2017 全国研究生入学考试考研数学三解析

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\le 0,\end{cases}$ 在 $x=0$，处连续，则（　）

（A）$ab=\frac{1}{2}$　　（B）$ab=-\frac{1}{2}$

（C）$ab=0$　　（D）$ab=2$

【答案】（A）

【解析】由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续可得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x}{ax}=\frac{1}{2a}，\quad f(0)=b\Rightarrow ab=\frac{1}{2}$$

（2）二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是（　）

（A）$(0,0)$　　（B）$(0,3)$　　（C）$(3,0)$　　（D）$(1,1)$

【答案】

【解析】$z'_x=y(3-x-y)-xy=y(3-2x-y)$

$$z'_y=x(3-x-y)-xy=x(3-x-2y)$$

$$z''_{xx}=-2y，\quad z''_{xy}=3-2x-2y，\quad z''_{yy}=-2x$$

验证可得（A）、（B）、（C）、（D）四个选项均满足 $\begin{cases}z'_x=0\\ z'_y=0\end{cases}$

其中（D）选项对应

$A=z''_{xx}(1,1)=-2$，$B=z''_{xy}(1,1)=-1$，$C=z''_{yy}(1,1)=-2$

满足 $AC-B^2=3>0$，所以该点为极值点.。

（3）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则（　）

（A）$f(1)>f(-1)$　　（B）$f(1)<f(-1)$　　（C）$|f(1)|>|f(-1)|$　　（D）$|f(1)|<|f(-1)|$

【答案】（C）

【解析】令 $F(x)=f^2(x)$，则有 $F'(x)=2f(x)f'(x)$，故 $F(x)$ 单调递增，则 $F(1)=F(-1)$，即 $[f(1)]^2>[f(-1)]^2$，即 $\left|f(1)\right|>\left|f(-1)\right|$，故选 C。

（4）设级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$ 收敛，则 $k=$（　）

（A）1　　（B）2　　（C）-1　　（D）-2

【答案】（C）

【解析】由 $\sin\dfrac{1}{n}-k\ln(1-\dfrac{1}{n})=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{n^3}+o(\dfrac{1}{n^3})+k\dfrac{1}{n}+\dfrac{k}{2n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})$

$$=(1+k)\frac{1}{n}+\frac{k}{2n^2}-\frac{1}{6n^3}+o(\frac{1}{n^2}),$$

又 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln(1-\dfrac{1}{n})]$ 收敛，故有 $k+1=0$，即 $k=-1$，故选 C。

（5）设 α 是 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则

（A）$E-\alpha\alpha^T$ 不可逆　　（B）$E+\alpha\alpha^T$ 不可逆

（C）$E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆　　（D）$E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

【解析】选项 A：由 $(E-\alpha\alpha^T)\alpha=\alpha-\alpha=0$ 可知，$(E-\alpha\alpha^T)X=0$ 有非零解，故 $\left|E-\alpha\alpha^T\right|=0$，即 $E-\alpha\alpha^T$ 不可逆。选项 B：由 $r(\alpha\alpha^T)=1$ 知，$\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $\underbrace{0,0,\cdots0}_{(n-1)个},1$，

故 $E+\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $\underbrace{1,1,\cdots1}_{(n-1)个},2$，因此 $\left|E+\alpha\alpha^T\right|=2\neq0$，可逆。选项 C：同理可得 $E+2\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $\underbrace{1,1,\cdots1}_{(n-1)个},3$，故 $\left|E+2\alpha\alpha^T\right|=3\neq0$，可逆。选项 D：同理可得 $E-2\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $\underbrace{1,1,\cdots1}_{(n-1)个},-1$，

故 $\left|E-2\alpha\alpha^T\right|=-1\neq0$，可逆。

（6）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则

（A）A 与 C 相似，B 与 C 相似　　（B）A 与 C 相似，B 与 C 不相似

（C）A 与 C 不相似，B 与 C 相似　　（D）A 与 C 不相似，B 与 C 不相似

【答案】(B)

【解析】由 $(\lambda E-A)=0$ 可知 A 的特征值为 $2,2,1$。

$\because 3-r(2E-A)=1$。$\therefore$ A 可相似对角化，且 $A\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

由 $|\lambda E-B|=0$ 可知 B 的特征值为 $2,2,1$。

$\because 3-r(2E-B)=2$。$\therefore B$ 不可相似对角化，显然 C 可相似对角化，

$\therefore A\sim C$。且 B 不相似于 C。

(7) 设 A,B,C 为三个随机事件，且 A 与 C 相互独立，B 与 C 相互独立，则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充要条件是

(A) A 与 B 相互独立 (B) A 与 B 互不相容

(C) AB 与 C 相互独立 (D) AB 与 C 互不相容

【答案】(C)

【解析】由 $A\cup B$ 与 C，独立得

$$P((A+B)C)=P(A+B)P(C)$$
$$P(AC+BC)=(P(A)+P(B)-P(AB))P(C)$$
$$P(AC)+P(BC)-P(ABC)=(P(A)+P(B)-P(AB))P(C),$$

又由 A 与 C，B 与 C 独立得 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$。

由此验证 (A)(B)(C)(D) 四项，

又 (C) 选项可得 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$。

(8) 设 $X_1,X_2\cdots X_n(n\geq 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是

(A) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布 (B) $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布 (D) $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布

【答案】(B)

【解析】(A) $X_i-\mu\sim N(0,1)$ 故 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$；

（B）$X_n - X_1 \sim N(0,2) \Rightarrow \dfrac{X_n - X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_n - x_1}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

即 $\dfrac{(x_n - x_1)^2}{2} \sim \chi^2(1)$。

（C）由 $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2, (n-1)S^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$。

（D）$(\bar{X} - \mu) \sim N\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$，则 $\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \sim N(0,1)$，所以 $n(\bar{X} - \mu)^2 \sim \chi^2(1)$。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2})dx =$ ______。

【答案】 $\dfrac{\pi^3}{2}$。

【解析】 由对称区间上积分的性质可知，

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x + \sqrt{\pi^2 - x^2})dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\pi^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi^3}{2}。$$

（10）差分方程 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 的通解为 $y_t =$ ______。

【答案】 $y_t = C2^t + \dfrac{1}{2}t \cdot 2^t, C \in R$。

【解析】 由 $y_{t+1} - 2y_t = 2^t$ 可得齐次特征方程为 $r - 2 = 0$，得 $r = 2$，故其齐次方程的通解为 $y = C \cdot 2^t$，设 $y^* = at2^t$，代入得 $a = \dfrac{1}{2}$，故通解为 $y_t = C2^t + \dfrac{1}{2}t \cdot 2^t, C \in R$。

（11）设生产某产品的平均成本 $\overline{C}(Q) = 1 + e^{-Q}$，其中 Q 为产量，则边际成本为______。

【答案】 $C'(Q) = 1 + e^{-Q}(1 - Q)$。

【解析】 $\dfrac{C(Q)}{Q} = 1 + e^{-Q}$ 得 $C(Q) = Q(1 + e^{-Q})$，

则边际成本为：$C'(Q)=1+e^{-Q}(1-Q)$。

（12）设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $df(x,y)=ye^{y}dx+x(1+y)e^{y}dy$，$f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$______。

【答案】 xye^{y}。

【解析】 由题可知，$f_x'=ye^{y}$，$f_y'=x(1+y)e^{y}$，$f(x,y)=\int ye^{y}dx=xye^{y}+c(y)$，$f_y'=xe^{y}+xye^{y}+c'(y)=xe^{y}+xye^{y}$，即 $c'(y)=0$，即 $c(y)=c$，$\because f(0,0)=0$，故 $c=0$，即 $f(x,y)=xye^{y}$。

(13) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为______。

【答案】 2

【解析】

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，可知矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，故 $r(\boldsymbol{A}\alpha_1,\boldsymbol{A}\alpha_2,\boldsymbol{A}\alpha_3)=r(\boldsymbol{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3))=r(\boldsymbol{A})$，不难计算的 $r(\boldsymbol{A})=2$，故 $r(\boldsymbol{A}\alpha_1,\boldsymbol{A}\alpha_2,\boldsymbol{A}\alpha_3)=2$。

(14) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{x=-2\}=\frac{1}{2}$，$P\{x=1\}=a$，$P\{x=3\}=b$，若 $EX=0$，则 $DX=$______。

【答案】 $\frac{9}{2}$

【解析】

由分布律的归一性可知 $\frac{1}{2}+a+b=1$，又由于 $EX=0$，可知 $-2\times\frac{1}{2}+1+a+3b=0$，解得 $a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{4}$，从而 $EX^2=(-2)^2+\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{2},DX=EX^2-(\mathrm{EX})^2=\frac{9}{2}$。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^{t}dt}{\sqrt{x^3}}$。

【解析】 先对变上限积分 $\int_0^x\sqrt{x-t}e^{t}dt$ 作变量代换 $u=x-t$，得

$$\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt = \int_x^0 \sqrt{u}e^{x-u}(-du) = e^x\int_0^x \sqrt{u}e^{-u}du$$

则由洛必达法则可知：

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\int_0^x \sqrt{u}e^{-u}du+\sqrt{x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{u}e^{-u}du}{\sqrt{x}e^{-x}}+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}e^{-x}}{-\sqrt{x}e^{-x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}}+\frac{2}{3}$$

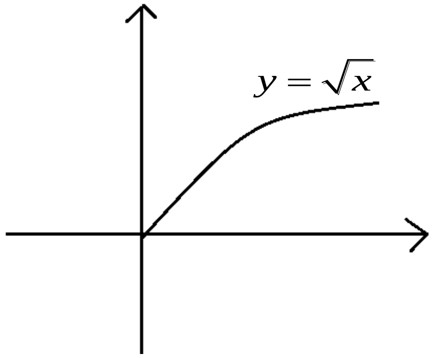
$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+}\frac{xe^{-x}}{-xe^{-x}+\frac{1}{2}e^{-x}}+\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}$$

(16)（本题满分 10 分）计算积分 $\iint\limits_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)}dxdy$，其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域。

【解析】

积分区域如图所示，选用直接坐标计算该积分，先对 y 积分，后对 x 积分得



$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y^3dy}{(1+x^2+y^4)^2}\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{dy^4}{(1+x^2+y^4)^2}\\
&=-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2+y^4)^2}\Big|_0^{\sqrt{x}}dx\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+2x^2})dx\\
&=\frac{1}{4}(\arctan x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}x)\Big|_0^{+\infty}\\
&=\frac{\pi}{8}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})
\end{aligned}$$

(17)（本题满分 10 分）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$。

【解析】由定积分的定义式可知

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)dx$，再由分部积分法可知：

$$\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)d\left(x^2-1\right)=\frac{x^2-1}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2-1}{2}d\ln(1+x)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)dx=-\frac{1}{4}(x-1)^2\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

(18)（本题满分 10 分）已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根，试确定常数 k 的取值范围。

【解析】

令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$，

$$\begin{aligned}
f'(x)&=-\frac{1}{\ln^2(1+x)}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x^2}\\
&=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}
\end{aligned}$$

令 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$，可得

$$g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$$

$$g''(x)=2\frac{\ln(1+x)-x}{1+x}<0, x\in(0,1)$$

故 $g'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，从而 $x\in(0,1)$ 时 $g'(x)<g'(0)=0$

故 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，从而 $x\in(0,1)$ 时 $g(x)<g(0)=0$

因此有 $f'(x)<$ ，可知 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，从而 $f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$ ，

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$,则要使得 $f(x)=k$ 在 $(0,1)$ 内有实根,必有 $\frac{1}{\ln 2}-1<k<\frac{1}{2}$ 。

（19）（本题满分 10 分）设 $a_0=1$，$a_1=0$，$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,\cdots)$，$S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数，

（I）证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于1；

（II）证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0$（$x\in(-1,1)$），并求 $S(x)$ 的表达式。

【解析】（I）由 $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$，两边同时减去 a_n 可知

$$a_{n+1}-a_n=\frac{-1}{n+1}(a_n-a_{n-1})$$

进而有 $a_{n+1}-a_n=\frac{-1}{n+1}\cdot\frac{-1}{n}(a_{n-1}-a_{n-2})=\cdots=\frac{(-1)^n}{(n+1)!}(a_1-a_0)=\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$

从而有 $a_n=a_{n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}=a_{n-2}+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}=\cdots=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}}\le\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，故收敛半径 $R\ge 1$；

（II）由逐项求导定理可知 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

故 $(1-x)S'(x)=(1-x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^n$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)a_{n+1}-na_n\right]x^n+a_1x$$

$$xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$$

则 $(1-x)S'(x)-xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)a_{n+1}-na_n-a_{n-1}\right]x^n+a_1x$

由 $a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$ 可知 $(n+1)a_{n+1}-na_n-a_{n-1}=0$，

又由于 $a_1=0$，故 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0$

解此微分方程可得 $S(x)=\dfrac{ce^{-x}}{1-x}$

又由于 $S(0)=a_0=1$，可知 $c=1$，从而 $S(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$。

（20）（本题满分 10 分）设三阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有3个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，

（I）证明 $r(A)=2$；

（II）若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解。

【解析】 (I) 由 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$ 可知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，从而 $r(A)\le 2$，可知0为 A 的一个特征值，设 A 的另外两个特征值为 λ_1,λ_2，由于 A 有三个互不相同特征值，可知 A 可以相似对角化，从而 A 相似于对角矩阵 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，由于 $\lambda_1,\lambda_2\neq 0$，可知 $r(\Lambda)=2$，从而 $r(A)=r(\Lambda)=2$。

(II) 先求 $Ax=0$ 的通解：由于 $r(A)=2$，可知 $Ax=0$ 的基础解系中仅含有一个向量，从而 $Ax=0$ 的任何一个非零解均为 $Ax=0$ 的基础解系。由于 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，可知 $A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$，因此 $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ 即为 $Ax=0$ 的基础解系， $Ax=0$ 的通解为 $k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},k\in R$。再求 $Ax=\beta$ 的特解：显然

$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$，因此$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$即为$Ax=\beta$的特解，综上所述，$Ax=\beta$的通解为$k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},k\in R$

（21）（本题满分 10 分）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$在正交变换$x=Qy$下标准形为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求$a$的值及一个正交矩阵$Q$。

【解析】二次型的矩阵为$A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$，由于二次型在正交变换下的标准形为$\lambda_1{y_1}^2+\lambda_2{y_2}^2$，

可知0为A的一个特征值，从而$|A|=-3a+6=0$，可得$a=2$。要计算正交矩阵Q，先求A的特征值，则由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-6)(\lambda+3)=0$，得$A$的特征值为$0,6,-3$。

先求0的特征向量：$Ax=0$的基础解系为$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，单位化得$\beta_1=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$，

再求6的特征向量：$(A-6E)x=0$的基础解系为$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，单位化得$\beta_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，

再求-3的特征向量：$(A+3E)x=0$的基础解系为$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，单位化得$\beta_3=\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，故

$$Q=(\beta_2,\beta_3,\beta_1)=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt6}{6}\\0&-\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt6}{3}\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt6}{6}\end{pmatrix}$$

（22）（本题满分 11 分）设随机变量X,Y相互独立，且X的概率分布为$P\{X=0\}=P\{X=2\}=\frac12$，

Y 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

（I）求 $P\{Y\le EY\}$；

（II）求 $Z=X+Y$ 的概率密度。

【解析】（Ⅰ）由数字特征的计算公式可知：$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)dy=\int_0^1 2y^2dy=\dfrac{2}{3}$。

则 $P\{Y\le EY\}=P\left\{Y\le\dfrac{2}{3}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{2}{3}}f(y)dy=\int_0^{\frac{2}{3}}2ydy=\dfrac{4}{9}$。

（Ⅱ）先求 Z 的分布函数，由分布函数的定义可知：$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}$。

由于 X 为离散型随机变量，则由全概率公式可知

$$\begin{aligned}F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}&=P\{X=0\}P\{X+Y\le z\mid X=0\}+P\{X=1\}P\{X+Y\le z\mid X=1\}\\&=\frac{1}{2}P\{Y\le z\}+\frac{1}{2}P\{Y\le z-1\}\\&=\frac{1}{2}F_Y(z)+\frac{1}{2}F_Y(z-1)\end{aligned}$$

（其中 $F_Y(z)$ 为 Y 的分布函数：$F_Y(z)=P\{Y\le z\}$）

（23）（本题满分 10 分）某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的。设 n 次测量结果为 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 相互独立且服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots n)$，利用 $Z_1,Z_2,\cdots Z_n$ 估计 σ

（I）求 Z_1 的概率密度；

（II）利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

（IIII）求 σ 的最大似然估计量；

【解析】（I）因为 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $Y_i=X_i-\mu\sim N(0,\sigma^2)$，对应的概率密度为

$f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$，设 Z_i 的分布函数为 $F(z)$，对应的概率密度为 $f(z)$；

当 $z<0$ 时，$F(z)=0$；

当 $z\ge 0$ 时，$F(z)=P\{Z_i\le z\}=P\{|Y_i|\le z\}=P\{-z\le Y_i\le z\}=\int_{-z}^{z}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy$；

则 Z_i 的概率密度为 $f(z)=F'(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$；

（II）因为 $EZ_i=\int_0^{+\infty} z\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz=\dfrac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$，所以 $\sigma=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}EZ_i$，从而 σ 的矩估计量为

$\sigma=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\overline{Z}$；

（II）由题知对应的似然函数为 $L(z_1,z_2,...,z_n,\sigma)=\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\sigma}e^{-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}}$，取对数得：

$\ln L=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\ln\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}-\ln\sigma-\dfrac{z_i^2}{2\sigma^2}\right)$，所以 $\dfrac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(-\dfrac{1}{\sigma}+\dfrac{z_i^2}{\sigma^3}\right)$，令 $\dfrac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=0$，

得 $\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2}$，所以 σ 的最大似然估计量为 $\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i^2}$。