2017 全国研究生入学考试考研数学一真题解析

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则（　）

（A）$ab=\dfrac{1}{2}$　　（B）$ab=-\dfrac{1}{2}$　　（C）$ab=0$　　（D）$ab=2$

【答案】（A）

【解析】由连续的定义可知：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$，其中 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=b$，

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{ax}=\dfrac{1}{2a}$，从而 $b=\dfrac{1}{2a}$，也即 $ab=\dfrac{1}{2}$，故选（A）。

（2）若函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则（　）

（A）$f(1)>f(-1)$　　（B）$f(1)<f(-1)$

（C）$|f(1)|>|f(-1)|$　　（D）$|f(1)|<|f(-1)|$

微信公众号【最强考研】考研人的精神家园！

【答案】（C）

【解析】令 $F(x)=f^2(x)$，则有 $F'(x)=2f(x)f'(x)$，故 $F(x)$ 单调递增，则 $F(1)=F(-1)$，即 $[f(1)]^2>[f(-1)]^2$，即 $|f(1)|>|f(-1)|$，故选 C。

（3）函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $n=(1,2,2)$ 的方向导数为（　）

（A）12　　（B）6　　（C）4　　（D）2

【答案】（D）

【解析】 $gradf=\{2xy,x^2,2z\}$，将点 $(1,2,0)$ 代入得 $gradf|_{(1,2,0)}=\{4,1,0\}$，则

$\dfrac{\partial f}{\partial u}=gradf\cdot\dfrac{u}{|u|}=\{4,1,0\}\cdot\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right\}=2$。

（4）甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位：m）处，图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位：m/s），虚线表示乙的速度 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为10、20、3，计时开始

后乙追上甲的时刻记为t_0（单位：s），则（ ）

（A）$t_0=10$ （B）$15<t_0<20$ （C）$t_0=25$ （D）$t_0>25$

【答案】（C）

【解析】从0到t_0时刻，甲乙的位移分别为$\int_0^{t_0}V_1(t)dt$与$\int_0^{t_0}V_2(t)dt$要使乙追上甲，则有$\int_0^{t_0}[V_2(t)-V_1(t)]dt$，由定积分的几何意义可知，$\int_0^{25}[V_2(t)-V_1(t)]dt=20-10=10$，可知$t_0=25$，故选（C）。

（5）设α是n维单位列向量，E为n阶单位矩阵，则

（A）$E-\alpha\alpha^T$不可逆 （B）$E+\alpha\alpha^T$不可逆

（C）$E+2\alpha\alpha^T$不可逆 （D）$E-2\alpha\alpha^T$不可逆

【答案】（A）

【解析】因为$\alpha\alpha^T$的特征值为0（$n-1$重）和1，所以$E-\alpha\alpha^T$的特征值为1（$n-1$重）和0，故$E-\alpha\alpha^T$不可逆。

（6）设矩阵$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，则

（A）A与C相似，B与C相似 （B）A与C相似，B与C不相似

（C）A与C不相似，B与C相似 （D）A与C不相似，B与C不相似

【答案】（B）

【解析】由（$\lambda E-A$）=0 可知A的特征值为2, 2, 1。

$\because 3-r(2E-A)=1$。$\therefore$ A可相似对角化，且$A\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

由$|\lambda E-B|=0$ 可知B的特征值为2, 2, 1。

$\because 3-r(2E-B)=2$。$\therefore B$不可相似对角化，显然C可相似对角化，

$\therefore A\sim C$。且B不相似于C。

（7）设A,B为随机事件，若$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则$P(A|B)>P(A|\bar{B})$的充要条件是

（A）$P(B|A)>P(B|\bar{A})$ （B）$P(B|A)<P(B|\bar{A})$

微信公众号【最强考研】考研人的精神家园！

（C） $P(\bar{B}|A) > P(\mathrm{B}|\bar{A})$　　　　（D） $P(\bar{B}|A) < P(\mathrm{B}|\bar{A})$

【答案】（A）

【解析】因为$P\left(A|B\right) > P(A|\bar{B})$，所以$\dfrac{P(AB)}{P(B)} > \dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，从而

$P(AB) > P(A)P(B)$，且$P\left(B|A\right) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}, P(B|\bar{A}) = \dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$，所以

$P\left(B|A\right) > P(B|\bar{A})$。

（8）设$X_1, X_2 \cdots X_n (n \geq 2)$为来自总体$N(\mu,1)$的简单随机样本，记$\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，则下列结论中不正确的是

（A） $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$服从$\chi^2$分布　　　　（B） $2(X_n-X_1)^2$服从χ^2分布

（C） $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$服从$\chi^2$分布　　　　（D） $n(\bar{X}-\mu)^2$服从χ^2分布

【答案】（B）

【解析】（A） $X_i-\mu \sim N(0,1)$故$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$；

（B） $X_n - X_1 \sim N(0,2) \Rightarrow \dfrac{X_n-X_1}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_n-x_1}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$$

即$\dfrac{(x_n-x_1)^2}{2} \sim \chi^2(1)$。

（C）由$S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2, (n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$。

（D） $(\bar{X}-\mu) \sim N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，则$\sqrt{n}(\bar{X}-\mu) \sim N(0,1)$，所以$n(\bar{X}-\mu)^2 \sim \chi^2(1)$。

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

微信公众号【最强考研】考研人的精神家园！

（9）已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$ ______。

【答案】0

【解析】

因为

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$f'''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2n(2n-1)(2n-2)x^{2n-3}$$

将 $x=0$ 带入 $f'''(0)=0$

（10）微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$ ______。

【答案】$e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_2\sin\sqrt{2}x)$

【解析】

因为 $y''+2y'+3y=0$，所以 $\lambda^2+2\lambda+3=0$，$\lambda=\pm\sqrt{2}i-1$，通解为 $e^{-x}(c_1\cos\sqrt{2}x+c_1\sin\sqrt{2}x)$

（11）若曲线积分 $\int_L \dfrac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则 $a=$ ______。

【答案】-1

【解析】

$$P(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2-1},Q(x,y)=\frac{-ay}{x^2+y^2-1},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2},\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2}$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial P}{\partial x}=0$，则 $2a=-2,a=-1$

（12）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$ ______。

【答案】$\dfrac{1}{(1+x)^2}$。

微信公众号【最强考研】 考研人的精神家园

【解析】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n}\right]'=\left[\dfrac{x}{1+x}\right]'=\dfrac{1}{(1+x)^2}$。

（13）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为 ______。

【答案】2。

【解析】因为 $(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

故 $r(A)=2$，所以 $(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)$ 秩为 2。

（14）设随机变量 X 的分布函数为 $\boldsymbol{F}(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\dfrac{x-4}{2})$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX=$ ______。

【答案】2

【解析】

$$f(x)=F'(x)=0.5\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+0.5\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(\frac{x-4}{2}\right)^2}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=0.5\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+0.5\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2}e^{-\frac{(x-4)^2}{2\cdot 2^2}}$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$。

【解析】由复合函数求导法则，可得：

$$\frac{dy}{dx}=f_1'e^x+f_2'(-\sin x)$$

故 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=f_1'(1,1)$

进一步地：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^x f_1'+e^x\frac{d(f_1')}{dx}-\cos xf_2'-\sin x\frac{d(f_2')}{dx}$$

$$=e^x f_1'+e^x(f_{11}''e^x-f_{12}''\sin x)-\cos xf_2'-\sin x(f_{21}''e^x-f_{22}''\sin x)$$

$$=e^x f_1'-\cos xf_2'+e^{2x}f_{11}''-2e^x\sin xf_{21}''+\sin^2 xf_{22}''$$

故 $\frac{d^2y}{dx^2}\big|_{x=0}=f_1'(1,1)-f_2'(1,1)+f_{11}''(1,1)$

(16)（本题满分 10 分）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$。

【解析】由定积分的定义式可知

原 式 = $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$ ， 再 由 分 部 积 分 法 可 知 ：

$$\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\,d\left(x^2-1\right)=\frac{x^2-1}{2}\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2-1}{2}d\ln(1+x)$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)\,dx=-\frac{1}{4}(x-1)^2\Big|_0^1=\frac{1}{4}$$

微信公众号【最强考研】考研人的精神家园！

(17)（本题满分 10 分）已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值。

【解析】等式两边同时对 x 求导可得，

$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$……(1)

令 $y'=0$ 可得 $3x^2-3=0$，故 $x=\pm1$。由极限的必要条件可知，函数的极值之梦能取在 $x=-1$ 与 $x=1$ 处，为了检验该点是否为极值点，下面来计算函数的二阶导数，对(1)式两边同时求导可得，

$6x+6y(y')^2+3y^2y''+3y''=0$……(2)

当 $x=1$ 时，$y=1$，将 $x=1,y=1,y'=0$ 代入（2）式可得 $y''=-2$，故 $y(1)=1$ 是函数的极大值。

当 $x=-1$ 时，$y=0,y'=0$，代入（2）式可得 $y''=2$，故 $y(-1)=0$ 是函数的极小值。

(18)（本题满分 11 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$。

证明：（Ⅰ）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根。

（Ⅱ）方程 $f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根。

【证明】 （I）由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，则由保号性可知：$\exists\delta>0$，使得当 $x\in(0,\delta)$ 时，$\dfrac{f(x)}{x}<0$，也即 $f(x)<0$。

又由于 $f(1)>0$，则由零点存在定理可知，$f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根。

（II）令 $F(x)=f(x)f'(x)$。由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 可知 $f(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=0$。

又由（I）可知：$\exists x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)=0$。

由罗尔定理可知：$\exists\xi_1\in(0,x_0)$ 使 $f'(\xi_1)=0$，从而 $F(0)=F(\xi_1)=F(x_0)=0$。

再由罗尔定理可知：$\exists\xi_2\in(0,\xi_1)$，$\xi_3\in(\xi_1,x_0)$ 使得 $F'(\xi_2)=F'(\xi_3)=0$。

也即 $F'(x)=f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在 $(0,x_0)\subset(0,1)$ 内有两个不同的实根。

(19)（本题满分 10 分）设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为 $\mu=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，记圆锥面与柱面的交线为 C。

（I）求 C 在 xOy 面上的投影曲线的方程；

（II）求 S 的质量 M。

微信公众号【最强考研】考研人的精神家园！

【解析】（Ⅰ）C 的方程为 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\ z^2=2x\end{cases}$，从中消去 z 可得 $x^2+y^2=2x$

则 C 在 xoy 平面上的投影为 $\begin{cases}x^2+y^2=2x\\ z=0\end{cases}$。

（Ⅱ）S 的质量 $m=\iint\limits_S\mu(x,y,z)dS=\iint\limits_S 9\sqrt{x^2+y^2+z^2}dS$

将 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 带入可得：$dS=\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy$

故 $m=\iint\limits_D 9\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy$，其中 D 为平面区域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le2x\}$

利用极坐标计算该二重积分可得：

$$
\begin{aligned}
m &= 18\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \\
&= 18\iint_D r^2 drd\theta \\
&= 18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr \\
&= \frac{144}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta \\
&= 64
\end{aligned}
$$

(20)（本题满分 11 分） 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$=（α_1，α_2，α_3）有 3 个不同的特征值，且 α_3=α_1+2α_2 。

1） 证明：$r(\boldsymbol{A}) = 2$

2） 若 β=α_1+α_2+α_3 ，求方程组 $\boldsymbol{Ax} = \beta$ 的通解。

（I）**【证明】**因为 A 有三个不同的特征值，所以 $A \neq O$，$r(A) \geq 1$，假若 $r(A)=1$ 时，0 是二重的，故不符合，那么 $r(A) \geq 2$，又因为 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$，所以 $r(A) \leq 2$，即 $r(A) = 2$。

（II）**【解析】**因为 $r(A)=2$，所以 $Ax=0$ 的基础解系只有一个解向量，又因为 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$，即 $\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$，即基础解系的解向量为 $(1,2,-1)^T$，又因为 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$，故 $Ax=\beta$ 的特解为 $(1,1,1)^T$，所以 $Ax=\beta$ 的通解为 $k(1,2,-1)^T + (1,1,1)^T$，$k \in R$。

(21)（本题满分 11 分）设二次型 $\boldsymbol{f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2} + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$，在正交变换 $x = Qy$ 下的标准型为 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ ，求 a 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 。

【解析】二次型对应的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & a \end{pmatrix}$，因为标准型为 $\lambda_1 {y_1}^2 + \lambda_2 {y_2}^2$，所以 $|A|=0$，从而 $a+4=6$，即 $a=2$，代入得 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 4 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ 4 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0$，解得 $\lambda = 0,-3,6$；

微信公众号【最强考研】考研人的精神家园!

当$\lambda=0$时，$0E-A=\begin{pmatrix}-2&-1&4\\-1&1&-1\\4&-1&-2\end{pmatrix}$，化简得$\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$，对应的特征向量为$k_1(1,2,1)^T$；

当$\lambda=-3$时，$-3E-A=\begin{pmatrix}-5&-1&4\\-1&-2&-1\\4&-1&-5\end{pmatrix}$，化简得$\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，对应的特征向量为$k_2(1,-1,1)^T$；

当$\lambda=6$时，$6E-A=\begin{pmatrix}4&-1&4\\-1&7&-1\\4&-1&4\end{pmatrix}$，化简得$\begin{pmatrix}-1&7&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，对应的特征向量为$k_3(-1,0,1)^T$；

从而正交矩阵$Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}$。

(22)（本题满分 11 分）设随机变量为 X，Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，$Y$的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\0, & 其他,\end{cases}$

1）求$P(Y\le EY)$；

2）求$Z=X+Y$ 的概率密度。

微信公众号【最强考研】考研人的精神家园！

【解析】（Ⅰ）由数字特征的计算公式可知：$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf(y)dy=\int_0^1 2y^2dy=\frac{2}{3}$。

则$P\{Y\le EY\}=P\left\{Y\le\frac{2}{3}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{2}{3}}f(y)dy=\int_0^{\frac{2}{3}}2ydy=\frac{4}{9}$。

（Ⅱ）Z 的分布函数记为$F_z(z)$,那么

$$
\begin{aligned}
F_z(Z)&=P\{Z\le z\}\\
&=P\{X+Y\le z\}\\
&=P\{X=0\}P\{X+Y\le z|X=0\}+P\{X=2\}P\{X+Y\le z|X=2\}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{2}P\{Y\le z\}+\frac{1}{2}P\{Y\le z-2\};$$

当 $z<0$ 时，$F_z(z)=0$

当 $0\le z<1$ 时，$F_z(z)=\frac{1}{2}P\{Y\le z\}=\frac{z^2}{2}$；

当 $1\le z<2$ 时，$F_z(z)=\frac{1}{2}$；

当 $2\le z<3$ 时，$F_z(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P\{Y\le z-2\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(z-2)^2$；

当 $3\le z$ 时，$F_z(z)=1$；

所以，Z 的概率密度为

$$F_z(z)=\begin{cases} z,0<z<1 \\ z-2,2<z<3 \\ 0,\text{其他} \end{cases}$$

微信公众号【最强考研】考研人的精神家园！

(23)（本题满分 11 分）某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 X_1，X_2，...，X_n 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$。该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$，利用 Z_1，$Z_2,\cdots Z_n$ 估计 σ。

1）求 Z_i 的概率密度；

2）利用一阶矩阵求 σ 的矩估计量。

3）求 σ 的最大似然估计量。

【解析】（I）因为 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $Y_i=X_i-\mu\sim N(0,\sigma^2)$，对应的概率密度为 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$，设 Z_i 的分布函数为 $F(z)$，对应的概率密度为 $f(z)$；

当 $z<0$ 时，$F(z)=0$；

当 $z\ge 0$ 时，$F(z)=P\{Z_i\le z\}=P\{|Y_i|\le z\}=P\{-z\le Y_i\le z\}=\int_{-z}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy$；

则 Z_i 的概率密度为 $f(z)=F'(z)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$；

（II）因为 $EZ_i=\int_0^{+\infty}z\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$，所以 $\sigma=\sqrt{\frac{\pi}{2}}EZ_i$，从而 σ 的矩估计量为

$\sigma=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\overline{Z}$；

（II）由题知对应的似然函数为 $L(z_1,z_2,\ldots,z_n,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}}$，取对数得：

$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\ln\sigma-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}\right)$，所以 $\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\sigma}+\frac{z_i^2}{\sigma^3}\right)$，令 $\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=0$，

得 $\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$，所以 σ 的最大似然估计量为 $\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}$。

微信公众号【最强考研】考研人的精神家园