2017 全国研究生入学考试考研数学三试题

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\le 0,\end{cases}$ 在 $x=0$，处连续，则（　）

（A）$ab=\dfrac{1}{2}$　　（B）$ab=-\dfrac{1}{2}$

（C）$ab=0$　　（D）$ab=2$

（2）二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是（　）

（A）$(0,0)$　　（B）$(0,3)$　　（C）$(3,0)$　　（D）$(1,1)$

（3）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则（　）

（A）$f(1)>f(-1)$　　（B）$f(1)<f(-1)$　　（C）$|f(1)|>|f(-1)|$　　（D）$|f(1)|<|f(-1)|$

（4）设级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛，则 $k=$（　）

（A）1　　（B）2　　（C）-1　　（D）-2

（5）设 α 是 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则

（A）$E-\alpha\alpha^T$ 不可逆　　（B）$E+\alpha\alpha^T$ 不可逆

（C）$E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆　　（D）$E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

（6）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则

（A）A 与 C 相似，B 与 C 相似　　（B）A 与 C 相似，B 与 C 不相似

（C）A 与 C 不相似，B 与 C 相似　　（D）A 与 C 不相似，B 与 C 不相似

（7）设 A,B,C 为三个随机事件，且 A 与 C 相互独立，B 与 C 相互独立，则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充要条件是

（A）A 与 B 相互独立　　（B）A 与 B 互不相容

（C）AB 与 C 相互独立　　（D）AB 与 C 互不相容

（8）设 $X_1,X_2\cdots X_n(n\geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是

（A）$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布　　（B）$2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

（C）$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布　　（D）$n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})dx=$ ______。

（10）差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y_t=$______。

（11）设生产某产品的平均成本 $\overline{C}(Q)=1+e^{-Q}$，其中 Q 为产量，则边际成本为______。

（12）设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $df(x,y)=ye^y dx+x(1+y)e^y dy$，$f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$______。

(13) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $A\boldsymbol{\alpha}_1,A\boldsymbol{\alpha}_2,A\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为______。

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{x=-2\}=\frac{1}{2}$，$P\{x=1\}=a$，$P\{x=3\}=b$，若 $EX=0$，则 $DX=$______。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$。

(16)(本题满分 10 分)计算积分$\iint\limits_{D}\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)}dxdy$，其中$D$是第一象限中以曲线$y=\sqrt{x}$与$x$轴为边界的无界区域。

(17)(本题满分 10 分)求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$。

(18)(本题满分 10 分)已知方程$\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=k$在区间$(0,1)$内有实根，试确定常数$k$的取值范围。

（19）（本题满分 10 分）设 $a_0=1$，$a_1=0$，$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,\cdots)$，$S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数，

（I）证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1；

（II）证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0$（$x\in(-1,1)$），并求 $S(x)$ 的表达式。

（20）（本题满分 10 分）设三阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，

（I）证明 $r(A)=2$；

（II）若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

（21）（本题满分 10 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q。

（22）（本题满分 11 分）设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P\{X=0\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，

Y 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

（I）求 $P\{Y\le EY\}$；

（II）求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

（23）（本题满分 10 分）某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的。设 n 次测量结果为 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 相互独立且服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=\left|X_i-\mu\right|(i=1,2,\cdots n)$，利用 $Z_1,Z_2,\cdots Z_n$ 估计 σ

（I）求 Z_1 的概率密度；

（II）利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

（IIII）求 σ 的最大似然估计量；