2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题解析

一、选择题:1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为 (　　)

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【答案】C

【考点】函数图形的渐近线

【难易度】★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

（i）当曲线上一点 M 沿曲线无限远离原点时，如果 M 到一条直线的距离无限趋近于零，那么这条直线称为这条曲线的渐近线。

（ii）渐近线分为水平渐近线（$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$，$b$ 为常数）、垂直渐近线（$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$）和斜渐近线（$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$，$a,b$ 为常数）。

（iii）注意：如果

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在；

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$，但 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$ 不存在，可断定 $f(x)$ 不存在斜渐近线。

在本题中，函数 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的间断点只有 $x=\pm1$.

由于 $\lim\limits_{x\to1} y=\infty$，故 $x=1$ 是垂直渐近线.

（而 $\lim\limits_{x\to-1} y=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{2}$，故 $x=-1$ 不是渐近线）.

又 $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}=1$，故 $y=1$ 是水平渐近线.（无斜渐近线）

综上可知，渐近线的条数是 2. 故选 C.

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$, 其中 n 为正整数, 则 $f'(0)=$ ( )

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$ (C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^n n!$

【答案】A
【考点】导数的概念
【难易度】★★
【详解一】本题涉及到的主要知识点:

$$f'(x_0)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x_0+\triangle x)-f(x_0)}{\triangle x}.$$

在本题中，按定义

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$$

$=(-1)\times(-2)\times\cdots\times[-(n-1)]=(-1)^{n-1}(n-1)!$. 故选 A.

【详解二】本题涉及到的主要知识点:

$$f'(x)=[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

在本题中，用乘积求导公式. 含因子 e^x-1 项在 $x=0$ 为 0，故只留下一项. 于是

$$f'(0)=[e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)]\Big|_{x=0}=(-1)\times(-2)\times\cdots\times[-(n-1)]=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

故选（A）.

(3) 如果函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是 ( )

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

(C) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

(D) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

【答案】B
【考点】全微分存在的必要条件和充分条件
【难易度】★★★
【详解】本题涉及到的主要知识点：

全微分存在的充分条件　如果函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续，则函数在该点可微分.

在本题中，若 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}\overset{记}{=\!=}A(\exists)$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$

又 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续 $\Rightarrow f(0,0)=0$. 于是

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}=A$$

由极限与无穷小的关系 $\Rightarrow \frac{f(x,y)-f(0,0)}{x^2+y^2}=A+o(1)\begin{pmatrix}x\to 0\\ y\to 0\end{pmatrix}$,

其中 $o(1)$ 为无穷小. $\Rightarrow f(x,y)-f(0,0)=A(x^2+y^2)+(x^2+y^2)o(1)$

$$=0\cdot x+0\cdot y+o(\rho)(\rho\to 0),$$

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$. 因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微. 故选（B）.

（A）不正确，如 $f(x,y)=|x|+|y|$ 满足条件，但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不存在偏导数，故不可微.（C）不正确，如 $f(x,y)=x$ 在 $(0,0)$ 可微，但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{|x|+|y|}$ 不存在.（D）也不正确，如 $f(x,y)=x$ 在 $(0,0)$ 可微，但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x}{x^2+y^2}$ 不存在.

(4) 设 $I_K=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\,dx(k=1,2,3)$，则有（　）

(A) $I_1<I_2<I_3$ (B) $I_3<I_2<I_1$ (C) $I_2<I_3<I_1$ (D) $I_2<I_1<I_3$

【答案】D
【考点】定积分的基本性质
【难易度】★★★
【详解】本题涉及到的主要知识点：

设 $a<c<b$，则 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.

在本题中，

$I_1=\int_0^{\pi} e^{x^2}\sin xdx$，$I_2=\int_0^{2\pi} e^{x^2}\sin xdx$，$I_3=\int_0^{3\pi} e^{x^2}\sin xdx$

$I_2-I_1=\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin xdx<0\Rightarrow I_2<I_1$，

$I_3-I_2=\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin xdx>0\Rightarrow I_3>I_2$，

$I_3-I_1=\int_{\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin xdx=\int_{\pi}^{2\pi} e^{x^2}\sin xdx+\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin xdx$

$=\int_{2\pi}^{3\pi} e^{(t-\pi)^2}\sin(t-\pi)dt+\int_{2\pi}^{3\pi} e^{x^2}\sin xdx=\int_{2\pi}^{3\pi}[e^{x^2}-e^{(x-\pi)^2}]\sin xdx>0\Rightarrow I_3>I_1$

因此 $I_2<I_1<I_3$. 故选 D.

(5) 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\C_1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\C_2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\C_3\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\C_4\end{pmatrix}$，其中 C_1,C_2,C_3,C_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为（　）

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ (C) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ (D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

【答案】C
【考点】向量组的线性相关与线性无关
【难易度】★★
【详解】本题涉及到的主要知识点：

n 个 n 维向量相关 $\Leftrightarrow |\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=0$

在本题中，显然

$$|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4|=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=0,$$

所以 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 必线性相关. 故选 C.

(6) 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $p^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$. 若 P=（$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$），

$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$ ，则 $Q^{-1}AQ=$（　）

(A) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

【答案】B
【考点】矩阵的初等变换；初等矩阵
【难易度】★★★
【详解】本题涉及到的主要知识点：
设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵,对 A 施行一次初等行变换,相当于在 A 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵；对 A 施行一次初等列变换，相当于在 A 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

在本题中，由于 P 经列变换为 Q，有

$$Q=P\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=PE_{12}(1),$$

那么 $Q^{-1}AQ=[PE_{12}(1)]^{-1}A[PE_{12}(1)]=E_{12}^{-1}(1)(P^{-1}AP)E_{12}(1)$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{bmatrix}$$

故选 B.

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则

$P\{X<Y\}=($　　$)$

(A) $\frac{1}{5}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{4}{5}$

【答案】A
【考点】常见随机变量的分布
【难易度】★★★
【详解】本题涉及到的主要知识点：

若随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$

则称 X 服从参数为 λ $(\lambda>0)$ 的指数分布.

在本题中，依题设知 X，Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-4y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

又 X 与 Y 相互独立，从而 X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}4e^{-(x+4y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

于是 $P\{X<Y\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x<y}4e^{-(x+4y)}dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}4e^{-(x+4y)}dy=\frac{1}{5}$

故选 A.

(8)将长度为$1m$ 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为　　(　　)

(A) 1　　(B) $\frac{1}{2}$　　(C) $-\frac{1}{2}$　　(D) -1

【答案】D
【考点】相关系数的性质
【难易度】★★
【详解】本题涉及到的主要知识点：

若 $X=aY+b$，则当 $a>0$ 时，$\rho_{XY}=1$；当 $a<0$ 时，$\rho_{XY}=-1$.

在本题中，设其中一段木棒长度为 X，另一段木棒长度为 Y，显然 $X+Y=1$，即 $X=1-Y$，Y 与 X 之间有明显的线性关系，从而 $\rho_{XY}=-1$. 故选 D.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$__________

【答案】e^x

【考点】二阶常系数齐次线性微分方程
【难易度】★★
【详解】本题涉及到的主要知识点：

二阶常系数齐次线性微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的特征方程 $r^2+pr+q=0$ 有两个不同的实根，

微分方程的通解形式为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$.

在本题中，因 $f(x)$ 满足

$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ ①

$f''(x)+f(x)=2e^x$ ②

由①、②，得 $f'(x)-3f(x)=-2e^x$，

两边乘以 e^{-3x} 得 $[e^{-3x}f(x)]'=-2e^{-2x}$

积分得 $e^{-3x}f(x)=e^{-2x}+C$，即 $f(x)=e^x+Ce^{3x}$

代入②式得 $e^x+9Ce^{3x}+e^x+Ce^{3x}=2e^x\Rightarrow C=0$，于是 $f(x)=e^x$

代入①式自然成立. 因此求得 $f(x)=e^x$.

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=$__________

【答案】$\dfrac{\pi}{2}$

【考点】定积分的换元积分法
【难易度】★★★
【详解】本题涉及到的主要知识点：

第一类换元法 $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt=\int_a^b f(x$

在本题中，$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x \underline{\underline{t=x-1}} \int_{-1}^1 (t+1)\sqrt{1-t^2}dt$

$=\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}dt+\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$，

其中 $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt$ 是半单位圆的面积.

（11）$grad(xy+\frac{z}{y})|_{(2,1,1)}=$________

【答案】$\{1,1,1\}$

【考点】梯度

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

$$gradf(x,y,z)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$$

在本题中，记 $u=xy+\frac{z}{y}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{z}{y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow gradu|_{(2,1,1)}=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})|_{(2,1,1)}=(1,1,1)$$

因此 $grad(xy+\frac{z}{y})|_{(2,1,1)}=(1,1,1)$

(12) 设 $\Sigma=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 ds=$__________

【答案】$\frac{\sqrt{3}}{12}$

【考点】曲面积分的计算

【难易度】★★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

曲面积分公式：$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$

在本题中，投影到 xy 平面上. Σ 在 xy 平面上的投影区域为

$D_{xy} = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}$

由 Σ 的方程 $z = 1-x-y \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -1$，$\frac{\partial z}{\partial y} = -1$

现将曲面积分化为二重积分，然后求出积分值.

$$\iint\limits_{\Sigma} y^2 ds = \iint\limits_{D_{xy}} y^2 \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy = \sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}} y^2 dxdy = \sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} y^2 dy$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{4}[-(1-x)^4]\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

(13) 设 α 为 3 维单位列向量，E 为 3 阶单位矩阵，则矩阵 $E-\alpha\alpha^T$ 的秩为_______

【答案】2
【考点】矩阵的特征值的性质；实对称矩阵的相似对角矩阵
【难易度】★★★
【详解】本题涉及到的主要知识点：

（i）若 $r(A)=1$，则 $|\lambda E - A| = \lambda^n - \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda^{n-1}$；

（ii）实对称矩阵必可对角化.

在本题中，设 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$，则有 $\alpha^T\alpha = a_1^2+a_2^2+a_3^2 = 1$，又

$$A = \alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}(a_1,a_2,a_3) = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{bmatrix},$$

易见秩 $r(A)=1$. 那么 $|\lambda E - A| = \lambda^3 - (a_1^2+a_2^2+a_3^2)\lambda^2 = \lambda^3 - \lambda^2$，

所以矩阵 A 的特征值为 1，0，0，从而 $E-A$ 的特征值为 0，1，1.

又因 $E-A$ 为对称矩阵，从而 $E-A\sim\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$，故 $r(E-\alpha\alpha^T)=2$.

(14) 设 A，B，C 是随机事件，A 与 C 互不相容， $p\left(AB\right)=\frac{1}{2},P\left(C\right)=\frac{1}{3},p\left(AB\middle|\overline{C}\right)=$______

【答案】 $\frac{3}{4}$

【考点】条件概率

【难易度】★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

条件概率公式 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}(P(A)>0)$

在本题中，由于 A 与 C 互不相容，所以 $AC=\varnothing$， $ABC=\varnothing$，从而 $P(ABC)=0$. 于是

$$P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{P(AB)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) 证明： $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$

【考点】函数单调性的判别

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

函数单调性的判定法　设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导.

①如果在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

②如果在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，那么函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

证明：令 $f\left(x\right)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$，

则转化为证明 $f(x)\geq 0$（ $x\in(-1,1)$）

因 $f(x)=f(-x)$，即 $f\left(x\right)$ 为偶函数，故只需考察 $x\geq 0$ 的情形.

用单调性方法.

$$f'\left(x\right)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)-\sin x-x=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\sin x-x,$$

$$f''(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x-1,$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2}{(1-x)^3}-\frac{2}{(1+x)^3}+\sin x>0(x\in(0,1]),$$

其中 $\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1+x)^2}>0$，$2[\frac{1}{(1-x)^3}-\frac{1}{(1+x)^3}]>0$，$\sin x>0(x\in(0,1))$

因 $x\in(0,1)$ 时 $f^{(3)}(x)>0$，又 $f''(x)$ 在 $[0,1)$ 连续 $\Rightarrow f''(x)$ 在 $[0,1)\nearrow$，$f''(x)>f''(0)=2>0$（$x\in(0,1]$），同理 $f'(x)$ 在 $[0,1)\nearrow$，$f'(x)>f'(0)=0(x\in(0,1])\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,1)\nearrow$，$f(x)>f(0)=0(x\in(0,1])$.又因 $f(x)$ 为偶函数 $\Rightarrow f(x)>0(x\in(-1,1),x\neq 0)$，$f(0)=0$.即原不等式成立.

(16) 求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

【考点】多元函数的极值

【难易度】★★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

二元函数取得极值的充分条件：设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域有连续的二阶偏导数，又 $f_x'(x_0,y_0)=0$，$f_y'(x_0,y_0)=0$，令 $f''_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f''_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f''_{yy}(x_0,y_0)=C$，则

（1）当 $AC-B^2>0$ 时，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 取极值，且当 $A>0$ 时取极小值，$A<0$ 时取极大值；

（2）当 $AC-B^2<0$ 时，(x_0,y_0) 不是 $f(x,y)$ 的极值点；

（3）当 $AC-B^2=0$ 时，仅此不足以判断 (x_0,y_0) 是否是 $f(x,y)$ 的极值点，还需另作讨论.

在本题中，先求函数的驻点.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-x)=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left(1-x^2\right)=0\\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(-y)=0\end{cases}$$

解得驻点为$(-1,0)$，$(1,0)$

又

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=A=-2xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left(1-x^2\right)(-x)\\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=B=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left(1-x^2\right)(-y)\\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=C=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\left(y^2-1\right)\end{cases}$$

根据判断极值的第二充分条件，

代入（1，0），得$A=-2e^{-\frac{1}{2}}$，$B=0$，$C=-e^{-\frac{1}{2}}$，从而$AC-B^2>0$，$A<0$，所以$f(x,y)$在（1，0）取得极大值，极大值为$e^{-\frac{1}{2}}$；

代入（-1，0），得$A=2e^{-\frac{1}{2}}$，$B=0$，$C=e^{-\frac{1}{2}}$，从而$AC-B^2>0$，$A>0$，所以$f(x,y)$在（-1，0）取得极小值，极小值为$-e^{-\frac{1}{2}}$.

(17) 求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$的收敛域及和函数.

【考点】幂级数的收敛域、和函数

【难易度】★★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

（i）求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$收敛域的步骤：

（1）求收敛半径：设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$，则$R=\begin{cases}1/l, & 0<l<+\infty,\\ 0, & l=+\infty,\\ +\infty, & l=0\end{cases}$

（2）讨论端点的敛散性：如果$0<R<+\infty$，则需进一步讨论$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=\pm R$处的敛散性；

（3）写出幂级数的收敛域.

（ii）和函数的性质：

（1）和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可导，并且有逐项求导公式：

$$S'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1};$$

（2）在幂级数的收敛域上逐项积分公式成立，即

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nt^ndt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

本题中，直接用求收敛半径的公式，先求

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}}{\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(n+1)+1}$$

$$\cdot\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{4n^2+4n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}\cdot\frac{4(1+\frac{1}{n})^2+4(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}=1$$

于是收敛半径 $R=1$

当 $x=1$ 时，原级数=$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}$，第 n 项的极限即 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}=\infty\neq0$，所以当 $x=1$ 时，原级数发散；同理可证，$x=-1$ 时，原级数也是发散的.

因此，原级数的收敛域为 $(-1,1)$.

和函数 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}[(2n+1)+\frac{2}{2n+1}]x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}\ (|x|<1)$

令 $S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$， $S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}$，

因为 $\int_0^x S_1(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(2n+1)t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{1-x^2}\ (|x|<1)$，

所以 $S_1(x)=(\frac{x}{1-x^2})'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\ (|x|<1)$.

因为 $xS_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}$，所以 $[xS_2(x)]'=\sum_{n=0}^{\infty}2x^{2n}=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}\ (|x|<1)$

所以 $xS_2(x)=\int_0^x[tS_2(t)]'dt=\int_0^x\frac{2}{1-t^2}dt=\int_0^x(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t})dt=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\ (|x|<1)$

当 $x\neq 0$ 时，$S_2(x)=\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$；

当 $x=0$ 时，$S_1(0)=1$，$S_2(0)=2$.

所以 $S(x)=S_1(x)+S_2(x)=\begin{cases} 3, & x=0, \\ \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, & |x|<1, x\neq 0 \end{cases}$

(18) 已知曲线 $L:\begin{cases} x=f(t), \\ y=\cos t \end{cases}$ $(0\leq t<\frac{\pi}{2})$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(t)>0$ $(0<t<\frac{\pi}{2})$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

【考点】导数的几何意义、定积分的应用

【难易度】★★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

（i）曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

（ii）由曲线 $y=f(x)$ $(f(x)\geq 0)$ 及直线 $x=a$，$x=b(a<b)$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积 A 是定积分 $A=\int_a^b f(x)dx$.

（Ⅰ）求 $f(t)$.

当 $0\leq t<\frac{\pi}{2}$ 时，曲线 L 在切点 $A(f(t),\cos t)$ 处的切线斜率为 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{-\sin t}{f'(t)}$，

切线方程为 $y=\cos t-\frac{\sin t}{f'(t)}[x-f(t)]$

令 $y=0$ 得切线与 x 轴的交点 B 的 x 坐标为 $x=f(t)+\frac{\cos t f'(t)}{\sin t}$

于是 B 点坐标为 $(f(t)+\frac{\cos t f'(t)}{\sin t},0)$，切点 A 的坐标为 $(f(t),\cos t)$

依题设，A 与 B 的距离为 $\sqrt{\frac{f'^2(t)\cos^2 t}{\sin^2 t}+\cos^2 t}=1$，

化简得 $f'(t)=\frac{\sin^2 t}{\cos t}$，

积分得 $f(t)=f(0)+\int_0^t\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=\int_0^t\frac{\sin^2 x-1+1}{1-\sin^2 x}d\sin x$

$$=-\sin t+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)d\sin x$$

$$=-\sin t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|=-\sin t+\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t}$$

$$=-\sin t+\ln\left|\sec t+\tan t\right|$$

（Ⅱ）求无界区域的面积 S

曲线 $L:\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t\end{cases}\quad (0\le t<\frac{\pi}{2})$ 可表为 $y=g(x)(0\le x<+\infty)$，当 $t\to\frac{\pi}{2}-0$ 时 $x\to+\infty$

当 $x=f(t)$ 时 $g(x)=\cos t$，于是

$$S=\int_0^{+\infty}g(x)dx\xlongequal{x=f(t)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t df(t)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t dt=\frac{\pi}{4}$$

(19) 已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$的曲线段，计算曲线积分 $J=\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$

【考点】格林公式

【难易度】★★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

格林公式：$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$

在本题中，记 $J=\int_L Pdx+Qdy$

1）$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(3x^2+1)-3x^2=1$；

2）曲线 L 不封闭，添加辅助线 L_1 :沿 y 轴由点 $B(0,2)$ 到点 $O(0,0)$.

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_{L_1}Q(0,y)dy=\int_2^0-2ydy=\int_0^2 2ydy=4\text{；}$$

3）在 L_1 与 L 围成的区域 D 上用格林公式（边界取正向，即逆时针方向）：

$$\int_{L+L_1}Pdx+Qdy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma=\iint\limits_D 1d\sigma=\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2-\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2=\frac{\pi}{2},$$

因此 $J=\int_L Pdx+Qdy=\frac{\pi}{2}-4$

(20) 设 $A=\begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（I）计算行列式 $|A|$；

（II）当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

【考点】行列式按行（列）展开定理；非齐次线性方程组有解的充分必要条件

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

（i）行列式按行（列）展开定理：行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即 $D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\,(i=1,2,\cdots,n)$，

或 $D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\,(j=1,2,\cdots,n)$.

（ii）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，方程组 $Ax=b$，则方程组有无穷多解 $\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})<n$

（I）按第一列展开，即得

$$|A|=1\cdot\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$$

（II）因为 $|A|=0$ 时，方程组 $Ax=\beta$ 有可能有无穷多解. 由（I）知 $a=1$ 或 $a=-1$

当 $a=1$ 时，

$$(A|\beta)=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&2\end{array}\right],$$

由于 $r(A)=3$，$r(\overline{A})=4$，故方程组无解. 因此，当 $a=1$ 时不合题意，应舍去.

当 $a=-1$ 时，

$$(A|\beta)=\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right],$$

由于$r(A)=r(\overline{A})=3$，故方程组$Ax=\beta$有无穷多解. 选x_3为自由变量，得方程组通解为：

$(0,-1,0,0)^T+k(1,1,1,1)^T$（$k$为任意常数）.

(21)

已知$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$，二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$的秩为2

（I）求实数a的值；

（II）求正交变换$x=Qy$将f化为标准形.

【考点】二次型的秩；实对称矩阵的特征值和特征向量；用正交变换化二次型为标准形

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

（i）实对称矩阵的特性：不同特征值的特征向量互相正交.

（ii）任给二次型$f=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j(a_{ij}=a_{ji})$，总有正交变换$x=Py$，使$f$化为标准形

$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$，其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$f$的矩阵$A=(a_{ij})$的特征值.

（I）二次型$x^T(A^TA)x$的秩为2，即$r(A^TA)=2$

因为$r(A^TA)=r(A)$，故$r(A)=2$. 对A作初等变换有

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以$a=-1$.

（II）当$a=-1$时，$A^TA=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{bmatrix}$. 由

$$\left|\lambda E-A^TA\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6),$$

可知矩阵A^TA的特征值为 0，2，6.

对$\lambda=0$，由$(0E-A^TA)x=0$得基础解系$(1,1,-1)^T$，

对$\lambda=2$，由$(2E-A^TA)x=0$得基础解系$(1,-1,0)^T$，

对$\lambda=6$，由$(6E-A^TA)x=0$得基础解系$(1,1,2)^T$.

实对称矩阵特征值不同特征向量相互正交，故只需单位化.

$\gamma_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T$，$\gamma_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$，. $\gamma_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T$

于是得到正交矩阵

$$Q=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\end{vmatrix}$$

在正交变换$xQ=y$下，二次型的标准形为$f=2{y_2}^2+6{y_3}^2$.

（22）

设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$

1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

（Ⅰ）求 $P\{X=2Y\}$；

（Ⅱ）求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

【考点】随机变量的数学期望、方差；协方差及其性质

【难易度】★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

（i）$DX=EX^2-(EX)^2$；

（ii）$Cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY$，$Cov(X,X)=DX$，

$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$.

（Ⅰ）由随机变量 (X,Y) 的概率分布可知，

$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

（Ⅱ）由条件知

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}，\quad Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}，\quad XY\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 4\\ \frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12}\end{pmatrix}，$$

从而 $EX=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$，

$EY=0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=1$，

$EY^2=0^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$，

$E(XY)=0\cdot\frac{7}{12}+1\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$

又 $DY=EY^2-(EY)^2=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$，于是

$$Cov(X-Y,Y)=Cov(X,Y)-Cov(Y,Y)=E(XY)-EX\cdot EY-DY=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}.$$

(23)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$. 设 $Z=X-Y$.

（Ⅰ）求 Z 的概率密度 $f(z,\sigma^2)$;

（Ⅱ）设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$

（Ⅲ）证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量

【考点】常见随机变量的分布；最大似然估计法；估计量的评选标准

【难易度】★★★★

【详解】本题涉及到的主要知识点：

（i）正态分布 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}$， $-\infty<x<+\infty$

（ii）似然函数 $L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$，对数似然方程 $\dfrac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=0$

（iii）若估计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在，且对于任意 $\theta\in\Theta$ 有 $E(\hat{\theta})=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 是未知参数 θ 的无偏估计量.

（Ⅰ）由条件知 Z 服从正态分布，且

$EZ=E(X-Y)=EX-EY=0$， $DZ=D(X-Y)=DX+DY=3\sigma^2$，

即 $Z\sim N(0,3\sigma^2)$，从而 Z 的概率密度为

$$f(z;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{3\sigma^2}}e^{-\frac{(z-0)^2}{2\cdot3\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}，\quad -\infty<z<+\infty.$$

（Ⅱ）由条件知似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z_i^2}{6\sigma^2}}=\frac{1}{(\sqrt{6\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i^2}{6\sigma^2}}，\quad -\infty<z_i<+\infty，\quad i=1,2,\cdots,n，$$

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln 6\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2，$$

令 $\dfrac{d\ln(\sigma^2)}{d(\sigma^2)}=-\dfrac{n}{2}\cdot\dfrac{1}{\sigma^2}+\dfrac{1}{6\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2=0$，解得 $\sigma^2=\dfrac{1}{3n}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2$.

于是σ^2的最大似然估计量为$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$.

（III）由于$E\hat{\sigma}^2=E(\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2)=\frac{1}{3n}E(\sum_{i=1}^{n}Z_i^2)=\frac{1}{3n}\cdot nEZ^2$

$$=\frac{1}{3}[DZ+(EZ)^2]=\frac{1}{3}(3\sigma^2+0)=\sigma^2,$$

从而可知，$\hat{\sigma}^2$为σ^2的无偏估计量.