SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 2

Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

Tomasz Gajda

06.03.2020

1 Wstęp teoretyczny

W tym laboratorium do odwracania macierzy, obliczania wyznacznika i wsaźnika uwarunkowania macierzy korzystaliśmy z metody LU. Metoda ta pozwala na rozkład macierzy na dwie macierze trójkątne: górną i dolną, których iloczyn daje macierz początkową.

Równanie naszego rozkładu wygląda wtedy w następujący sposób:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \dots & u_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{n,n} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Obliczaliśmy również wyznacznik macierzy - jest to funkcja, która jest określona na kwadratowych macierzach wraz z działaniami na odpowiednich elementach macierzy kierowanymi w taki sposób, by otrzymać pojedynczą liczbę. Oznaczany jest jako $|A|$ lub $detA$. Istnieje kilka sposobów na obliczenie wyznacznika, lecz w naszej sytuacji wystarczyło pomnożenie elementów znajdujących się na przekątnej macierzy U.

$$|\mathbf{A}| = det\mathbf{A} = det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{2}$$

W zadaniu pojawia się również termin wskaźnika uwarunkowania macierzy - jest to wartość, która określa jak bardzo błąd reprezentacji numerycznej danych wejściowych wpływa na błędy w ostatecznym wyniku. Jeżeli dany problem ma niski wskaźnik uwarunkowania, możemy go nazwać dobrze uwarunkowanym, natomiast jeżeli wskaźnik jest wysoki - źle uwarunkowanym. Jeżeli wskaźnik przekracza jakąś wartość, problem nie jest warty numerycznego rozwiązywania, gdyż błędy w odpowiedzi ostatecznej są zbyt duże.

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Zadanie z którym spotkaliśmy się na laboratorium dotyczyło działań na macierzach z wykorzystaniem rozkładu LU. Zdefniowana została kwadratowa macierz o rozmiarze 4x4 i elementach opisanych wzorem:

$$a_{i,j} = \frac{1}{i + j + \delta} \tag{3}$$

Gdzie δ jest równa 2 oraz jest dodawana z powodu wymagań biblioteki, z której korzystamy.

Korzystając z biblioteki gsl, otrzymamy rozkład LU naszej macierzy A. Kolejnym celem jest obliczenie wyznacznika macierzy A - obliczymy go mnożąc elementy na przekątnej macierzy U.
Następnie rozwiązując N układów równań za pomocą metody Gaussa z wektorami wyrazów wolnych odnajdziemy macierz odwrotną A^{-1}. N wektorów oznaczonych symbolami b_i:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Gdy otrzymamy już macierz odwrotną, mnożymy ją przez A i zapisujemy wynik. Na koniec obliczamy wskaźnik uwarunkowania macierzy korzystając ze wzoru:

$$||A||_{1,\infty} = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}| \tag{5}$$

Znajdujemy element maksymalny w macierzy A oraz element maksymalny w macierzy odwrotnej A^{-1}, po czym mnożymy je przez siebie - w ten sposób otrzymamy nasz wskaźnik.

2.2 Wyniki

Wyniki programu prezentują się następująco, nasza macierz początkowa A:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,500 & 0,333 & 0,250 & 0,200 \\ 0,333 & 0,250 & 0,200 & 0,167 \\ 0,250 & 0,200 & 0,167 & 0,143 \\ 0,200 & 0,167 & 0,143 & 0,125 \end{pmatrix}$$

Macierz L:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0 & 0 \\ 0,667 & 0,833 & 1 & 0 \\ 0,400 & 1 & -0,857143 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz U:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0,500 & 0,333 & 0,250 & 0,200 \\ 0 & 0,033 & 0,0416667 & 0,0428571 \\ 0 & 0 & -0,00138889 & -0,00238095 \\ 0 & 0 & 0 & 0,000102041 \end{pmatrix}$$

Macierz odwrotna A:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{pmatrix}$$

Diagonalne elementy macierzy U:

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,0333333 & -0,00138889 & 0,000102041 \end{pmatrix}$$

Wyznacznik macierzy A wynosi:

$$\text{detA} = (\text{-}2.36206 \cdot 10^{-9})$$

Wynik iloczynu macierzy A i macierzy A^{-1} :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2.27374 \cdot 10^{-13} & 0 & 0 \\ 2.27374 \cdot 10^{-14} & 1 & 4.54747 \cdot 10^{-13} & 0 \\ 0 & 2.27374 \cdot 10^{-13} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wskaźnik uwarunkowania macierzy, obliczony korzystając z maksymalnych wartości macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{A}^{-1}$ wynosi:

$$||A||_{1,\infty} = 0,500$$
$$||A^{-1}||_{1,\infty} = 29400$$
$$||A||_{1,\infty} \cdot ||A^{-1}||_{1,\infty} = wskA = 14700$$

3 Wnioski

Wyznacznik A mogliśmy obliczyć, ponieważ po rozkładzie na macierze trójkątne L i U, ich wyznaczniki możemy obliczyć mnożąc elementy macierzy U znajdujące się na przekątnej: detL = 1, detU = x. Wiemy również, że

$$detA = det(L \cdot U) = detL \cdot detU, \tag{6}$$

tak więc $detA = 1 \cdot x = x$. Dlatego też elementy diagonalne macierzy U decydują o tym jaki jest wyznacznik macierzy A.

Wskaźnik uwarunkowania macierzy wynosi aż 14700 co oznacza że macierz jest źle uwarunkowana. Możemy to zauważyć na przykładzie mnożenia macierzy A przez jej odwrotność. Wynikiem powinna być macierz jednostkowa, co jednak nie stało się. Wynikiem jest macierz, która ma na przekątnej wartości 1, natomiast pozostałe miejsca nie są zajęte przez zera, ale też przez wartości, które choć małe - różnią się od oczekiwanych.

Oprócz błędów wynikających ze złego uwarunkowania macierzy, możemy zobaczyć że wyniki są bliskie tych oczekiwanych i że metoda LU jest przy takich obliczeniach bardzo przydatna.