2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为（）

（A）0
（B）1
（C）2
（D）3

【答案】：C

【解析】：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，所以 $x=1$ 为垂直的

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，所以 $y=1$ 为水平的，没有斜渐近线 故两条选 C

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$

（B）$(-1)^{n}(n-1)!$

（C）$(-1)^{n-1}n!$

（D）$(-1)^{n}n!$

【答案】：A

【解析】：$f'(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)(2e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+\cdots(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(ne^{nx}-n)$

所以 $f'(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$

（3）设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(r^2)rdr=$（　　）

（A）$\int_0^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dy$

（B）$\int_0^2dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)dy$

（C）$\int_0^2dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)dx$

（D）$\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x^2+y^2)dx$

【答案】：（B）

【解析】：由 $x \le \sqrt{x^2+y^2}$ 解得 y 的下界为 $\sqrt{2x-x^2}$ ，由 $\sqrt{x^2+y^2} \le 2$ 解得 y 的上界为 $\sqrt{4-x^2}$.故排除答案（C）（D）. 将极坐标系下的二重积分化为 $X-$型区域的二重积分得到被积函数为 $f(x^2+y^2)$ ，故选（B）.

（4）已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛，$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则 α 范围为（　　）

（A）$0<\alpha\le\frac{1}{2}$

（B）$\frac{1}{2}<\alpha\le 1$

（C）$1<\alpha\le\frac{3}{2}$

（D）$\frac{3}{2}<\alpha<2$

【答案】：**（D）**

【解析】：考察的知识点是绝对收敛和条件收敛的定义及常见的 p 级数的收敛性结论. $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛可知 $\alpha>\frac{3}{2}$ ；$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛可知 $\alpha\le 2$ ，故答案为**（D）**

（5）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$ 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

【答案】：（C）

【解析】：由于 $\left|(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)\right|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$ ，可知 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关。故选（C）

（6）设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$ ，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ，

$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$

【答案】：（B）

【解析】：$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$，

故 $Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$

故选（B）。

（7）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，则 $P\left\{X^2+Y^2\le 1\right\}$（　　）

（A）$\frac{1}{4}$　　（B）$\frac{1}{2}$　　（C）$\frac{\pi}{8}$　　（D）$\frac{\pi}{4}$

【答案】：（D）

【解析】：由题意得，　$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

$P\left\{X^2+Y^2\le 1\right\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 D 表示单位圆在第一象限的部分，被积函数是1，故根据二重积分的几何意义，知 $P\left\{X^2+Y^2\le 1\right\}=\frac{\pi}{4}$，故选（D）.

（8）设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，则统计量 $\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布（　　）

（A）$N(0,1)$

（B）$t(1)$

（C）$\chi^2(1)$

（D）$F(1,1)$

【答案】：（B）

【解析】：从形式上，该统计量只能服从 t 分布。故选 B。

具体证明如下：$\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}=\dfrac{\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}$，由正态分布的性质可知，$\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}$ 均服从标准正态分布且相互独立，可知 $\dfrac{\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}\sim t(1)$。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$ ________。

【答案】：$e^{-\sqrt{2}}$

【解析】：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(\tan x-1)\frac{1}{\cos x-\sin x}\right]}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(\tan x-1)\frac{1}{\cos x-\sin x}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{4}}{\cos x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\tan x\bullet\tan\frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\tan x\bullet\tan\frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{2}{-\sqrt{2}}$$

$$=-\sqrt{2}$$

所以 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left[(\tan x-1)\frac{1}{\cos x-\sin x}\right]}=e^{-\sqrt{2}}$

（10）设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, x\geq 1\\ 2x-1, x<1\end{cases}$，$y=f\left(f(x)\right)$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=e}$ ________。

【答案】：$\frac{1}{e}$

【解析】：$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=f'(f(x))f'(x)|_{x=0}=f'(f(0))f'(0)=f'(-1)f'(0)$

由 $f(x)$ 的表达式可知 $f'(0)=f'(-1)=2$，可知 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{1}{e}$

（11） 函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $dz|_{(0,1)}=$

【答案】：$2dx-dy$

【解析】：由题意可知分子应为分母的高阶无穷小，即 $f(x,y)=2x-y+2+o(\sqrt{x^2+(y-1)^2})$，

所以 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=2$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=-1$，故 $dz|_{(0,1)}=2dx-dy$

（12） 由曲线 $y=\frac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中所围图形的面积为____

【答案】：$4\ln2$

【解析】：被积函数为 1 的二重积分来求，所以

$$S=\int_0^2dy\int_{\frac{y}{4}}^{y}dx+\int_2^4dy\int_{\frac{y}{4}}^{\frac{4}{y}}dx=\frac{3}{2}+4\ln2-\frac{3}{2}=4\ln2$$

（13）设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵，若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B，则

$|BA^*|=$________。

【答案】：-27

【解析】：由于 $B=E_{12}A$，故 $BA^*=E_{12}A\cdot A^*=|A|E_{12}=3E_{12}$，

所以，$|BA^*|=|3E_{12}|=3^3|E_{12}|=27*(-1)=-27$.

（14）设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB\bar{C})=$________。

【答案】：$\frac{3}{4}$

【解析】：由条件概率的定义，$P\left(AB|\bar{C}\right)=\frac{P\left(AB\bar{C}\right)}{P\left(\bar{C}\right)}$，

其中 $P\left(\bar{C}\right)=1-P\left(C\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

$P\left(AB\bar{C}\right)=P\left(AB\right)-P\left(ABC\right)=\frac{1}{2}-P\left(ABC\right)$，由于 A,C 互不相容，即 $AC=\phi$，$P\left(AC\right)=0$，又

$ABC\subset AC$，得 $P\left(ABC\right)=0$，代入得 $P\left(AB\bar{C}\right)=\frac{1}{2}$，故 $P\left(AB|\bar{C}\right)=\frac{3}{4}$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$

【解析】: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}e^{2-2\cos x}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^2\right)\right)}{x^4}\text{(泰勒公式)}$$

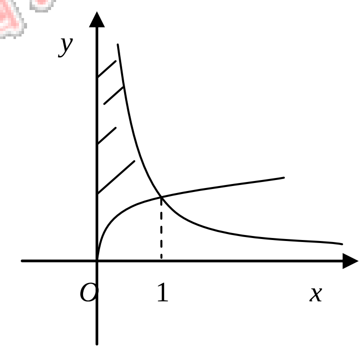
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^4}{12}+o\left(x^2\right)}{x^4}$$

$$=\frac{1}{12}$$

（16）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D e^x xydxdy$，其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域。

【解析】：由题意知，区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,0<x\le1,\sqrt{x}<y<\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right\}$，如图所示所以



$$\iint\limits_D e^x xydxdy=\lim_{x\to0}\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}e^x xydy$$

$$=\lim_{x\to 0}\int_0^1 e^x x\left(\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}dx$$

$$=\lim_{x\to 0}\int_0^1 e^x x\left(\frac{1}{2x}-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\int_0^1 e^x dx-\int_0^1 e^x x^2 dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(e-1-e^x x^2\Big|_0^1+2\int_0^1 e^x x dx\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(-1+2\int_0^1 x de^x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(-1+2\left(e^x x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(-1+2\left(e-(e-1)\right)\right)=\frac{1}{2}$$

（17）（本题满分 10 分）某企业为生产甲、乙两种型号的产品，投入的固定成本为 10000（万元），设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x（件）和（y 件），且这两种产品的边际成本分别为$20+\frac{x}{2}$（万元/件）与$6+y$（万元/件）。

1）求生产甲乙两种产品的总成本函数$C(x,y)$(万元)

2）当总产量为 50 件时，甲乙两种的产量各为多少时可以使总成本最小？求最小的成本。

3）求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义。

【解析】：1）设成本函数为$C(x,y)$，由题意有：$C_x{}'(x,y)=20+\frac{x}{2}$，

对 x 积分得，$C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+D(y)$，

再对 y 求导有，$C_y{}'(x,y)=D'(y)=6+y$，

再对 y 积分有，$D(y)=6y+\frac{1}{2}y^2+c$

所以，$C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{1}{2}y^2+c$

又$C(0,0)=10000$，故$c=10000$，所以$C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{1}{2}y^2+10000$

2）若$x+y=50$，则$y=50-x(0\le x\le 50)$，代入到成本函数中，有

$$C(x)=20x+\frac{x^2}{4}+6(50-x)+\frac{1}{2}(50-x)^2+10000$$
$$=\frac{3}{4}x^2-36x+11550$$

所以，令 $C'(x)=\frac{3}{2}x-36=0$，得 $x=24,y=26$，这时总成本最小 $C(24,26)=11118$

3）总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本为 $C_x{}'(24,26)=32$，表示在要求总产量为 50 件时，在甲产品为 24 件，这时要改变一个单位的产量，成本会发生 32 万元的改变。

（18）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$

【解析】：令 $f\left(x\right)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，可得

$$f'\left(x\right)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\frac{1+x}{1-x}\bullet\frac{2}{\left(1-x\right)^2}-\sin x-x$$
$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$$
$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x$$

当 $0<x<1$ 时，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\geq 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x\geq 0$，

故 $f'\left(x\right)\geq 0$，而 $f\left(0\right)=0$，即得 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0$

所以 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq\frac{x^2}{2}+1$。

当 $-1<x<0$，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}\leq 0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\bullet x-\sin x\leq 0$，

故 $f'\left(x\right)\geq 0$，即得 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0$

可知，$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$

（19）（本题满分 10 分）已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$

1）求 $f(x)$ 的表达式

2）求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 的拐点

【解析】:

1）特征方程为 $r^2+r-2=0$，特征根为 $r_1=1,r_2=-2$，齐次微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.再由 $f^{'}(x)+f(x)=2e^x$ 得 $2C_1e^x-C_2e^{-2x}=2e^x$，可知 $C_1=1,C_2=0$。

故 $f(x)=e^x$

2）曲线方程为 $y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，则 $y'=1+2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$， $y''=2x+2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$

令 $y''=0$ 得 $x=0$。为了说明 $x=0$ 是 $y''=0$ 唯一的解，我们来讨论 y'' 在 $x>0$ 和 $x<0$ 时的符号。

当 $x>0$ 时， $2x>0,2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt>0$， 可知 $y'>'$ ； 当 $x<0$ 时， $2x<0,2\left(1+2x^2\right)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt<0$，可知 $y''<0$。可知 $x=0$ 是 $y''=0$ 唯一的解。

同时，由上述讨论可知曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 在 $x=0$ 左右两边的凹凸性相反，可知 $(0,0)$ 点是曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 唯一的拐点。

（20）（本题满分 10 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（I）计算行列式 $|A|$；

（II）当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

【解析】:（Ⅰ） $\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$

（Ⅱ） $\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{pmatrix}$

可知当要使得原线性方程组有无穷多解，则有 $1-a^4=0$ 及 $-a-a^2=0$，可知 $a=-1$。

此时，原线性方程组增广矩阵为$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，进一步化为行最简形得$\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

可知导出组的基础解系为$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，非齐次方程的特解为$\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$，故其通解为$k\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（21）（本题满分 10 分）已知$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$的秩为 2

（I）求实数a的值；

（II）求正交变换$x=Qy$将f化为标准形.

【解析】：1）由$r(A^TA)=r(A)=2$可得，

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\end{vmatrix}=a+1=0\Rightarrow a=-1$$

2）$f=x^TA^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$=2x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3$

则矩阵$B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0$$

解得B矩阵的特征值为：$\lambda_1=0;\lambda_2=2;\lambda_3=6$

对于$\lambda_1=0$,解$(\lambda_1E-B)X=0$得对应的特征向量为：$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_2=2$,解 $(\lambda_2 E-B)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_3=6$,解 $(\lambda_3 E-B)X=0$ 得对应的特征向量为：$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

将 η_1,η_2,η_3 单位化可得：

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

（22）（本题满分 10 分）

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

（Ⅰ）求 $P\{X=2Y\}$；

（Ⅱ）求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

【解析】:

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

（1） $P(X=2Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=2,Y=1)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

（2） $\operatorname{cov}(X-Y,Y)=\operatorname{cov}(X,Y)-\operatorname{cov}(Y,Y)$

$\operatorname{cov}(X,Y)=EXY-EXEY$，其中 $EX=\frac{2}{3},EX^2=1,EY=1,EY^2=\frac{5}{3},DX=EX^2-(EX)^2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3},EXY=\frac{2}{3}$

所以，$\operatorname{cov}(X,Y)=0$，$\operatorname{cov}(Y,Y)=DY=\frac{2}{3}$，$\operatorname{cov}(X-Y,Y)=-\frac{2}{3},\rho_{XY}=0$.

（23）（本题满分 10 分）

设随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从参数为1的指数分布，$V=\min(X,Y),U=\max(X,Y)$.

求（1）随机变量 V 的概率密度；

（2） $E(U+V)$.

【解析】:

（1） X 概率密度为 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ X 和 Y 同分布.

由 $V=\min(X,Y)$，$F_V(v)=P\{V\le v\}=P\{\min(X,Y)\le v\}=1-P\{X>v,Y>v\}$，

而 X,Y 独立，故上式等于 $1-P\{X>v\}P\{Y>v\}=1-[1-F(v)]^2=\begin{cases}1-e^{-2v}, & v>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

故 $f_V(v)=F_V'(v)=\begin{cases}2e^{-2v}, & v>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（2）同理，U 的概率密度为：$f_U(u)=\begin{cases}2(1-e^{-u})e^{-u}, & u>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

$EU=\int_0^{+\infty}u2(1-e^{-u})e^{-u}du=\frac{3}{2}$，$EV=\int_0^{+\infty}v2e^{-2v}dv=\frac{1}{2}$，

所以 $E(U+V)=E(U)+E(V)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$.