Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАТИКА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

КАФЕДРА ИУ1 – СИСТЕМЫ А ВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

«ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ»

по курсу:

«ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ»

Студент: ИУ2-61 _______________ **Аветисян Н. О.**
(Подпись, дата)

Преподаватель: _______________ **Лобачев И.В.**
(Подпись, дата)

2024 г.

Вариант 1

Задание:

Выполнить исследование устойчивости замкнутой САУ по заданной передаточной функции разомкнутой системы. Варианты заданий приведены в таблице.

Таблица

Варианты заданий

№	Передаточная функция разомкнутой системы
1	$W = \dfrac{2}{s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 3s + 1}$
2	$W = \dfrac{1}{0,05s^4 + 0,1s^3 + s^2 + s + 1}$
3	$W = \dfrac{1}{0,1s^3 + 0,1s^2 + s + 1}$
4	$W = \dfrac{100}{5s^4 + 0,1s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$
5	$W = \dfrac{1}{8s^3 + 4s^2 + 2s + 1}$
6	$W = \dfrac{10}{s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1}$
7	$W = \dfrac{3}{0,1s^3 + 0,01s^2 + 0,1s + 1}$
8	$W = \dfrac{10}{2s^3 + 2s^2 + s + 1}$
9	$W = \dfrac{1}{s^3 + 0,1s^2 + 0,1s + 1}$
10	$W = \dfrac{10}{2s^5 + 3s^4 + 3s^3 + 0,5s^2 + 0,5s + 1}$

Для варианта 1:

$$W(s) = \frac{2}{s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 3s + 1}$$

Теоретическая часть

Устойчивость САУ является одним из основных условий ее работоспособности и включает требование затухания во времени переходных процессов.

Система является устойчивой, если при ограниченном входном сигнале её выходной сигнал также является ограниченным. Если система устойчива, то она противостоит внешним воздействиям, а выведенная из состояния равновесия возвращается снова к нему. Система с расходящимся переходным процессом будет неустойчивой и неработоспособной.

Необходимое и достаточное условие устойчивости заключается в том, чтобы все корни характеристического уравнения (полюсы передаточной функции системы) имели отрицательные вещественные части. Иначе говоря, условием устойчивости системы является расположение всех полюсов в левой комплексной полуплоскости. Тогда все полюсы будут давать затухающую реакцию.

В конце XIX и первой половине XX в. задача вычисления корней характеристического уравнения высокого порядка вызывала большие проблемы. Поэтому были предложены несколько косвенных методов оценки устойчивости, позволяющих обойтись без вычисления корней – по значениям коэффициентов характеристического уравнения

Критерии устойчивости разделяют на алгебраические и частотные. В частности, к алгебраическим критериям относится критерий Гурвица, к частотным критерия – критерий Найквиста

Критерий Гурвица является алгебраическим критерием и применяется к коэффициентам характеристического уравнения замкнутой системы. Пусть имеется характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0.$$

Из коэффициентов характеристического уравнения составляют матрицу:

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Критерий устойчивости формулируется так: чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы $a_{nB} > 0$ были положительными все n диагональных определителей, получаемых из матрицы Гурвица.

Таким образом, критерий Гурвица позволяет судить об абсолютной устойчивости, но не дает возможности оценивать относительную устойчивость по корням характеристического уравнения.

Частотный критерий устойчивости Найквиста анализирует АФЧХ разомкнутой системы. Пусть имеется ПФ разомкнутой системы W(jω).

Критерий устойчивости Найквиста формулируется так:

1. Если разомкнутая система устойчива или находится на границе устойчивости, то для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы при изменении частоты ω от 0 до ∞ не охватывала точку с координатами –1,j0.

2. Если разомкнутая система неустойчива, а ее передаточная функция имеет m полюсов справа от мнимой оси на комплексной плоскости, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы при изменении частоты от ω от – ∞ до + ∞ охватывала m раз точку с координатами –1, j0.

Физический смысл критерия устойчивости Найквиста заключается в том, что система будет неустойчива, если фаза выходного сигнала противоположна фазе входного сигнала, а коэффициент усиления >1. Поэтому для анализа устойчивости можно использовать не АФЧХ, а ЛАХ системы (для минимально-фазовых систем). Система устойчива, если на частоте среза значение фазы не превышает –π. Соответственно для устойчивой системы можно рассматривать на ЛФЧХ запас устойчивости по фазе – расстояние от значения фазы на частоте среза до уровня –π, и запас устойчивости по амплитуде – расстояние от оси частот ЛАЧХ до значения усиления на частоте, где фаза становится равной –π.

Использование MatLab

Переходную функцию разомкнутой системы:

$$W_{rs}(s)=\frac{2}{s^4+5s^3+5s^2+3s+1}$$

Использую команду feedback получаем переходную функцию разомкнутой системы:

$$W_{zs}(s)=\frac{2}{s^4+5s^3+5s^2+3s+3}$$

Критерий Гурвица:

Для нахождения матрицы Гурвица напишем функцию, которая вычисляет матрицу Гурвица и ее определители:

```
function [hurwitz_matrix, hurwitz_dets] = create_hurwitz_matrix(W_zs)
    % MY_HURWITZ_FUNCTION - функция для создания матрицы Гурвица и массива ее определителей
    % Входные аргументы:
    %   W_zs - передаточная функция
    % Выходные аргументы:
    %   hurwitz_matrix - матрица Гурвица
    %   hurwitz_dets - массив определителей Гурвица

    % Получаем коэффициенты полинома числителя и знаменателя
    [num, den] = tfdata(W_zs, 'v');

    n = length(den) - 1;              % Размер матрицы Гурвица
    hurwitz_matrix = zeros(n, n);   % Инициализация матрицы Гурвица
    hurwitz_dets = zeros(1, n);     % Инициализация массива определителей Гурвица

    % Заполняем матрицу Гурвица

    % Заполняем первые 2 строки
    k = 1;
    for i = 1 : (n + 1)
        if(mod(i,2) == 0)
            hurwitz_matrix(1, k) = den(i);
            k = k + 1;
        else
            hurwitz_matrix(2, k) = den(i);
        end
    end

    % Заполняем остальные строки (через сдвиги)
    for i = 3 : n
        hurwitz_matrix(i, :) = circshift(hurwitz_matrix(i - 2, :), [0, 1]);
    end

    % Определители Гурвица
    for i = 1:n
        hurwitz_dets(i) = det(hurwitz_matrix(1:i, 1:i));
    end
end
```

Рис. 1 Функция вычисления матрицы Гурвица и массива ее определителей

Получаем матрицу Гурвица и ее определители для $W_{zs}(s)$

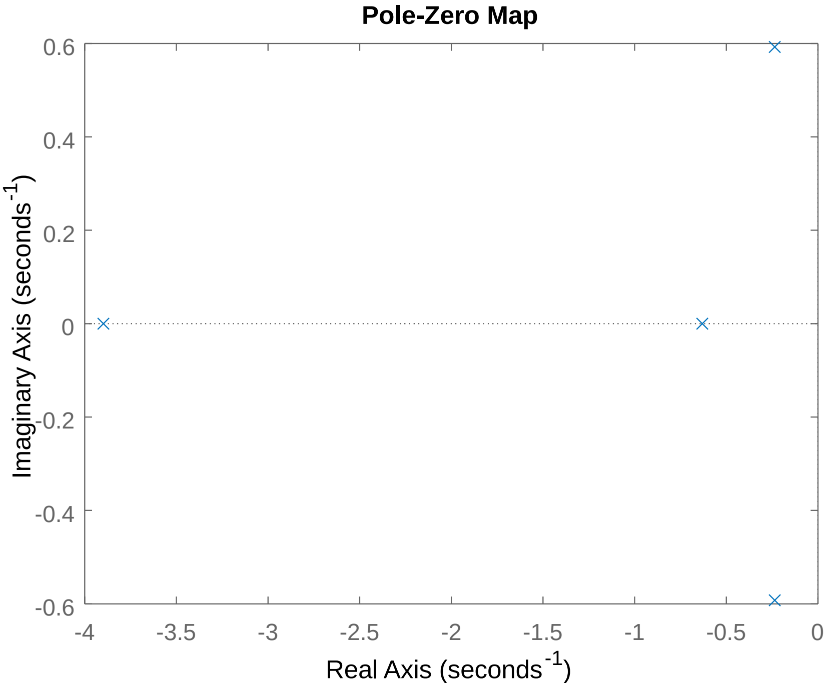
```
Матрица:
     5     3     0     0
     1     5     3     0
     0     5     3     0
     0     1     5     3
Определители:
    5.0000   22.0000   -9.0000  -27.0000
```

Вывод:

определители меняют знак => система неустойчива.

Критерий Найквиста

Все полюса $W_{rs}(s)$ на левой полуплоскости:



-3.8978 + 0.0000i

-0.6311 + 0.0000i

-0.2356 + 0.5925i

-0.2356 - 0.5925i

Рис. 2 Полюса $W_{rs}(s)$

Проверяем АФЧХ разомкнутой системы на охват точки -1, j0:

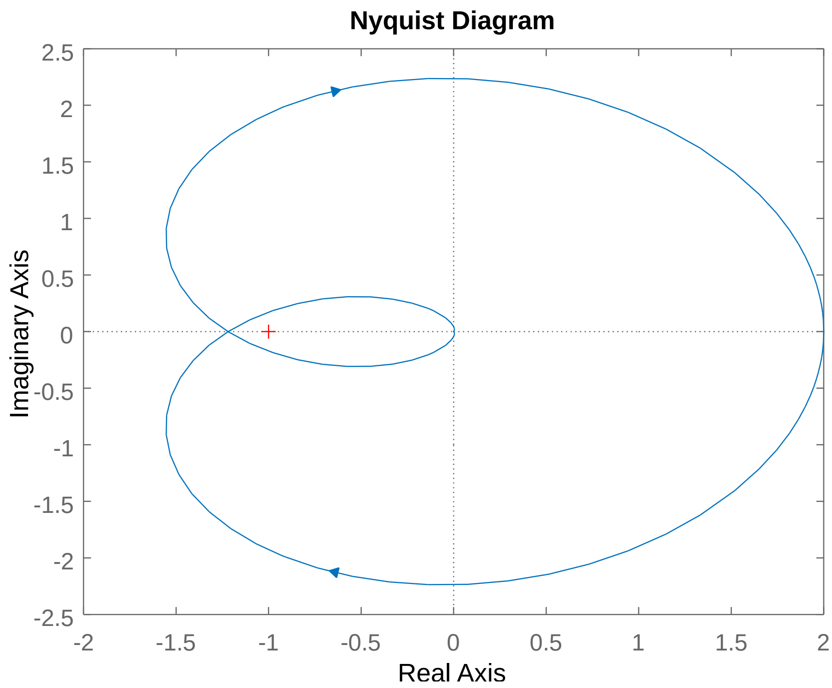


Рис. 3 Диаграмма Найквиста

Вывод:

Все полюса на левой полуплоскости.

АФЧХ разомкнутой системы охватывает точку -1, 0j => система неустойчива.

Переходная характеристика замкнутой системы

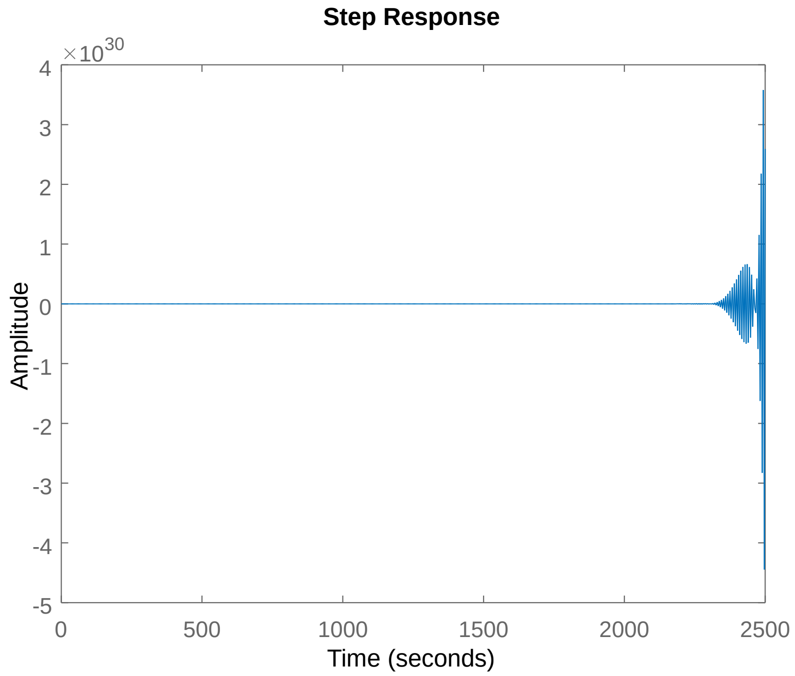


Рис. 4 Переходная характеристика замкнутой системы

Вывод:

Их графика переходной характеристики видно, что система неустойчива.

Устойчивость в частотной области

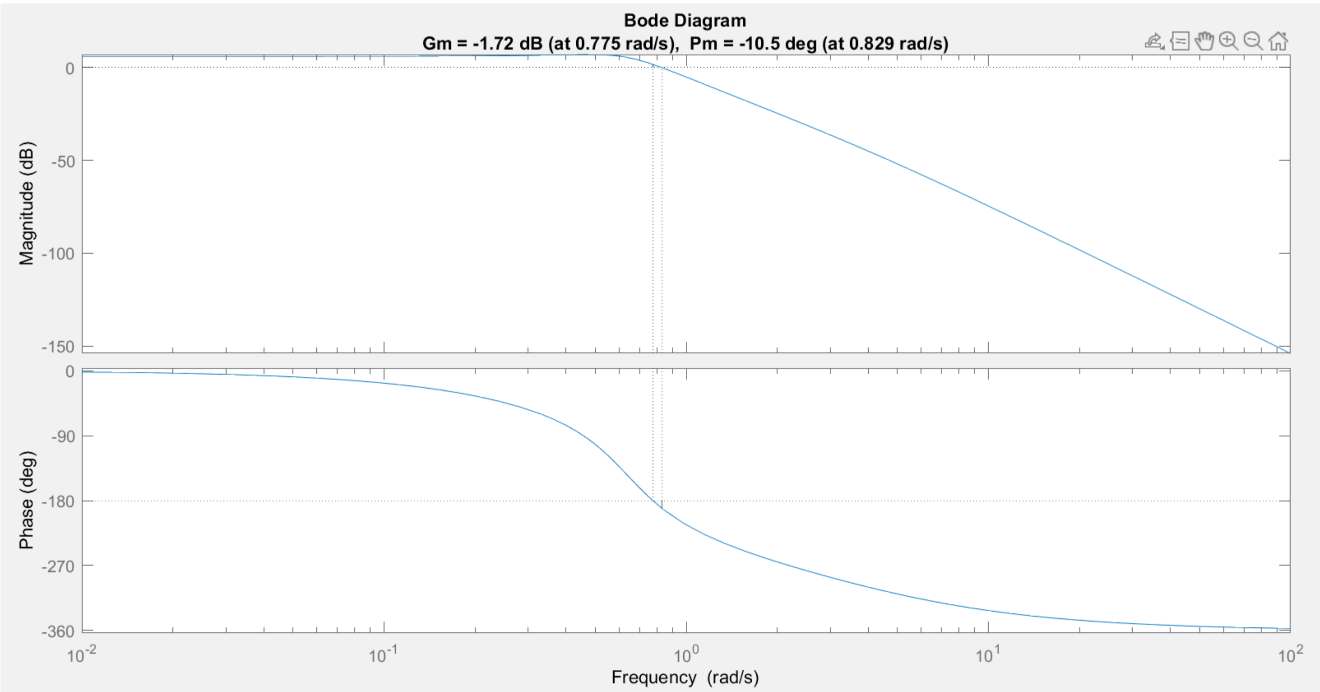


Рис. 5 ЛАФЧХ замкнутой системы

Вывод:

Имеем отрицательный запас устойчивости => система неустойчива.

Из ЛАФЧХ видно, что системе немного не хватает запаса по фазе чтобы дойти до границы устойчивости.

Попытаемся, уменьшая K, довести систему до границы устойчивости.

Для этого напишем такую функцию:

```
% Изменяя коэффициент усиления, можно попробовать сделать систему устойчивой
% Попробуем найти границу устойчивости
for i = K:-0.001:1
    W_rs = i / (s^4 + 5 * s^3 + 5* s^2 + 3 * s + 1);
    W_zs = feedback(W_rs, 1);
    [hurwitz_matrix, hurwitz_dets] = create_hurwitz_matrix(W_zs);
    if(all(hurwitz_dets > 0) || all(hurwitz_dets < 0))
        fprintf("Граница устойчивости: K = %g\n", i);
        figure
        nyquist(W_rs)
        figure
        step(W_zs, 100)
        figure
        margin(W_rs)
        break;
    end
end
```

Рис. 6 Функция для подбора K

Результат:

```
Граница устойчивости: K = 1.64
```

Уменьшая K от 2 до 1.64, мы довели систему до границы устойчивости:

Далее приведены критерии, когда система на границе устойчивости:

$$W_{rs}(s)=\frac{1.64}{s^4+5s^3+5s^2+3s+1}$$

$$W_{zs}(s)=\frac{1.64}{s^4+5s^3+5s^2+3s+2.64}$$

```
Матрица:
     5     3          0          0
     1     5     2.64          0
     0     5          3          0
     0     1          5     2.64
Определители:
    5.0000    22.0000    0    0
```

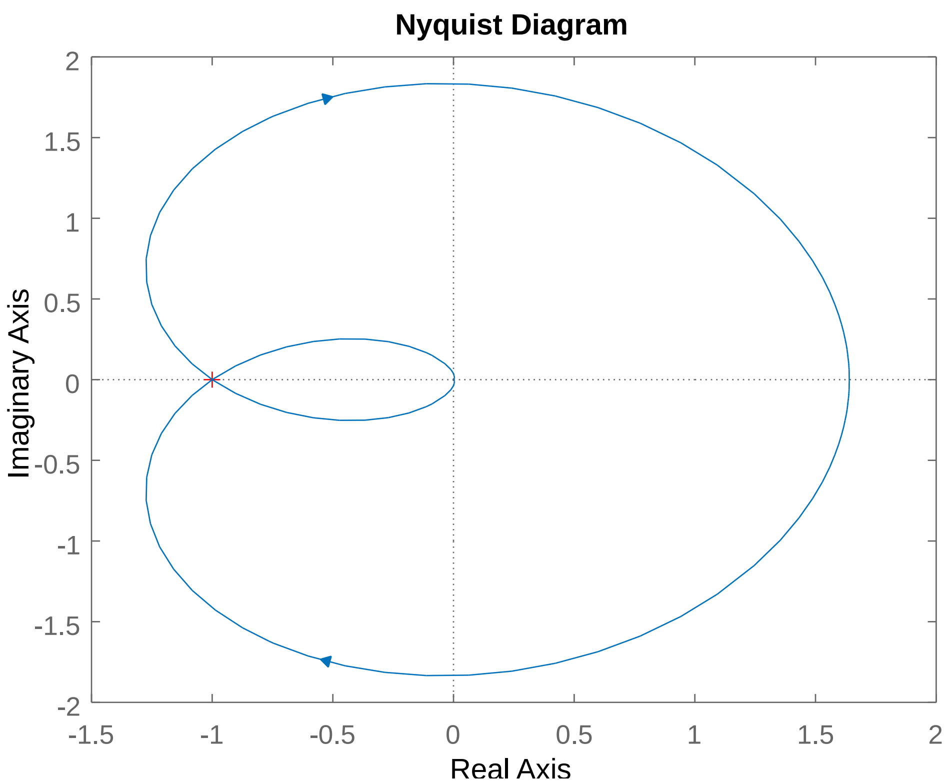


Рис. 7 Диаграмма Найквиста для системы на границе устойчивости

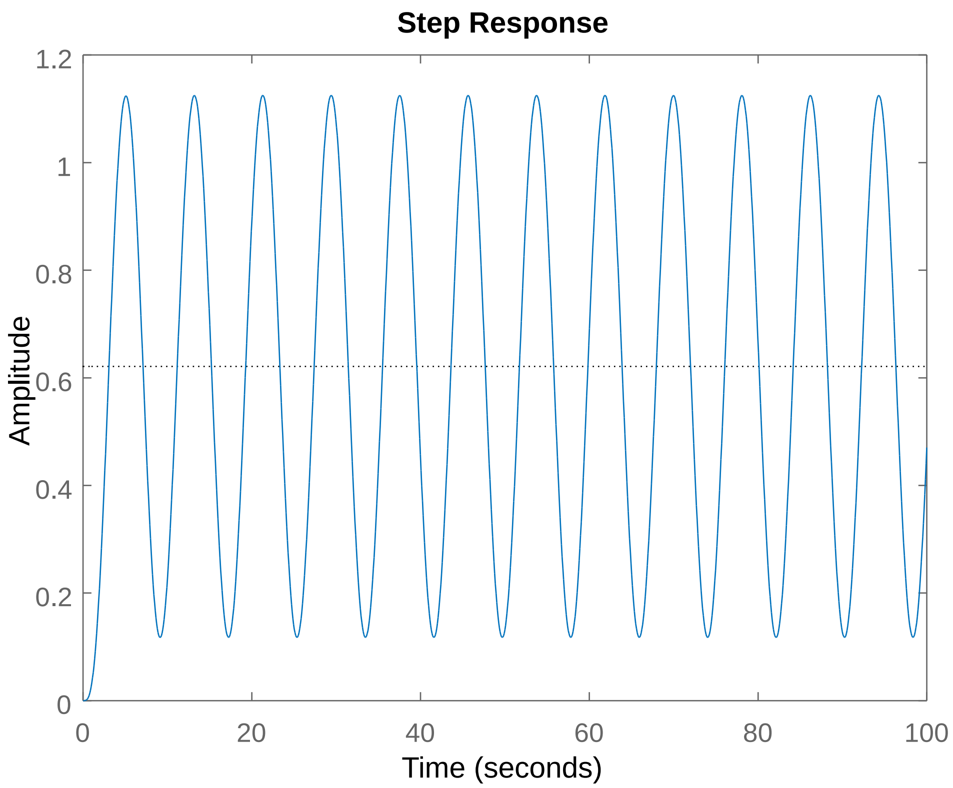


Рис. 8 Переходная характеристика для системы на границе устойчивости

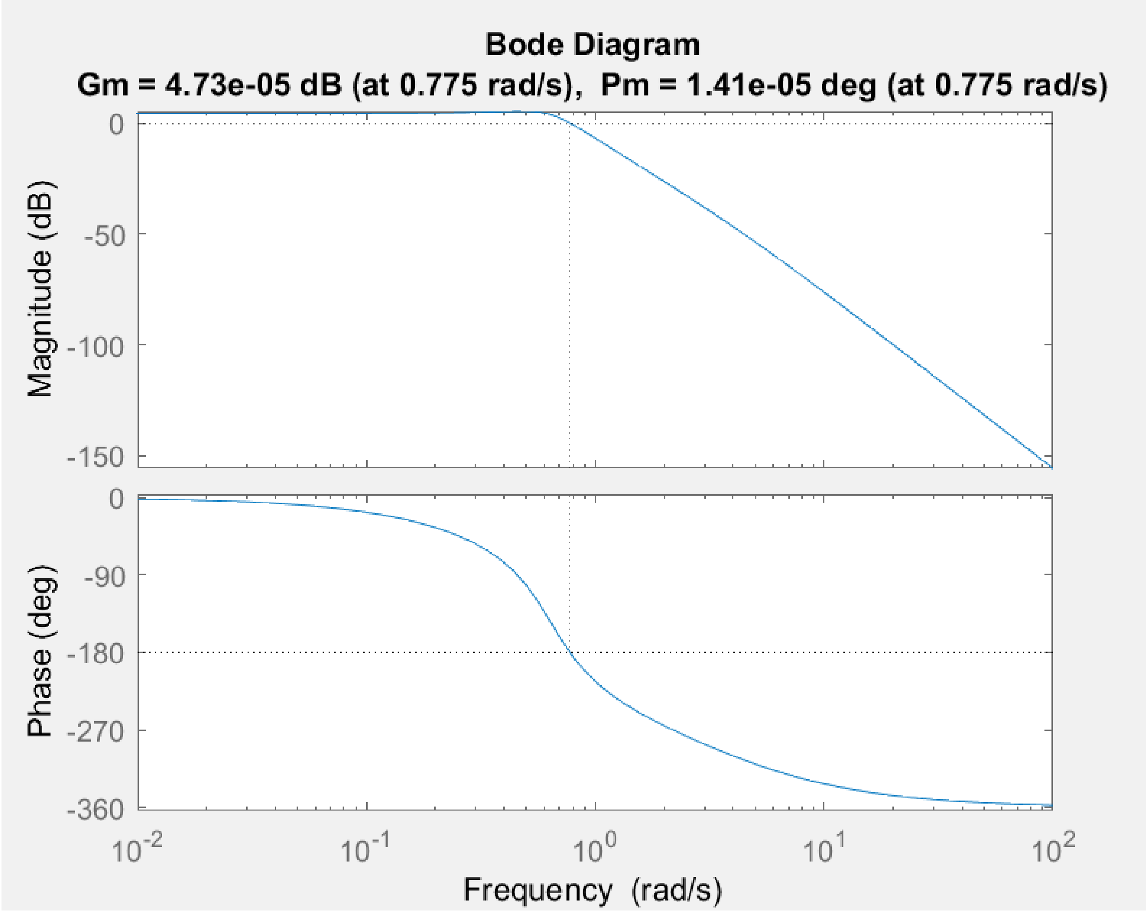


Рис. 9 ЛАФЧХ для системы на границе устойчивости

Заключение

Проверили разными критериями систему на устойчивость и получили одинаковые результаты: система неустойчива. Смогли подобрать коэффициент усиления K такое, что система перешла на границу устойчивости.