

## 2010 年全国硕士研究生入学统一考试

### 数学一试题

一、选择题 (1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.)

(1) 极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = ( \quad )$

- (A) 1. (B)  $e$ . (C)  $e^{a-b}$ . (D)  $e^{b-a}$ .

(2) 设函数  $z = z(x, y)$ , 由方程  $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$  确定, 其中  $F$  为可微函数, 且  $F'_2 \neq 0$ , 则

$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = ( \quad )$

- (A)  $x$ . (B)  $z$ . (C)  $-x$ . (D)  $-z$ .

(3) 设  $m, n$  是正整数, 则反常积分  $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  的收敛性 ( )

- (A) 仅与  $m$  的取值有关. (B) 仅与  $n$  的取值有关.  
(C) 与  $m, n$  取值都有关. (D) 与  $m, n$  取值都无关.

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = ( \quad )$

- (A)  $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$ . (B)  $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$ .  
(C)  $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy$ . (D)  $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$ .

(5) 设  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times m$  矩阵,  $E$  为  $m$  阶单位矩阵, 若  $AB = E$ , 则 ( )

- (A) 秩  $r(A) = m$ , 秩  $r(B) = m$ . (B) 秩  $r(A) = m$ , 秩  $r(B) = n$ .  
(C) 秩  $r(A) = n$ , 秩  $r(B) = m$ . (D) 秩  $r(A) = n$ , 秩  $r(B) = n$ .

(6) 设  $A$  为 4 阶实对称矩阵, 且  $A^2 + A = O$ , 若  $A$  的秩为 3, 则  $A$  相似于 ( )

- (A)  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ . (B)  $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ .

$$(C) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(D) \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(7) \text{ 设随机变量 } X \text{ 的分布函数 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ 则 } P\{X=1\} = ( )$$

- (A) 0. (B)  $\frac{1}{2}$ . (C)  $\frac{1}{2} - e^{-1}$ . (D)  $1 - e^{-1}$ .

(8) 设  $f_1(x)$  为标准正态分布的概率密度,  $f_2(x)$  为  $[-1, 3]$  上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x) = \begin{cases} af_1(x), & x \leq 0 \\ bf_2(x), & x > 0 \end{cases}, (a > 0, b > 0) \text{ 为概率密度, 则 } a, b \text{ 应满足 } ( )$$

- (A)  $2a + 3b = 4$ . (B)  $3a + 2b = 4$ . (C)  $a + b = 1$ . (D)  $a + b = 2$ .

二、填空题(9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.)

$$(9) \text{ 设 } \begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = \int_0^t \ln(1+u^2) du, \end{cases} \text{ 求 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(10) \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(11) \text{ 已知曲线 } L \text{ 的方程为 } y = 1 - |x|, \{x \in [-1, 1]\}, \text{ 起点是 } (-1, 0), \text{ 终点是 } (1, 0), \text{ 则曲线积分 } \int_L xy dx + x^2 dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(12) \text{ 设 } \Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}, \text{ 则 } \Omega \text{ 的形心的竖坐标 } \bar{z} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(13) \text{ 设 } \alpha_1 = (1, 2, -1, 0)^T, \alpha_2 = (1, 1, 0, 2)^T, \alpha_3 = (2, 1, 1, a)^T, \text{ 若由 } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 生成的向量空间的维数是 2, 则 } a = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(14) \text{ 设随机变量 } X \text{ 的概率分布为 } P\{X=k\} = \frac{C}{k!}, k=0, 1, 2, \dots, \text{ 则 } E(X^2) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、解答题(15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求微分方程  $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$  的通解.

(16) (本题满分 10 分)

求函数  $f(x) = \int_1^x (x^2 - t)e^{-t^2} dt$  的单调区间与极值.

(17) (本题满分 10 分)

(I) 比较  $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$  与  $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$  ( $n=1, 2, \dots$ ) 的大小, 说明理由;

(II) 记  $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

(18) (本题满分 10 分)

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$  的收敛域及和函数.

(19) (本题满分 10 分)

设  $P$  为椭球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$  上的动点, 若  $S$  在点  $P$  处的切平面与  $xOy$  面垂直, 求点  $P$  的轨迹  $C$ , 并计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$ , 其中  $\Sigma$  是椭球面  $S$  位于曲线  $C$  上方的部分.

(20) (本题满分 11 分)

设  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 已知线性方程组  $Ax = b$  存在两个不同的解.

(I) 求  $\lambda, a$ ;

(II) 求方程组  $Ax = b$  的通解.

(21) (本题满分 11 分)

已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$  在正交变换  $x = Qy$  下的标准形为  $y_1^2 + y_2^2$ , 且  $Q$  的第三列为  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$ .

(I) 求矩阵  $A$ ;

(II) 证明  $A + E$  为正定矩阵, 其中  $E$  为 3 阶单位矩阵.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y) = Ae^{-2x^2 + 2xy - y^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty,$$

求常数  $A$  及条件概率密度  $f_{Y|X}(y|x)$ .

(23) (本题满分 11 分)

设总体  $X$  的概率分布为

$X$	1	2	3
$P$	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	$\theta^2$

其中参数  $\theta \in (0,1)$  未知, 以  $N_i$  表示来自总体  $X$  的简单随机样本 (样本容量为  $n$ ) 中等于  $i$  的

个数 ( $i=1,2,3$ ). 试求常数  $a_1, a_2, a_3$ , 使  $T = \sum_{i=1}^3 a_i N_i$  为  $\theta$  的无偏估计量, 并求  $T$  的方差.

微信公众号【最强考研】  
考研人的精神家园!

## 2010 年全国硕士研究生入学统一考试

### 数学一试题参考答案

#### 一、选择题

(1) 【答案】 (C).

【解析】 本题属于未定式求极限, 极限为  $1^\infty$  型, 故可以用 “ $e$  的抬起法” 求解.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \cdot \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)}},$$

其中又因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left[ 1 + \frac{x^2 - (x-a)(x+b)}{(x-a)(x+b)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x[x^2 - (x-a)(x+b)]}{(x-a)(x+b)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-b)x^2 + abx}{(x-a)(x+b)} \\ &= a - b \end{aligned}$$

故原式极限为  $e^{a-b}$ , 所以应该选择 (C).

(2) 【答案】 (B).

$$\text{【解析】 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{F'_1 \left( -\frac{y}{x^2} \right) + F'_2 \left( -\frac{z}{x^2} \right)}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{F'_1 \cdot \frac{y}{x} + F'_2 \cdot \frac{z}{x}}{F'_2} = \frac{yF'_1 + zF'_2}{xF'_2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{F'_1 \cdot \frac{1}{x}}{F'_2 \cdot \frac{1}{x}} = -\frac{F'_1}{F'_2},$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yF'_1 + zF'_2}{F'_2} - \frac{yF'_1}{F'_2} = \frac{F'_2 \cdot z}{F'_2} = z.$$

(3) 【答案】 (D).

【解析】  $x=0$  与  $x=1$  都是瑕点, 应分成

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx,$$

用比较判别法的极限形式, 对于  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ , 由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}} = 1$ .

显然, 当  $0 < \frac{1}{n} - \frac{2}{m} < 1$ , 则该反常积分收敛.

当  $\frac{1}{n} - \frac{2}{m} \leq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{x^{\frac{1}{n}-\frac{2}{m}}}}$  存在, 此时  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  实际上不是反常积分, 故收敛.

故不论  $m, n$  是什么正整数,  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  总收敛. 对于  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$ , 取  $0 < \delta < 1$ , 不论  $m, n$  是什么正整数,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[\ln^2(1-x)]^{\frac{1}{m}}}{\frac{1}{(1-x)^{\delta}}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln^2(1-x)^{\frac{1}{m}} (1-x)^{\delta} = 0,$$

所以  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}} dx$  收敛, 故选 (D).

(4) 【答案】 (D).

$$\text{【解析】} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \left( \sum_{j=1}^n \frac{n}{n^2+j^2} \right) = \left( \sum_{j=1}^n \frac{n}{n^2+j^2} \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{n}{n^2+j^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+(\frac{j}{n})^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n+i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1+(\frac{i}{n})} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^n \frac{1}{n^2+j^2} \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \right)$$

$$= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{n}{n^2+j^2} \right) \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n+i} \right)$$

$$= \left( \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \right) \left( \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy \right) = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$$

(5) 【答案】 (A).

【解析】 由于  $AB = E$ , 故  $r(AB) = r(E) = m$ . 又由于  $r(AB) \leq r(A), r(AB) \leq r(B)$ , 故

$$m \leq r(A), m \leq r(B) \quad (1)$$

由于  $A$  为  $m \times n$  矩阵,  $B$  为  $n \times m$  矩阵, 故

$$r(A) \leq m, r(B) \leq m \quad (2)$$

由①、②可得  $r(A) = m, r(B) = m$ , 故选 A.

(6) 【答案】 (D).

【解析】 设  $\lambda$  为  $A$  的特征值, 由于  $A^2 + A = O$ , 所以  $\lambda^2 + \lambda = 0$ , 即  $(\lambda + 1)\lambda = 0$ , 这样  $A$  的特征值只能为  $-1$  或  $0$ . 由于  $A$  为实对称矩阵, 故  $A$  可相似对角化, 即

$$A \sim \Lambda, r(A) = r(\Lambda) = 3, \text{ 因此, } \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ 即 } A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(7) 【答案】 (C).

【解析】 离散型随机变量的分布函数是跳跃的阶梯形分段函数, 连续型随机变量的分布函数是连续函数. 观察本题中  $F(x)$  的形式, 得到随机变量  $X$  既不是离散型随机变量, 也不是连续型随机变量, 所以求随机变量在一点处的概率, 只能利用分布函数的定义. 根据分布函数的定义, 函数在某一点的概率可以写成两个区间内概率的差, 即

$$P\{X = 1\} = P\{X \leq 1\} - P\{X < 1\} = F(1) - F(1-0) = 1 - e^{-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - e^{-1}, \text{ 故本题选}$$

(C).

(8) 【答案】 (A).

$$\text{【解析】 根据题意知, } f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < +\infty), f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

利用概率密度的性质:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ , 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 a f_1(x) dx + \int_0^{+\infty} b f_2(x) dx = \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx + b \int_0^3 \frac{1}{4} dx = \frac{a}{2} + \frac{3}{4} b = 1$$

所以整理得到  $2a + 3b = 4$ , 故本题应选 (A).

## 二、填空题

(9) 【答案】 0.



【解析】因为  $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln(1+t^2)}{-e^{-t}} = -\ln(1+t^2)e^t$ ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d(-\ln(1+t^2)e^t)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left[ -\frac{2t}{1+t^2} \cdot e^t - \ln(1+t^2)e^t \right] \cdot (-e^t), \text{ 所以 } \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} = 0.$$

(10) 【答案】  $-4\pi$ .

【解析】令  $\sqrt{x} = t$ ,  $x = t^2$ ,  $dx = 2tdt$ , 利用分部积分法,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^\pi t \cos t \cdot 2tdt = \int_0^\pi 2t^2 \cos t dt = 2 \int_0^\pi t^2 d \sin t \\ &= 2 \left[ t^2 \sin t \Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2t \sin t dt \right] = 4 \int_0^\pi t d \cos t \\ &= 4 \left[ t \cos t \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos t dt \right] = 4\pi \cos \pi - 4 \sin t \Big|_0^\pi = -4\pi. \end{aligned}$$

(11) 【答案】 0.

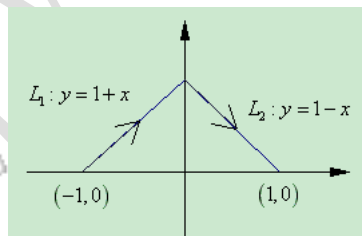
【解析】  $\int_L xydx + x^2dy = \int_{L_1} xydx + x^2dy + \int_{L_2} xydx + x^2dy$

$$= \int_{-1}^0 x(1+x)dx + x^2dx + \int_0^1 x(1-x)dx + x^2(-dx)$$

$$= \int_{-1}^0 (2x^2 + x)dx + \int_0^1 (x - 2x^2)dx$$

$$= \left( \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

$$= -\left( -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) = 0$$



(12) 【答案】  $\frac{2}{3}$ .

【解析】 
$$\frac{\iiint_{\Omega} z dx dy dz}{\iiint_{\Omega} dx dy dz} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 z dz}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_{r^2}^1 dz} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \cdot \left( \frac{z^2}{2} \Big|_{r^2}^1 \right)}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2) r dr}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \left( \frac{1}{2} - \frac{r^4}{2} \right) dr}{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left( \frac{r^2}{4} - \frac{r^6}{12} \right) dr} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \left( \frac{1}{2} - \frac{r^4}{2} \right) dr}{\int_0^{2\pi} d\theta \left( \frac{r^2}{4} - \frac{r^6}{12} \right) dr}$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi} \frac{1}{6} d\theta}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{6} \cdot 2\pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.$$



(13) 【答案】  $a=6$ .

【解析】 因为由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  生成的向量空间维数为 2, 所以  $r(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=2$ . 对  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  进行初等行变换:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以  $a=6$ .

(14) 【答案】 2.

【解析】 利用离散型随机变量概率分布的性质, 知

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C}{k!} = Ce, \text{ 整理得到 } C = e^{-1}, \text{ 即}$$

$$P\{X=k\} = \frac{e^{-1}}{k!} = \frac{1^k}{k!} e^{-1}.$$

故  $X$  服从参数为 1 的泊松分布, 则  $E(X)=1, D(X)=1$ , 根据方差的计算公式有

$$E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 1 + 1^2 = 2.$$

### 三、解答题

(15) 【解析】 对应齐次方程的特征方程为  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ , 解得特征根  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ , 所以对

应齐次方程的通解为  $y_c = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$ .

设原方程的一个特解为  $y^* = x(ax+b)e^x$ , 则

$$(y^*)' = (ax^2 + 2ax + bx + b)e^x,$$

$$(y^*)'' = (ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b)e^x,$$

代入原方程, 解得  $a = -1, b = -2$ , 故特解为  $y^* = x(-x-2)e^x$ .

故方程的通解为  $y = y_c + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x(x+2)e^x$ . 其中  $C_1, C_2$  为任意常数.

(16) 【解析】 因为  $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} te^{-t^2} dt$ ,

所以  $f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + 2x^3 e^{-x^4} - 2x^3 e^{-x^4} = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$ , 令  $f'(x) = 0$ , 则

$x = 0, x = \pm 1$ .

又  $f''(x) = 2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + 4x^2 e^{-x^4}$ , 则  $f''(0) = 2 \int_1^0 e^{-t^2} dt < 0$ , 所以

$$f(0) = \int_1^0 (0-t) e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} e^{-t^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-1})$$

是极大值.

而  $f''(\pm 1) = 4e^{-1} > 0$ , 所以  $f(\pm 1) = 0$  为极小值.

又因为当  $x \geq 1$  时,  $f'(x) > 0$ ;  $0 \leq x < 1$  时,  $f'(x) < 0$ ;  $-1 \leq x < 0$  时,  $f'(x) > 0$ ;

$x < -1$  时,  $f'(x) < 0$ , 所以  $f(x)$  的单调递减区间为  $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ ,  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ .

(17) 【解析】 (I) 当  $0 < x < 1$  时  $0 < \ln(1+x) < x$ , 故  $[\ln(1+t)]^n < t^n$ , 所以

$$|\ln t| [\ln(1+t)]^n < |\ln t| t^n,$$

则

$$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 |\ln t| t^n dt \quad (n=1, 2, \dots).$$

$$(II) \int_0^1 |\ln t| t^n dt = -\int_0^1 \ln t \cdot t^n dt = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln t d(t^{n+1}) = \frac{1}{(n+1)^2}, \text{ 故由}$$

$$0 < u_n < \int_0^1 |\ln t| t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2},$$

根据夹逼定理得  $0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 0$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

(18) 【解析】

$$(I) \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{(n+1)-1} \cdot x^{2(n+1)}}{2(n+1)-1} \cdot \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n}}{2n-1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1} \cdot \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n-1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2n-1)x^2}{2n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n-1}{2n+1} \right| \cdot x^2 = x^2,$$

所以, 当  $x^2 < 1$ , 即  $-1 < x < 1$  时, 原级数绝对收敛. 当  $x^2 > 1$  时, 原级数发散, 因此幂级数的收敛半径  $R=1$ .

当  $x = \pm 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ , 由莱布尼兹判别法知, 此级数收敛, 故原级

数的收敛域为  $[-1, 1]$ .

(II) 设  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot x^{2n} = x \cdot \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot x^{2n-1} \right)$ , 其中令

$$S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cdot x^{2n-1} \quad x \in (-1, 1),$$

所以有  $S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^{n-1} \quad x \in (-1, 1),$

从而有  $S_1'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2} \quad x \in (-1, 1),$

故  $S_1(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + S_1(0) = \arctan x, \quad x \in (-1, 1).$

$S_1(x)$  在  $x = -1, 1$  上是连续的, 所以  $S(x)$  在收敛域  $[-1, 1]$  上是连续的. 所以

$$S(x) = x \cdot \arctan x, \quad x \in [-1, 1].$$

(19) 【解析】 (I) 令  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - yz - 1$ , 故动点  $P(x, y, z)$  的切平面的法向量为  $(2x, 2y - z, 2z - y)$ , 由切平面垂直  $xOy$ , 故所求曲线  $C$  的方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1 \\ 2z - y = 0 \end{cases}.$$

(II) 由  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1 \\ 2z - y = 0 \end{cases}$  消去  $z$ , 可得曲线  $C$  在  $xOy$  平面上的投影曲线所围

成的  $xOy$  上的区域  $D: \{(x, y) | x^2 + \frac{3}{4}y^2 \leq 1\}$ , 由  $(x^2 + y^2 + z^2 - yz)'_x = (1)'_x$ , 由

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy = \frac{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}}{|y - 2z|} dxdy,$$

故

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{(x + \sqrt{3})|y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS = \iint_D (x + \sqrt{3}) dxdy = \iint_D x dxdy + \iint_D \sqrt{3} dxdy \\ &= \iint_D \sqrt{3} dxdy = \sqrt{3}\pi \cdot 1 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\pi. \end{aligned}$$

(20) 【解析】因为方程组有两个不同的解, 所以可以判断方程组增广矩阵的秩小于 3, 进而可以通过秩的关系求解方程组中未知参数, 有以下两种方法.

方法 1: (I) 已知  $Ax = b$  有 2 个不同的解, 故  $r(A) = r(\bar{A}) < 3$ , 对增广矩阵进行初等行

变换, 得

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & a \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & a-\lambda \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & a-\lambda+1 \end{array} \right)\end{aligned}$$

当  $\lambda=1$  时,  $\bar{A} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ , 此时,  $r(A) \neq r(\bar{A})$ , 故  $Ax=b$  无解 (舍去).

当  $\lambda=-1$  时,  $\bar{A} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 \end{array} \right)$ , 由于  $r(A)=r(\bar{A})<3$ , 所以  $a=-2$ , 故  $\lambda=-1$ ,  $a=-2$ .

方法 2: 已知  $Ax=b$  有 2 个不同的解, 故  $r(A)=r(\bar{A})<3$ , 因此  $|A|=0$ , 即

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0,$$

知  $\lambda=1$  或  $-1$ .

当  $\lambda=1$  时,  $r(A)=1 \neq r(\bar{A})=2$ , 此时,  $Ax=b$  无解, 因此  $\lambda=-1$ . 由  $r(A)=r(\bar{A})$ , 得  $a=-2$ .

(II) 对增广矩阵做初等行变换

$$\bar{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

可知原方程组等价于  $\begin{cases} x_1 - x_3 = \frac{3}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ , 写成向量的形式, 即  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

因此  $Ax=b$  的通解为  $x=k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ , 其中  $k$  为任意常数.

(21) 【解析】 (I) 由于二次型在正交变换  $x=Qy$  下的标准形为  $y_1^2+y_2^2$ , 所以  $A$  的特征值为  $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=0$ .

由于  $Q$  的第 3 列为  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T$ , 所以  $A$  对应于  $\lambda_3=0$  的特征向量为  $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^T$ ,

记为  $\alpha_3$ . 由于  $A$  是实对称矩阵, 所以对应于不同特征值的特征向量是相互正交的, 设属于

$\lambda_1=\lambda_2=1$  的特征向量为  $\alpha=(x_1, x_2, x_3)^T$ , 则  $\alpha^T \alpha_3=0$ , 即  $\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_3=0$ . 求得该方

程组的基础解系为  $\alpha_1=(0, 1, 0)^T, \alpha_2=(-1, 0, 1)^T$ , 因此  $\alpha_1, \alpha_2$  为属于特征值  $\lambda=1$  的两个线性无关的特征向量.

由于  $\alpha_1, \alpha_2$  是相互正交的, 所以只需单位化:

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=(0, 1, 0)^T, \beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)^T.$$

取  $Q=(\beta_1, \beta_2, \alpha_3)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ , 则  $Q^T A Q = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ , 且  $Q^{-1}=Q^T$ ,

$$\text{故 } A=Q\Lambda Q^T=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(II)  $A+E$  也是实对称矩阵,  $A$  的特征值为  $1, 1, 0$ , 所以  $A+E$  的特征值为  $2, 2, 1$ , 由于  $A+E$  的特征值全大于零, 故  $A+E$  是正定矩阵.

(22) 【解析】当给出二维正态随机变量的的概率密度  $f(x, y)$  后, 要求条件概率密度

$f_{Y|X}(y|x)$ , 可以根据条件概率公式  $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$  来进行计算. 本题中还有待定参数,  $A$  要根据概率密度的性质求解, 具体方法如下.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+2xy-y^2} dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2-x^2} dy = Ae^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x)^2} dy \\ &= A\sqrt{\pi}e^{-x^2}, -\infty < x < +\infty. \end{aligned}$$

根据概率密度性质有

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = A\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A\pi, \text{ 即 } A = \pi^{-1},$$

$$\text{故 } f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, -\infty < x < +\infty.$$

当  $-\infty < x < +\infty$  时, 有条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{Ae^{-2x^2+2xy-y^2}}{A\sqrt{\pi}e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2xy-y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(y-x)^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty.$$

(23) 【解析】  $N_1 \sim B(n, 1-\theta), N_2 \sim B(n, \theta-\theta^2), N_3 \sim B(n, \theta^2)$

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(\sum_{i=1}^3 a_i N_i\right) = a_1 E(N_1) + a_2 E(N_2) + a_3 E(N_3) \\ &= a_1 n(1-\theta) + a_2 n(\theta-\theta^2) + a_3 n\theta^2 = na_1 + n(a_2 - a_1)\theta + n(a_3 - a_2)\theta^2. \end{aligned}$$

因为  $T$  是  $\theta$  的无偏估计量, 所以  $E(T) = \theta$ , 即得 
$$\begin{cases} na_1 = 0 \\ n(a_2 - a_1) = 1 \\ n(a_3 - a_2) = 0 \end{cases}$$
 整理得到

$a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{n}, a_3 = \frac{1}{n}$ . 所以统计量

$$T = 0 \times N_1 + \frac{1}{n} \times N_2 + \frac{1}{n} \times N_3 = \frac{1}{n} \times (N_2 + N_3) = \frac{1}{n} \times (n - N_1).$$

注意到  $N_1 \sim B(n, 1-\theta)$ , 故

$$D(T) = D\left[\frac{1}{n} \times (n - N_1)\right] = \frac{1}{n^2} \times D(N_1) = \frac{1}{n} \theta(1-\theta).$$