

2018 全国研究生入学考试考研数学三试题

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的。

1. 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是：

A. $f(x) = |x| \sin|x|$ B. $f(x) = |x| \sin \sqrt{|x|}$

C. $f(x) = \cos|x|$ D. $f(x) = \cos \sqrt{|x|}$

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$ ，则

A. 当 $f'(x) < 0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ B. 当 $f''(x) < 0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

C. 当 $f'(x) > 0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ D. 当 $f''(x) > 0$ 时， $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

3. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$ ， $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+x}{e^x} dx$ ， $K = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sqrt{\cos x}) dx$ ，则

A. $M > N > K$

B. $M > K > N$

C. $K > M > N$

D. $K > N > M$

4. 设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导，其中， Q 为产量，若产量为 Q_0 时平均成本最小，则

A. $C'(Q_0) = 0$

B. $C'(Q_0) = C(Q_0)$

C. $C'(Q_0) = Q_0 C(Q_0)$

D. $Q_0 C'(Q_0) = C(Q_0)$

5. 下列矩阵中，与矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 相似的是

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{C. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{D. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩, $(X \ Y)$ 表示分块矩阵, 则

- A. $r(A \ AB) = r(A)$ B. $r(A \ BA) = r(A)$
C. $r(A \ B) = \max\{r(A), r(B)\}$ D. $r(A \ B) = r(A^T \ B^T)$

7. 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, $\int_0^2 f(x)dx = 0.6$, 则 $P\{x < 0\}$ = _____。

- A. 0.2 B. 0.3
C. 0.4 D. 0.6

8. 已知 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, \quad S^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}, \quad \text{则 } ()$$

- A. $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n)$ B. $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$
C. $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n)$ D. $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S^*} \sim t(n-1)$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

9. $f(x) = x^2 + 2 \ln x$ 在其拐点处的切线方程是_____。

10. $\int e^x \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} dx =$ _____。

11. 差分方程 $\Delta^2 y_x - y_x = 5$ 的解为=_____。

12. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x + \Delta x) - f(x) = 2xf(x)\Delta x + o(\Delta x)$, 且 $f(0) = 2$, 则 $f(1) =$ _____。

13. 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的向量组, 若

$A\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3, A\alpha_3 = -\alpha_2 + \alpha_3$, 则 A 的实特征值为_____。

14. 已知事件 A, B, C 相互独立, $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(AC | A \cup B) =$ _____。

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(ax+b)e^{\frac{1}{x}} - x] = 2$, 求 a, b

16. 求 $\iint_D x^2 dx dy$, D 由 $y = \sqrt{3(1-x^2)}$ 与 $y = \sqrt{3}x$, y 轴围成。

17. 一段绳子总长为 $2m$, 分成三段, 分别围成圆形, 正方形, 正三角形。三个图形的面积之和有最小值吗? 若有, 求出最小值。

18. 已知 $\cos 2x - \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 求 a_n 。

19. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0, x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1, n=1, 2, \dots$

证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。

20. (本小题 11 分)

设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_1 + \alpha x_3)^2$,

其中 α 为参数。

(1) 求 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 的解。

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形。

21. (本题满分 11 分)

已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{bmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 。

(1) 求 a ;

(2) 求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P 。

22. 已知随机变量 X, Y 相互独立, 且 $P(X=1)=P(X=-1)=\frac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布, $Z=XY$

(1) $Cov(X, Z)$.

(2) 求 Z 的分布律.

23. 已知总体 X 的密度函数为 $f(x, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}}, -\infty < x < +\infty$. x_1, x_2, \dots, x_n 为来自总体

X 的简单随机样本, σ 为大于 0 的参数, σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$

(1) 求 $\hat{\sigma}$.

(2) 求 $E\hat{\sigma}, D\hat{\sigma}$.

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园!