SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 8

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie
wartości drugich pochodnych w węzłach.

Tomasz Gajda
30.04.2020

1 Wstęp teoretyczny

Zadanie z którym spotkaliśmy się na laboratorium dotyczyło interpolacji przy pomocy funkcji sklejanych, które są wielomianami 3 stopnia, wyznaczając wartości drugich pochodnych w węzłach.

By to zrobić, musimy wyznaczyć wartość funkcji interpolującej dla $x \in [x_{i-1}, x_i]$ korzystając z poniższego równiania:

$$s_{i-1}(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i \tag{1}$$

w którym stałe całkowania wyglądają w następujący sposób:

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_i - m_{i-1}) \tag{2}$$

$$B_i = y_{i-1} - m_{i-1}\frac{h_i^2}{6} \tag{3}$$

Wstępnie musimy jednak rozwiązać układ równań liniowych, przedstawionych w takim formacie:

$$Am = d \tag{4}$$

Równanie to generowane jest za pomocą:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i \tag{5}$$

w którym m_i to wartości pochodnych w węzłach, których poszukujemy. Pozostałe oznaczenia:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i \tag{6}$$

Wyznaczamy również elementy wektora wyrazów wolnych:

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}) \tag{7}$$

Oraz odległości międzywęzłowe:

$$h_i = x_i - x_{i-1} \tag{8}$$

Narzucone w projekcie zostały również warunki na drugie pochodne na brzegach wektora wyrazów wolnych, tj.

$$m_1 = \alpha, \quad m_n = \beta \tag{9}$$

Gdy już wprowadzimy nasze warunki, nasz układ powinien wyglądać w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \beta \end{bmatrix}$$

Teraz korzystając ze wzoru (1) wyznaczamy wartości funkcji interpolującej.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Otrzymaliśmy dwie funkcje, na których mieliśmy przetestować działanie programu umożlwiającego wyznaczanie przebiegu drugich pochodnych zadanej funkcji korzystając z interpolacji funkcjami sklejanymi. Funkcje które otrzymaliśmy:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{10}$$

$$f_2(x) = cos(2x) \tag{11}$$

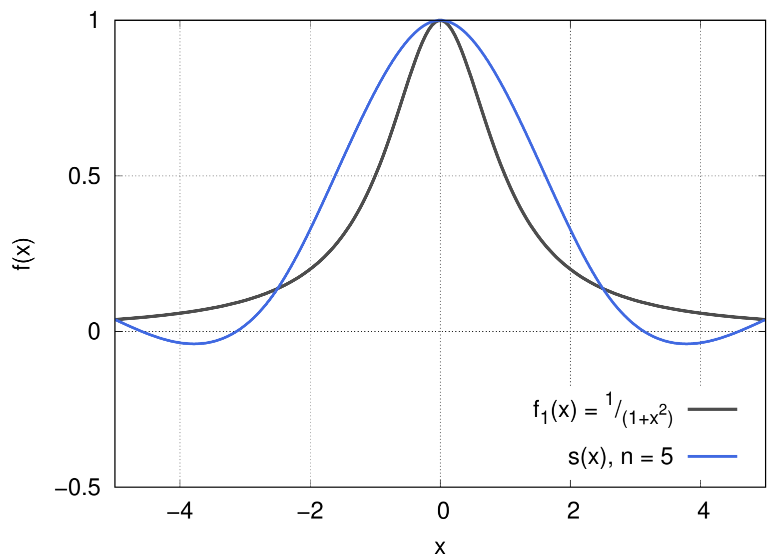
Wykonamy interpolację kolejno dla n = 5, 8 i 21. Ustalamy położenia węzłów oraz wyznaczamy wartości funkcji w węzłach. To wszystko dla przedziału $x \in [-5, 5]$. Następnie tworzymy wykresy f(x) i naszych wyników na jednym rysunku.

Na koniec dla funkcji $f_1(x)$ przy przyjęciu n = 10 węzłów w tym samym przedziale co wcześniej, wyznaczyliśmy wartości drugich pochodnych, po to by później porównać je z wartościami liczonymi według wzoru ($\Delta x = 0.01$):

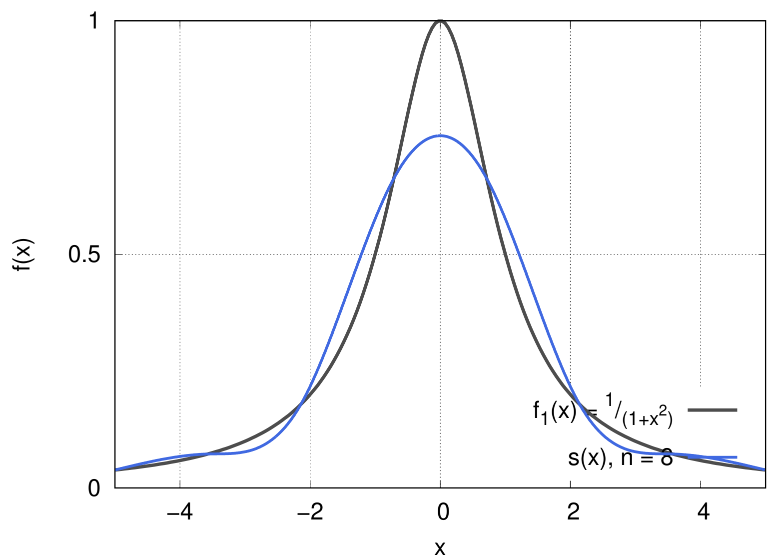
$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x-\Delta x) - 2f(x) + f(x+\Delta x)}{(\Delta x)^2} \tag{12}$$

2.2 Wyniki

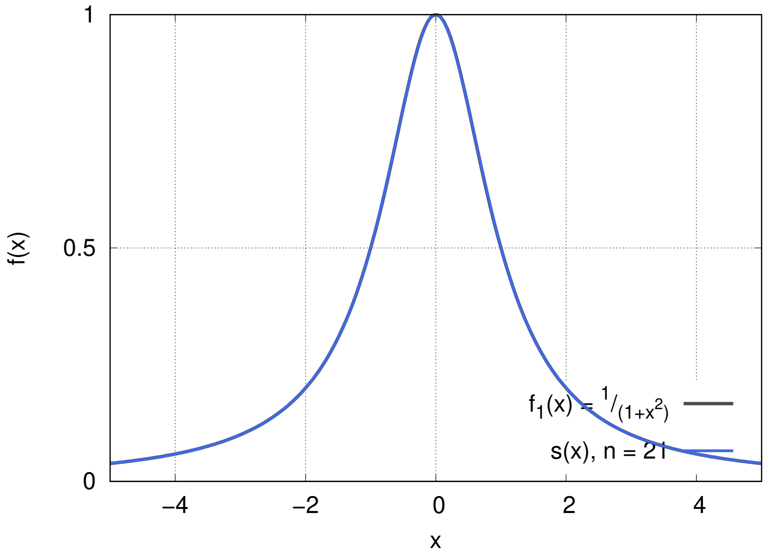
Wyniki programu prezentują się w następujący sposób. Otrzymaliśmy 7 wykresów - 3 wykresy dla funkcji pierwszej, 3 wykresy dla funkcji drugiej oraz jeden wykres prezentujący porównanie wartości drugich pochodnych. Najpierw zobaczmy 3 wykresy dla pierwszej funkcji:



Rysunek 1: Wynik interpolacji funkcji $f_1(x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi, n = 5

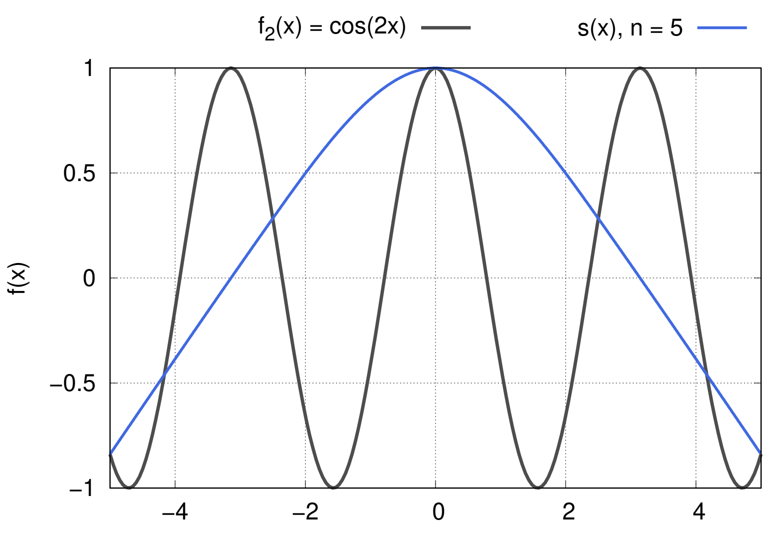


Rysunek 2: Wynik interpolacji funkcji $f_1(x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi, n = 8

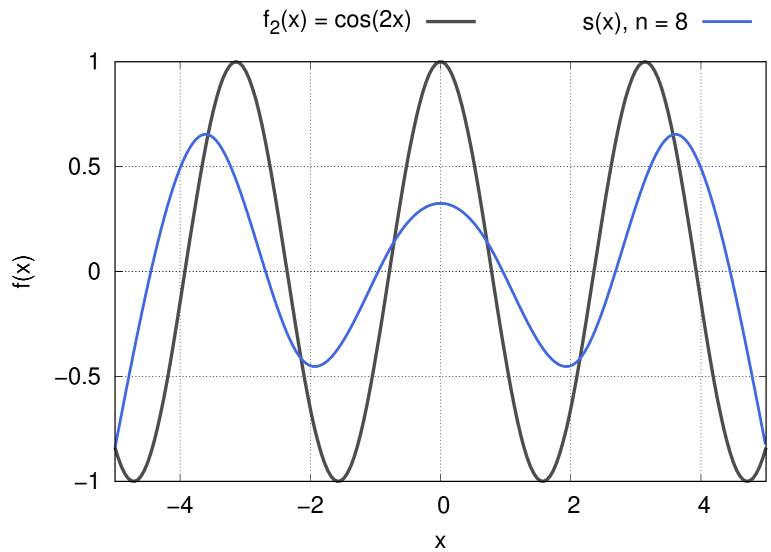


Rysunek 3: Wynik interpolacji funkcji $f_1(x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi, n = 21

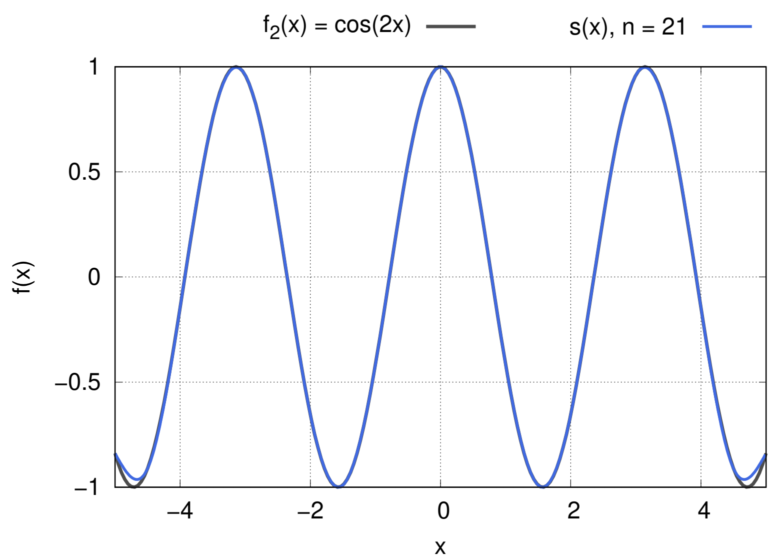
Teraz te same działania wykonaliśmy dla funkcji $f_2(x) = cos(2x)$.



Rysunek 4: Wynik interpolacji funkcji $f_2(x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi, n = 5

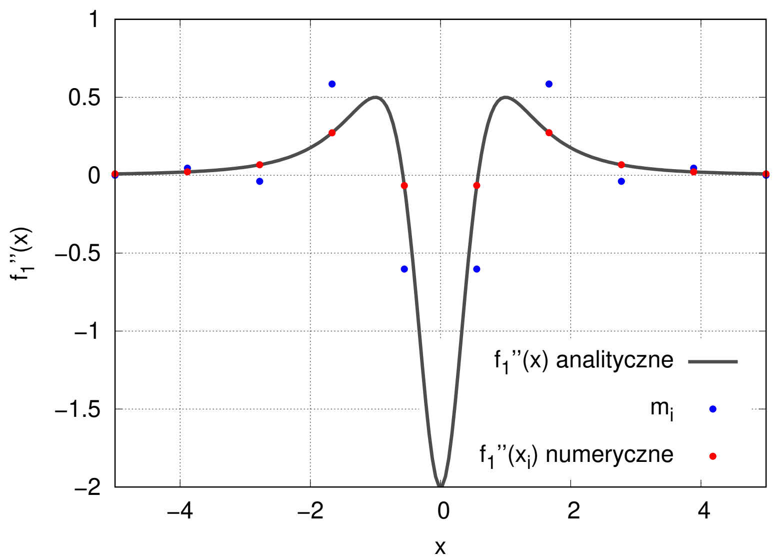


Rysunek 5: Wynik interpolacji funkcji $f_2(x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi, n = 8



Rysunek 6: Wynik interpolacji funkcji $f_2(x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi, n = 21

Ostatni wykres będący porównaniem wartości drugich pochodnych wynikających z ilorazu różnicowego (i analitycznie wyprowadzoną pochodną) z wartościami wyznaczonymi algorytmem interpolacji funkcji $f_1(x)$ kubicznymi funkcjami sklejanymi, n = 10.



Rysunek 7: Porównanie dwóch sposobów otrzymania wartości drugich pochodnych funkcji $f_1(x)$

3 Wnioski

Jak możemy zobaczyć, to jak skuteczne jest przybliżenie jest ściśle związane z ilością węzłów. Dla n = 5 przybliżenia są bardzo ogólne. W przypadku funkcji pierwszej w obserwowanym przedziale mozna zobaczyć zarys naszej funkcji, jednak dla funkcji drugiej przybliżenie jest bardzo odległe od oryginału. W przypadku n = 8 pomimo małej zmiany ilości węzłów widać już całkiem sporą poprawę. Zarówno dla funkcji pierwszej i drugiej przyblizenia co raz to bardziej przypominają swój wygląd docelowy. Jednak to właśnie w n = 21 przybliżenia przyjmują swoje wartości końcowe (oprócz brzegów funkcji drugiej). Możemy więc dojść do ogólnego wniosku, że interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczanie wartości drugich pochodnych w węzłach prowadzi do poprawnego rozwiązania problemu, lecz by otrzymać wyniki o dużej dokładności, potrzebna będzie nam spora moc obliczeniowa.