2014 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $a \neq 0$, 则当 n 充分大时有（　　）

（A）$|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$

（B）$|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$

（C）$a_n > a - \dfrac{1}{n}$

（D）$a_n < a + \dfrac{1}{n}$

（2）下列曲线有渐近线的是（　　）

（A）$y = x + \sin x$

（B）$y = x^2 + \sin x$

（C）$y = x + \sin\dfrac{1}{x}$

（D）$y = x^2 + \sin\dfrac{1}{x}$

（3）设 $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$，则当 $x \to 0$ 时，若 $P(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列选项中错误的是（）

（A）$a = 0$

（B）$b = 1$

（C）$c = 0$

（D）$d = \dfrac{1}{6}$

（4）设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上（　　）

（A）当 $f'(x)\geq 0$ 时，$f(x)\geq g(x)$

（B）当 $f'(x)\geq 0$ 时，$f(x)\leq g(x)$

（C）当 $f''(x)\geq 0$ 时，$f(x)\geq g(x)$

（D）当 $f''(x)\geq 0$ 时，$f(x)\leq g(x)$

（5）行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$

（A）$(ad-bc)^2$

（B）$-(ad-bc)^2$

（C）$a^2d^2-b^2c^2$

（D）$b^2c^2-a^2d^2$

（6）设 a_1,a_2,a_3 均为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的

（A）必要非充分条件

（B）充分非必要条件

（C）充分必要条件

（D）既非充分也非必要条件

（7）设随机事件 A 与 B 相互独立，且 P（B）=0.5，P(A-B)=0.3，求 P（B-A）=（　　）

（A）0.1

（B）0.2

（C）0.3

（D）0.4

（8）设 X_1,X_2,X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从的分布为

（A）F（1,1）

（B）F（2,1）

（C）t(1）

（D）t(2)

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设某商品的需求函数为$Q=40-2P$（P 为商品价格），则该商品的边际收益为________。

(10) 设 D 是由曲线$xy+1=0$与直线$y+x=0$及 y=2 围成的有界区域，则 D 的面积为________。

(11) 设$\int_0^a xe^{2x}dx=\frac{1}{4}$，则$a=$_____.

(12) 二次积分$\int_0^1 dy\int_y^1 (\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx=$________.

（13）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数为 1，则$a$的取值范围是________

（14）设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{3\theta^2} & \theta<x<2\theta \\ 0 & 其它\end{cases}$，其中$\theta$是未知参数，$X_1,X_2,...,X_n$，为来自总体 X 的简单样本，若$c\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ 是θ^2的无偏估计，则 c = ________

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

（16）（本题满分 10 分）

设平面区域$D=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\}$，计算$\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy.$

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f\left(u\right)$ 具有二阶连续导数，$z=f\left(e^{x}\cos y\right)$ 满足 $\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^{x}\cos y)e^{x}$ 若 $f(0)=0$，求 $f\left(u\right)$ 的表达式

.

（18）（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^{n}$ 的收敛域及和函数。

（19）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$，证明：

（I）$0\le\int_{a}^{x}g(t)dt\le x-a,x\in[a,b];$

（II）$\int_{a}^{a+\int_{a}^{b}g(t)dt}f(x)dx\le\int_{a}^{b}f(x)g(x)dx.$

（20）（本题满分 11 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$E$ 为 3 阶单位矩阵。

①求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；　　②求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B

（21）（本题满分 11 分）证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & n\end{pmatrix}$ 相似。

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率分布为 P{X=1}=P{X=2}=$\frac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)(i=1,2)$

（1）求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$

（2）求 EY

（23）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 的概率分布相同，X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\frac{1}{3},P\{X=1\}=\frac{2}{3}$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$

（1） 求（X，Y）的概率分布

（2）求 P{X+Y$\leq$1}