Advanced Macroeconomics Notes

Chapter 2: Continuous Time Optimization

Nerta | Fall 2025

编写于 2025 年秋季学期，仅供学习与交流参考，请勿用于商业用途。

目录

1 连续时间下的最优控制 (Optimal Control in Continuous Time)

1.1 定义 (Definition)

考虑一个仁慈的社会计划者（benevolent social planner），其目标是最大化经济中代表性家庭的折现效用总和。

我们的优化问题可以定义为如下过程，即在一定约束条件下（例如生产能力与资本折旧等的约束）的最大化问题：

优化问题设定

1. **目标函数 (Objective Function):**

$$\max_{c_t} \quad v(0) = \int_0^T e^{-\rho t} u(c_t) dt \tag{1}$$

2. **约束条件 (Subject to):**

- **转换方程 / 运动方程 (Law of Motion):**

$$\dot{k}(t) = f[k(t), t] - c(t) - \delta k(t) \tag{2}$$

  - **状态变量 (State variable) $k(t)$:** 系统的存量状态 (Stock variable)。
  - **控制变量 (Control variable) $c(t)$:** 在当前时刻可自由决定的流量变量 (Flow variable)。
  - 注：对应的离散时间形式为 $k_{t+1} = (1-\delta)k_t + I_t$。
- **初始条件 (Initial Condition):** $k(0) = k_0$ (给定)。
- **无庞氏骗局条件 (No Ponzi-Game Condition, NPG):**

$$k(T)e^{-\rho T} \geq 0 \tag{3}$$

庞氏骗局 (Ponzi-game): 指通过不断借新债还旧债来维持运作。NPG 条件意味着期末资产的折现值必须非负；本质上，这意味着终身消费的折现值不能超过收入流的折现值。

1.2 一般性问题 (General Problem)

1.2.1 1. 一般优化问题 (The General Optimization Problem)

一般性优化问题可以描述为:

$$
\begin{aligned}
\max_{c(t)} \quad & v(0) = \int_0^T v[x(t), c(t), t] dt \\
\text{s.t.} \quad & \dot{x}(t) = g[x(t), c(t), t], \quad \forall t \\
& x(0) = x_0 \quad (\text{给定}) \\
& x(T) e^{-\bar{r}(T)\cdot T} \geq 0 \quad (\text{终端条件})
\end{aligned}
$$

注: $e^{-\bar{r}(T)\cdot T}$ 代表 T 时刻的折现因子。

1.2.2 2. 静态库恩-塔克问题与汉密尔顿函数的推导

该动态问题的拉格朗日函数 (Lagrangian) 可以写为:

$$
\mathcal{L} = \int_0^T v[x(t), c(t), t] dt + \int_0^T \lambda(t) \{ g[x(t), c(t), t] - \dot{x}(t) \} dt + \eta x(T) e^{-\bar{r}(T)T} \tag{4}
$$

其中 $\lambda(t)$ 是 **协态变量 (co-state variable)**（或影子价格），代表在 t 时刻额外增加一单位资本存量（以 0 时刻价值衡量）的价值。

推导步骤: 1. 重新整理各项:

$$
\mathcal{L} = \int_0^T \{ v[x, c, t] + \lambda(t) g[x, c, t] \} dt - \int_0^T \lambda(t) \dot{x}(t) dt + \eta x(T) e^{-\bar{r}(T)T}
$$

2. 定义 **汉密尔顿函数 (Hamiltonian Function)**:

$$
H[x(t), c(t), \lambda(t), t] \equiv v[x(t), c(t), t] + \lambda(t) g[x(t), c(t), t] \tag{5}
$$

3. 对 $\int \lambda \dot{x} dt$ 项使用 **分部积分法 (Integration by Parts)**:

$$
\int_0^T \lambda(t) \dot{x}(t) dt = [\lambda(T) x(T) - \lambda(0) x(0)] - \int_0^T \dot{\lambda}(t) x(t) dt
$$

4. 代回拉格朗日函数:

$$
\mathcal{L} = \int_0^T \{ H[x, c, \lambda, t] + \dot{\lambda}(t) x(t) \} dt - [\lambda(T) x(T) - \lambda(0) x(0)] + \eta x(T) e^{-\bar{r}(T)T}
$$

一阶条件 (First Order Conditions, F.O.C.)

为了最大化 $\mathcal{L}$，我们分别对 c, x, λ 求导：

1. **最优化条件:** $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial c} = 0$
2. **协态方程 / 欧拉方程:** $\frac{\partial H}{\partial x} = -\dot{\lambda}$
3. **状态方程:** $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = g(x, c, t)$
4. **横截性条件 (TVC):** $\eta x(T) e^{-\bar{r}(T)T} = \lambda(T)$
   - 通常简化为：$x(T)\lambda(T) = 0$ (意味着在规划期结束时，剩余资产的价值为零)。

1.2.3 3. 无限期问题 (Infinite Horizon)

一般的无限期问题可以描述为：

$$\max_{c_t} \ v(0) = \int_0^\infty v[x, c, t] dt \quad \text{s.t. } \dot{x} = g[x, c, t], \ x(0) = x_0, \ \lim_{T \to \infty} [x(T) e^{-\bar{r}(T)T}] \geq 0$$

一阶条件与有限期相同，唯有横截性条件变为：$\lim_{t \to \infty} x(t)\lambda(t) = 0$。

1.3 现值 vs. 当前值汉密尔顿函数

1. 现值汉密尔顿函数 (Present Value, PV, H): 所有价值都折现回 0 时刻进行评估。

$$H = v(x, c, t) + \lambda(t) g(x, c, t) = e^{-\rho t} u(x, c, t) + \lambda(t) g(x, c, t)$$

2. 当前值汉密尔顿函数 (Current Value, CV, $\hat{H}$): 以 t 时刻的价值进行评估（不折现）。定义当前值乘子 $q(t) = e^{\rho t} \lambda(t)$。

$$\hat{H} = u(x, c, t) + q(t) g(x, c, t)$$

关系: $\hat{H} = e^{\rho t} H$

当前值汉密尔顿函数的一阶条件推导:

- **控制变量:**
$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial c} = e^{\rho t} \frac{\partial H}{\partial c} = 0$$
- **协态变量:**
$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial x} = e^{\rho t} \frac{\partial H}{\partial x} = e^{\rho t}(-\dot{\lambda}) = -e^{\rho t} \frac{d}{dt} [e^{-\rho t} q(t)]$$
$$= -e^{\rho t} [-\rho e^{-\rho t} q(t) + e^{-\rho t} \dot{q}(t)] = \rho q(t) - \dot{q}(t)$$
$$\Rightarrow \dot{q}(t) = \rho q(t) - \frac{\partial \hat{H}}{\partial x}$$
- **横截性条件:** $\lim_{t \to \infty} [e^{-\rho t} q(t) x(t)] = 0$

1.4 示例：求解新古典增长模型 (Ramsey Model)

问题设定:

$$\max \int_0^\infty e^{-\rho t}\ln(c(t))dt \quad \text{s.t. } \dot{k}(t) = k(t)^\alpha - c(t) - \delta k(t), \quad k(0) = 1$$

使用 **现值汉密尔顿函数 (PV)** 求解:

$$H = e^{-\rho t}\ln[c(t)] + \lambda(t)[k(t)^\alpha - c(t) - \delta k(t)]$$

一阶条件 (F.O.C.): $\begin{cases} (1) & \frac{\partial H}{\partial c} = e^{-\rho t}\frac{1}{c(t)} - \lambda(t) = 0 \\ (2) & \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial k} = -\lambda(t)[\alpha k(t)^{\alpha-1} - \delta] \end{cases}$

推导欧拉方程 (Keynes-Ramsey Rule):

1. 对 (1) 式取对数:

$$\lambda(t) = e^{-\rho t}c(t)^{-1} \Rightarrow \ln\lambda(t) = -\rho t - \ln c(t)$$

2. 对时间求导:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\rho - \frac{\dot{c}}{c}$$

3. 由 (2) 式:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -[\alpha k^{\alpha-1} - \delta]$$

4. 联立两个表达式:

$$-\rho - \frac{\dot{c}}{c} = -[\alpha k^{\alpha-1} - \delta]$$

结论：欧拉方程

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \underbrace{\alpha k(t)^{\alpha-1} - \delta}_{\text{资本净回报率}} - \underbrace{\rho}_{\text{不耐程度}} \tag{6}$$

经济学解释:

- **回报率 $>$ 不耐程度:** 公式右边为正。储蓄动力强，推迟消费值得，消费路径随时间增长 ($\dot{c}/c > 0$)。
- **回报率 $<$ 不耐程度:** 公式右边为负。未来回报不足以弥补等待成本，消费路径随时间下降 ($\dot{c}/c < 0$)。
- **稳态 (Steady State):** 回报率 = 不耐程度, 经济达到稳态, 人均消费不变 ($\dot{c}/c = 0$)。

2 微分方程 (Differential Equations)

2.1 1. 定义与示例

我们一般研究常微分方程，一些概念介绍如下所示：

基本定义

包含变量导数的方程称为常微分方程 (Ordinary Differential Equation, ODE)。

- **阶数 (Order):** 最高阶导数 n 决定了 ODE 的阶数。
- **自治 (Autonomous):** 如果驱动函数 $x(t)$ 是常数。
- **齐次 (Homogeneous):** 如果 $x(t) = 0$。

示例:

- 示例 1: $a_1 y'(t) + a_2 y(t) + x(t) = 0$ (其中 $x(t)$ 是驱动函数)。
- 示例 2 (二阶): $a_1 \ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_3 y(t) + x(t) = 0$。

2.2 2. 一阶 ODE 的图解法 (Graphic Solutions)

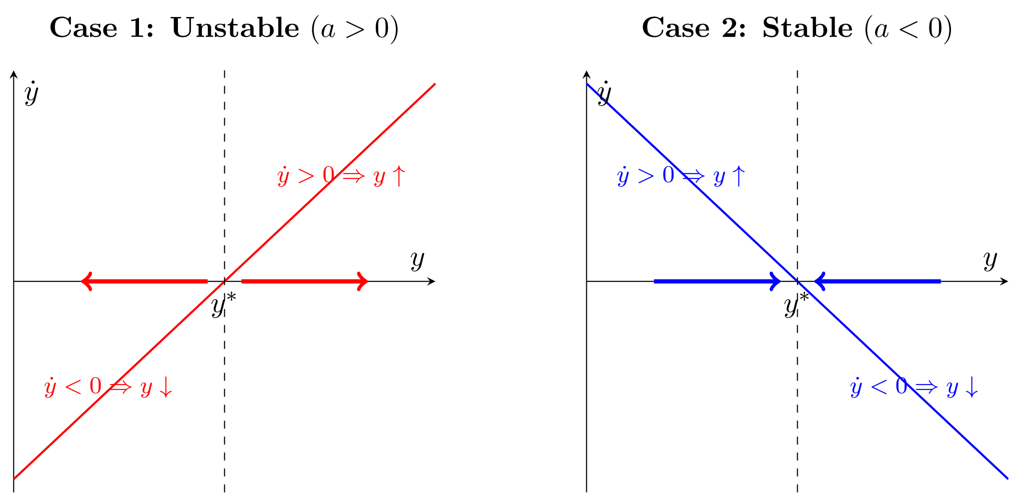
考虑一阶 ODE: $\dot{y}(t) = ay(t) - x$。

稳态 (Steady State, SS): 发生在 $\dot{y}(t) = 0$ 时。

$$0 = ay^* - x \Rightarrow y^* = \frac{x}{a}$$

如果系统从 y^* 开始，它将永远保持在 y^*（稳态的含义）。下面分类讨论不从稳态点开始的情况：

稳定性分析 (Stability Analysis):



- **情况 1: 不稳定 (Unstable, $a > 0$)**

  - 如果 $y > y^*$: $\dot{y} = ay - x > ay^* - x = 0 \Rightarrow \dot{y} > 0$，$y$ 进一步远离 y^* (向上发散)。
  - 如果 $y < y^*$: $\dot{y} < 0$，y 进一步远离 y^* (向下发散)。

- **情况 2: 稳定 (Stable, $a < 0$)**
  - 如果 $y > y^*$: $\dot{y} < 0$，y 减小并趋向于 y^*。
  - 如果 $y < y^*$: $\dot{y} > 0$，y 增加并趋向于 y^*。

2.3 3. 一阶 ODE 的解析解 (Analytical Solutions)

求解常系数一阶线性 ODE: $\dot{y}(t) + ay(t) + x(t) = 0$。

求解步骤: 1. 移项整理: $\dot{y}(t) + ay(t) = -x(t)$。2. 乘以积分因子 e^{at} 并积分:

$$\int e^{at}[\dot{y} + ay]dt = \int -e^{at}x(t)dt$$

$$e^{at}y(t) + b_0 = -\int e^{at}x(t)dt \Rightarrow y(t) = -e^{-at}\int e^{at}x(t)dt + Ce^{-at}$$

3. 使用初始/终端条件确定常数 C。

示例计算: 求解 $a = -1, x(t) = -1$ 的情况 ($\dot{y} - y = 1$)。

$$y(t) = -e^t \int (-1)e^{-t}dt = -e^t[e^{-t}(-1) + b]$$

注意 $-e^{-t}$ 的积分是 e^{-t}。

$$y(t) = -e^t[e^{-t} + b] = -1 - be^t$$

2.4 4. 一阶微分方程组 (System of 1st-order Differential Equations)

形如下方的方程组被称为一阶微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n + x_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n + x_n(t) \end{cases}$$

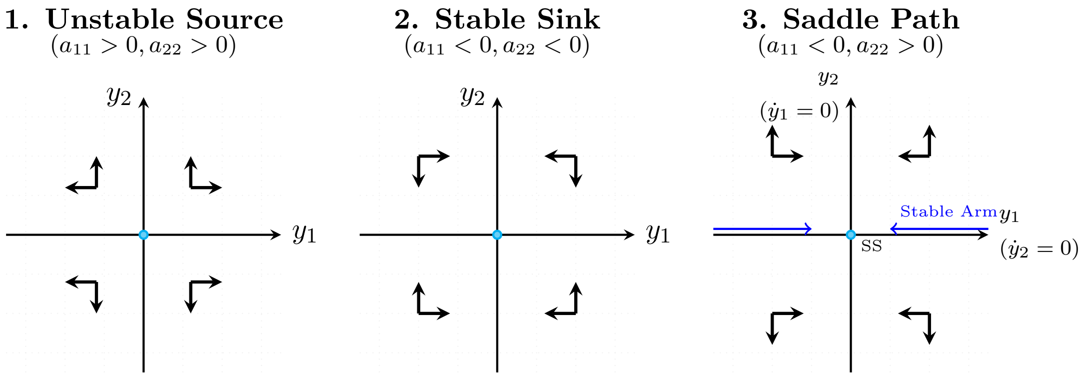
矩阵形式:

$$\dot{Y}(t) = A \cdot Y(t) + X(t)$$

2.4.1 对角化示例 (解耦系统, Diagonal Example)

考虑 2×2 对角矩阵 A 且 $X(t) = 0$: $\dot{y}_1 = a_{11}y_1$，$\dot{y}_2 = a_{22}y_2$。**稳态:** $y_1^* = 0, y_2^* = 0$。

稳定性分类:



- **不稳定源 (Unstable Source, $a_{11} > 0, a_{22} > 0$):** 两个变量都向外发散，远离 0 点。
- **稳定汇 (Stable Sink, $a_{11} < 0, a_{22} < 0$):** 两个变量都收敛于 0 点。
- **鞍点路径 (Saddle Path, 符号相反):**
  - 若 $a_{11} < 0, a_{22} > 0$: y_1 收敛 (稳定臂)，y_2 发散 (不稳定臂)。只有严格位于水平轴上的点才会趋向原点。
  - 若 $a_{11} > 0, a_{22} < 0$: y_2 收敛，y_1 发散。

2.4.2 非对角化示例 (Non-diagonal Example) 与相图

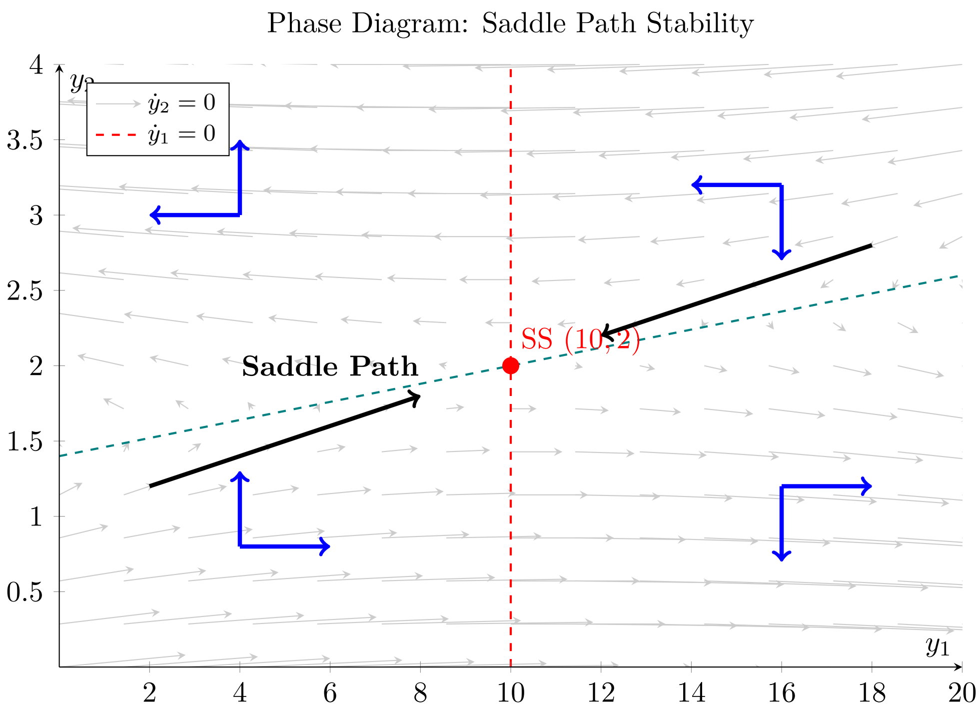
$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = 0.06y_1(t) - y_2(t) + 1.4 \\ \dot{y}_2(t) = -0.004y_1(t) + 0.04 \end{cases}$$

1. 寻找稳态 ($\dot{y}_1 = 0, \dot{y}_2 = 0$)**:**

- 由 $\dot{y}_2 = 0 \Rightarrow y_1^* = 10$。
- 由 $\dot{y}_1 = 0 \Rightarrow y_2^* = 0.06(10) + 1.4 = 2$。
- 稳态: $(10, 2)$。

2. 相图动态分析 (Isocline Analysis):

- $\dot{y}_2 = 0$ **等倾线** ($y_1 = 10$)**:** 线右侧 ($y_1 > 10$), $\dot{y}_2 < 0$ (↓); 线左侧 $\dot{y}_2 > 0$ (↑)。
- $\dot{y}_1 = 0$ **等倾线** ($y_2 = 0.06y_1 + 1.4$)**:** 线上方 (y_2 大), $\dot{y}_1 < 0$ (←); 线下方 $\dot{y}_1 > 0$ (→)。
- **结论:** 系统表现出 **鞍点路径稳定性 (Saddle Path Stability)**。


Phase Diagram: Saddle Path Stability
y_2
$\dot{y}_2 = 0$
$\dot{y}_1 = 0$
Saddle Path
SS (10, 2)
y_1
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20