2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题(1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．)

(1) 已知当 $x\to 0$ 时， $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则(　　)

(A) $k=1,c=4$.　　(B) $k=1,c=-4$.

(C) $k=3,c=4$.　　(D) $k=3,c=-4$.

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$(　　)

(A) $-2f'(0)$.　　(B) $-f'(0)$.

(C) $f'(0)$.　　(D) 0.

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是(　　)

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.　　(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛.　　(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

(4) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx$， $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$， $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$，则 I,J,K 的大小关系是(　　)

(A) $I<J<K$.　　(B) $I<K<J$.

(C) $J<I<K$.　　(D) $K<J<I$.

(5) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$， $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$(　　)

(A) P_1P_2.　　(B) $P_1^{-1}P_2$.　　(C) P_2P_1.　　(D) $P_2P_1^{-1}$.

(6) 设 A 为 4×3 矩阵，η_1,η_2,η_3 是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的 3 个线性无关的解，k_1,k_2 为任意常数，则 $Ax=\beta$ 的通解为(　　)

(A) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$.　　(B) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$.

(C) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$.　　(D) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$.

(7) 设 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是(　　)

(A) $f_1(x)f_2(x)$.　　(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.　　(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\ge 2)$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则对应的统计量 $T_1=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，　$T_2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\dfrac{1}{n}X_n$ (　　)

(A) $E(T_1)>E(T_2)$，$D(T_1)>D(T_2)$.　　(B) $E(T_1)>E(T_2)$，$D(T_1)<D(T_2)$.

(C) $E(T_1)<E(T_2)$，$D(T_1)>D(T_2)$.　　(D) $E(T_1)<E(T_2)$，$D(T_1)<D(T_2)$.

二、填空题(9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9) 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$ ______.

(10) 设函数 $z=\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $dz\big|_{(1,1)}=$ ______.

(11) 曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}\right)=e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

(12) 曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为________ .

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的秩为 1，A 的各行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为________.

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$ ______ .

三、解答题(15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

(16)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数， $f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f\left[x+y,f(x,y)\right]$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

(17)（本题满分 10 分）

求 $\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

(18)（本题满分 10 分）

证明 $4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有 2 实根.

(19)（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续导数，$f(0)=$ ，且 $\displaystyle\iint_{D_t} f'(x+y)dxdy=\iint_{D_t} f(t)dxdy$ ，$D_t=\{(x,y)|0\le y\le t-x,0\le x\le t\}(0<t\le 1)$，求 $f(x)$ 的表达式.

(20)（本题满分 11 分）

设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$ ，不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$ ，$\beta_2=(1,2,3)^T$ ，$\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值；

(II) 将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(21)（本题满分 11 分）

A 为三阶实对称矩阵，A 的秩为 2，即 $r(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(I) 求 A 的特征值与特征向量；

(II) 求矩阵 A .

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$1/3$	$2/3$

Y	-1	0	1
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

且 $P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$.

(Ⅰ)求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布;

(II)求 $Z=XY$ 的概率分布;

(III)求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布,其中 G 是由 $x-y=0, x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的三角形区域.

(I)求边缘概率密度 $f_X(x)$;

(II)求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案

一、选择题(1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．)

(1)【答案】(C).

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x-\sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x}{cx^k}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(3-\cos 2x-2\cos^2 x\right)}{cx^k}=\lim_{x\to0}\frac{3-\cos 2x-2\cos^2 x}{cx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3-\left(2\cos^2 x-1\right)-2\cos^2 x}{cx^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{4-4\cos^2 x}{cx^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2 x}{cx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4}{cx^{k-3}}=1.$$

所以 $c=4,k=3$，故答案选(C).

(2)【答案】(B).

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2f(x)-2f\left(x^3\right)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2f(x)-x^2f(0)-2f\left(x^3\right)+2f(0)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\frac{f\left(x^3\right)-f(0)}{x^3}\right]$$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0).$$

故答案选(B).

(3)【答案】(A).

【解析】方法 1：数项级数的性质：收敛级数任意添加括号后仍收敛，故(A)正确.

方法 2：排除法，举反例.

选项(B)取 $u_n=(-1)^n$，这时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}0$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散，故选项(B)错误；

选项(C)取 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$，这时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故选项(C)错误；

选项(D)取$u_n=1$，这时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}0$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$发散，故选项(D)错误．故正确答案为(A)．

(4)【答案】(B)．

【解析】因为$0<x<\dfrac{\pi}{4}$时，　$0<\sin x<\cos x<1<\cot x$，

又因$\ln x$是单调递增的函数，所以$\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$．

故正确答案为(B)．

(5)【答案】 (D)．

【解析】由于将A的第 2 列加到第 1 列得矩阵B，故

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B,$$

即$AP_1=B$，　$A=BP_1^{-1}$．

由于交换B的第 2 行和第 3 行得单位矩阵，故

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}B=E,$$

即$P_2B=E$，故$B=P_2^{-1}=P_2$．因此，　$A=P_2P_1^{-1}$，故选(D)．

(6)【答案】(C)．

【解析】由于η_1,η_2,η_3是$Ax=\beta$的 3 个线性无关的解，所以$\eta_3-\eta_1,\eta_2-\eta_1$是$Ax=0$的两个线性无关的解，即$Ax=0$的基础解系中至少有 2 个线性无关的解，所以可排除(A)、(B)选项．

又因为$A\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}=0$，所以$\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}$是$Ax=0$的解，不是$Ax=\beta$的解，故排除(D)选项，因此选(C)．

事实上，由于η_1,η_2,η_3是$Ax=\beta$的三个线性无关的解，所以$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$是$Ax=0$的两个线性无关的解，即$Ax=0$的基础解系中至少有 2 个线性无关的解，亦即$3-r(A)\geq 2$，故$r(A)\leq 1$．由于$A\neq O$，所以$r(A)\geq 1$，故$r(A)=1$．这样，$Ax=0$的基础解系中正好有 2 个线性无关的解，由此知$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$是$Ax=0$的一个基础解系．

因为η_1,η_2,η_3是$Ax=\beta$的解，所以$A\eta_2=\beta,A\eta_3=\beta$，因此$A\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}=\beta$，所以$\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}$

是 $Ax=\beta$ 的一个特解.

由非齐次线性方程组解的结构，可知 $Ax=\beta$ 的通解为

$$\frac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1).$$

(7)【答案】(D).

【解析】选项(D)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\right]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[F_2(x)dF_1(x)+F_1(x)dF_2(x)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d\left[F_1(x)F_2(x)\right]=F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1.$$

所以 $f_1F_2(x)+f_2F_1(x)$ 为概率密度.

(8)【答案】(D).

【解析】因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n\sim P(\lambda)$，

所以 $E(X_i)=\lambda$， $D(X_i)=\lambda$，从而有

$$E(T_1)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot E(X)=E(X)=\lambda$$

$$E(T_2)=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n\right)=\frac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^{n-1}X_i)+\frac{1}{n}E(X_n)$$

$$=E(X)+\frac{1}{n}E(X)=\left(1+\frac{1}{n}\right)\lambda.$$

因为$1<1+\frac{1}{n}$，所以 $E(T_1)<E(T_2)$.

又因为 $D(T_1)=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot D(X)=\frac{1}{n}D(X)=\frac{\lambda}{n}$.

$$D(T_2)=D(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n)=\frac{1}{(n-1)^2}\cdot D(\sum_{i=1}^{n-1}X_i)+\frac{1}{n^2}D(X_n)$$

$$=\frac{1}{n-1}\cdot D(X)+\frac{1}{n^2}\cdot D(X)=\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n^2}\right)\lambda\ .$$

由于当 $n\geq 2$ 时，$\frac{1}{n}<\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n^2}$ ，所以 $D(T_1)<D(T_2)$.

二、填空题(9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上．)

(9)【答案】$e^{3x}\left(1+3x\right)$.

【解析】因为 $f\left(x\right)=\lim\limits_{t\to 0}x\left(1+3t\right)^{\frac{x}{t}}=x\lim\limits_{t\to 0}\left[\left(1+3t\right)^{\frac{1}{3t}}\right]^{3t\cdot\frac{x}{t}}=x\cdot e^{3x}$，

所以，$f'\left(x\right)=e^{3x}\left(1+3x\right)$.

(10)【答案】$\left(1+2\ln 2\right)\left(dx-dy\right)$.

【解析】$z=(1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}=e^{\frac{x}{y}\ln(1+\frac{x}{y})}$，

$$\frac{dz}{dx}=(1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}\left[\frac{1}{y}\ln(1+\frac{x}{y})+\frac{x}{y}\cdot\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x}{y}}\right],\quad \frac{dz}{dy}=(1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}\left[-\frac{x}{y^2}\ln(1+\frac{x}{y})+\frac{x}{y}\cdot\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x}{y}}\right],$$

所以，$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,1)}=2\ln 2+1$，$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,1)}=-1-2\ln 2$，

从而 $\left.dz\right|_{(1,1)}=\left(1+2\ln 2\right)dx-\left(1+2\ln 2\right)dy$ 或 $\left.dz\right|_{(1,1)}=\left(1+2\ln 2\right)\left(dx-dy\right)$.

(11)【答案】$y=-2x$.

【解析】方程 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=e^{y}$ 的两端对 x 求导，有

$$\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(1+y'\right)=e^{y}y',$$

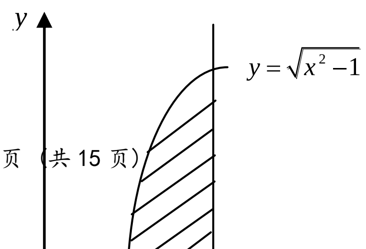
将 $x=0,\quad y=0$ 代入上式，有 $\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\left(1+y'\right)=y'$，解得 $\left.y'\right|_{(0,0)}=-2$，

故切线方程为：$y=-2x$.

(12)【答案】$\frac{4}{3}\pi$.

【解析】如图 2 所示：

$V=\pi\int_1^2 y^2dx$



$$=\pi\int_1^2\left(x^2-1\right)dx \quad =\frac{4}{3}\pi .$$

图 2

(13)【答案】$3y_1^2$.

【解析】因为 A 的各行元素之和为 3，所以 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，故 3 为矩阵 A 的特征值.

由 $r(A)=1$ 知矩阵 A 有两个特征值为零，从而 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=0$.

由于二次型在正交变换下标准形前面的系数即为二次型所对应矩阵的特征值，所以二次型在正交变换下的标准形为 $3y_1^2$.

(14)【答案】$\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right)$.

【解析】根据题意，二维随机变量 (X,Y) 服从 $N\left(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0\right)$. 因为 $\rho_{xy}=0$，所以由二维正态分布的性质知随机变量 X,Y 独立，所以 X,Y^2. 从而有

$$E\left(XY^2\right)=E(X)E\left(Y^2\right)=\mu\left[D(Y)+E^2(Y)\right]=\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right).$$

三、解答题(15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．)

(15)（本题满分 10 分）

【解析】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+2\sin x}}\cdot2\cos x-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x\sqrt{1+2\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}}{2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

（16）（本题满分 10 分）

【解析】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'[(x+y),f(x,y)]+f_2'[(x+y),f(x,y)]\cdot f_1'(x,y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\left[\left(x+y\right),f\left(x+y\right)\right]\cdot 1$$

$$+f_{12}''\left[\left(x+y\right),f\left(x+y\right)\right]\cdot f_2'(x,y)$$

$$+\left\{f_{21}''\left[\left(x+y\right),f\left(x+y\right)\right]+f_{22}''\left[\left(x+y\right),f\left(x+y\right)\right]f_2'(x,y)\right\}\cdot f_1'(x,y)$$

$$+f_2'\left[\left(x+y\right),f\left(x+y\right)\right]\cdot f_{12}''\left(x,y\right)$$

由于 $f\left(1,1\right)=2$ 为 $f\left(u,v\right)$ 的极值，故 $f_1'\left(1,1\right)=f_2'\left(1,1\right)=0$，

所以，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\left(2,2\right)+f_2'\left(2,2\right)\cdot f_{12}''\left(1,1\right).$

（17）（本题满分 10 分）

【解析】令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，所以

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{\arcsin t+\ln t^2}{t}\cdot 2tdt=2\int\left(\arcsin t+\ln t^2\right)dt$$

$$=2t\cdot\arcsin t-2\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt+2t\cdot\ln t^2-2\int t\cdot\frac{2t}{t^2}dt$$

$$=2t\cdot\arcsin t+\int\frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}+2t\cdot\ln t^2-4t$$

$$=2t\cdot\arcsin t+2\sqrt{1-t^2}+2t\cdot\ln t^2-4t+C$$

$$=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C.$$

（C 为任意常数）

(18)（本题满分 10 分）

【解析】设 $f(x)=4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$，

则 $$f'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1=\frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{1+x^2},$$

令 $f'(x)=0$，解得驻点 $x_1=\sqrt{3},x_2=-\sqrt{3}$.

所以，当 $x<-\sqrt{3}$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调递减；当 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调递增；当 $x>\sqrt{3}$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调递减.

又当 $x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 时 $f(x)>0$，且 $f(-\sqrt{3})=0$，故 $x\in(-\infty,\sqrt{3})$ 时只有一个零点；

又 $f(\sqrt{3})=\dfrac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)=-\infty<0$，由零点定理可知，存在 $x_0\in\left(\sqrt{3},+\infty\right)$，使 $f\left(x_0\right)=0$；

所以，方程 $4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有两实根.

(19)（本题满分 10 分）

【解析】$\iint\limits_{D_t}f(t)dxdy=\dfrac{1}{2}t^2f(t)$，

$$\iint\limits_{D_t}f'(x+y)dxdy=\int_0^t dx\int_0^{t-x}f'(x+y)dy$$
$$=\int_0^t(f(t)-f(x))dx$$
$$=tf(t)-\int_0^t f(x)dx$$

由题设有 $tf(t)-\int_0^t f(x)dx=\dfrac{1}{2}t^2f(t)$，

上式两端求导，整理得

$$(2-t)f'(t)=2f(t),$$

为变量可分离微分方程，解得 $f(t)=\dfrac{C}{(t-2)^2}$，

带入 $f(0)=1$，得 $C=4$．所以， $f(x)=\dfrac{4}{(x-2)^2},0\le x\le 1$．

(20)（本题满分 11 分）

【解析】(I) 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，对 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 进行初等行变换：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\1&2&4&0&1&3\\1&3&a&1&1&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&a-3&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&a-5&2&-1&0\end{array}\right).$$

当 $a=5$ 时， $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2\ne r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1)=3$，此时， α_1 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示．

(II) 对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 进行初等行变换：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

故 $\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$， $\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$， $\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3$．

(21)（本题满分 11 分）

【解析】(I) 由于 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，设 $\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$，则

$A(\alpha_1,\alpha_2)=(-\alpha_1,\alpha_2)$，即 $A\alpha_1=-\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2$，而 $\alpha_1\neq 0,\alpha_2\neq 0$，知 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，对应的特征向量分别为 $k_1\alpha_1\,(k_1\neq 0)$，$k_2\alpha_2\,(k_2\neq 0)$.

由于 $r(A)=2$，故 $|A|=0$，所以 $\lambda_3=0$.

由于 A 是三阶实对称矩阵，故不同特征值对应的特征向量相互正交，设 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_3=0,\\ \alpha_2^T\alpha_3=0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}x_1-x_3=0,\\ x_1+x_3=0.\end{cases}$$

解此方程组，得 $\alpha_3=(0,1,0)^T$，故 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3\,(k_3\neq 0)$.

（II）由于不同特征值对应的特征向量已经正交，只需单位化：

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T,\beta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=(0,1,0)^T.$$

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，

$$A=Q\Lambda Q^T$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

(22)(本题满分 11 分)

【解析】(I) 因为 $P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$，所以 $P\left\{X^2\neq Y^2\right\}=1-P\left\{X^2=Y^2\right\}=0$.

即 $P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}=0$.

利用边缘概率和联合概率的关系得到

$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0,Y=-1\}-P\{X=0,Y=1\}=\dfrac{1}{3}$;

$P\{X=1,Y=-1\}=P\{Y=-1\}-P\{X=0,Y=-1\}=\dfrac{1}{3}$;

$P\{X=1,Y=1\}=P\{Y=1\}-P\{X=0,Y=1\}=\dfrac{1}{3}$.

即 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	1/3	0
1	1/3	0	1/3

(II) Z 的所有可能取值为 $-1,0,1$.

$P\{Z=-1\}=P\{X=1,Y=-1\}=\dfrac{1}{3}$.

$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{1}{3}$.

$P\{Z=0\}=1-P\{Z=1\}-P\{Z=-1\}=\dfrac{1}{3}$.

$Z=XY$ 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

(III) 因为 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(XY)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{E(XY)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$,

其中

$E(XY)=E(Z)=-1\cdot\dfrac{1}{3}+0\cdot\dfrac{1}{3}+1\cdot\dfrac{1}{3}=0$， $E(Y)=-1\cdot\dfrac{1}{3}+0\cdot\dfrac{1}{3}+1\cdot\dfrac{1}{3}=0$.

所以 $E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0$，即 X，Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$.

(23)(本题满分 11 分)

【解析】二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, 0<y<1, y<x<2-y,\\ 0, 其它.\end{cases}$

(Ⅰ)当$0<x<1$时， $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^x 1dy=x$.

当$1\le x<2$时， $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^{2-x} 1dy=2-x$.

X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ 2-x, & 1\le x<2,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

(II)当$0<y<1$时，Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_y^{2-y} 1dx=2-2y$.

当$0<y<1$时， $f_{X|Y}(x|y)$有意义，条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2y}, & y<x<2-y,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$