2016 全国研究生入学考试考研数学一解析

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在**答题纸**指定位置上.

（1）若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛，则( )

$(A)a<1$ 且 $b>1$　$(B)\ a>1$ 且 $b>1$　$(C)a<1$ 且 $a+b>1$　$(D)a>1$ 且 $a+b>1$

【答案】：(C)

【解析】：注意到 $\frac{1}{x^a}$ 在 $x=0$ 为瑕积分，在 $x=\infty$ 为无穷限反常积分，$\frac{1}{(1+x)^b}$ 仅在 $x=\infty$ 为无穷限反常积分，所以 $a<1,a+b>1$

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1),x<1\\ \ln x,x\ge1\end{cases}$，则 $f(x)$ 一个原函数是（ ）

$(A)F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x-1),x\ge1\end{cases}$　$(B)\ F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x+1)-1,x\ge1\end{cases}$

$(C)\ F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x+1)+1,x\ge1\end{cases}$　$(D)F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x-1)+1,x\ge1\end{cases}$

【答案】：(D)

【解析】：由于原函数一定是连续，可知函数 $F(x)$ 在 $x=1$ 连续，而 (A)、(B)、(C) 中的函数在 $x=1$ 处均不连续，故选 (D)。

（3）若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$，$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 两个解，则 $q(x)=$（ ）

$(A)3x(1+x^2)$　$(B)-3x(1+x^2)$　$(C)\frac{x}{1+x^2}$　$(D)-\frac{x}{1+x^2}$

【答案】：(A)

【解析】：分别将 $y=\left(1+x^{2}\right)^{2}-\sqrt{1+x^{2}}$，$y=\left(1+x^{2}\right)^{2}+\sqrt{1+x^{2}}$ 带入微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$，两式做差，可得 $p(x)=-\dfrac{x}{1+x^{2}}$. 两式做和，并且将 $p(x)=-\dfrac{x}{1+x^{2}}$ 带入，可得 $q(x)=3x\left(1+x^{2}\right)$

（4）已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, x\le 0 \\ \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n} \end{cases}$，$n=1,2,\cdots$（ ）

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 第一类间断点 (B) $x=0$ 是 $f(x)$ 第二类间断点

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导 (D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

【答案】：(D)

【解析】：$f_{-}^{'}(x)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\dfrac{x}{x}=1$

$f_{+}^{'}(x)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{f(x)}{x}$。当 $\dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}$ 时，$1\le\dfrac{f(x)}{x}<\dfrac{n+1}{n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，

由夹逼定理可知：$f_{+}^{'}(x)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{f(x)}{x}=1$。故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，选 (D)。

（5）设 A,B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是（ ）

(A) A^{T} 与 B^{T} 相似 (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似

(C) $A+A^{T}$ 与 $B+B^{T}$ 相似 (D) $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

【答案】：(C)

【解析】：因为 A 与 B 相似，所以存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$，两端取转置与逆可得：$P^{T}A^{T}\left(P^{T}\right)^{-1}=B^{T}$, $P^{-1}A^{-1}P=B^{-1}$, $P^{-1}\left(A+A^{-1}\right)P=B+B^{-1}$，可知 (A)、(B)、(D) 均正确，故选择 (C)。

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^{2}+x_2^{2}+x_3^{2}+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_1x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标系下表示的二次曲面是（ ）

(A) 单叶双曲面　　(B) 双叶双曲面　(C) 椭球面　　(D) 柱面

【答案】: (B)

【解析】: 求出二次型矩阵的特征值。设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$。

$|\lambda E-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{pmatrix}\right|=(\lambda+1)(\lambda^2-5\lambda-4)$,从而可知二次型的正惯性指数为 1，负惯性指数为 2，从而二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 表示双叶双曲面，故选择 (B)。

（7）设随机变量 X 为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$, 记 $p=P\{X\le\mu+\sigma^2\}$. 则（　　）

(A) p 随着 μ 增加而增加　　　　(B) p 随着 σ 增加而增加

(C) p 随着 μ 增加而减少　　　　(D) p 随着 σ 增加而减少

【答案】: (B)

【解析】: 将 X 标准化，$p=P\{X\le\mu+\sigma^2\}=P\{X-\mu\le\sigma^2\}=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le\sigma\}$

从而可知，p 随着 σ 增加而增加

（8） 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3, 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做两次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示两次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X Y 的相关系数为（　　）

$(A)-\frac{1}{2}$　　$(B)-\frac{1}{3}$　　$(C)\frac{1}{3}$　　$(D)\frac{1}{2}$

【答案】: (A)

【解析】: 可知二维离散型随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1	2
0	1/9	2/9	1/9
1	2/9	2/9	0
2	1/9	0	0

所以 $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\dfrac{EXY-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=-\dfrac{1}{2}$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=$ ________.

【答案】: $\dfrac{1}{2}$

【解析】: 原式为：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{\frac{1}{2}x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$

（10）向量场 $A(x,y,z)=(x+y+z)\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，旋度 $rotA=$ ________

【答案】: $rot(A)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+y+z & xy & 2 \end{vmatrix}=j+(y-1)k$

（11）设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz\big|_{(0,1)}=$ ________

【答案】: $dz\big|_{(0,1)}=-dx+2dy$

【解析】: 由一阶微分形式不变性，

$$zdx+(x+1)dz-2ydy=2xf(x-z,y)dx+x^2f_1'(x-z,y)(dx-dz)+x^2f_2'(x-z,y)dy$$

将 $x=0,y=1,z=1$ 代入，$dx+dz-2dy=0$，所以，$dz\big|_{(0,1)}=-dx+2dy$

（12）设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$ ________

【答案】: $\dfrac{1}{2}$

【解析】: $f(x)=x-\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)-x\left(1-ax^2+o(x^2)\right)=\left(a-\dfrac{1}{3}\right)x^3+o(x^3)$

$f'''(0)=1$，可知 $a-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，故 $a=\dfrac{1}{2}$

（13）行列式$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$______

【答案】：$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

【解析】：令$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = D_4$

由展开定理地递推公式$D_4=\lambda D_3+4, D_3=\lambda D_2+3, D_2=\lambda^2+\lambda+2$，故

$D_4=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

（14）设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$N\left(\mu,\sigma^2\right)$的简单随机样本，样本均值$\overline{X}=9.5$，参数$\mu$置信度为$0.95$的双侧置信区间的置信上限为$10.8$，则$\mu$置信度为$0.95$的双侧置信区间为________.

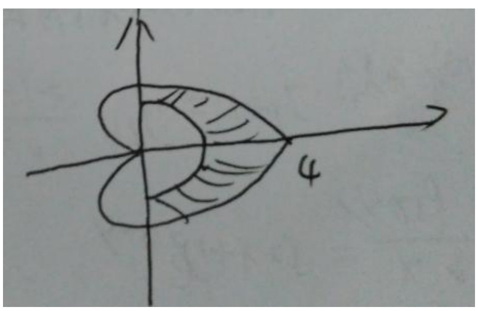
【答案】[8.2,10.8]

【解析】置信区间的中心为$\overline{x}$，可知置信下限为8.2，故置信区间为[8.2,10.8]。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）已知平面区域$D=\left\{\left(r,\theta\right)|2\le r\le 2\left(1+\cos\theta\right),-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分$\iint\limits_D x\,dx\,dy$。

【答案】：积分区域关于x轴对称，D_1为x轴上方区域



$$\iint_D xdxdy=2\iint_{D_1} xdxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta dr$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos\theta+3\cos^2\theta+\cos^3\theta)\cos\theta d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta)d\theta$$

$$=\frac{16}{3}(3\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+3\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2})$$

$$=\frac{16}{3}(\frac{15\pi}{16}+2)=5\pi+\frac{32}{3}$$

（16）设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$。

（1）证明：反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛

（2）若 $y(0)=1, y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 的值

【解析】：（1） $y''+2y'+ky=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+k=0$，

所以 $\lambda_1=\dfrac{-2+\sqrt{4-4k}}{2}=-1+\sqrt{1-k}, \lambda_2=-1-\sqrt{1-k}$

由于 $0<k<1$，所以 $\lambda_1<0, \lambda_2<0$，

所以 $y(x)=C_1e^{\left(-1+\sqrt{1-k}\right)x}+C_2e^{\left(-1-\sqrt{1-k}\right)x}$

所以 $\int_0^{+\infty}y(x)dx=C_1\int_0^{+\infty}e^{\lambda_1x}dx+C_2\int_0^{+\infty}e^{\lambda_2x}dx$

又因为 $\lambda_1<0, \lambda_2<0$，所以 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛

（2）由（1）可知 $\int_0^{+\infty}y(x)dx=\dfrac{C_1}{1-\sqrt{1-k}}+\dfrac{C_2}{\sqrt{1-k}+1}$，

由于 $y(0)=1, y'(0)=1$，所以 $\begin{cases}C_1+C_2=1\\ C_1\left(\sqrt{1-k}-1\right)+C_2\left(-\sqrt{1-k}-1\right)=1\end{cases}$

故 $\int_0^{+\infty}y(x)dx=\dfrac{C_1}{1-\sqrt{1-k}}+\dfrac{C_2}{\sqrt{1-k}+1}=\dfrac{3}{k}$

（17）设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$

的光滑曲线，计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$，并求 $I(t)$ 的最小值。

【答案】： 由于 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，所以 $f(x,y)=xe^{2x-y}+\varphi(y)$，

由于 $f(0,y)=y+1$，所以 $f(0,y)=\varphi(y)=y+1$，所以 $f(x,y)=xe^{2x-y}+y+1$

由于 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=df(x,y)$，故

$$I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=f(x,y)\Big|_{(0,0)}^{(1,t)}=e^{2-t}+t$$

$I(t)=e^{2-t}+t$，$I'(t)=1-e^{2-t}$，令 $I'(t)=0$, 得 $t=2$

当 $t<2$ 时，可知 $I'(t)<0$，$I(t)$ 单调递减；当 $t>2$ 时，可知 $I'(t)>0$，$I(t)$ 单调递增；

所以 $I(t)$ 在 $t=2$ 时取得最小值，$I(2)=3$

（18）设有界区域 Ω 由曲面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+1)dydz-2ydzdx+3zdxdy$。

【解析】：由 Gauss 公式可得

$$I=\iiint_V(2x-2+3)dxdydz=\iiint_V(2x+1)dxdydz$$
$$=\int_0^1 dz\iint_{2x+y\le 2-2z}(2x+1)dxdy=\frac{1}{2}$$

（19）已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$，

证明（1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；（2）$\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在且 $0<\lim_{n\to\infty}x_n<2$。

【解析】：证明：（1）由 Lagrange 中值定理可知

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi_n)|\cdot|x_n-x_{n-1}|,$$

其中 ξ_n 在 x_n 与 x_{n-1} 之间。

由于 $0<f'(x)<\frac{1}{2}$，所以 $|x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|$，

同理可知，$|x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$

注意到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛。

（2）由于$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$收敛，所以部分和数列$S_n=x_{n+1}-x_n+x_n-x_{n-1}\cdots+x_2-x_1=x_{n+1}-x_1$收敛，也即$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_1)$存在，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在。

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$，所以$a=f(a)$。

令$g(x)=f(x)-x$，

$g(0)=1>0$，$g(2)=f(2)-2=f(0)+f'(\xi)(2-0)-2<f(0)+\frac{1}{2}(2-0)-2<0$，

所以$g(x)$在$(0,2)$上有一根，又$g'(x)=f'(x)-1<0$，则$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$内唯一的根在$(0,2)$上。故$0<a<1$，也即$0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$。

（20）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$，当$a$为何值时，方程$AX=B$无解，有唯一解，有无穷多解？在有解时，求解此方程。

【解析】：（1）当$|A|\neq 0$时，可知方程$AX=0$有唯一解

$|A|=(a-1)(a+2)$即当$a\neq 1$且$a\neq -2$时方程有唯一解

$$(A\vdots B)\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\2&a&1\vdots&0&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3\vdots&-4&a-4\\0&0&a-1&1-a&0\end{pmatrix}$$

令$\beta_1=\begin{pmatrix}2\\0\\-a-1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}2\\a\\-2\end{pmatrix}$

所以方程组$Ax=\beta_1$可解的$\alpha_1=\left(1-\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+2},-1\right)^T$

方程组$Ax=\beta_2$可解的$\alpha_2=\left(2+\frac{a-4}{a+2},\frac{a-4}{a+2},0\right)^T$

所以 $X=(\alpha_1,\alpha_2)$

（2）当 $a=1$ 时，方程 $Ax=B$ 有无穷多解

方程组 $Ax=\beta_1$ 可解的 $\alpha_1=\left(\frac{2}{3},-\frac{4}{3}-k_1,k_1\right)^T$,k_1为常数

方程组 $Ax=\beta_2$ 可解的 $\alpha_2=(1,-1-k_2,k_2)^T$,k_2为常数

所以 $X=(\alpha_1,\alpha_2)^T$

（3）当 $a=-2$ 时，方程 $Ax=B$ 无解

（21）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$.

（1）求 A^{99}.

（2）设三阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$，记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

【解析】：（1）$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2+3\lambda+2)\lambda$，可知 A 的特征值为：$0,-1,-2$。

$A\to\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 0 的特征向量为 $\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

$A+E\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 -1 的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

$A+2E\to\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 -2 的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

令 $P=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$，$A=P\Lambda P^{-1}$，

则有

$$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

（2）$B^2=BA$ 可知 $B^{100}=BA^{99}$，即

$$\begin{pmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{99}-2&1-2^{99}&2-2^{98}\\2^{100}-2&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $\beta_1=\left(2^{99}-2\right)\alpha_1+\left(2^{100}-2\right)\alpha_2$，$\beta_2=\left(1-2^{99}\right)\alpha_1+\left(1-2^{100}\right)\alpha_2$，$\beta_3=\left(2-2^{98}\right)\alpha_1+\left(2-2^{99}\right)\alpha_2$

（22）（本题满分 11 分）设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1 & X\le Y\\0 & X>Y\end{cases}$

（1）写出 (X,Y) 的概率密度.

（2）问 U 与 X 是否相互独立，说明理由。

（3）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(Z)$.

【解析】：（1）D 的面积 $S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{1}{3}$，则 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}3 & (x,y)\in D\\0 & \text{其他}\end{cases}$.

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=3(\sqrt{x}-x^2), & 0<x<1\\0 & \text{其他}\end{cases}$

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)dt=\begin{cases}0 & x<0\\2x^{\frac{3}{2}}-x^3 & 0\le x<1\\1 & x\ge 1\end{cases}$$

当$U=0$时，$P\{X\le x\}=\begin{cases}0 & x<0\\ 3x^2-2x^3 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$，可知$X$与$U$有关，故不独立。

（3）$F(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+U\le z\}$

$$=P\{U=1\}P\{X+U\le z|U=1\}+P\{U=0\}P\{X+Y\le z|U=0\}$$
$$=\frac{1}{2}P\{X\le z-1|U=1\}+\frac{1}{2}P\{X\le z|U=0\}$$

其中$P\{X\le x|U=0\}=\begin{cases}0 & x<0\\ 3x^2-2x^3 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$,$P\{X\le x|U=1\}=\begin{cases}0 & x<0\\ 4x^{\frac{3}{2}}-3x^2 & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

故$P\{X\le z-1|U=1\}=\begin{cases}0 & z<1\\ 4(z-1)^{\frac{3}{2}}-3(z-1)^2 & 1\le z<2\\ 1 & z\ge 2\end{cases}$

$P\{X\le z|U=0\}=\begin{cases}0 & z<0\\ 3z^2-2z^3 & 0\le z<1.\\ 1 & z\ge 1\end{cases}$

从而$F(z)=\begin{cases}0, z<0\\ \frac{1}{2}\left(3z^2-2z^3\right), 0\le z<1\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[4(z-1)^{\frac{3}{2}}-3(z-1)^2\right], 1\le z<2\\ 1, z\ge 2\end{cases}$

（23） 设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, 0<x<\theta\\ 0, else\end{cases}$，其中$\theta\in(0,+\infty)$为未知参数，

X_1,X_2,X_3为来自总体X的简单随机样本，$T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$。

（1）求T的概率密度；

（2）确定a，使得aT为θ的无偏估计.

【解析】:（1）T的分布函数为

$F_T(x)=P\{T\le x\}=P\{X_1\le x,X_2\le x,X_3\le x\}$

$$=\prod_{i=1}^{3}P\{X_i\le x\}$$ （$F(x)$为X的分布函数）.

$$=[F(x)]^3$$

则T的概率密度为 $f_T(x)=3[F(x)]^2f(x)=\begin{cases}\dfrac{9x^8}{\theta^9} & 0<x<\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$.

(2) $ET=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_T(x)dx=\int_0^{\theta}\dfrac{9x^9}{\theta^9}dx=\dfrac{9\theta}{10}$，则$E(aT)=aET=\dfrac{9a}{10}\theta$，可知$a=\dfrac{10}{9}$.