Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАТИКА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

КАФЕДРА ИУ1 – СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

«МЕТОД КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА»

по курсу:

«ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ»

Студент: ИУ2-61 _______________ **Аветисян Н. О.**
(Подпись, дата)

Преподаватель: _______________ **Лобачев И.В.**
(Подпись, дата)

2024 г.

Вариант 1

Задание:

Построить КГ в соответствии с вариантом из таблицы. Исследовать динамику замкнутой системы при различных значениях коэффициента усиления разомкнутой системы K.

Варианты передаточных функций

№ п/п	Значения параметров	Передаточная функция разомкнутой системы
1	$T = 0{,}1,\ \zeta = 1$	$\dfrac{K}{s(T^2s^2 + 2T\zeta s + 1)}$
2	$T = 0{,}05,\ \zeta = 0{,}707$	
3	$T = 0{,}03,\ \zeta = 0{,}1$	
4	$T = 0{,}08,\ \zeta = 0{,}5$	
5	$T = 0{,}01,\ \zeta = 0{,}15$	

Для варианта 1:

$$W(s) = \frac{K}{s(0.1^2 s^2 + 2 \cdot 0.1 \cdot 1 \cdot s + 1)}$$

Теоретическая часть

Корневым годографом (КГ) называется совокупность траекторий перемещения всех корней характеристического уравнения замкнутой системы при изменении какого-либо параметра этой системы.

Обычно метод КГ позволяет находить полюса и нули ПФ замкнутой системы, располагая полюсами и нулями разомкнутой системы при изменении коэффициента усиления разомкнутой системы K.

ПФ разомкнутой системы $W_{\text{р}}(s)$ представим в следующем виде:

$$W_{\text{р}}(s) = \frac{KC\prod_{j=1}^{m}(s - s_j^0)}{\prod_{i=1}^{n}(s - s_i^*)} \tag{1}$$

где s_j^0 – нули ПФ $W_{\text{р}}(s)$, $j = \overline{1,m}$; s_i^* – полюса ПФ $W_{\text{р}}(s)$, , $i = \overline{1,n}$; n и m – порядки знаменателя и числителя; , C – коэффициент представления (отношение коэффициентов при старших членах числителя и знаменателя).

При замыкании системы с ПФ $W_{\text{р}}(s)$ единичной отрицательной обратной связью ПФ замкнутой системы $W_{\text{з}}(s)$, принимает вид:

$$W_{\text{з}}(s) = \frac{W_{\text{р}}(s)}{1 + W_{\text{р}}(s)} \tag{2}$$

Из выражения (2) следует, что нули ПФ замкнутой системы равны нулям ПФ разомкнутой системы. Для нахождения полюсов рассмотрим выражение

$$1 + W_{\text{р}}(s) \tag{3}$$

в соответствии с выражением (1) имеем

$$\frac{KC\prod_{j=1}^{m}(s - s_j^0)}{\prod_{i=1}^{n}(s - s_i^*)} + 1 = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{n}(s - s_i^*) + KC\prod_{j=1}^{m}(s - s_j^0) = 0 \tag{4}$$

На основании выражения (4) можно сказать, что при K = 0 корни характеристического уравнения совпадают с полюсами, а при K = ∞ – с нулями. При изменении K от 0 до ∞ траектории корней начинаются в полюсах и заканчиваются в нулях. Обычно полюсов больше, чем нулей. В этом случае n–m ветвей корневого годографа стремятся к ∞.

Для определения полюсов замкнутой системы с отрицательной обратной связью необходимо решить уравнение (его называют основным уравнением метода КГ):

$$W_{\text{р}}(s) = -1 \tag{5}$$

Так как $W_{\text{р}}(s)$ является функцией комплексного переменного s, то уравнение (5) распадается на два уравнения: уравнение модулей

$$|W_{\text{р}}(s)| = 1 \tag{6}$$

и уравнение аргументов (фаза вектора –1 есть нечетное число π):

$$\arg W_{\mathrm{p}}(s) = \pm(2u+1)\pi, u = 0, 1, 2 \ldots \tag{7}$$

Как известно, при умножении комплексных чисел их аргументы складываются, а при делении – вычитаются. Поэтому, исходя из выражения (1), уравнение (7) имеет наглядный геометрический смысл.

Пусть точка s – полюс замкнутой системы. Если провести в s вектора из всех нулей $W_{\mathrm{p}}(s)$ (обозначим аргументы этих векторов θ_j^0) и вектора из всех полюсов $W_{\mathrm{p}}(s)$ (обозначим аргументы этих векторов θ_i^*), то уравнение (7) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{m} \theta_j^0 + \sum_{i=1}^{n} \theta_i^* = \pm(2u+1)\pi, u = 0, 1, 2 \ldots \tag{8}$$

Углы q отсчитываются от положительного направления действительной оси. Знак угла «+» соответствует повороту против часовой стрелки, знак угла «–» соответствует повороту по часовой стрелке.

Таким образом, любая точка КГ должна удовлетворять уравнению (8), из которого следует, что конфигурация КГ не зависит от коэффициента усиления K, но каждому конкретному значению K однозначно соответствуют точки на КГ.

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а при делении – делятся. Поэтому на основании уравнения (6) можно записать

$$\frac{KC\prod_{j=1}^{m} l_j^0}{\prod_{i=1}^{n} l_i^*} = 1 \tag{9}$$

где l_j^0– модуль (длина) вектора, проведенного из j-нуля в точку s КГ; l_i^* – модуль вектора, проведенного из i-полюса в ту же точку s.

Корневой годограф системы с отрицательной обратной связью обладает следующими основными свойствами:

1. Ветви КГ непрерывны и расположены на комплексной плоскости симметрично относительно действительной оси.
2. Число ветвей КГ равно порядку системы n. Ветви начинаются в n полюсах разомкнутой системы при K = 0. При возрастании K от 0 до ∞ полюса замкнутой системы двигаются по ветвям КГ.
3. m ветвей КГ при возрастании K от 0 до ∞ заканчиваются в m нулях Wp(s), а (n – m) ветвей при K, стремящемся к ∞, удаляются от полюсов вдоль асимптот.
4. При расположении ветвей корневого годографа в левой полуплоскости s САУ устойчива. При пересечении ветвей КГ мнимой оси слева направо САУ становится неустойчивой. Пусть при $K = K^{\text{кр}}$ пересечение КГ с мнимой осью произойдет в некоторой точке $i\omega^{\text{кр}}$.

Использование MatLab

Поведение и полюса замкнутой системы при К = 1

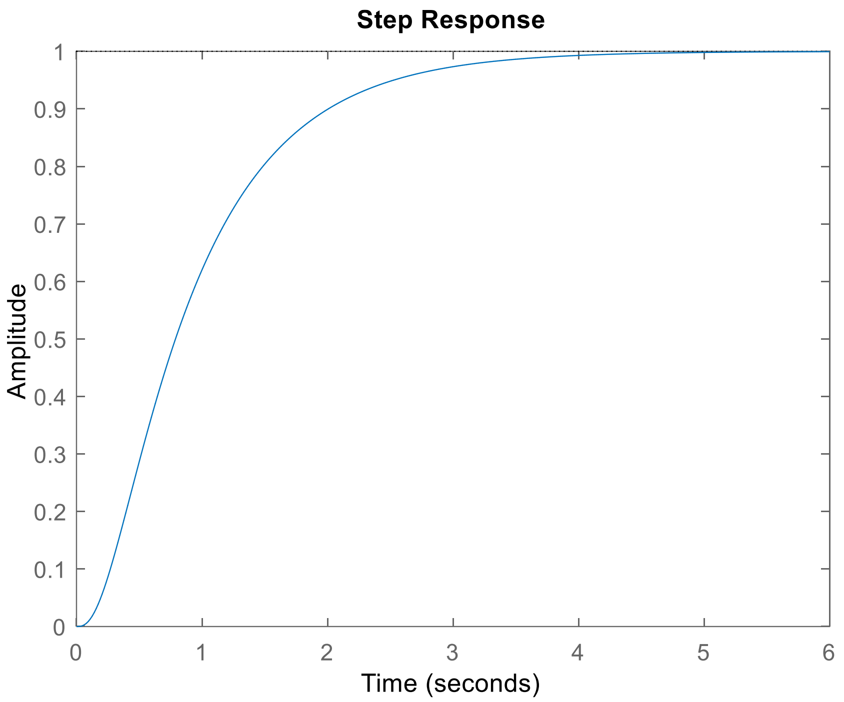

Рис. 1 Переходная характеристика замкнутой системы при К = 1

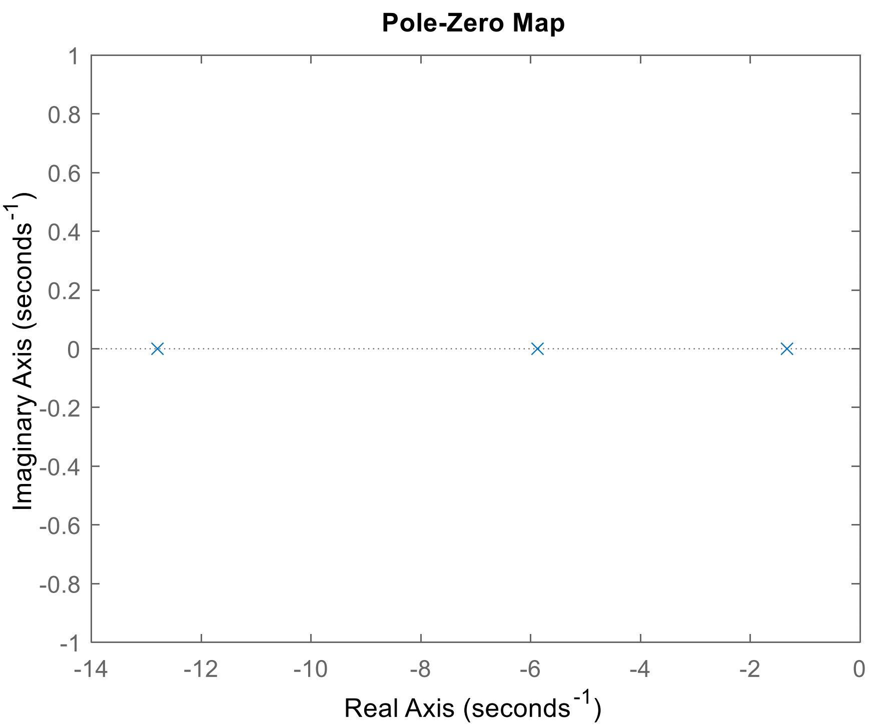

Рис. 2 Полюса системы при К = 1

Все полюса слева и система устойчива.

Построение корневого годографа (root locus) (по РАЗОМКНУТОЙ системе)

Получили корневой годограф с помощью команды rlocus.

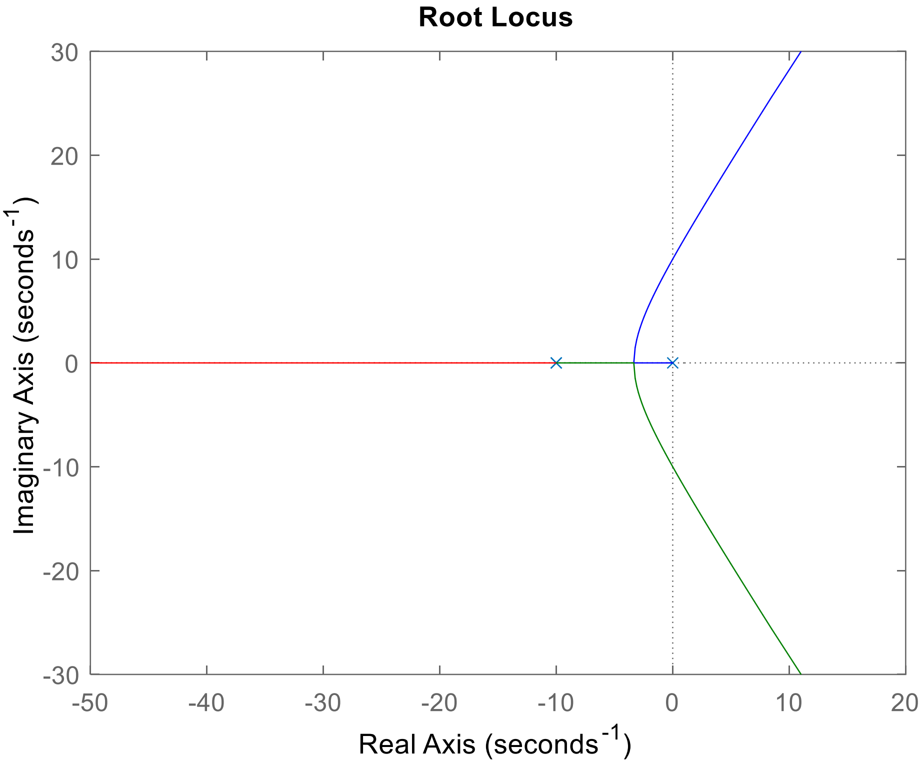

Рис. 3 Корневой годограф разомкнутой системы

Точка K = 1 годографе

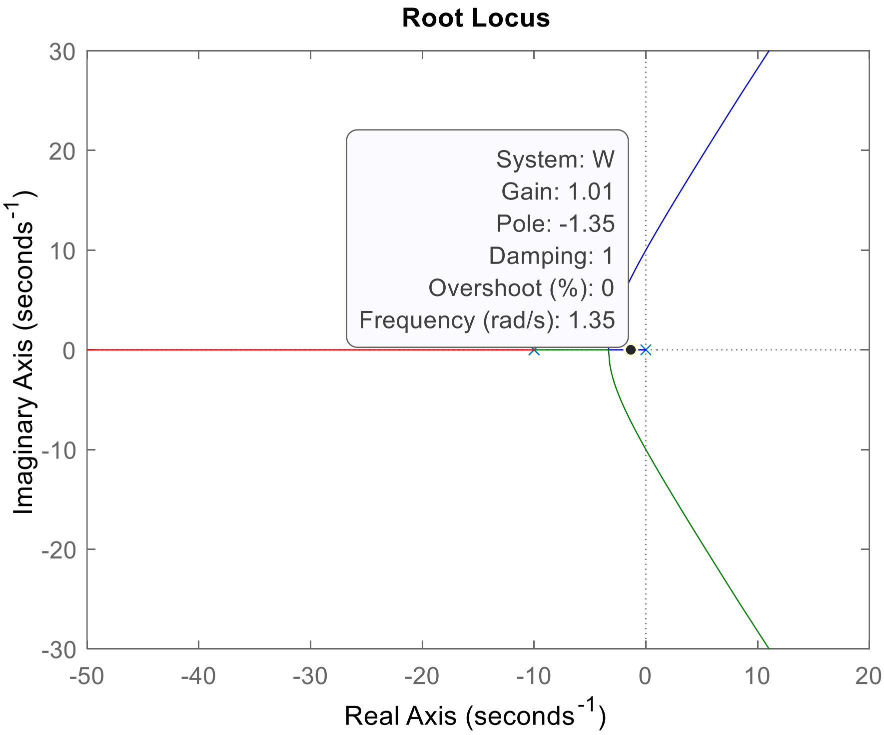

Рис. 4 Точка K = 1 годографе

Как видно при K = 1 нет мнимых корней => нет колебаний

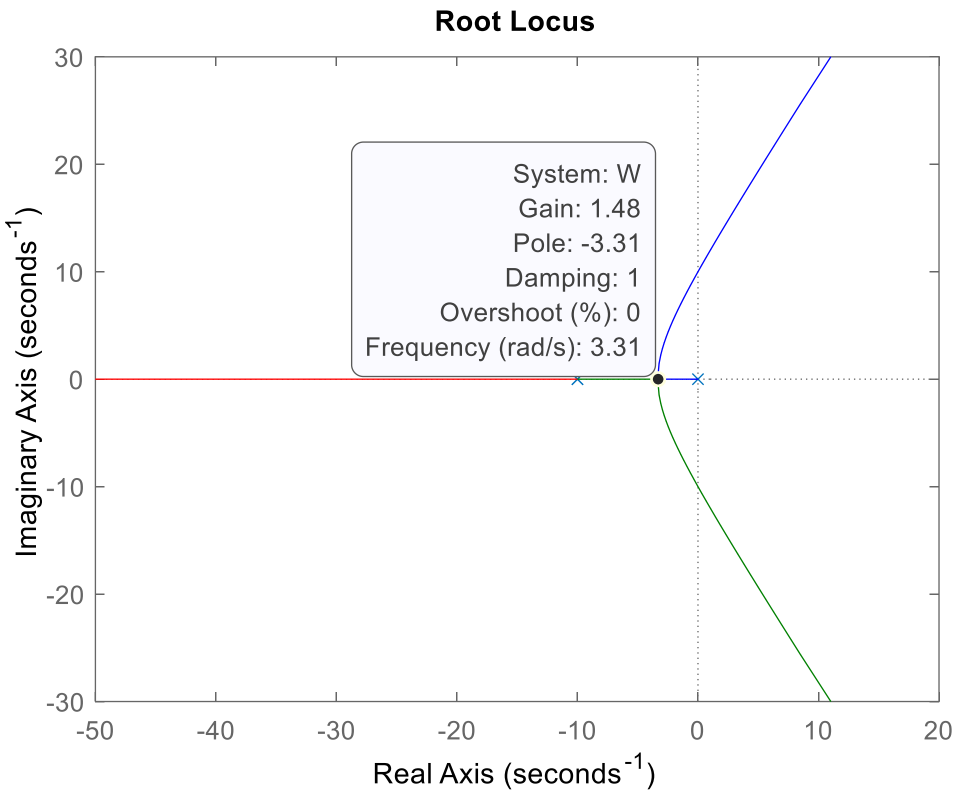

Рис. 5 Точка K = 1.48 годографе

Когда K>1.48(Рис. 5) получаем мнимые корни => появляются колебания.
Переходная характеристика при K = 2(Рис. 6):

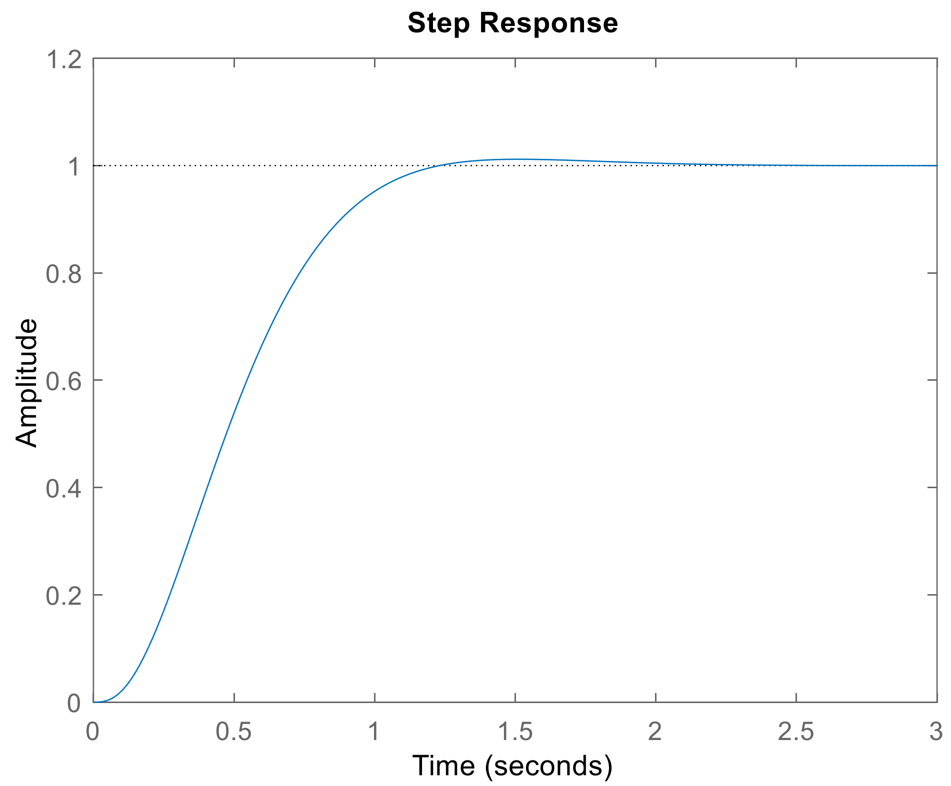

Рис. 6 Переходная характеристика замкнутой системы при K = 2

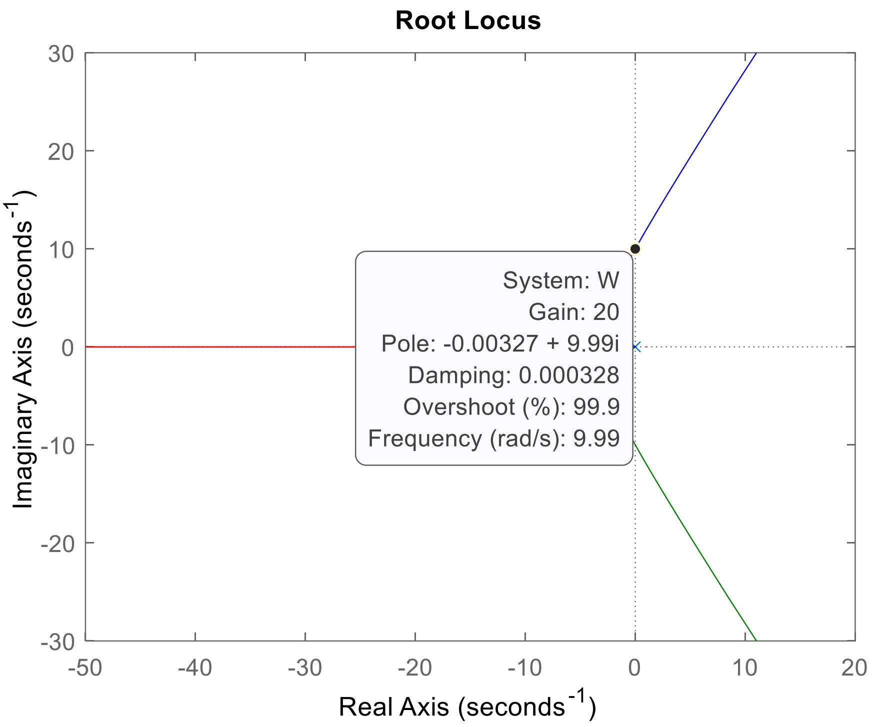

Рис. 7 Точка K = 20 годографе

При K = 20(Рис. 7) достигаем границу устойчивости(корни находятся на мнимой оси), т. к. если корень окажется в правой полуплоскости, то система сразу станет неустойчивой.

Переходная характеристика при K = 20(Рис. 8):

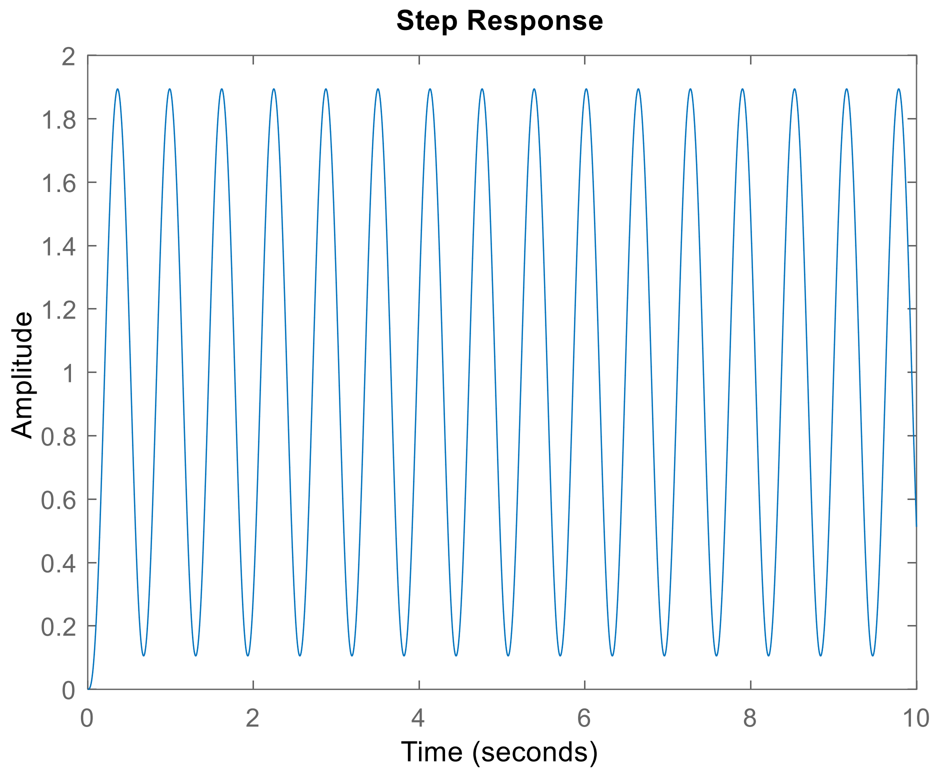

Рис. 8 Переходная характеристика замкнутой системы при K = 20

Система на границе устойчивости.

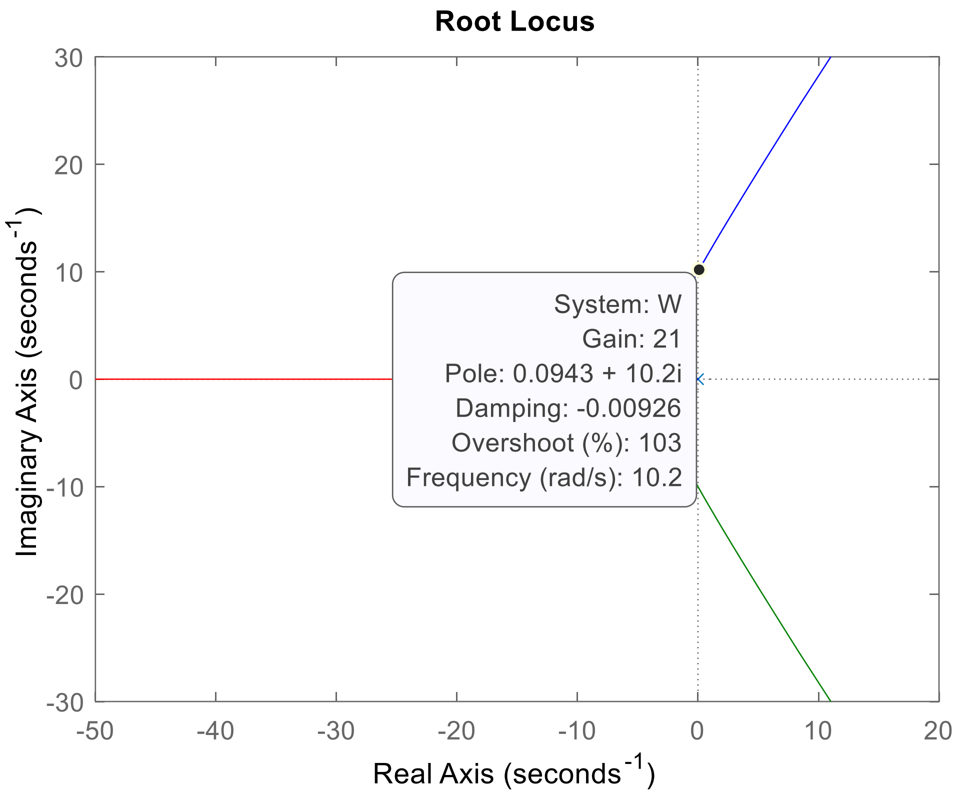

Рис. 9 Точка K = 20 годографе

И наконец при K = 21> 20(мнимые корни на правой ПП):

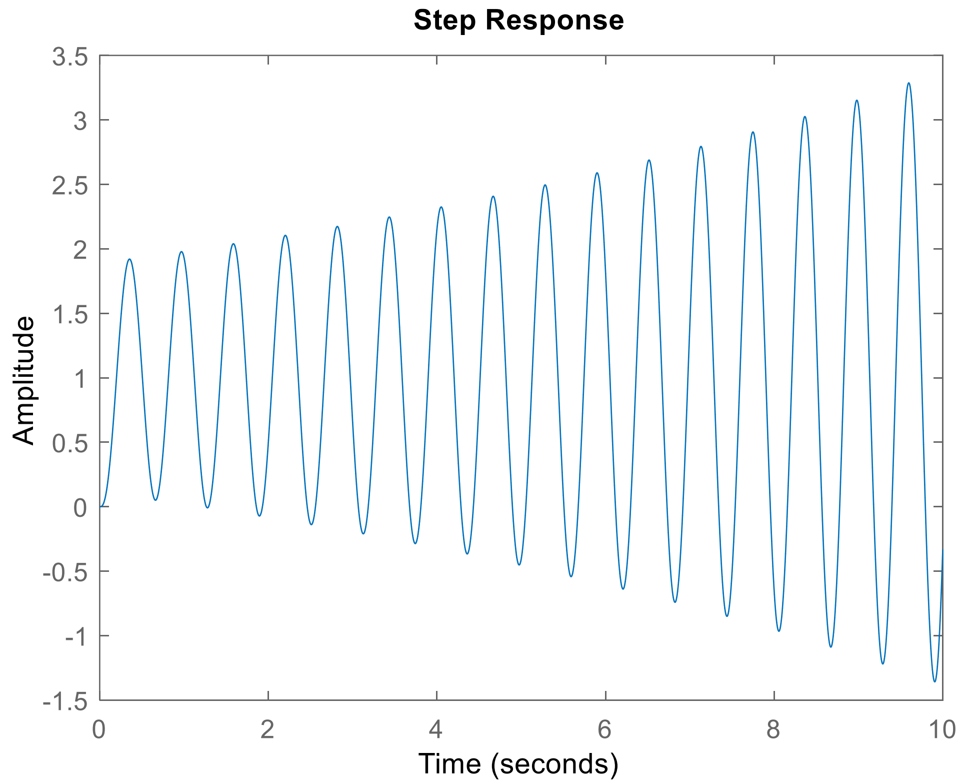

Рис. 10 Переходная характеристика замкнутой системы при K = 21

Система неустойчива.