2013 年全国硕士研究生入学统一考试
数学一试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 c,k 为常数，且 $c\neq 0$，则（　）

（A）$k=2,c=-\dfrac{1}{2}$

（B）$k=2,c=\dfrac{1}{2}$

（C）$k=3,c=-\dfrac{1}{3}$

（D）$k=3,c=\dfrac{1}{3}$

【答案】D

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3))}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^3}{x^k}=c,\therefore k=3,c=\dfrac{1}{3}$

（2）曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（　）

（A）$x-y+z=-2$

（B）$x+y+z=2$

（C）$x-2y+z=-3$

（D）$x-y-z=0$

【答案】A

【解析】设 $F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x$，

则 $F_x(x,y,z)=2x-y\sin(xy)+1\Rightarrow F_x(0,1,-1)=1$；

$F_y(x,y,z)=-x\sin(xy)+z\Rightarrow F_y(0,1,-1)=-1$；

$F_z(x,y,z)=y\Rightarrow F_z(0,1,-1)=1$，

所以该曲面在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为 $x-(y-1)+(z+1)=0$，

化简得 $x-y+z=-2$，选 A

（3）设 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|,(x\in[0,1])$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx(n=1,2,\ldots)$，令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$，则 $S(-\frac{9}{4})=$（　　）

（A）$\frac{3}{4}$

（B）$\frac{1}{4}$

（C）$-\frac{1}{4}$

（D）$-\frac{3}{4}$

【答案】C

【解析】根据题意，将函数在 $[-1,1]$ 上奇延拓 $f(x)=\begin{cases}\left|x-\frac{1}{2}\right|, & 0<x<1\\ -\left|-x-\frac{1}{2}\right|, & -1<x<0\end{cases}$，它的傅里叶级数为 $S(x)$ 它是以 2 为周期的，则当 $x\in(-1,1)$ 且 $f(x)$ 在 x 处连续时，$S(x)=f(x)$，因此 $S(-\frac{9}{4})=S(-\frac{9}{4}+2)=S(-\frac{1}{4})=-S(\frac{1}{4})=-f(\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}$

（4）设 $l_1:x^2+y^2=1, l_2:x^2+y^2=2, l_3:x^2+2y^2=2, l_4:2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针的平面曲线，记 $I_i=\oint_{l_i}(y+\frac{y^3}{6})dx+(2x-\frac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$，则 $MAX(I_i)=($　　$)$

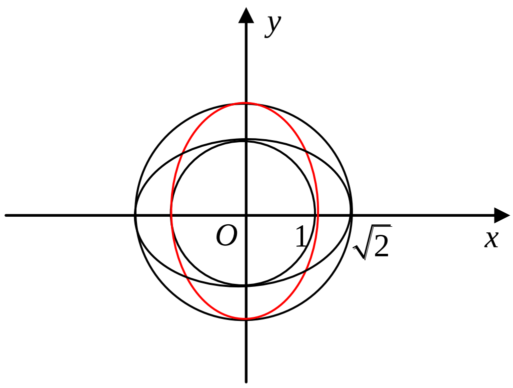
（A）I_1

（B）I_2

（C）I_3

（D）I_4

【答案】D



【解析】$I_i=\oint_{l_i}(y+\frac{y^3}{6})dx+(2x-\frac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$

$$=\iint_{D_i}(1-x^2-\frac{y^2}{2})dxdy$$

利用二重积分的几何意义，比较积分区域以及函数的正负，在区域D_1,D_4上函数为正值，则区域大，积分大，所以$I_4>I_1$，在D_4之外函数值为负，因此$I_4>I_2,I_4>I_3$，故选 D。

（5）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若$AB=C$，且B可逆，则（　　）

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

（D）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

【答案】（B）

【解析】由$C=AB$可知 C 的列向量组可以由 A 的列向量组线性表示，又 B 可逆，故有$A=CB^{-1}$，从而 A 的列向量组也可以由 C 的列向量组线性表示，故根据向量组等价的定义可知正确选项为（B）。

（6）矩阵$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\mathrm{b}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件为

（A）$a=0,b=2$

（B）$a=0,b$为任意常数

（C）$a=2,b=0$

（D）$a=2,b$为任意常数

【答案】(B)

【解析】由于$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$为实对称矩阵，故一定可以相似对角化，从而$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\mathrm{b}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件为$\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$的特征值为$2,b,0$。

又$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-a&-1\\-a&\lambda-b&-a\\-1&-a&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-b)(\lambda-2)-2a^2]$，从而$a=0,b$为任意常数。

（7）设X_1，X_2，X_3是随机变量，且$X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(0,2^2)$，$X_3\sim N(5,3^2)$，

$P_j=P\{-2\le X_j\le 2\}(j=1,2,3)$，则（　　）

（A）$P_1>P_2>P_3$

（B）$P_2 > P_1 > P_3$

（C）$P_3 > P_1 > P_2$

（D）$P_1 > P_3 > P_2$

【答案】（A）

【解析】由 $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,2^2), X_3 \sim N(5,3^2)$ 知，

$p_1 = P\{-2 \le X_1 \le 2\} = P\{|X_1| \le 2\} = 2\Phi(2) - 1$，

$p_2 = P\{-2 \le X_2 \le 2\} = P\{|X_2| \le 2\} = 2\Phi(1) - 1$，故 $p_1 > p_2$.

由根据 $X_3 \sim N(5,3^2)$ 及概率密度的对称性知，$p_1 > p_2 > p_3$，故选（A）

（8）设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$, 给定 $a(0<a<0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X>c\}=a$,则 $P\{Y>c^2\}=$（　）

（A）α
（B）$1-\alpha$
（C）2α
（D）$1-2\alpha$
【答案】（C）

【解析】由 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$ 得，$Y = X^2$，故 $P\{Y>c^2\} = P\{X^2>c^2\} = P\{X<-c \text{ 或 } X>c\} = 2a$

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上）.

(9) 设函数 $f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n})-1) =$ ________.

【答案】1

【解析】$\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n})-1) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x} = f'(0)$

由 $y-x=e^{x(1-y)}$，当 $x=0$ 时，$y=1$

方程两边取对数 $\ln(y-x)=x(1-y)$

两边同时对 x 求导，得 $\frac{1}{y-x}(y'-1)=(1-y)-xy'$

将 $x=0$，$y=1$ 代入上式，得 $f'(0)=1$

(10) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程的通解为 $y=$ ________.

【答案】$y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}-xe^{2x}$

【解析】因 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$， $y_2=e^{x}-xe^{2x}$ 是非齐次线性线性微分方程的解，则 $y_1-y_2=e^{3x}-e^{x}$ 是它所对应的齐次线性微分方程的解，可知对应的齐次线性微分方程的通解为 $y_p=C_1e^{3x}+C_2e^{x}$，因此该方程的通解可写为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{x}-xe^{2x}$

(11) 设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$ （t 为参数），则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ________.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】$\dfrac{dy}{dt}=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t,\dfrac{dx}{dt}=\cos t$， $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t\cos t}{\cos t}=t$，

$\dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}=1$，所以 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{\cos t}$， 所以 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$

(12) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ ________.

【答案】$\ln 2$

【解析】$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\int_1^{+\infty}\ln x\,d(\frac{1}{1+x})=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)dx=[\ln x-\ln(1+x)]\Big|_1^{+\infty}=\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2$$

（13）设 $\mathrm{A}=(\mathrm{a_{ij}})$ 是三阶非零矩阵，$|\mathrm{A}|$ 为 A 的行列式，$\mathrm{A_{ij}}$ 为 $\mathrm{a_{ij}}$ 的代数余子式，若 $\mathrm{a_{ij}}+\mathrm{A_{ij}}=0(\mathrm{i,j}=1,2,3)$,则$|A|=$ ____

【答案】-1

【解析】

由$a_{ij}+A_{ij}=0$可知，$A^T=-A^*$

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}$$

$$=-\sum_{j=1}^{3}a_{ij}^2=-\sum_{i=1}^{3}a_{ij}^2<0$$

从而有$|A|=|A^T|=|-A^*|=-|A|^2$,故$|A|$=-1.

（14）设随机变量 X 服从标准正态分布 $X\sim\mathrm{N}(0,1)$,则 $E(Xe^{2X})=$ ________。

【答案】$1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

【解析】由 $X\sim N\left(0,1\right)$ 及随机变量函数的期望公式知

$$E\left(Xe^{2X}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{2x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}\left[(x-2)^2-4\right]}dx=2e^2.$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$, 其中 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt$

【解析】 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1\frac{\int_0^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt}{\sqrt{x}}dx=-\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx\int_x^1\frac{\ln(t+1)}{t}dt$

$$=-\int_0^1dt\int_0^t\frac{\ln(t+1)}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx=-2\int_0^1\frac{\ln(t+1)}{t}\cdot\sqrt{t}dt=-2\int_0^1\frac{\ln(t+1)}{\sqrt{t}}dt$$

$$=-4\int_0^1\ln(t+1)d\sqrt{t}=-4\left[\sqrt{t}\ln(t+1)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{t+1}dt\right]$$

$$=-4\ln2+4\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{t+1}dt=-4\ln2+4\int_0^1\frac{u}{u^2+1}\cdot2udu$$

$$=-4\ln2+8\int_0^1\frac{u^2+1-1}{u^2+1}du=-4\ln2+8\int_0^1\left(1-\frac{1}{u^2+1}\right)du$$

$$=-4\ln2+8\left(u-\arctan u\right)\Big|_0^1=-4\ln2+8(1-\frac{\pi}{4})=-4\ln2+8-2\pi$$

（16）（本题满分 10 分）

设数列$\{a_n\}$满足条件：$a_0=3,a_1=1,a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geq2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数，

（I） 证明：$S''(x)-S(x)=0$,

（II） 求 $S(x)$ 的表达式.

【解析】（I）设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ， $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$ ， $S'(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}$ ，

因为 $a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$，因此 $S''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$；

（II）方程 $S''(x)-S(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-1=0$，

解得 $\lambda_1=-1,\lambda_1=1$，所以 $S(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{x}$，

又 $a_0=S(0)=3\Rightarrow c_1+c_2=3$，$a_1=S'(0)=1\Rightarrow c_1-c_2=1$，

解得 $c_1=2,c_2=-1$，所以 $S(x)=2e^{-x}-e^{x}$。

17（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=(y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值.

【解析】$\begin{cases} f_x'=x^2e^{x+y}+(y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=(x^2\text{+y+}\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \\ f_y'=e^{x+y}+(y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=(1\text{+y+}\frac{x^3}{3})e^{x+y}=0 \end{cases}$

解得 $(1,-\frac{4}{3}),(-1,-\frac{2}{3})$，

$$A=f_{xx}''=(2x+x^2)e^{x+y}+(x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=(\frac{x^3}{3}+2x^2+2x+y)e^{x+y}$$

$$B=f_{xy}''=e^{x+y}+(x^2+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=(\frac{x^3}{3}+x^2+y+1)e^{x+y}$$

$$C=f_{yy}''=e^{x+y}+(1+y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}=(\frac{x^3}{3}+y+2)e^{x+y}$$

对于 $(1,-\frac{4}{3})$ 点，$A=3e^{-\frac{1}{3}},B=e^{-\frac{1}{3}},C=e^{-\frac{1}{3}},\Delta=AC-B^2>0,A>0,$

$\therefore(1,-\frac{4}{3})$ 为极小值点，极小值为 $-e^{-\frac{1}{3}}$

对于 $(-1,-\frac{2}{3})$，$A=-e^{-\frac{5}{3}},B=e^{-\frac{5}{3}},C=e^{-\frac{5}{3}},\Delta\text{=}AC-B^2<0$,不是极值.

（18）（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$在$[-1,1]$上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1,$ 证明：

（I）　存在 $\xi\in(0,1),$使得$f'(\xi)=1$

（II）　存在$\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

【解析】（1）令 $F(x)=f(x)-x,F(0)=f(0)=0,F(1)=f(1)-1=0,$

则$\exists\xi\in\left(0,1\right)$使得$F'(\xi)=0,$即$f'(\xi)=1$

（2）令$G(x)=e^{x}(f'(x)-1)$, 则$G(\xi)=0,$

又由于$f(x)$为奇函数，故$f'(x)$为偶函数，可知$G(-\xi)=0$,

则$\exists\eta\in\left(-\xi,\xi\right)\subset\left(-1,1\right)$使$G'(\xi)=0,$

即$e^{\eta}[f'(\eta)-1]+e^{\eta}f''(\eta)=0$，即$f''(\eta)+f'(\eta)=1$

（19）（本题满分 10 分）

设直线 L 过$A(1,0,0),B(0,1,1)$两点，将 L 绕 Z 轴旋转一周得到曲面Σ,Σ与平面$z=0,z=2$所围成的立体为Ω，

（I）　　求曲面Σ的方程

（II）　　求Ω的形心坐标.

【解析】（1）l过A,B两点，所以其直线方程为：$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-0}{1}=\dfrac{z-0}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=1-z\\y=z\end{cases}$

所以其绕着z轴旋转一周的曲面方程为：

$$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2\Rightarrow\frac{x^2+y^2}{2}-(z-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}$$

（2）由形心坐标计算公式可得$\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz}{\iiint\limits_{\Omega}dxdydz}=\dfrac{\pi\int_0^2\left[z(1-z)^2+z^2\right]dz}{\pi\int_0^2\left[(1-z)^2+z^2\right]dz}=\dfrac{7}{5}$，所以形心坐标为$(0,0,\dfrac{7}{5})$

（20）（本题满分 11 分）

设$A=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$，当$a,b$为何值时，存在矩阵$C$使得$AC-CA=B$，并求所有矩阵$C$。

【解析】由题意可知矩阵 C 为 2 阶矩阵，故可设$C=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，则由$AC-CA=B$可得线性方程组：

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}\qquad(1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b-1-a \end{pmatrix}$$

由于方程组（1）有解，故有$1+a=0, b-1-a=0$，即$a=-1, b=0$, 从而有

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}，故有 \begin{cases} x_1 = k_1 + k_2 + 1 \\ x_2 = -k_1 \\ x_3 = k_1 \\ x_4 = k_2 \end{cases}, 其中 k_1、k_2 任意.$$

从而有$C = \begin{pmatrix} k_1+k_2+1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$

（21）（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2 + (b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$。

（I）证明二次型 f 对应的矩阵为$2aa^T + bb^T$；

（II）若α, β正交且均为单位向量，证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型$2y_1^2 + y_2^2$。

【解析】(1)

$$f = (2a_1^2 + b_1^2)x_1^2 + (2a_2^2 + b_2^2)x_2^2 + (2a_3^2 + b_3^2)x_3^2 + (4a_1a_2 + 2b_1$$
$$+(4a_1a_3 + b_1b_3)x_1x_3 + (4a_2a_3 + 2b_2b_3)x_2x_3$$

$$则 f 的矩阵为 \begin{pmatrix} 2a_1^2+b_1^2 & 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_1a_3+b_1b_3 \\ 2a_1a_2+b_1b_2 & 2a_2^2+b_2^2 & 2a_2a_3+b_2b_3 \\ 2a_1a_3+b_1b_3 & 2a_2a_3+b_2b_3 & 2a_3^2+b_3^2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ b_1b_2 & b_2^2 & b_2b_3 \\ b_1b_3 & b_2b_3 & b_3^2 \end{pmatrix}$$

$= 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$

（2）令A=$2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 则$A\alpha = 2\alpha\alpha^T\alpha + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha, A\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta\beta^T\beta = \beta$，则 1,2 均为 A 的特征值，又由于$r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \le r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2$，故 0 为 A 的特征值，则三阶矩阵 A 的特征值为 2,1,0，故 f 在正交变换下的标准形为$2y_1^2 + y_2^2$

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x^2 & 0<x<3\\ 0 & 其他\end{cases}$，令随机变量 $Y=\begin{cases}2 & x\le 1\\ x & 1<x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$,

（I）求 Y 的分布函数

（II）求概率 $P\{X\le Y\}$

【解析】(1) $F_Y(y)=P\{Y\le y\}$

由 Y 的概率分布知，当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $y>2$ 时，$F_Y(y)=1$；

当 $1\le y\le 2$ 时，$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<X\le y\}$

$$=P\{X\ge 2\}+P\{1<X\le y\}=\int_2^3\frac{1}{9}x^2dx+\int_1^y\frac{1}{9}x^2dx$$

$$=\frac{1}{27}(y^3+18)$$

(2) $P\{X\le Y\}=P\{X\le Y,X\le 1\}+P\{X\le Y,1<X<2\}+P\{X\le Y,X>2\}=\dfrac{8}{27}$

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots X_N$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 θ 的矩估计量;

（2）求 θ 的最大似然估计量.

【解析】(1) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}dx=\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\theta}{x}}d(-\frac{\theta}{x})=\theta$，令 $EX=\overline{X}$，故 θ 矩估计量为 $\overline{X}$.

(2) $L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^n\frac{\theta^2}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i>0\\ 0 & 其他\end{cases}=\begin{cases}\theta^{2n}\prod_{i=1}^n\frac{1}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}} & x_i>0\\ 0 & 其他\end{cases}$

当 $x_i>0$ 时，

$$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^n\ln x_i-\theta\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}$$

令$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{2n}{\theta}-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}=0$，

得$\theta=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}}$，所以得$\theta$极大似然估计量$\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}}$.