2018 全国研究生入学考试考研数学一试题

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的.

1. 下列函数不可导的是：

A. $y=|x|\sin|x|$　　B. $y=|x|\sin\sqrt{|x|}$

C. $y=\cos|x|$　　D. $y=\cos\sqrt{|x|}$

2.过点（1,0,0）与（0,1,0）且与 $z=x^2+y^2$ 相切的平面方程为

A. $z=0$ 与 $x+y-z=1$　　B. $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$

C. $y=x$ 与 $x+y-z=1$　　D. $y=x$ 与 $2c+2y-z=2$

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$

A. $\sin1+\cos1$　　B. $2\sin1+\cos1$

C. $\sin1+\cos1$　　D. $3\sin1+2\cos1$

4. $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{e^x}dx$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})dx$，则 M,N,K 的大小关系为：

A. $M>N>K$　　B. $M>K>N$

C. $K>M>N$　　D. $N>M>K$

5. 下列矩阵中，与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为________.

A. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

6.设 A,B 为 n 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩，$(X\ \ Y)$ 表示分块矩阵，则

A. $r(A\ \ AB)=r(A)$　　B. $r(A\ \ BA)=r(A)$

C. $r(A\ \ B)=\max\{r(A),r(B)\}$ D. $r(A\ \ B)=r(A^T\ \ B^T)$

7.设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$, $\int_0^2 f(x)dx=0.6$，则 $p\{x<0\}$ =______。

A.0.2 B.0.3

C.0.4 D.0.6

8.给定总体 $X-N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，给定样本 X_1，X_2,……，X_n，对总体均值 μ 进行检验，令 H_0：$\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$，则

A.若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时也拒绝 H_0.

B.若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时拒绝 H_0.

C.若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时接受 H_0.

D.若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时也接受 H_0.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$，则 k=______。

10. $y=f(x)$ 的图像过（0，0），且与 $y=a^x$ 相切于（1，2）.求 $\int_0^1 x f''(x)dx$ =______。

11. $F(x,y,z)=xy\bar{\varepsilon}-yz\bar{\eta}+xz\bar{\kappa}$，求 $\mathrm{rot}\vec{F}(1,1,0)$ =______。

12. 曲线 s 由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $x+y+z=0$ 相交而成，求 $\oint xyds$ =______。

13. 二阶矩阵 A 有两个不同的特征值，α_1，α_2 是 A 的线性无关特征向量，$A^2(\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1+\alpha_2)$，则 $|A|$ =______。

14. A，B 独立，A，C 独立，$BC\neq\phi$，$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，$P(AC\,|\,AB\cup C)=\frac{1}{4}$，则 $P(C)$=______。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx$

16. 一段绳子总长为 2，分成三段，分别围成圆形，正方形，正三角形。这三段分别为多长时，所得的面积之和最小，并求出最小值。

17. 曲面 $\sum$ ：$x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 取正面，求 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+(y^3+z)dxdz+z^3dxdy$

18. 微分方程 $y'+y=f(x)$

（1）当 $f(x)=x$ 时，求微分方程的通解。

（2）当 $f(x)$ 为周期函数时，证明微分方程 有通解与其对应，且该通解也为周期函数。

19.数列 $\{x_n\}$， $x_1>0,\ x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$。证 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

20.（本小题 11 分）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+\alpha x_3)^2$，其中 α 为是参数。

（1）求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解。

（2）求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形。

21.（本题满分 11 分）

已知 a 是常数，且矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$ 可经初等变换化为变矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$。

（1）求 a；

（2）求满足 AP=B 的可逆矩阵 P.

22. 已知随机变量 X，Y 相互独立，且 $P(X=1)=\dfrac{1}{2}$，$P(X=-1)=\dfrac{1}{2}$，Y 服从参数为 λ 的泊松分布，Z=XY

（1）$Cov(X,Z)$.

（2）求 Z 的概率分布.

23. X_1，X_2,……，X_n 来自总体 X 的分布，$f(x)=\dfrac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}$（$\sigma$未知,$-\infty<x<+\infty$）。

（1）求 σ 的极大似然估计。

（2）求 $E(\hat{\sigma}), D(\hat{\sigma})$