2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案

一、选择题(1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．)

(1)【答案】(C).

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x-\sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x}{cx^k}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(3-\cos 2x-2\cos^2 x\right)}{cx^k}=\lim_{x\to0}\frac{3-\cos 2x-2\cos^2 x}{cx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3-\left(2\cos^2 x-1\right)-2\cos^2 x}{cx^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{4-4\cos^2 x}{cx^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2 x}{cx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4}{cx^{k-3}}=1.$$

所以 $c=4,k=3$，故答案选(C).

(2)【答案】(B).

【解析】 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2 f(x)-x^2 f(0)-2f(x^3)+2f(0)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}\right]$$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0).$$

故答案选(B).

(3)【答案】(A).

【解析】方法 1：数项级数的性质：收敛级数任意添加括号后仍收敛，故(A)正确.

方法 2：排除法，举反例.

选项(B)取 $u_n=(-1)^n$，这时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}0$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散，故选项(B)错误；

选项(C)取 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$，这时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，故选项(C)错误；

选项(D)取$u_n=1$,这时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}0$收敛,但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$发散,故选项(D)错误.故正确答案为(A).

(4)【答案】(B).

【解析】因为$0<x<\dfrac{\pi}{4}$时，　$0<\sin x<\cos x<1<\cot x$，

又因$\ln x$是单调递增的函数，所以$\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$.

故正确答案为(B).

(5)【答案】 (D).

【解析】由于将A的第 2 列加到第 1 列得矩阵B，故

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B,$$

即$AP_1=B$，　$A=BP_1^{-1}$.

由于交换B的第 2 行和第 3 行得单位矩阵，故

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}B=E,$$

即$P_2B=E$,故$B=P_2^{-1}=P_2$．因此，　$A=P_2P_1^{-1}$，故选(D).

(6)【答案】(C).

【解析】由于η_1,η_2,η_3是$Ax=\beta$的 3 个线性无关的解，所以$\eta_3-\eta_1,\eta_2-\eta_1$是$Ax=0$的两个线性无关的解，即$Ax=0$的基础解系中至少有 2 个线性无关的解，所以可排除(A)、(B)选项.

又因为$A\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}=0$，所以$\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}$是$Ax=0$的解，不是$Ax=\beta$的解，故排除(D)选项，因此选(C).

事实上，由于η_1,η_2,η_3是$Ax=\beta$的三个线性无关的解，所以$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$是$Ax=0$的两个线性无关的解，即$Ax=0$的基础解系中至少有 2 个线性无关的解，亦即$3-r(A)\ge 2$，故$r(A)\le 1$．由于$A\ne O$，所以$r(A)\ge 1$，故$r(A)=1$．这样，　$Ax=0$的基础解系中正好有 2 个线性无关的解，由此知$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$是$Ax=0$的一个基础解系.

因为η_1,η_2,η_3是$Ax=\beta$的解，所以$A\eta_2=\beta,A\eta_3=\beta$，因此$A\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}=\beta$，所以$\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}$

是 $Ax=\beta$ 的一个特解.

由非齐次线性方程组解的结构，可知 $Ax=\beta$ 的通解为

$$\frac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1).$$

(7)【答案】(D).

【解析】选项(D)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\right]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[F_2(x)dF_1(x)+F_1(x)dF_2(x)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d\left[F_1(x)F_2(x)\right]=F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1.$$

所以 $f_1F_2(x)+f_2F_1(x)$ 为概率密度.

(8)【答案】(D).

【解析】因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n\sim P(\lambda)$,

所以 $E(X_i)=\lambda$， $D(X_i)=\lambda$，从而有

$$E\left(T_1\right)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot E\left(X\right)=E\left(X\right)=\lambda$$

$$E\left(T_2\right)=E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n\right)=\frac{1}{n-1}E(\sum_{i=1}^{n-1}X_i)+\frac{1}{n}E(X_n)$$

$$=E\left(X\right)+\frac{1}{n}E\left(X\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)\lambda.$$

因为$1<1+\dfrac{1}{n}$，所以 $E\left(T_1\right)<E\left(T_2\right)$.

又因为 $D\left(T_1\right)=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot D(X)=\frac{1}{n}D\left(X\right)=\frac{\lambda}{n}$.

$$D\left(T_2\right)=D(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n)=\frac{1}{(n-1)^2}\cdot D(\sum_{i=1}^{n-1}X_i)+\frac{1}{n^2}D(X_n)$$

$$=\frac{1}{n-1}\cdot D(X)+\frac{1}{n^2}\cdot D(X)=\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n^2}\right)\lambda\ .$$

由于当 $n\geq 2$ 时，$\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n^2}$，所以 $D\left(T_1\right)<D\left(T_2\right)$.

二、填空题(9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上．)

(9)【答案】$e^{3x}\left(1+3x\right)$.

【解析】因为 $f\left(x\right)=\lim\limits_{t\to 0}x\left(1+3t\right)^{\frac{x}{t}}=x\lim\limits_{t\to 0}\left[\left(1+3t\right)^{\frac{1}{3t}}\right]^{3t\cdot\frac{x}{t}}=x\cdot e^{3x}$，

所以，$f'\left(x\right)=e^{3x}\left(1+3x\right)$.

(10)【答案】$\left(1+2\ln 2\right)\left(dx-dy\right)$.

【解析】$z=(1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}=e^{\frac{x}{y}\ln(1+\frac{x}{y})}$，

$$\frac{dz}{dx}=(1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}\left[\frac{1}{y}\ln(1+\frac{x}{y})+\frac{x}{y}\cdot\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x}{y}}\right],\ \frac{dz}{dy}=(1+\frac{x}{y})^{\frac{x}{y}}\left[-\frac{x}{y^2}\ln(1+\frac{x}{y})+\frac{x}{y}\cdot\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x}{y}}\right],$$

所以，$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,1)}=2\ln 2+1$，$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,1)}=-1-2\ln 2$，

从而 $\left.dz\right|_{(1,1)}=\left(1+2\ln 2\right)dx-\left(1+2\ln 2\right)dy$ 或 $\left.dz\right|_{(1,1)}=\left(1+2\ln 2\right)\left(dx-dy\right)$.

(11)【答案】$y=-2x$.

【解析】方程 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=e^{y}$ 的两端对 x 求导，有

$$\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(1+y'\right)=e^{y}y'，$$

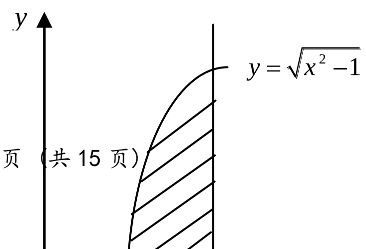
将 $x=0,\quad y=0$ 代入上式，有 $\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\left(1+y'\right)=y'$，解得 $\left.y'\right|_{(0,0)}=-2$，

故切线方程为：$y=-2x$.

(12)【答案】$\frac{4}{3}\pi$.

【解析】如图 2 所示：

$V=\pi\int_1^2 y^2dx$



$$=\pi\int_1^2\left(x^2-1\right)dx \ =\frac{4}{3}\pi .$$

图 2

(13)【答案】$3y_1^2$.

【解析】因为 A 的各行元素之和为 3，所以 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，故 3 为矩阵 A 的特征值.

由 $r(A)=1$ 知矩阵 A 有两个特征值为零，从而 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=0$.

由于二次型在正交变换下标准形前面的系数即为二次型所对应矩阵的特征值，所以二次型在正交变换下的标准形为 $3y_1^2$.

(14)【答案】$\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right)$.

【解析】根据题意，二维随机变量 (X,Y) 服从 $N\left(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0\right)$. 因为 $\rho_{xy}=0$，所以由二维正态分布的性质知随机变量 X,Y 独立，所以 X,Y^2. 从而有

$$E\left(XY^2\right)=E(X)E\left(Y^2\right)=\mu\left[D(Y)+E^2(Y)\right]=\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right).$$

三、解答题(15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)（本题满分 10 分）

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+2\sin x}}\cdot 2\cos x-1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x\sqrt{1+2\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}}{2}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

（16）（本题满分 10 分）

【解析】$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'[(x+y),f(x,y)]+f_2'[(x+y),f(x,y)]\cdot f_1'(x,y)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''\left[(x+y),f(x+y)\right]\cdot 1$$

$$+f_{12}''\left[(x+y),f(x+y)\right]\cdot f_2'(x,y)$$

$$+\left\{f_{21}''\left[(x+y),f(x+y)\right]+f_{22}''\left[(x+y),f(x+y)\right]f_2'(x,y)\right\}\cdot f_1'(x,y)$$

$$+f_2'\left[(x+y),f(x+y)\right]\cdot f_{12}''(x,y)$$

由于 $f(1,1)=2$ 为 $f(u,v)$ 的极值，故 $f_1'(1,1)=f_2'(1,1)=0$，

所以，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''(2,2)+f_2'(2,2)\cdot f_{12}''(1,1)$.

（17）（本题满分 10 分）

【解析】令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，所以

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{\arcsin t+\ln t^2}{t}\cdot 2tdt=2\int\left(\arcsin t+\ln t^2\right)dt$$

$$=2t\cdot\arcsin t-2\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt+2t\cdot\ln t^2-2\int t\cdot\frac{2t}{t^2}dt$$

$$=2t\cdot\arcsin t+\int\frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}}+2t\cdot\ln t^2-4t$$

$$=2t\cdot\arcsin t+2\sqrt{1-t^2}+2t\cdot\ln t^2-4t+C$$

$$=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C.$$

(18)（本题满分 10 分）

【解析】设 $f(x)=4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$，

则 $$f'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1=\frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{1+x^2},$$

令 $f'(x)=0$，解得驻点 $x_1=\sqrt{3},x_2=-\sqrt{3}$.

所以，当 $x<-\sqrt{3}$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调递减；当 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调递增；当 $x>\sqrt{3}$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调递减.

又当 $x\in(-\infty,-\sqrt{3})\cup(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ 时 $f(x)>0$，且 $f(-\sqrt{3})=0$，故 $x\in(-\infty,\sqrt{3})$ 时只有一个零点；

又 $f(\sqrt{3})=\dfrac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)=-\infty<0$，由零点定理可知，存在 $x_0\in\left(\sqrt{3},+\infty\right)$，使 $f\left(x_0\right)=0$；

所以，方程 $4\arctan x-x+\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有两实根.

(19)（本题满分 10 分）

【解析】$\iint\limits_{D_t}f(t)dxdy=\dfrac{1}{2}t^2f(t)$，

$$\iint\limits_{D_t}f'(x+y)dxdy=\int_0^t dx\int_0^{t-x}f'(x+y)dy$$
$$=\int_0^t(f(t)-f(x))dx$$
$$=tf(t)-\int_0^t f(x)dx$$

由题设有 $tf(t)-\int_0^t f(x)dx=\dfrac{1}{2}t^2f(t)$，

上式两端求导，整理得

$$(2-t)f'(t)=2f(t),$$

为变量可分离微分方程，解得 $f(t)=\dfrac{C}{(t-2)^2}$，

带入 $f(0)=1$，得 $C=4$．所以，$f(x)=\dfrac{4}{(x-2)^2},0\le x\le 1$．

(20)（本题满分 11 分）

【解析】(I) 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，对 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 进行初等行变换：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\1&2&4&0&1&3\\1&3&a&1&1&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&a-3&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&a-5&2&-1&0\end{array}\right).$$

当 $a=5$ 时，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2\ne r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1)=3$，此时，$\alpha_1$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示．

(II) 对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 进行初等行变换：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

故 $\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3$．

(21)（本题满分 11 分）

【解析】(I) 由于 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，设 $\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$，则

$A(\alpha_1,\alpha_2)=(-\alpha_1,\alpha_2)$，即 $A\alpha_1=-\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2$，而 $\alpha_1\neq 0,\alpha_2\neq 0$，知 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，对应的特征向量分别为 $k_1\alpha_1(k_1\neq 0)$，$k_2\alpha_2(k_2\neq 0)$.

由于 $r(A)=2$，故 $|A|=0$，所以 $\lambda_3=0$.

由于 A 是三阶实对称矩阵，故不同特征值对应的特征向量相互正交，设 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_3=0,\\ \alpha_2^T\alpha_3=0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}x_1-x_3=0,\\ x_1+x_3=0.\end{cases}$$

解此方程组，得 $\alpha_3=(0,1,0)^T$，故 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3(k_3\neq 0)$.

（II）由于不同特征值对应的特征向量已经正交，只需单位化：

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T, \beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T, \beta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=(0,1,0)^T.$$

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$，

$$A=Q\Lambda Q^T$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\\-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

(22)（本题满分 11 分）

【解析】(I) 因为 $P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$，所以 $P\left\{X^2\neq Y^2\right\}=1-P\left\{X^2=Y^2\right\}=0$.

即 $P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}=0$.

利用边缘概率和联合概率的关系得到

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0,Y=-1\}-P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{3};$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{Y=-1\}-P\{X=0,Y=-1\}=\frac{1}{3};$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{Y=1\}-P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{3}.$$

即 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	1/3	0
1	1/3	0	1/3

(II) Z 的所有可能取值为 $-1,0,1$.

$$P\{Z=-1\}=P\{X=1,Y=-1\}=\frac{1}{3}.$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{3}.$$

$$P\{Z=0\}=1-P\{Z=1\}-P\{Z=-1\}=\frac{1}{3}.$$

$Z=XY$ 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

(III) 因为 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(XY)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{E(XY)-E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$,

其中

$E(XY)=E(Z)=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0$，$E(Y)=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0$.

所以 $E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0$，即 X，Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$.

（23）（本题满分 11 分）

【解析】二维连续型随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, 0<y<1, y<x<2-y,\\ 0, 其它.\end{cases}$

(Ⅰ)当$0<x<1$时， $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^x 1dy=x$.

当$1\le x<2$时， $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^{2-x} 1dy=2-x$.

X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ 2-x, & 1\le x<2,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

(II)当$0<y<1$时，Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_y^{2-y} 1dx=2-2y$.

当$0<y<1$时， $f_{X|Y}(x|y)$有意义，条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2y}, & y<x<2-y,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$