

2013 年全国硕士研究生入学统一考试 数学一试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$ ，其中 c, k 为常数，且 $c \neq 0$ ，则 ()

(A) $k=2, c=-\frac{1}{2}$

(B) $k=2, c=\frac{1}{2}$

(C) $k=3, c=-\frac{1}{3}$

(D) $k=3, c=\frac{1}{3}$

(2) 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为 ()

(A) $x - y + z = -2$

(B) $x + y + z = 0$

(C) $x - 2y + z = -3$

(D) $x - y - z = 0$

(3) 设 $f(x) = \left\lfloor x - \frac{1}{2} \right\rfloor$, $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n=1, 2, \dots)$, 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \sin n\pi x$, 则 $S(-\frac{9}{4}) = ()$

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $-\frac{1}{4}$

(D) $-\frac{3}{4}$

(4) 设 $l_1: x^2 + y^2 = 1, l_2: x^2 + y^2 = 2, l_3: x^2 + 2y^2 = 2, l_4: 2x^2 + y^2 = 2$ 为四条逆时针的平面曲线，记

$I_i = \oint_{l_i} (y + \frac{y^3}{6}) dx + (2x - \frac{x^3}{3}) dy (i=1, 2, 3, 4)$, 则 $\max \{I_1, I_2, I_3, I_4\} = ()$

(A) I_1

(B) I_2

(C) I_3

(D) I_4

(5) 设矩阵 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB=C$, 且 B 可逆, 则

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为

(A) $a=0, b=2$

(B) $a=0, b$ 为任意常数

(C) $a=2, b=0$

(D) $a=2, b$ 为任意常数

(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1)$, $X_2 \sim N(0, 2^2)$, $X_3 \sim N(5, 3^2)$,

$P_j = P\{-2 \leq X_j \leq 2\} (j=1, 2, 3)$, 则 ()

(A) $P_1 > P_2 > P_3$

(B) $P_2 > P_1 > P_3$

(C) $P_3 > P_1 > P_2$

(D) $P_1 > P_3 > P_2$

(8) 设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1, n)$, 给定 $a (0 < a < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = a$, 则 $P\{Y > c^2\} = ()$

(A) α

(B) $1-\alpha$

(C) 2α

(D) $1-2\alpha$

二、填空题：9—14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 设函数 $f(x)$ 由方程 $y - x = e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(\frac{1}{n}) - 1) =$ _____.

(10) 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程的通解为 $y =$ _____.

(11) 设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}$ (t 为参数)，则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} =$ _____.

(12) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx =$ _____.

(13) 设 $A = (a_{ij})$ 是三阶非零矩阵， $|A|$ 为 A 的行列式， A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij} + A_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$ ，则 $|A| =$ _____.

(14) 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布， a 为常数且大于零，则 $P\{Y \leq a+1 | Y > a\} =$ _____.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$ ，其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$

(16) (本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件： $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2)$ ， $S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数，

(I) 证明： $S''(x) - S(x) = 0$,

(II) 求 $S(x)$ 的表达式.

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = (y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值.

(18) (本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有 2 阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明:

- (I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$
- (II) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$

(19) (本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 1)$ 两点, 将 L 绕 Z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面 $z = 0, z = 2$ 所围成的立体为 Ω ,

- (I) 求曲面 Σ 的方程
- (II) 求 Ω 的形心坐标.

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$, 并求所有矩阵 C 。

(21) (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ 。

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2aa^T + bb^T$;

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$ 。

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$, 令随机变量 $Y = \begin{cases} 2 & x \leq 1 \\ x & 1 < x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$

(I) 求 Y 的分布函数

(II) 求概率 $P\{X \leq Y\}$

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零, X_1, X_2, \dots, X_N 为来自总体

X 的简单随机样本.

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.