



SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 1

Rozwiązywanie układów równań liniowych
metodami bezpośrednimi

Tomasz Gajda
29.02.2020

1 Wstęp teoretyczny

W tym laboratorium do rozwiązywania układu równań liniowych wykorzystaliśmy metodę eliminacji Gaussa-Jordana (dalej nazywaną metodą Gaussa). Metoda ta służy nie tylko do rozwiązywania układów - można z niej korzystać również do obliczania rzędu macierzy, obliczania wyznacznika macierzy, obliczania macierzy odwrotnej i więcej. Kolejne kroki tej metody zostały przedstawione poniżej.

Najpierw nasz układ równań liniowych musimy przedstawić w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A} \times \vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

Następnie aby rozwiązać układ musimy postępować zgodnie z dwoma etapami:

1. Pierwszy zwany **postępowaniem prostym** - Korzystając z elementarnych operacji na wierszach i zamiany kolumn miejscami, musimy sprowadzić macierz stworzoną na podstawie naszego układu równań (macierz \mathbf{A} z dodaną kolumną wektora wyrazów wolnych \vec{b}) do postaci schodkowej:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a'_{2,2} & a'_{2,3} & \dots & a'_{2,n-1} & a'_{2,n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{3,3} & \dots & a''_{3,n-1} & a''_{3,n} & b''_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a'''_{n,n} & b'''_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

2. Drugi zwany **postępowaniem odwrotnym** - Ten etap rozwiązania polega na znalezieniu rozwiązania układu równań, korzystając z otrzymanej macierzy i wzorów rekurencyjnych:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}, x_i = \frac{b_i^{(n)} - \sum_{k=i+1}^n a_{i,k}^{(n)} x_k}{a_{ii}^{(n)}}, i = n-1, \dots, 1 \quad (3)$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Zadanie z którym spotkaliśmy się na laboratorium dotyczyło równań różniczkowych. Są one jednym ze sposobów na uzyskanie układów równań liniowych. Podany został wzór powstały z rozwinięcia drugiej zasady dynamiki Newtona dla oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2x(t). \quad (4)$$

By udało nam się rozwiązać ten problem numerycznie, musimy doprowadzić do uzyskania postaci iteracyjnej równania czwartego. Dlatego też drugą pochodną $x(t)$ możemy przybliżyć, wykorzystując iloraz różnicowy opisujący przyrost funkcji na danym przedziale:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t + \Delta t) - 2x(t) + x(t - \Delta t))}{(\Delta t)^2} \quad (5)$$

Wprowadzamy również oznaczenia: $\Delta t = h$, $x_i = x(ih)$.

W ten sposób z równania otrzymujemy **iteracyjny** przepis pozwalający na wyznaczenie x_{i+1} w zależności od x_i i x_{i-1} :

$$x_{i+1} + (\omega^2h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0. \quad (6)$$

Warunki początkowe pozwalają nam uzyskać niezbędne informacje o wartościach początkowych x_0 i x_1 . Pierwszy z warunków mówi nam o początkowym wychyleniu: $x_0 = A$. Natomiast drugi o prędkości początkowej: $v_0 = \frac{x_1 - x_0}{h}$. Korzystając z warunków początkowych zapisujemy równanie (6) za pomocą macierzy. Dla pierwszych siedmiu kroków czasowych prezentuje się ona następująco:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2 - 2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2 - 2) & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Naszym zadaniem było rozwiązanie układu (7) metodą Gaussa oraz przedstawienie graficzne zależności wychylenia w funkcji czasu dla kilku interwałów.

Po otrzymaniu wyników programu będziemy je w stanie sprawdzić, ponieważ wiemy, że równanie oscylatora można zapisać w następujący sposób:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (8)$$

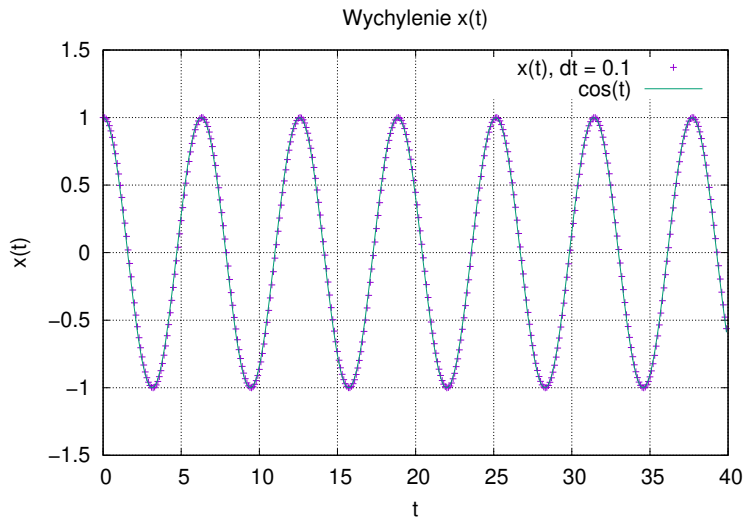
Dlatego spodziewam się, że jakakolwiek rozbieżność z tym wykresem będzie pochodziła od błędów związanych z metodą.

2.2 Przyjęte założenia

Założenia		
Symbol	Wielkość fizyczna	Wartość
h	Krok całkowania	0.1
A	Amplituda	1
ω	Częstość kątowna	1
v_0	Prędkość początkowa	0
k/m	współ. sprężystości/masa	1

2.3 Wyniki

Na wykresie wygenerowanym przez program gnuplot możemy zobaczyć wyniki napisanego przeze mnie programu, który rozwiązał równanie oscylatora. Fioletowe plusy przedstawiają pojedyncze rozwiązania układu, natomiast ciągła niebieska linia przedstawia cosinusoidę powstałą z równania oscylatora (8), gdzie przyjęte wcześniej wartości ($A=1$, $\omega=1$ i $\theta=0$) sprowadziły równanie do postaci $x(t) = \cos(t)$.



Rysunek 1: Wykres przedstawiający położenie x w zależności od czasu t , które otrzymaliśmy za pomocą metody eliminacji Gaussa

3 Wnioski

Jak możemy zobaczyć na wykresie, metoda eliminacji Gaussa daje dokładne wyniki - funkcja, która opisuje nasze rozwiązanie równania oscylatora jest funkcją cosinusa, dlatego zgadza się z oczekiwanym wynikiem z satysfakcjonującą dokładnością. Mogą się natomiast zdarzyć jakieś małe nieprawidłowości - to jak dokładny jest pomiar zależne jest od tego jak dobraliśmy parametr h - krok całkowania. Dokładność jest odwrotnie proporcjonalna do wielkości kroku - z drugiej strony jednak, odwrotnie proporcjonalnie do kroku całkowania zmienia się również ilość obliczeń, a przy tym zapotrzebowanie metody na moc obliczeniową. Dlatego im większą dokładność chcemy uzyskać, tym więcej mocy obliczeniowej potrzebuje nasze urządzenie.

Implementacja metody Gaussa-Jordana jest niezbędna do rozwiązań wielu problemów, na przykład takich jak rozwiązywanie równań różniczkowych metodami takimi jak metoda różnic skończonych.