



## 2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合 题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 
$$y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$$
 渐近线的条数为

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2

(2) 设函数 
$$f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2)\cdots(e^{nx} - n)$$
, 其中  $n$  为正整数, 则  $f'(0) =$ 

- (A)  $(-1)^{n-1}(n-1)!$  (B)  $(-1)^n(n-1)!$
- (D)  $(-1)^n n!$

(3) 如果函数 
$$f(x,y)$$
 在  $(0,0)$  处连续, 那么下列命题正确的是

(A) 若极限 
$$\lim_{\substack{x\to 0 \ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$$
 存在,则  $f(x,y)$  在 (0,0) 处可微

- (B) 若极限  $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$  存在, 则 f(x, y) 在 (0, 0) 处可微
- (C) 若 f(x, y) 在 (0, 0) 处可微,则极限  $\lim_{\substack{x\to 0 \ y \to 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$  存在

(D) 若 
$$f(x, y)$$
 在  $(0, 0)$  处可微,则 极限  $\lim_{\substack{x \to 0 \ y \to 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$  存在

(4) 设
$$I_K = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx (k = 1, 2, 3)$$
,则有( )

(5) 设 
$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_1 \end{pmatrix}$$
,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ C_3 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ C_4 \end{pmatrix}$ , 其中  $C_1, C_2, C_3, C_4$  为任意常数,则下列向

量组线性相关的为(





( )

(A) 
$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$$

$$\text{(A) } \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \qquad \text{(B)} \quad \alpha_1,\alpha_2,\alpha_4 \quad \text{(C) } \alpha_1,\alpha_3,\alpha_4 \qquad \text{(D) } \alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$$

(C) 
$$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$$

(D) 
$$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$$

(6) 设 A 为 3 阶矩阵,P 为 3 阶可逆矩阵,且 
$$p^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
. 若 P= ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ),

$$Q = (\alpha_1 + \alpha_2 \alpha_2 \alpha_3)$$
 ,  $\square Q^{-1}AQ = ($  )

$$\text{(A)} \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(B)} \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(C)} \ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(D)} \ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(B) 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc}
(C) & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$(D) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且分别服从参数为1与参数为4的指数分布,则  $P\{X < Y\} = ($ 

(A) 
$$\frac{1}{z}$$

(C) 
$$\frac{2}{3}$$

(D) 
$$\frac{4}{5}$$

(8)将长度为1m的木棒随机地截成两段,则两段长度的相关系数为

(B) 
$$\frac{1}{2}$$
 (C)

$$(C)$$
  $-\frac{1}{2}$ 

(D) 
$$-1$$

二、填空题: 9~14 小题,每小题 4分,共 24分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 若函数 f(x) 满足方程 f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0 及  $f''(x) + f(x) = 2e^x$ ,则 f(x) =\_\_\_\_

$$(10) \int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} \, \mathrm{d}x = \underline{\hspace{1cm}}$$

(11) 
$$grad(xy + \frac{z}{y})|_{(2,1,1)} = \underline{\hspace{1cm}}$$

(13) 设 $\alpha$ 为3维单位列向量,E为3阶单位矩阵,则矩阵 $E-\alpha\alpha^T$ 的秩为

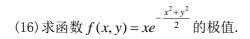
(14) 设 
$$A$$
,  $B$ ,  $C$  是随机事件,  $A$  与  $C$  互不相容,  $p(AB) = \frac{1}{2}$ ,  $P(C) = \frac{1}{3}$ ,  $p(AB|\overline{C}) = \underline{\hspace{1cm}}$ 





三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) 证明: 
$$x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \ge 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1)$$



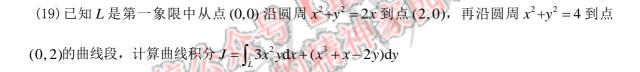
(17) 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$  的收敛域及和函数.





(18) 已知曲线 
$$L: \begin{cases} x = f(t), \\ y = \cos t \end{cases}$$
  $(0 \le t < \frac{\pi}{2})$ , 其中函数  $f(t)$  具有连续导数,且  $f(0) = 0$ ,  $f'(t) > 0$ 

 $(0 < t < \frac{\pi}{2})$ . 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1,求函数 f(t) 的表达式,并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.



- (I) 计算行列式|A|;
- (II) 当实数a为何值时,方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解,并求其通解.

## 罗 沪江网校·考研



(21)

已知 
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$$
, 二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x^T (A^T A) x$  的秩为 2

- (I) 求实数 a 的值;
- (II) 求正交变换 x = Qy 将 f 化为标准形.

(22)

设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

X	1	2
$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1 0	$\frac{1}{3}$	0
2 \frac{1}{12}	0	1 12

- (I) 求 $P{X=2Y}$ ;
- (  $\parallel$  ) 求Cov(X Y, Y).





(23)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布  $N(\mu,\sigma^2)$  与  $N(\mu,2\sigma^2)$ ,其中  $\sigma$  是未知参数 且  $\sigma>0$ . 设 Z=X-Y.

- (I) 求Z的概率密度 $f(z,\sigma^2)$ ;
- ( II ) 设  $z_1, z_2, \cdots, z_n$  为来自总体 Z 的简单随机样本,求  $\sigma^2$  的最大似然估计量  $\hat{\sigma}^2$
- (III) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 $\sigma^2$ 的无偏估计量

