SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 9

Aproksymacja w bazie wielomianów Grama.

Tomasz Gajda

08.05.2020

1 Wstęp teoretyczny

Zadanie z którym spotkaliśmy się na laboratorium dotyczyło aproksymacji w bazie wielomianów Grama. Metoda ta jest numeryczną metodą aproksymacji, która pozwala nam na przybliżenie przebiegu danej funkcji. Najpierw jednak rekurencyjnie dotrzeć do wielomianów ortogonalnych. Robimy to korzystając z wielomianów niższych stopni. Przyjmujemy, że pierwsze dwa wielomiany wynoszą odpowiednio $\varphi_{-1}(x) = 0$ oraz $\varphi_0(x) = 1$. Pozostałe wyznaczamy według wzoru:

$$\varphi_{j+1}(x_k) = (x_k - \alpha_{j+1})\varphi_j(x_k) - \beta_j\varphi_{j-1}(x_k). \tag{1}$$

Kolejne oraz β wyznaczamy korzystając z wzorów:

$$\alpha_{j+1} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} x_i\varphi_j^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_j^2(x_i)}, \tag{2}$$

$$\beta_j = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} x_i\varphi_{j-1}(x_i)\varphi_j(x_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_{j-1}^2(x_i)} \tag{3}$$

Korzystając z wyznaczonych przez nas wielomianów liczymy według wzoru, by otrzymać naszą aproksymowaną funkcję:

$$F(x_k) = \sum_{j=0}^{m} \frac{c_j}{s_j}\varphi_j(x_k) \tag{4}$$

Której współczynniki liczyby w następujący sposób:

$$c_j = \sum_{i=0}^{N-1} y_i\varphi_j(x_i) \tag{5}$$

$$s_j = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_j^2(x_i) \tag{6}$$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Pierwszym zadaniem, które mieliśmy zrobić, było przedstawienie peirwszych siedmu wielomianów Gram'a na jednym wykresie.
W drugim zadaniu natomiast, mieliśmy wykonać aproksymację funkcji:

$$f_{szum}(x) = f(x) + C_{rand}(x), \tag{7}$$

gdzie:

$$f_(x) = sin\left(\frac{14}{x_{max} - x_{min}}\right)\left(exp(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) + \left(exp(-\frac{(x + x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{8}$$

oraz C_{rand} definiujemy jako

$$C_{rand} = \frac{Y - 0.5}{5}. \tag{9}$$

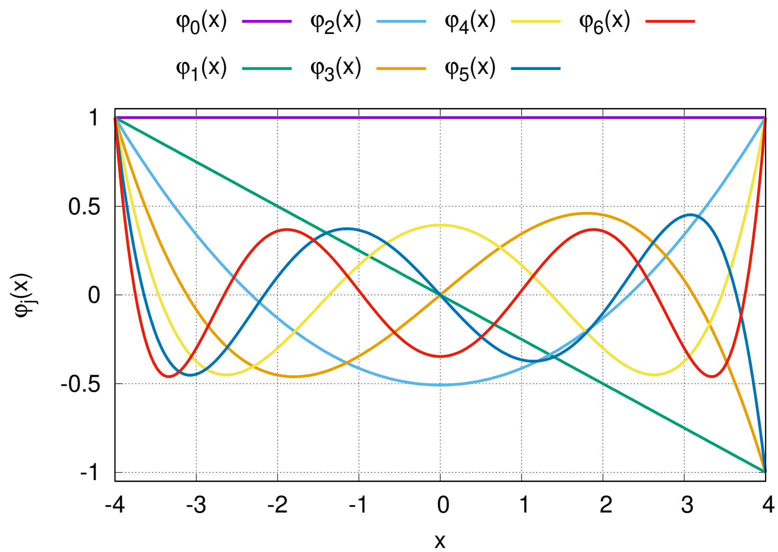
gdzie $Y \in [0, 1]$

2.2 Przyjęte założenia

Założenia		
Symbol	Wielkość	Wartość
x$_{min}$	Początek zakresu	-4
x$_{max}$	Koniec zakresu	4
σ	Częstość kątowa	$\frac{x_{max}-x_{min}}{16}$
x$_0$	Pierwszy element	2.0

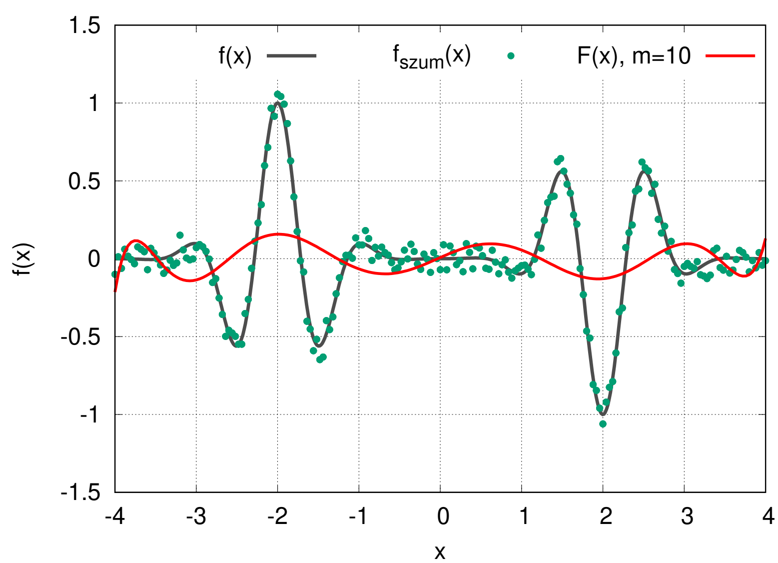
2.3 Wyniki

Wyniki programu prezentują się w następujący sposób. Otrzymaliśmy w sumie 7 wykresów - 1 wykres przedstawiający kilka wielomianów Grama, 3 wykresy opisujące funkcję, szum, naszą aproksymację i 3 wykresy opisującę funkcję z naszą aproksymacją, bez szumu. Najpierw zobaczmy wykres z wielomianami:

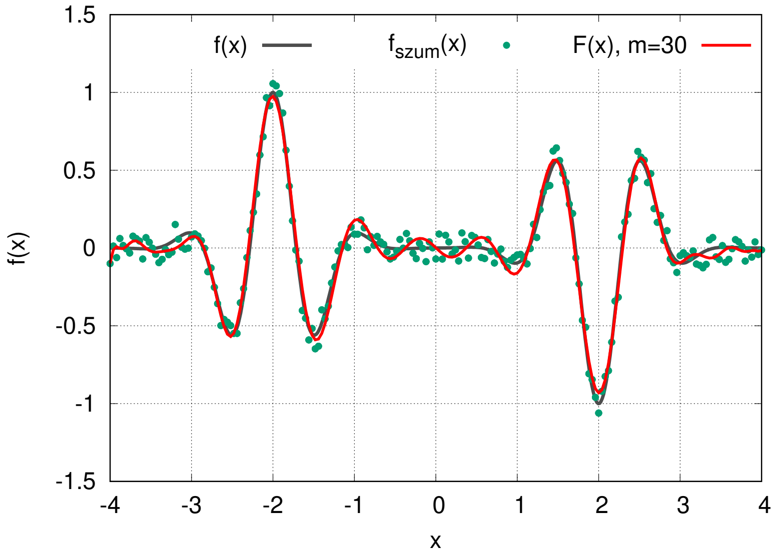


Rysunek 1: Wykres przedstawiający 7 pierwszych wielomianów Gram'a

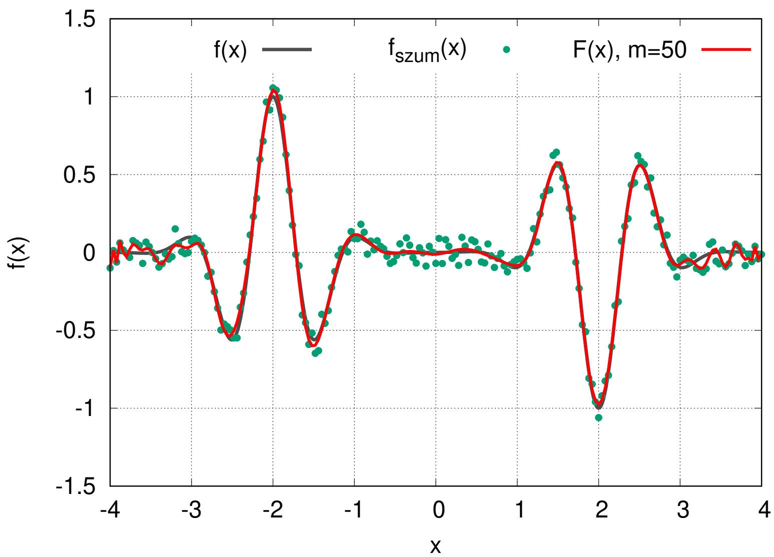
Teraz zobaczmy jak powiodła się aproksymacja funkcji z równania (7):



Rysunek 2: Wynik aproksymacji funkcji $f_{szum}(x)$ za pomocą wielomianów Gram'a, m = 10

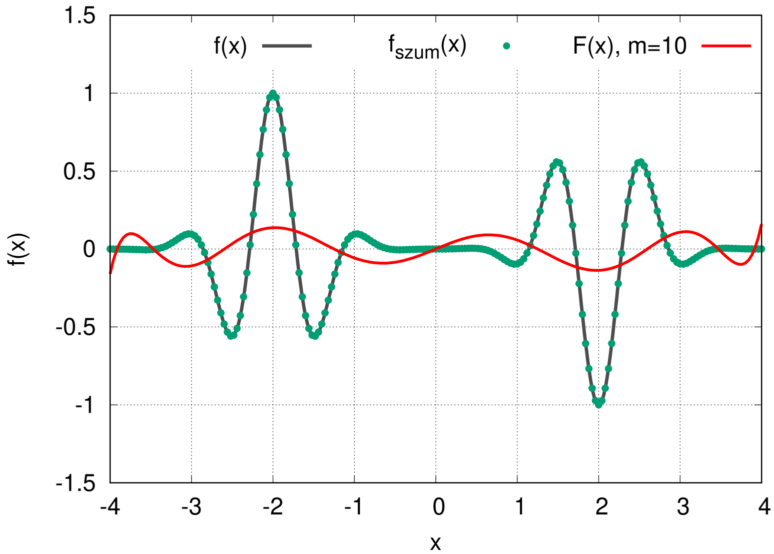


Rysunek 3: Wynik aproksymacji funkcji $f_{szum}(x)$ za pomocą wielomianów Gram'a, m = 30

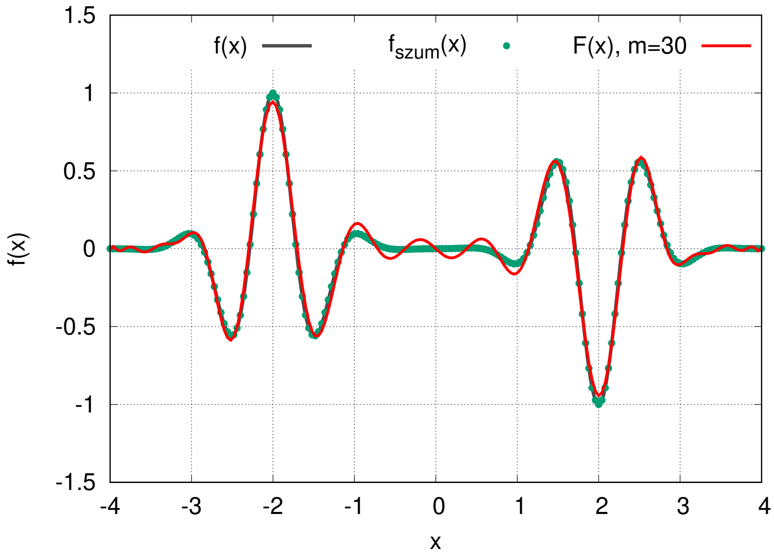


Rysunek 4: Wynik aproksymacji funkcji $f_{szum}(x)$ za pomocą wielomianów Gram'a, m = 50

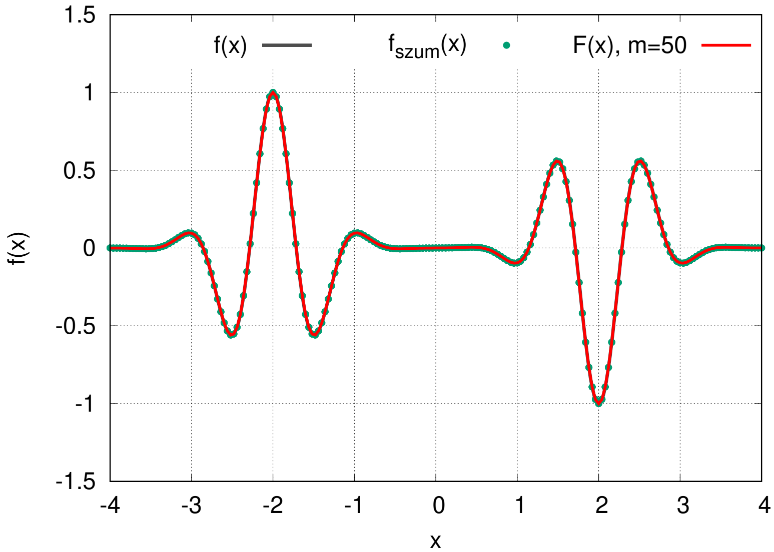
A teraz spójrzmy jak względem poprzednich wykresów różni się aproksymacja funkcji z równania (8) (bez szumów):



Rysunek 5: Wynik aproksymacji funkcji $f(x)$ za pomocą wielomianów Gram'a, m = 10



Rysunek 6: Wynik aproksymacji funkcji $f(x)$ za pomocą wielomianów Gram'a, m = 30



Rysunek 7: Wynik aproksymacji funkcji $f(x)$ za pomocą wielomianów Gram'a, m = 50

Na pierwszym wykresie zobaczyć możemy pierwsze 7 wielomianów Gram'a wyznaczone wzorem rekurencyjnym, zgadzają się one z oczekiwanym przez nas efektem. Następnie możemy zobaczyć trzy wykresy przedstawiające wyniki aproksymacji według danych z równania (8). Pierwszy, drugi i trzeci wykres zostały stworzone odpowiednio dla 10, 30 i 50 wielomianów.

Jak możemy zobaczyć, dla 10 wielomianów nasza aproksymacja zupełnie nie przypomina funkcji docelowej, zwiększamy więc liczbę wielomianów do 30. Tutaj sytuacja poprawia się znacząco, nasza aproksymacja przypomina już funkcję z szumem, niestety wciąż nie jest ona dokładna. Dla 50 wielomianów aproksymacja już prawie w pełni przypomina funkcję oryginalną, może troszkę rozwijając się w stronę poszczególnych szumów. Ten problem można zobaczyć głównie na krańcach przedziału, gdzie aproksymacja zamiast zbliżyć się do funkcji, przybliżyła się do otaczających szumów. Ten problem natomiast nie występuje już w przypadku następnych trzech wykresów, gdzie pomimo podobnej dokładności dla wykresów zbudowanych z 10 i 30 wielomianów Gram'a, w przypadku 50 aproksymacja już w pełni przyjęła postać funkcji oryginalnej i nie jest wymagane dalsze zwiększanie liczby wielomianów z których korzystamy.

3 Wnioski

Aproksymacja w bazie wielomianów ortogonalnych Grama jest bardzo przydatnym narzędziem - pozwala nam ona na przybliżanie przebiegu danej funkcji. Dokładność przybliżenia w pełni zależy od ilości wyokrzystanych w niej wielomianów Gram'a, decyduje o tym klasyczna (choć często myląca) zasada "im więcej tym lepiej". Musimy jednak pamiętać o tym, że wraz z ilością wielomianów Gram'a, zwiększamy złożoność obliczeniową, zapotrzebowanie na pamięć i na moc. Na naszych wykresach możemy zobaczyć że różnica między użyciem 10 wielomianów a użyciem 30 wielomianów była ogromna, natomiast pomimo takiej samej różnicy (20), pomiędzy 30 a 50 wielomianami różnica była dużo mniejsza. Może to świadczyć o tym, że wraz ze wzrostem liczby użytych wielomianów, maleje wzrost dokładności z każdym dodatkowym wielomianem. Myślę że ta metoda świetnie nada się w przypadkach gdy potrzebujemy znać zarys przebiegu funkcji, a nie dokładną jej kopię.