2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题:1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为 （　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$ （　）

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　　（B）$(-1)^n(n-1)!$　　（C）$(-1)^{n-1}n!$　　（D）$(-1)^n n!$

（3）如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是 （　）

（A）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（B）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（C）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

（D）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

（4）设 $I_K=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\,dx(k=1,2,3)$，则有（　）

（A）$I_1<I_2<I_3$　　（B）$I_3<I_2<I_1$　　（C）$I_2<I_3<I_1$　　（D）$I_2<I_1<I_3$

（5）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\C_1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\C_2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\C_3\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\C_4\end{pmatrix}$，其中 C_1,C_2,C_3,C_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为（　）

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　(C) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

(6) 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $p^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 若 P=（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$），

$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $Q^{-1}AQ=$（　）

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为1与参数为4的指数分布，则 $P\{X<Y\}=$（　）

(A) $\frac{1}{5}$　(B) $\frac{1}{3}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{4}{5}$

(8) 将长度为$1m$的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为（　）

(A) 1　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $-\frac{1}{2}$　(D) -1

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$__________

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$__________

(11) $grad(xy+\frac{z}{y})|_{(2,1,1)}=$__________

(12) 设 $\Sigma=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 ds=$__________

(13) 设 α 为 3 维单位列向量，E 为 3 阶单位矩阵，则矩阵 $E-\alpha\alpha^T$ 的秩为________

(14) 设 A, B, C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$p(AB)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{3},p(AB|\overline{C})=$______

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) 证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$

(16) 求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17) 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(18) 已知曲线 $L:\begin{cases} x=f(t), \\ y=\cos t \end{cases}$ $(0\le t<\dfrac{\pi}{2})$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$， $f'(t)>0$ $(0<t<\dfrac{\pi}{2})$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

(19) 已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$的曲线段，计算曲线积分 $J=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$

(20) 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$， $\beta=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

（I）计算行列式 $|A|$；

（II）当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

(21)

已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$ 的秩为 2

（I）求实数 a 的值；

（II）求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准形.

（22）

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

（Ⅰ）求 $P\{X=2Y\}$；

（Ⅱ）求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

(23)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$. 设 $Z=X-Y$.

（Ⅰ）求 Z 的概率密度 $f(z,\sigma^2)$;

（Ⅱ）设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$

（III）证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量