

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为 ()

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ ，其中 n 为正整数，则 $f'(0) =$

- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$
- (B) $(-1)^n(n-1)!$
- (C) $(-1)^{n-1}n!$
- (D) $(-1)^nn!$

(3) 设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r dr = ()$

- (A) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2) dy$
- (B) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$
- (C) $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2) dx$
- (D) $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x^2 + y^2) dx$

(4) 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛， $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则 α 范围为 ()

- (A) $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$
- (B) $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$
- (C) $1 < \alpha \leq \frac{3}{2}$

(D) $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

(5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数, 则下列向量组线性相关的是 ()

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

(C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$

(D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

(6) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ =$ ()

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布, 则 $P\{X^2 + Y^2 \leq 1\}$ ()

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{\pi}{8}$

(D) $\frac{\pi}{4}$

(8) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(1, \sigma^2) (\sigma > 0)$ 的简单随机样本, 则统计量 $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$ 的分布

()

(A) $N(0,1)$

(B) $t(1)$

(C) $\chi^2(1)$

(D) $F(1,1)$

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}}$ _____。

(10) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ 2x-1, & x < 1 \end{cases}$, $y = f(f(x))$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=e}$ _____。

(11) 函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 则 $dz|_{(0,1)} =$ _____。

(12) 由曲线 $y = \frac{4}{x}$ 和直线 $y = x$ 及 $y = 4x$ 在第一象限中所围图形的面积为?

(13) 设 A 为 3 阶矩阵, $|A| = 3$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B , 则 $|BA^*| =$ _____。

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A, C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(ABC) =$ _____。

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D e^x xy dx dy$, 其中 D 是以曲线 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域。

(17) (本题满分 10 分) 某企业为生产甲、乙两种型号的产品, 投入的固定成本为 10000 (万元), 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x (件) 和 y (件), 且这两种产品的边际成本分别为 $20 + \frac{x}{2}$ (万元/件) 与 $6 + y$ (万元/件)。

- 1) 求生产甲乙两种产品的总成本函数 $C(x, y)$ (万元)
- 2) 当总产量为 50 件时, 甲乙两种的产量各为多少时可以使总成本最小? 求最小的成本。
- 3) 求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本, 并解释其经济意义。

(18) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2} \quad (-1 < x < 1)$

(19) (本题满分 10 分) 已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f''(x) + f(x) = 2e^x$

- 1) 求 $f(x)$ 的表达式
- 2) 求曲线 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$ 的拐点

(20) (本题满分 10 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I) 计算行列式 $|A|$;

(II) 当实数 a 为何值时, 方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 并求其通解.

(21) (本题满分 10 分) 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$, 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T (A^T A) x$ 的秩为 2

(I) 求实数 a 的值;

(II) 求正交变换 $x = Qy$ 将 f 化为标准形.

(22) (本题满分 10 分)

设二维离散型随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

(I) 求 $P\{X = 2Y\}$;

(II) 求 $\text{Cov}(X - Y, Y)$.

(23) (本题满分 10 分)

设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布, $V = \min(X, Y), U = \max(X, Y)$.

求 (1) 随机变量 V 的概率密度;

(2) $E(U + V)$.

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园!