Лабораторная работа №6

МЕТОД КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА

1. Методические указания

Корневым годографом (КГ) называется совокупность траекторий перемещения всех корней характеристического уравнения замкнутой системы при изменении какого-либо параметра этой системы.

Обычно метод КГ позволяет находить полюса и нули ПФ замкнутой системы, располагая полюсами и нулями разомкнутой системы при изменении коэффициента усиления разомкнутой системы K.

ПФ разомкнутой системы $W_{\text{р}}(s)$ представим в следующем виде:

$$W_{\text{р}}(s) = \frac{KC\prod_{j=1}^{m}(s - s_j^0)}{\prod_{i=1}^{n}(s - s_i^*)}, \tag{1}$$

где s_j^0 – нули ПФ $W_p(s)$, ($j = \overline{1,m}$); s_i^* – полюса ПФ $W_{\text{р}}(s)$, ($i = \overline{1,n}$); n и m – порядки знаменателя и числителя; C – коэффициент представления (отношение коэффициентов при старших членах числителя и знаменателя).

При замыкании системы с ПФ $W_{\text{р}}(s)$ единичной отрицательной обратной связью ПФ замкнутой системы $W_{\text{з}}(s)$ принимает вид

$$W_{\text{з}}(s) = \frac{W_{\text{р}}(s)}{1 + W_{\text{р}}(s)}. \tag{2}$$

Из выражения (2) следует, что нули ПФ замкнутой системы равны нулям ПФ разомкнутой системы.

Для нахождения полюсов рассмотрим выражение

$$1 + W_{\text{р}}(s) = 0, \tag{3}$$

в соответствии с выражением (1) имеем

$$\frac{KC\prod_{j=1}^{m}(s - s_j^0)}{\prod_{i=1}^{n}(s - s_i^*)} + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{n}(s - s_i^*) + KC\prod_{j=1}^{m}(s - s_j^0). \tag{4}$$

На основании выражения (4) можно сказать, что при $K = 0$ корни характеристического уравнения совпадают с полюсами, а при $K = \infty$ – с нулями. При изменении K от 0 до ∞ траектории корней начинаются в полюсах и заканчиваются в нулях. Обычно полюсов больше, чем нулей. В этом случае $n-m$ ветвей корневого годографа стремятся к ∞.

Для определения полюсов замкнутой системы с отрицательной обратной связью необходимо решить уравнение (его называют основным уравнением метода КГ):

$$W_{\text{р}}(s) = -1. \tag{5}$$

Так как $W_{\text{р}}(s)$ является функцией комплексного переменного s, то уравнение (5) распадается на два уравнения: уравнение модулей

$$|W_{\text{р}}(s)| = 1 \tag{6}$$

и уравнение аргументов (фаза вектора –1 есть нечетное число π):

$$\arg W_{\text{р}}(s) = \pm(2u+1)\pi,\ \upsilon = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{7}$$

Как известно, при умножении комплексных чисел их аргументы складываются, а при делении – вычитаются. Поэтому, исходя из выражения (1), уравнение (7) имеет наглядный геометрический смысл.

Пусть точка s – полюс замкнутой системы. Если провести в s вектора из всех нулей $W_{\text{р}}(s)$ (обозначим аргументы этих векторов θ_j^0) и вектора из всех полюсов $W_{\text{р}}(s)$ (обозначим аргументы этих векторов θ_i^*), то уравнение (7) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^{m}\theta_j^0 - \sum_{i=1}^{n}\theta_i^* = \pm(2\nu+1)\pi,\ \ \upsilon = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{8}$$

Углы q отсчитываются от положительного направления действительной оси. Знак угла «+» соответствует повороту против часовой стрелки, знак угла «–» соответствует повороту по часовой стрелке.

Таким образом, любая точка КГ должна удовлетворять уравнению (8), из которого следует, что конфигурация КГ не зависит от коэффициента усиления K, но каждому конкретному значению K однозначно соответствуют точки на КГ.

При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а при делении – делятся. Поэтому на основании уравнения (6) можно записать

$$\frac{KC\ \prod_{j=1}^{m} l_j^0}{\prod_{i=1}^{n} l_i^*} = 1, \tag{9}$$

где l_j^0 – модуль (длина) вектора, проведенного из j-нуля в точку s КГ; l_i^* – модуль вектора, проведенного из i-полюса в ту же точку s.

Таким образом, траектории корней строятся только по уравнениям фаз, а уравнение модулей используется затем для нахождения K.

Сущность метода КГ заключается в том, чтобы узнать, каким должен быть коэффициент усиления разомкнутой системы, чтобы было обеспечено желаемое положение корней замкнутой системы.

Корневой годограф системы с отрицательной обратной связью обладает следующими основными свойствами [1–5]:

1. Ветви КГ непрерывны и расположены на комплексной плоскости симметрично относительно действительной оси.

2. Число ветвей КГ равно порядку системы n. Ветви начинаются в n полюсах разомкнутой системы при $K = 0$. При возрастании K от 0 до ∞ полюса замкнутой системы двигаются по ветвям КГ.

3. m ветвей КГ при возрастании K от 0 до ∞ заканчиваются в m нулях $W_\text{р}(s)$, а $(n - m)$ ветвей при K, стремящемся к ∞, удаляются от полюсов вдоль асимптот.

4. При расположении ветвей корневого годографа в левой полуплоскости s САУ устойчива. При пересечении ветвей КГ мнимой оси слева направо САУ становится неустойчивой. Пусть при $K = K^{\text{кр}}$ пересечение КГ с мнимой осью произойдет в некоторой точке $i\omega^{\text{кр}}$. Назовем это значение коэффициента усиления критическим $K^{\text{кр}}$, а величину $\omega^{\text{кр}}$ критической угловой частотой, на которой система становится неустойчивой.

2. Использование MatLab

В системе MatLab существует команда zpk для преобразования модели, заданной ПФ, в модель, заданную нулями, полюсами и обобщенным коэффициентом передачи (zpk-форма).

Пример:

```
>> w=tf([10],[2 2 3 1 0])
Transfer function:
10
————————————————
2 s^4 + 2 s^3 + 3 s^2 + s
>> w1=zpk(w)
Zero/pole/gain:
5
——————————————————————————
s (s+0.3966) (s^2 + 0.6034s + 1.261)
```

Для работы с корневым годографом удобно использовать графический интерфейс «SISO-Design Tool», предназначенный для анализа и синтеза одномерных линейных систем автоматического управления (SISO – Single Input/Single Output).

Запуск SISO-Design Tool осуществляется командой

```
>> sisotool
```

В появившемся окне графического интерфейса необходимо использовать команду «File/Import» для загрузки данных из рабочего пространства MatLab, в результате которой появляется диалоговое окно Import System Data (рис. 1).

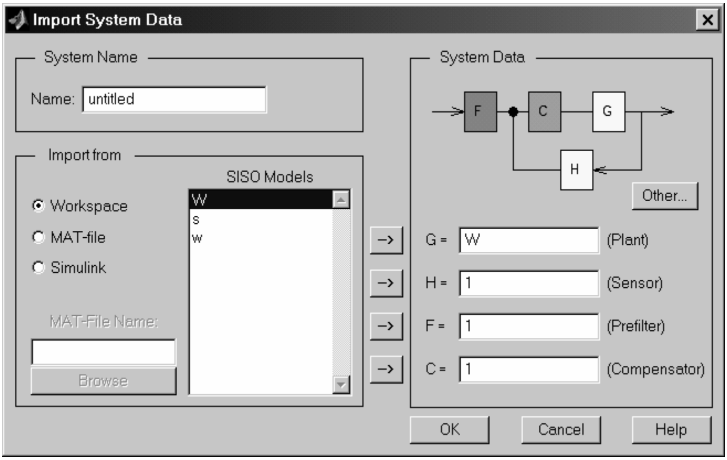

Рис. 1. Диалог для ввода параметров модели

После импортирования данных можно исследовать изменение временных и частотных характеристик замкнутой системы при изменении K. Обычно при этом требуется определить условия неустойчивости замкнутой САУ. Определить $K^{кр}$ и $\omega^{кр}$.

На рис. 2 показано окно sisotool для описанной выше модели $w1$. Двигая красным курсором по КГ до пересечения ветвей с мнимой осью, можно определить значение $K^{кр}$. В данном случае $K^{кр} \approx 0{,}1$. Значение $\omega^{кр}$ соответствует мнимой координате пересечения КГ мнимой оси. Просмотреть это значение можно в нижней части интерфейса или выбрав меню «View/Closed-Loop Poles».

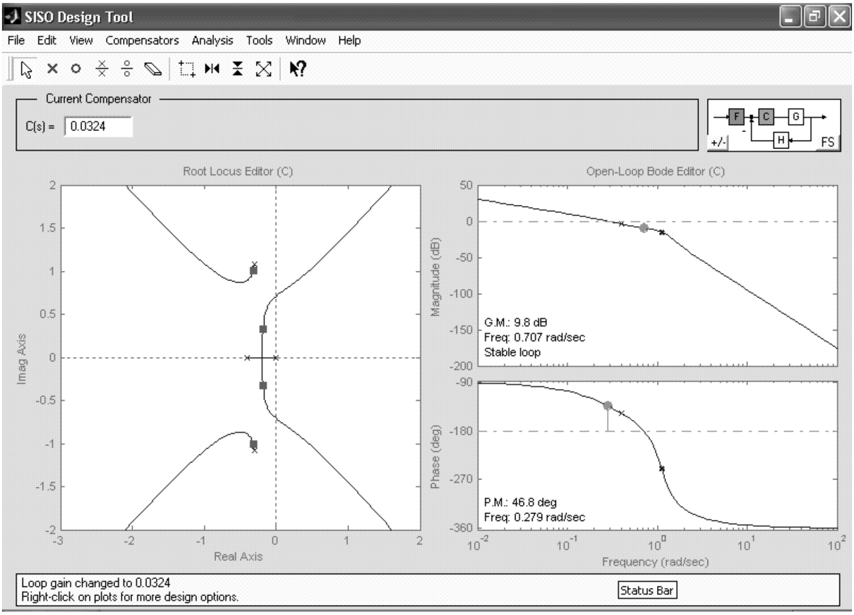

Рис. 2. Основное окно SISO Design tool

3. Задание на лабораторную работу

Построить КГ в соответствии с вариантом из таблицы при помощи графического интерфейса sisotool.

Исследовать динамику замкнутой системы при различных значениях коэффициента усиления разомкнутой системы K, в том числе:

– запасы устойчивости в частотной области;

Таблица

Варианты передаточных функций

№ п/п	Значения параметров	Передаточная функция разомкнутой системы
1	$T = 0{,}1,\ \zeta = 1$	$\dfrac{K}{s(T^2 s^2 + 2T\zeta s + 1)}$
2	$T = 0{,}05,\ \zeta = 0{,}707$	
3	$T = 0{,}03,\ \zeta = 0{,}1$	
4	$T = 0{,}08,\ \zeta = 0{,}5$	
5	$T = 0{,}01,\ \zeta = 0{,}15$	

Окончание табл.

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>Значения параметров</th><th>Передаточная функция разомкнутой системы</th></tr>
<tr><td>6</td><td>$T_1 = 0{,}03,\ T_2 = 0{,}5,\ T_3 = 0{,}1,\ T_4 = 0{,}05$</td><td rowspan="5">$\dfrac{K(T_1 s + 1)}{s(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}$</td></tr>
<tr><td>7</td><td>$T_1 = 0{,}05,\ T_2 = 0{,}4,\ T_3 = 0{,}08,$
$T_4 = 0{,}033$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$T_1 = 0{,}2,\ T_2 = 0{,}45,\ T_3 = 0{,}1,\ T_4 = 0{,}05$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$T_1 = 0{,}5,\ T_2 = 0{,}25,\ T_3 = 0{,}1,\ T_4 = 0{,}02$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>$T_1 = 0{,}1,\ T_2 = 0{,}25,\ T_3 = 0{,}1,\ T_4 = 0{,}05$</td></tr>
<tr><td>11</td><td>$T_1 = 0{,}2,\ T_2 = 0{,}1,\ T_3 = 0{,}05,$
$T_4 = 0{,}07,\ \ = 0{,}5$</td><td rowspan="5">$\dfrac{K(T_1 s + 1)}{s(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4^2 s^2 + 2T_4 \zeta s + 1)}$</td></tr>
<tr><td>12</td><td>$T_1 = 0{,}07,\ T_2 = 0{,}1,\ T_3 = 0{,}05,$
$T_4 = 0{,}07,\ \ = 0{,}5$</td></tr>
<tr><td>13</td><td>$T_1 = 0{,}3,\ T_2 = 0{,}1,\ T_3 = 0{,}05,$
$T_4 = 0{,}07,\ \ = 0{,}5$</td></tr>
<tr><td>14</td><td>$T_1 = 0{,}01,\ T_2 = 0{,}1,\ T_3 = 0{,}1,$
$T_4 = 0{,}07,\ \ = 0{,}5$</td></tr>
<tr><td>15</td><td>$T_1 = 0,\ T_2 = 0{,}1,\ T_3 = 0{,}1,$
$T_4 = 0{,}07,\ \ = 0{,}5$</td></tr>
</table>

– параметры переходного процесса во временной области.

Отчет должен содержать:

– краткие теоретические сведения;

– анализ результатов построения КГ;

– выводы.