SPRAWOZDANIE - LABORATORIUM NR 7

Interpolacja Newtona z optymalizacją
położeń węzłów

Tomasz Gajda
23.04.2020

1 Wstęp teoretyczny

Zadanie z którym spotkaliśmy się na laboratorium dotyczyło interpolacji wielomianów korzystając z metody Newtona z optymalizacją położeń węzłów.

Nasz wzór interpolacyjny ma postać:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \times \Pi_{i=0}^{j-1}(x - x_i) \tag{1}$$

w którym $f^j(x_0)$ oznacza iloraz rzędu j dla węzła x_0, a x_i to położenia naszych węzłów. Ilorazy różnicowe otrzymamy posługując się poniższą tabelą:

y_0	0	0	0	0	0
y_1	$f^{(1)}_{x_0,...}$	0	0	0	0
y_2	$f^{(1)}_{x_1}$	$f^{(2)}_{x_0}$	0	0	0
y_3	$f^{(1)}_{x_2}$	$f^{(2)}_{x_1}$	$f^{(3)}_{x_0}$	0	0
...	...	...	...	$\ddots$	0
y_n	$f^{(1)}_{x_{n-1}}$	$f^{(2)}_{x_{n-2}}$	$f^{(3)}_{x_{n-3}}$	...	$f^{(n)}_{x_0}$

$\Longrightarrow$

$f_{0,0}$	0	0	0	0	0
$f_{1,0}$	$f_{1,1}$	0	0	0	0
$f_{2,0}$	$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	0	0	0
$f_{3,0}$	$f_{3,1}$	$f_{3,2}$	$f_{3,3}$	0	0
...	...	...	...	$\ddots$	0
$f_{n,0}$	$f_{n,1}$	$f_{n,2}$	$f_{n,3}$	...	$f_{n,n}$

Rysunek 1: Tabelki reprezentujące wyznaczanie ilorazów[1]

W której zerowa kolumna (y_i) przedstawia wartości funkcji w węzłach, natomiast f_{jj} to ilorazy różnicowe rzędu j, które występują w naszym równaniu wzoru interpolacyjnego. By otrzymać prawą tabelkę, będziemy korzystać z wzoru:

$$f(i,j) = \frac{f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}} \tag{2}$$

Gdy mamy już pełną tabelę ilorazów różnicowych, korzystamy z wzoru interplacyjnego, by wyznaczyć przybliżone wartości funkcji w przedziale $[x_{min}, x_{max}]$

2 Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Otrzymaliśmy funkcję, na której musimy przeprowadzić interpolację wielomianową Newtona:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \tag{3}$$

Indeksujemy nasze węzły i = 0, 1, 2, ..., n. Wykonamy interpolację kolejno dla n = 5, 10, 15 i 20. Określamy liczbę węzłów równą n+1, ustalamy położenia węzłów oraz wyznaczamy wartości funkcji w węzłą. To wszystko dla przedziału $x \in [-5, 5]$. Wyznaczamy następnie niezerowe elementy prawej tabelki (Rysunek 1). Tworzymy wykresy f(x) i wielomianu interpolacyjnego $W_n(x)$ na jednym rysunku.

Powtarzamy te czynności dwa razy - dla równoodległych położeń węzłów, oraz dla zoptymalizowanych położeń węzłów. Zmienia to jedynie instrukcję określającą położenia węzłów. Dla równoodległych wygląda ona w ten sposób:

$$x_i = x_{min} + i \cdot h, \qquad i = 0, 1, ..., n \tag{4}$$

$$h = \frac{x_{min} - x_{max}}{n} \tag{5}$$

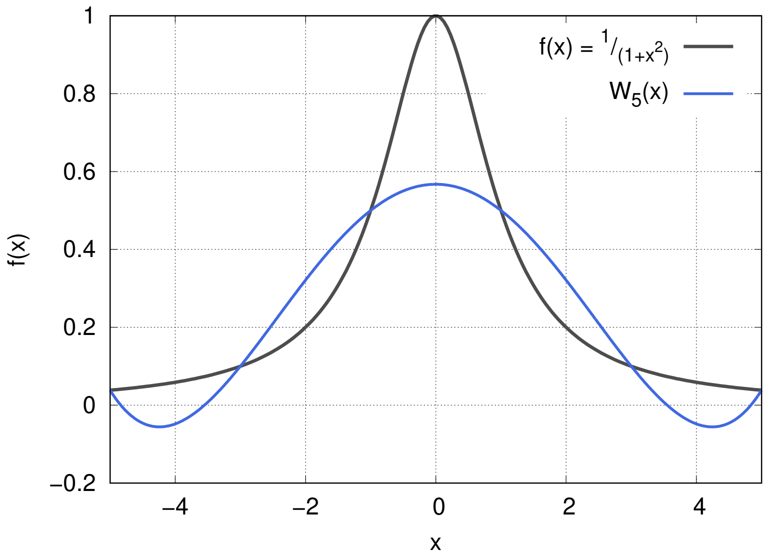
gdzie dla zoptymalizowanych położeń wygląda w taki sposób:

$$x_i = \frac{1}{2}[(x_{min} - x_{max})cos(\pi\frac{2i+1}{2n+2}) + (x_{min} + x_{max})], \qquad i = 0, 1, ..., n \tag{6}$$

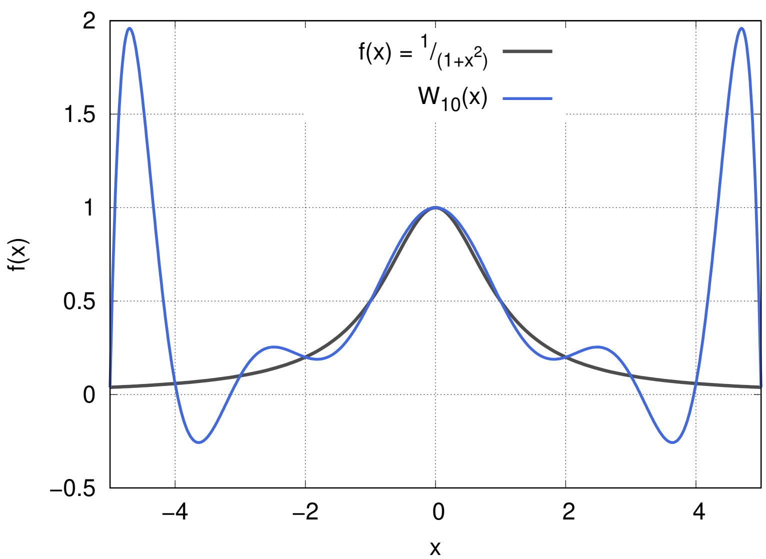
Są to zera wielomianów Czebyszewa.

2.2 Wyniki

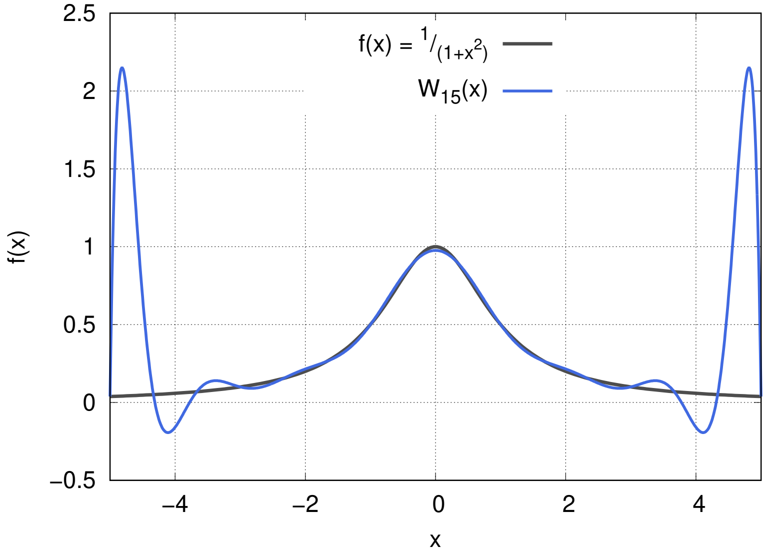
Wyniki programu prezentują się w następujący sposób. Otrzymaliśmy 8 wykresów, odpowiednio 4 dla równoodległych oraz 4 dla zoptymalizowanych położeń węzłów. Najpierw 4 wykresy dla równoodległych położeń:



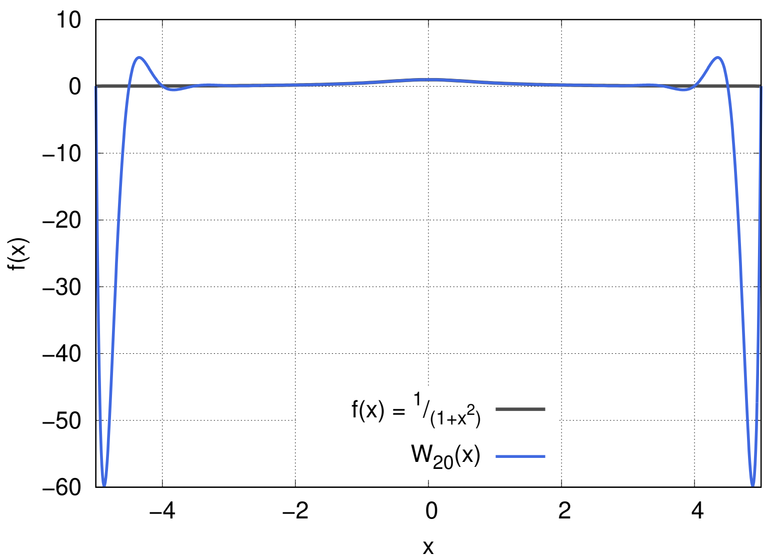
Rysunek 2: Wynik interpolacji wielomianem Newtona $W_n(x)$, n = 5 (równoodległe)



Rysunek 3: Wynik interpolacji wielomianem Newtona $W_n(x)$, n = 10 (równoodległe)

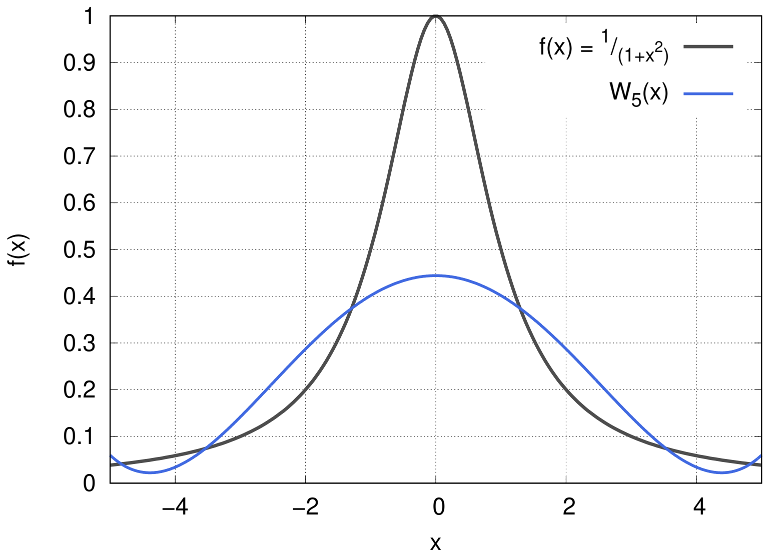


Rysunek 4: Wynik interpolacji wielomianem Newtona $W_n(x)$, n = 15 (równoodległe)

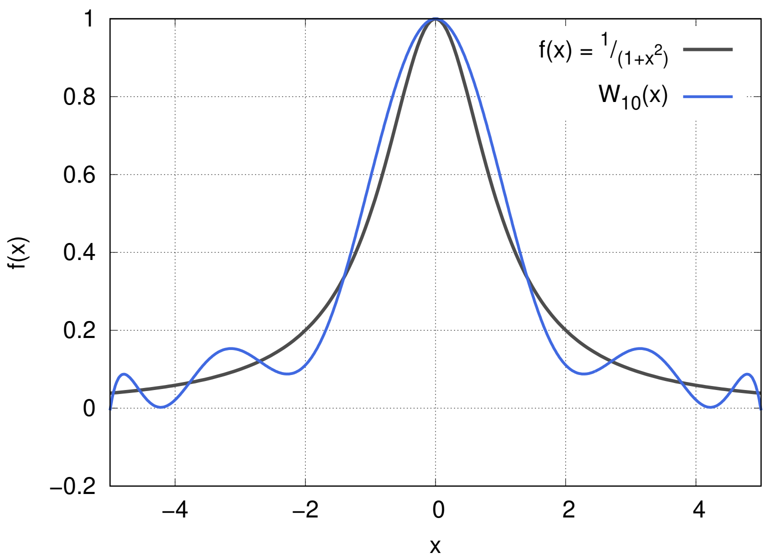


Rysunek 5: Wynik interpolacji wielomianem Newtona $W_n(x)$, n = 20 (równoodległe)

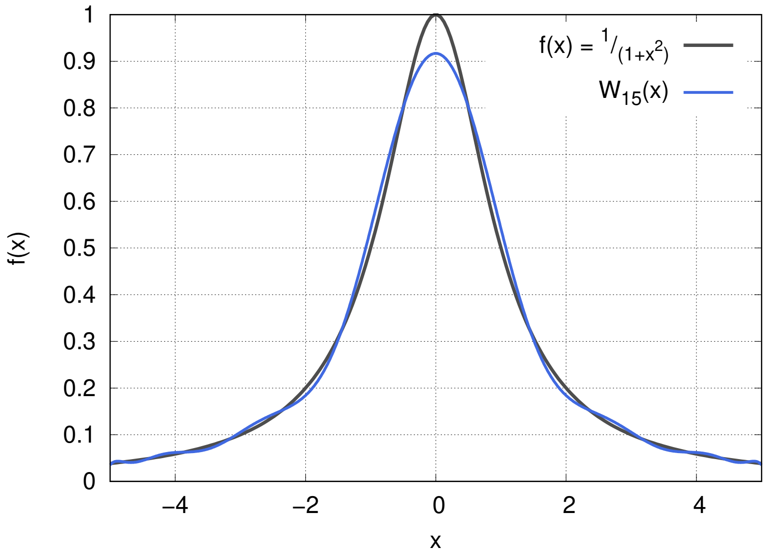
Teraz z węzłami których współrzędne są wyznaczone przez miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa:



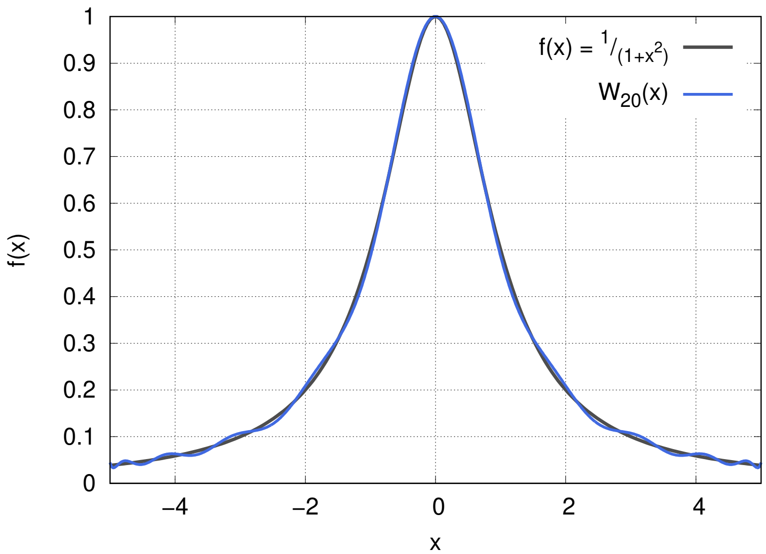
Rysunek 6: Wynik interpolacji wielomianem Newtona $W_n(x)$, n = 5 (Czebyszew)



Rysunek 7: Wynik interpolacji wielomianem Newtona $W_n(x)$, n = 10 (Czebyszew)



Rysunek 8: Wynik interpolacji wielomianem Newtona $W_n(x)$, n = 15 (Czebyszew)



Rysunek 9: Wynik interpolacji wielomianem Newtona $W_n(x)$, n = 20 (Czebyszew)

3 Wnioski

Jak po wykresach możemy zauważyć, lepszą wersją interpolacji jest interpolacja z węzłami których współrzędne są wyznaczone przez miejsca zerowe wielomianów Czebyszewa. Ostatni wykres pokazuje prawie dokładną zbieżność z oryginalnym wykresem funkcji. Dlaczego ta metoda poradziła sobie lepiej? Jest to spowodowane przez efekt Rungego. Jest to efekt pogorszenia jakości interpolacji, pomimo tego, że zwiększamy liczbę jej węzłów. Na początku z dodawaniem węzłów poprawia się, jednak później przy dalszym wzroście tej liczby, zaczyna się pogarszać. Widać to (również i na naszych wykresach) szczególnie na końcach przedziałów w których działa interpolacja. Musimy pamiętać, że jest to typowe zjawisko dla interpolacji przy stałych odległościach węzłów. Dlatego też, interpolacja przy użyciu zoptymalizowanych położeń węzłów jest tutaj lepszym rozwiązaniem.

Literatura

[1] Treść polecenia do zadania z laboratorium 7 - "Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów"