2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题解析

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)设$\{x_n\}$是数列,下列命题中不正确的是（　　）

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$

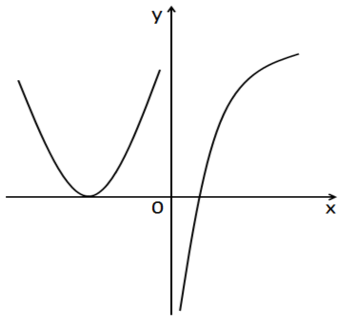
(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

【答案】(D)

【解析】答案为 D, 本题考查数列极限与子列极限的关系.

数列$x_n\to a(n\to\infty)\Leftrightarrow$对任意的子列$\{x_{n_k}\}$均有$x_{n_k}\to a(k\to\infty)$,所以 A、B、C 正确； D 错(D 选项缺少$x_{3n+2}$的敛散性),故选 D

(2) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其 2 阶导函数$f''(x)$的图形如右图所示,则曲线$y=f(x)$的拐点个数为（　　）



(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【答案】(C)

【解析】根据拐点的必要条件，拐点可能是$f''(x)$不存在的点或$f''(x)=0$的点处产生.所以$y=f(x)$有三个点可能是拐点，根据拐点的定义，即凹凸性改变的点；二阶导函数$f''(x)$符号发生改变的点即为拐点.所以从图可知，拐点个数为 2，故选 C.

(3) 设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2x,x^2+y^2\le 2y\}$,函数$f(x,y)$在$D$上连续,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　）

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(C) $2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f\left(x,y\right)\mathrm{d}y$

(D) $2\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{2x-x^2}} f\left(x,y\right)\mathrm{d}y$

【答案】(B)

【解析】根据图可得，在极坐标系下该二重积分要分成两个积分区域

$$D_1=\left\{(r,\theta)\middle|0\le\theta\le\frac{\pi}{4},0\le r\le 2\sin\theta\right\}\ D_2=\left\{(r,\theta)\middle|\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2\cos\theta\right\}$$

所以

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr\ ,$$

故选 B.

(4) 下列级数中发散的是( )

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$

(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$ (D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

【答案】(C)

【解析】A 为正项级数，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}=\frac{1}{3}<1$，所以根据正项级数的比值判别法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 收敛；B 为正项级数，因为 $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n^{3/2}}$，根据 P 级数收敛准则，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$ 收敛；C，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$，根据莱布尼茨判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散，所以根据级数收敛定义知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$ 发散；D 为正项级数，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}<1$，所以根据正项级数的比值判别法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛，所以选 C.

(5)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$.若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为 ( )

(A) $a\notin\Omega,d\notin\Omega$　　(B) $a\notin\Omega,d\in\Omega$

(C) $a\in\Omega,d\notin\Omega$　　(D) $a\in\Omega,d\in\Omega$

【答案】(D)

【解析】$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$,

由 $r(A)=r(A,b)<3$，故 $a=1$ 或 $a=2$，同时 $d=1$ 或 $d=2$.故选（D）

(6)_设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$ 则 $f=(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 ( )

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

【答案】(A)

【解析】由 $x=Py$，故 $f=x^TAx=y^T(P^TAP)y=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

且 $P^TAP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

又因为 $Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=PC$

故有 $Q^TAQ=C^T(P^TAP)C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

所以 $f=x^TAx=y^T(Q^TAQ)y=2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.选（A）

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件,则: ( )

(A) $P(AB)\le P(A)P(B)$ (B) $P(AB)\ge P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$ (D) $P(AB)\ge \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

【答案】(C)

【解析】由于 $AB\subset A, AB\subset B$，按概率的基本性质，我们有 $P(AB)\le P(A)$ 且 $P(AB)\le P(B)$，从而 $P(AB)\le\sqrt{P(A)\cdot P(B)}\le\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$，选(C).

(8) 设总体 $X\sim B(m,\theta)$, $X_1,X_2,\dots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值,则 $E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=$ ( )

(A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$ (B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$

(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$ (D) $mn\theta(1-\theta)$

【答案】(B)

【解析】根据样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 的性质 $E(S^2)=D(X)$，而 $D(X)=m\theta(1-\theta)$，从而 $E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2]=(n-1)E(S^2)=m(n-1)\theta(1-\theta)$，选(B).

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ ________.

【答案】 $-\dfrac{1}{2}$

【解析】原极限 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

(10)设函数 $f(x)$ 连续， $\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$, 若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$, 则 $f(1)=$ ________.

【答案】 2

【解析】因为 $f(x)$ 连续，所以 $\varphi(x)$ 可导，所以 $\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)dt+2x^2f(x^2)$；

因为 $\varphi(1)=1$，所以 $\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt=1$

又因为 $\varphi'(1)=5$，所以 $\varphi'(1)=\int_0^1 f(t)dt+2f(1)=5$

故 $f(1)=2$

(11)若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=$ ________.

【答案】$-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$

【解析】当 $x=0$， $y=0$ 时带入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$，得 $z=0$.

对 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 求微分，得

$d(e^{x+2y+3z}+xyz)=e^{x+2y+3z}d(x+2y+3z)+d(xyz)$

$=e^{x+2y+3z}(dx+2dy+3dz)+yzdx+xzdy+xydz=0$

把 $x=0$， $y=0$， $z=0$ 代入上式，得 $dx+2dy+3dz=0$

所以 $dz\big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$

(12)设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处取得极值 3，则 $y(x)=$ ________.

【答案】 $y(x)=e^{-2x}+2e^{x}$

【解析】 $y''+y'-2y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$，特征根为 $\lambda=-2$， $\lambda=1$，所以该齐次微分方程的通解为 $y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$， 因为 $y(x)$ 可导，所以 $x=0$ 为驻点，即 $y(0)=3$， $y'(0)=0$，所以 $C_1=1$， $C_2=2$， 故 $y(x)=e^{-2x}+2e^{x}$

(13)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$ ________.

【答案】 21

【解析】 A 的所有特征值为 $2,-2,1$. B 的所有特征值为 $3,7,1$.

所以 $|B|=3\times7\times1=21$.

(14)设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则

$P\{XY-Y<0\}=$ ________.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】由题设知，$X\sim N(1,1),Y\sim N(0,1)$，而且 X、Y 相互独立，从而

$$P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\}=P\{X-1>0,Y<0\}+P\{X-1<0,Y>0\}$$

$$=P\{X>1\}P\{Y<0\}+P\{X<1\}P\{Y>0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}.$$

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=c=kx^3$.若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

【答案】 $a=-1,b=\frac{-1}{2},k=\frac{-1}{3}$

【解析】法一：

因为 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$， $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$，

则有，

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x+(b-\frac{a}{2})x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3)}{kx^3},$$

可得：$\begin{cases}1+a=0\\ b-\dfrac{a}{2}=0\\ \dfrac{a}{3k}=1\end{cases}$，所以，$\begin{cases}a=-1\\ b=-\dfrac{1}{2}\\ k=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$.

法二：

由已知可得得

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$$

由分母 $\lim_{x\to 0}3kx^2=0$，得分子 $\lim_{x\to 0}(1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x)=\lim_{x\to 0}(1+a)=0$，求得

c；

于是$1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+b\sin x+b(1+x)\cos x+b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x}{6kx}$$

由分母$\lim\limits_{x\to 0}6kx=0$，得分子

$\lim\limits_{x\to 0}[1+b\sin x+2b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x]=\lim\limits_{x\to 0}(1+2b\cos x)=0$，求得$b=-\dfrac{1}{2}$；

进一步，b 值代入原式

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}\sin x-(1+x)\cos x-\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}x(1+x)\sin x}{6kx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cos x-\cos x+(1+x)\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{2}(1+x)\sin x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{2}x(1+x)\cos x}{6k}$$

$=\dfrac{-\frac{1}{2}}{6k}$，求得$k=-\dfrac{1}{3}$.

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分$\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2, y\ge x^2\}$.

【答案】$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{5}$

【解析】$\iint\limits_D x(x+y)dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy$

$$=2\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2dy$$

$$=2\int_0^1 x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)dx$$

$$=2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}dx-\frac{2}{5}\overset{x=\sqrt{2}\sin t}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2 t\,2\cos^2 t\,dt-\frac{2}{5}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2t\,dt-\frac{2}{5}\overset{u=2t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 u\,du-\frac{2}{5}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

(17)(本题满分 10 分)

为了实现利润的最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设Q为该商品的需求量，P为价格，MC为边际成本，η为需求弹性$(\eta>0)$.

(I) 证明定价模型为$P=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$；

(II) 若该商品的成本函数为$C(Q)=1600+Q^2$，需求函数为$Q=40-P$，试由（I）中的定价模型确定此商品的价格.

【答案】(I)略(II) $P=30$.

【解析】(I)由于利润函数$L(Q)=R(Q)-C(Q)=PQ-C(Q)$,两边对Q求导，得

$$\frac{dL}{dQ}=P+Q\frac{dP}{dQ}-C'(Q)=P+Q\frac{dP}{dQ}-MC.$$

当且仅当$\dfrac{dL}{dQ}=0$时，利润$L(Q)$最大，又由于$\eta=-\dfrac{P}{Q}\cdot\dfrac{dQ}{dP}$,所以$\dfrac{dP}{dQ}=-\dfrac{1}{\eta}\cdot\dfrac{P}{Q}$,

故当$P=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$时，利润最大.

(II)由于$MC=C'(Q)=2Q=2(40-P)$,则$\eta=-\dfrac{P}{Q}\cdot\dfrac{dQ}{dP}=\dfrac{P}{40-P}$代入(I)中的定价模型，得$P=\dfrac{2(40-P)}{1-\dfrac{40-P}{P}}$,从而解得$P=30$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在定义域I上的导数大于零，若对任意的$x_0\in I$，曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线与直线$x=x_0$及x轴所围成区域的面积恒为 4,且$f(0)=2$，求$f(x)$表达式.

【答案】$f(x)=\dfrac{8}{4-x}$

【解析】曲线的切线方程为$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，切线与x轴的交点为

$$\left(x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},0\right)$$

故面积为：$S=\dfrac{1}{2}\dfrac{f^{2}\left(x_{0}\right)}{f'\left(x_{0}\right)}=4$.

故 $f\left(x\right)$满足的方程为 $f^{2}\left(x\right)=8f'\left(x\right)$,此为可分离变量的微分方程,

解得 $f\left(x\right)=\dfrac{-8}{x+C}$，又由于 $f\left(0\right)=2$，带入可得$C=-4$，从而 $f\left(x\right)=\dfrac{8}{4-x}$

(19)(本题满分 10 分)

（I）设函数$u(x),v(x)$可导，利用导数定义证明$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

（II）设函数$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$可导， $f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$的求导公式.

【答案】 $f'(x)=[u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)]'$

$$=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$$

【解析】（I） $[u(x)v(x)]'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x+h)v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x)$$

$$=u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$$

（II）由题意得

$f'(x)=[u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)]'$

$$=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$$

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

(I) 求a的值；

(II)若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为3阶单位矩阵，求 $\boldsymbol{X}$.

【答案】 $a=0, X=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

【解析】(I) $A^3=O\Rightarrow |A|=0\Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 0\\ 1 & a & -1\\ 0 & 1 & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1-a^2 & a & -1\\ -a & 1 & a\end{vmatrix}=a^3=0\Rightarrow a=0$

(II)由题意知

$$X-XA^2-AX+AXA^2=E\Rightarrow X\left(E-A^2\right)-AX\left(E-A^2\right)=E$$

$$\Rightarrow (E-A)X\left(E-A^2\right)=E\Rightarrow X=(E-A)^{-1}\left(E-A^2\right)^{-1}=\left[\left(E-A^2\right)(E-A)\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow X=\left(E-A^2-A\right)^{-1}$$

$$E-A^2-A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & 1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1\end{array}\right)$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

(21) (本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

(I) 求 a,b 的值;

(II) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

【答案】$a=4,b=5,P=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

【解析】(1) $A\sim B\Rightarrow tr(A)=tr(B)\Rightarrow 3+a=1+b+1$

$$|A|=|B|\Rightarrow\begin{vmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{vmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}a-b=-1\\2a-b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=5\end{cases}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}=E+C$$

$$C=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&3\end{pmatrix}$$

C 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=4$

$\lambda=0$ 时 $(0E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_1=(2,1,0)^T;\xi_2=(-3,0,1)^T$

$\lambda=5$ 时 $(4E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_3=(-1,-1,1)^T$

A 的特征值 $\lambda_A=1+\lambda_C:1,1,5$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$,

$$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$$

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, x>0\\0, \quad x\le 0\end{cases}$,对 X 进行独立重复的观测,直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数

(I)求 Y 的概率分布;

(II)求 $E(Y)$.

【答案】(I) $P\{Y=n\}=C_{n-1}^{1}p(1-p)^{n-2}p=(n-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{n-2}$， $n=2,3,\cdots$;

(II) $E(Y)=16$.

【解析】(I) 记 p 为观测值大于 3 的概率，则 $p=P(X>3)=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2dx=\frac{1}{8}$，

从而 $P\{Y=n\}=C_{n-1}^1 p(1-p)^{n-2}p=(n-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{n-2}$， $n=2,3,\cdots$ 为 Y 的概率分布；

(II) **法一:分解法:**

将随机变量 Y 分解成 $Y=M+N$ 两个过程,其中 M 表示从1到 $n(n<k)$ 次试验观测值大于3首次发生， N 表示从 $n+1$ 次到第 k 试验观测值大于3首次发生.

则 $M\sim Ge(n,p)$， $N\sim Ge(k-n,p)$(注：Ge 表示几何分布)

所以 $E(Y)=E(M+N)=E(M)+E(N)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}=\frac{2}{p}=\frac{2}{\frac{1}{8}}=16$.

法二:直接计算

$$E(Y)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot P\{Y=n\}=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)[(\frac{7}{8})^{n-2}-2(\frac{7}{8})^{n-1}+(\frac{7}{8})^{n}]$$

记 $S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}\quad -1<x<1$，则

$$S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}=(\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot x^{n-1})'=(\sum_{n=2}^{\infty}x^n)''=\frac{2}{(1-x)^3},$$

$$S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}=xS_1(x)=\frac{2x}{(1-x)^3},$$

$$S_3(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n}=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}=x^2S_1(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

所以 $S(x)=S_1(x)-2S_2(x)+S_3(x)=\frac{2-4x+2x^2}{(1-x)^3}=\frac{2}{1-x}$，

从而 $E(Y)=S(\frac{7}{8})=16$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{1-\theta},\theta\le x\le 1,\\ 0,\qquad 其他,\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数,

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I)求 θ 的矩估计量；

(II)求 θ 的最大似然估计量.

【答案】(I) $\theta = 2\overline{X} - 1$, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ；

(II) $\theta = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$.

【解析】(I) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)dx = \int_{\theta}^{1} x \cdot \frac{1}{1-\theta}dx = \frac{1+\theta}{2}$，

令 $E(X) = \overline{X}$，即 $\frac{1+\theta}{2} = \overline{X}$，解得 $\theta = 2\overline{X} - 1$, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 为 θ 的矩估计量 ；

(II)似然函数 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^n, \theta \le x_i \le 1 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$，

当 $\theta \le x_i \le 1$ 时，$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-\theta} = (\frac{1}{1-\theta})^n$，则 $\ln L(\theta) = -n\ln(1-\theta)$.

从而 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{1-\theta}$，关于 θ 单调增加，

所以 $\theta = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 为 θ 的最大似然估计量.