuje ani tłumienie, ani wymuszenie, dlatego też zakres pozostaje pełny i przypomina wykres cosinusa.

Następnie przypadek drugi, gdzie:

$$\beta = 0.4, \quad F_0 = 0.0, \quad \Omega = 0.8$$

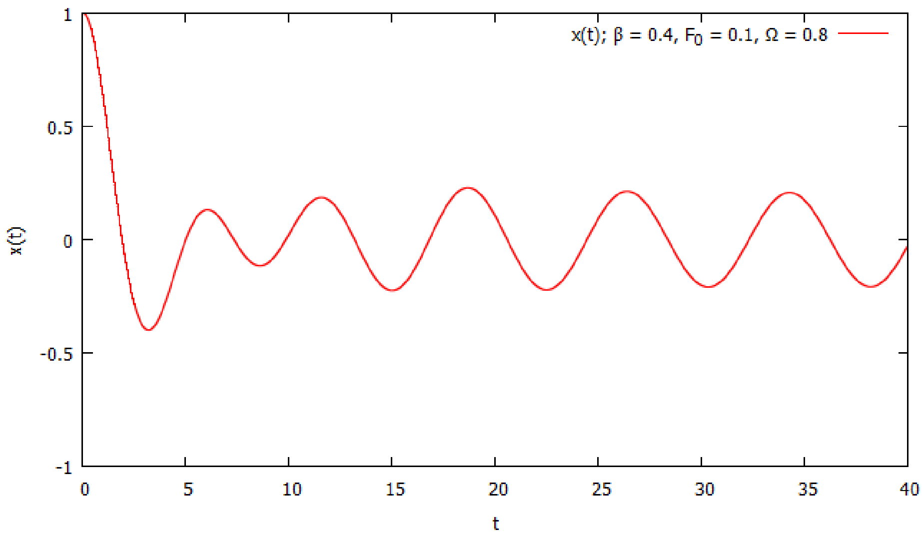


Rysunek 2: Wykres wyników programu dla 2 przypadku

W przypadku numer 2 występuje tylko tłumienie - możemy zobaczyć jak wychylenie od punktu 0 maleje razem z czasem. Pod koniec wykres jest już prawie poziomą linią przez działanie wygaszania.

I na koniec przypadek trzeci, gdzie to:

$$\beta = 0.4, \quad F_0 = 0.1, \quad \Omega = 0.8$$



Rysunek 3: Wykres wyników programu dla 3 przypadku

Teraz działa zarówno tłumienie jak i wymuszenie, dlatego wykres choć na początku wygaszany, później zwiększa swoje wychylenie od punktu 0, a na koniec równoważy się tworząc wykres cosinusa o mniejszej amplitudzie. We wszystkich trzech przypadkach ilość iteracji wynosiła 2001.

3 Wnioski

Jak możemy zobaczyć na wykresach, metoda Jakobiego daje satysfakcjonujące wyniki. Metoda rzeczywiście jest dość prosta w implementacji, a oprócz tego jest w pełni równoległa - każdą współrzędną nowego przybliżenia możemy wyznaczyć niezależnie od pozostałych. Dla porównania do tego samego problemu wykorzystałem metodę Gaussa-Seidla, w której liczba iteracji zmalała aż do 3. Jest to spowodowane tym, że w tej metodzie korzystamy jedynie z jednego wektora przybliżeń, dlatego w każdej iteracji obliczenia dla danego elementu bazują na poprzednich, które zostały już poprawione. Metoda Jakobiego pozwalała na to dopiero w następnej iteracji.

Dlatego mimo to, że wyniki, które otrzymaliśmy dzięki metodzie Jakobiego są jak najbardziej poprawne, to w tym porównaniu zdecydowanie lepiej wypada metoda Gaussa-Seidla.