Лабораторная работа №3

ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗВЕНЬЕВ

1. Методические указания

Сущность метода частотных характеристик заключается в том, что на вход исследуемой системы подается гармонический сигнал (синусоидальные колебания) в широком диапазоне частот. Реакция системы при разных частотах позволяет судить о ее динамических свойствах.

Пусть входной сигнал системы имеет амплитуду a и частоту ω, т. е. описывается формулой

$$x = a\sin(\omega t).$$

Выходной сигнал будет иметь амплитуду A_1 и отличаться от входного по фазе на величину ψ (фазовый сдвиг):

$$y = A_1 \sin(\omega t + \psi).$$

Таким образом, можно рассчитать усиление по амплитуде

$$A = \frac{A_1}{a}.$$

Для каждой частоты входного сигнала ω будут свои A и ψ.

Изменяя ω в широком диапазоне, можно получить зависимость $A(\omega)$ – амплитудную частотную характеристику (АЧХ) и $\psi(\omega)$ – фазовую частотную характеристику (ФЧХ).

Главное достоинство метода частотных характеристик заключается в том, что АЧХ и ФЧХ объекта могут быть получены экспериментально. Для этого необходимо иметь генератор гармонических колебаний, который подключается к входу объекта, и измерительную аппаратуру для измерения амплитуды и фазового сдвига колебаний на выходе объекта.

Частотные характеристики САУ могут быть получены по ее ПФ $W(s)$. Для суждения о реакции звена на синусоидальный сигнал достаточно исследовать его реакцию на гармонический сигнал вида [1]

$$x(j\omega) = e^{j\omega t}.$$

Тогда выходной сигнал

$$y(j\omega) = A(\omega)e^{j\left(\omega t+\psi(\omega)\right)},$$

и частотная ПФ

$$W(j\omega)=\frac{y(j\omega)}{x(j\omega)}=A(\omega)e^{j\psi(\omega)}.$$

Формально для получения частотной ПФ надо сделать в $W(s)$ подстановку $s = j\omega$, и тогда полученная $W(j\omega)$ является комплексным выражением, которое можно представить в виде:

$$W(j\omega)=\frac{a_1(\omega)+jb_1(\omega)}{a_2(\omega)+jb_2(\omega)}\cdot$$

Для нахождения вещественной и мнимой частей частотной передаточной функции необходимо домножить числитель и знаменатель на сопряженную знаменателю величину, а затем провести разделение:

$$W(j\omega)=\frac{a_1(\omega)+jb_1(\omega)}{a_2(\omega)+jb_2(\omega)}=\frac{(a_1(\omega)+jb_1(\omega))\ \ (a_2(\omega)-jb_2(\omega))}{(a_1(\omega)+jb_2(\omega))\ \ (a_2(\omega)-jb_2(\omega))}=$$

$$=\frac{a_1(\omega)a_2(\omega)+b_1(\omega)b_2(\omega)}{a_2^2(\omega)+b_2^2(\omega)}+j\frac{a_2(\omega)b_1(\omega)-a_1(\omega)b_2(\omega)}{a_2^2(\omega)+b_2^2(\omega)}=$$

$$=U(\omega)+jV(\omega)=A(\omega)\cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

где

$$A(\omega)=\left|W(j\omega)\right|=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}=\frac{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}},$$

$$\psi(\omega)=\arg(W(j\omega))=\mathrm{arctg}\left[\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\right]=\mathrm{arctg}\left[\frac{b_1}{a_1}\right]-\mathrm{arctg}\left[\frac{b_2}{a_2}\right].$$

Графики функций $U(\omega)$ и $V(\omega)$ называют соответственно *вещественной* и *мнимой частотной характеристиками*.

В практических расчетах удобно применять графики частотных характеристик, построенных в логарифмическом масштабе – *логарифмические частотные характеристики* (ЛЧХ).

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (ЛАЧХ) определяется следующим выражением:

$$L(\omega) = 20\ \lg A(\omega).$$

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФЧХ) называется график зависимости $\psi(\omega)$, построенный в логарифмическом масштабе частот.

Единицей $L(\omega)$ является децибел (дБ), а единицей логарифма частоты – декада. *Декадой* называют интервал частот, на котором частота изменяется в 10 раз. При изменении частоты в 10 раз говорят, что она изменилась на одну декаду. Ось ординат при построении ЛЧХ проводят через произвольную точку, а не через точку $\omega = 0$. Частоте $\omega = 0$ соответствует бесконечно удаленная точка: $\lg\omega \to -\infty$ при $\omega \to 0$.

Основное преимущество использования ЛЧХ заключается в том, что приближенные (асимптотические) ЛАЧХ типовых динамических звеньев изображаются отрезками прямых.

Пример. Построим ЛЧХ апериодического звена первого порядка.

Передаточная функция звена

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1}.$$

Частотная передаточная функция

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega+1} = \frac{k(1-Tj\omega)}{(T\omega)^2+1},$$

$$U = \frac{k}{(T\omega)^2+1}, \quad V = -\frac{kT\omega}{(T\omega)^2+1}.$$

Следовательно, АЧХ описывается формулой

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T\omega)^2+1}},$$

ФЧХ строится по формуле

$$\psi(\omega) = -\mathrm{arctg}(T\omega).$$

ЛАЧХ апериодического звена 1-го порядка

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\sqrt{(T\omega)^2+1}.$$

По этой формуле можно построить две асимптоты – прямые, к которым стремится ЛАЧХ при $\omega \to 0$ и $\omega \to \infty$. Так, при $\omega \to 0$ второе слагаемое близко к нулю, и этот участок ЛАЧХ представляет собой горизонтальную прямую

$$L(\omega) = 20\lg k.$$

При $\omega \to \infty$ получаем наклонную прямую:

$$L(\omega) \approx -20\lg\sqrt{(T\omega)^2+1} \to -\infty.$$

Для определения наклона этой прямой можно рассмотреть границы декады:

$$\omega = \frac{1}{T} \text{ и } \omega = \frac{10}{T}.$$

Изменение ЛАЧХ между этими точками:

$$\Delta L(\omega) \approx -20\lg\sqrt{\left(T\frac{10}{T}\right)^2+1} + 20\lg\sqrt{\left(T\frac{1}{T}\right)^2+1} \approx -20 \text{ (дБ/дек)}.$$

ЛЧХ часто называют *диаграммами Боде*.

2. Использование пакета MatLab

В пакете MatLab ЛЧХ объекта, заданного с помощью ПФ, можно получить с командой bode.

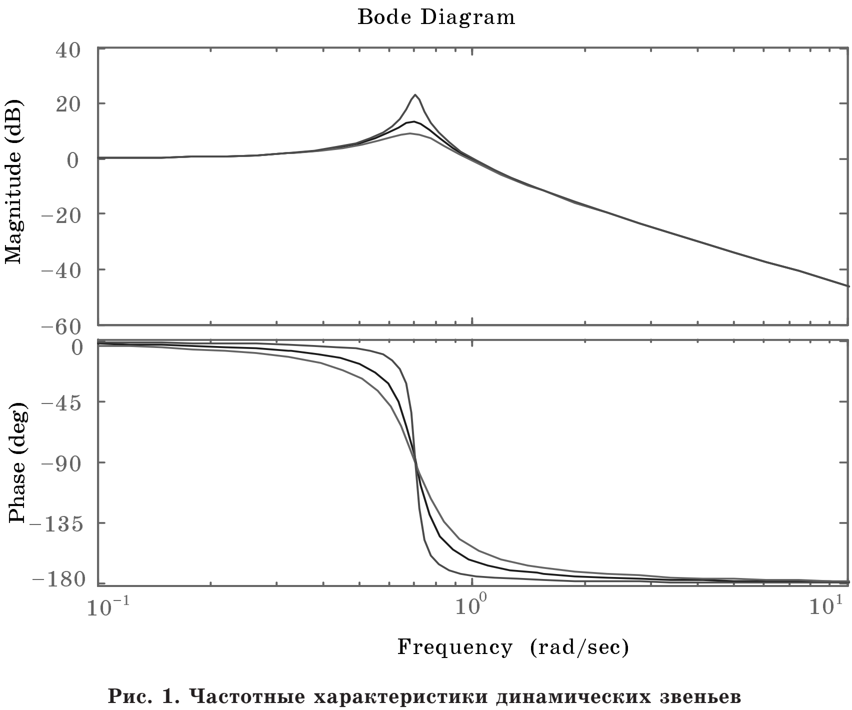

Рис. 1. Частотные характеристики динамических звеньев

Пример:

```
>> w=tf([1 2],[3 4 5])
>> bode(w)
```

Для нескольких вариантов передаточной функции можно использовать вариант команды вида:

```
>> bode(w,w1,w2)
```

Например, построим диаграмму Боде при различных параметрах колебательного звена (рис. 1):

```
>> w=tf([1],[2 0.3 1]);
>> w1=tf([1],[2 0.5 1]);
>> w2=tf([1],[2 0.1 1]);
>> bode(w,w1,w2)
```

3. Задание на лабораторную работу

С помощью пакета MatLab построить ЛЧХ каждого типового звена (см. табл. лабораторной работы № 1).

Определить влияние коэффициентов, входящих в описание каждого звена, на параметры ЛАЧХ и ЛФЧХ, в том числе:

– как меняется ширина асимптотических участков ЛАЧХ и ЛФЧХ;

– как меняется положение точек пересечения осей ЛАЧХ.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– краткие теоретические сведения;

– экспериментально полученные характеристики при вариации параметров каждого звена;

– выводы, обобщающие проделанные эксперименты по каждому звену.