2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列曲线有渐近线的是 ( )

(A) $y=x+\sin x$ (B) $y=x^2+\sin x$

(C) $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ (D) $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

(2) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数， $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上 ( )

(A) 当 $f'(x)\ge 0$ 时， $f(x)\ge g(x)$ (B) 当 $f'(x)\ge 0$ 时， $f(x)\le g(x)$

(C) 当 $f''(x)\ge 0$ 时， $f(x)\ge g(x)$ (D) 当 $f''(x)\ge 0$ 时， $f(x)\le g(x)$

(3) 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=$ ( )

(A) $\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

(B) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx=\min\limits_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx\right\}$，则

$a_1\cos x+b_1\sin x=$ ( )

(A) $2\sin x$ (B) $2\cos x$ (C) $2\pi\sin x$ (D) $2\pi\cos x$

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ( )

(A) $(ad-bc)^2$ (B) $-(ad-bc)^2$ (C) $a^2d^2-b^2c^2$ (D) $b^2c^2-a^2d^2$

(6) 设 a_1,a_2,a_3 均为三维向量，则对任意常数 k,l，向量组 a_1+ka_3，a_2+la_3 线性无关是向量组 $\boldsymbol{B}=\left(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right)$ 线性无关的 ( )

(A)必要非充分条件 (B)充分非必要条件

(C)充分必要条件 (D)既非充分也非必要条件

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$ ( )

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4

(8) 设连续性随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，且方差均存在，X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则 ( )

(A) $EY_1>EY_2$，$DY_1>DY_2$ (B) $EY_1=EY_2$，$DY_1=DY_2$

(C) $EY_1=EY_2$，$DY_1<DY_2$ (D) $EY_1=EY_2$，$DY_1>DY_2$

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为__________.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1),\quad x\in[0,2]$，则 $f(7)=$__________.

(11) 微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 $y=$__________.

(12) 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L zdx+ydz=$__________.

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围__________.

(14) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, \theta<x<2\theta, \\ 0, \qquad 其他, \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单样本，若 $E(c\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2)=\theta^2$，则 $c=$________.

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$ 若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

(18)(本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ $(z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy\,.$$

(19)(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$， $0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$， $\cos a_n-a_n=\cos b_n$， 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

(I) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(II) 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$， E 为三阶单位矩阵.

(I)求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

(II)求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

(21)(本题满分 11 分)

证明n阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$,在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布$U(0,i),(i=1,2)$.

(I) 求Y的分布函数$F_Y(y)$;

(II) 求EY.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 $E(X)$，$E(X^2)$；

(II) 求 θ 的最大似然估计量 $\widehat{\theta}_n$；

(III) 是否存在实数 a，使得对任何 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\widehat{\theta}_n-a\right|\geq\varepsilon\right\}=0$？