2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题答案

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列曲线有渐近线的是 ( )

(A) $y=x+\sin x$ (B) $y=x^2+\sin x$

(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$ (D) $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

【答案】(C)

【解析】关于 C 选项：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{x}=1+0=1$，又

$\lim\limits_{x\to\infty}[x+\sin\frac{1}{x}-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0$，所以 $y=x+\sin\frac{1}{x}$ 存在斜渐近线 $y=x$.

故选(C).

(2) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上 ( )

(A) 当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$ (B) 当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

(C) 当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$ (D) 当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

【答案】(D)

【解析】令 $F(x)=g(x)-f(x)=f(0)(1-x)+f(1)x-f(x)$，则

$$F(0)=F(1)=0,$$

$$F'(x)=-f(0)+f(1)-f'(x),F''(x)=-f''(x).$$

若 $f''(x)\ge 0$，则 $F''(x)\le 0$，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上为凸的.

又 $F(0)=F(1)=0$，所以当 $x\in[0,1]$ 时，$F(x)\ge 0$，从而 $g(x)\ge f(x)$.

故选(D).

(3) 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)dx=$ ( )

(A) $\int_0^1 dx\int_0^{x-1}f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

(B) $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

【答案】(D)
【解析】

$$\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx=\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$$

故选(D).

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2dx=\min\limits_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx\right\}$，则 $a_1\cos x+b_1\sin x=$ ( )

(A) $2\sin x$ (B) $2\cos x$ (C) $2\pi\sin x$ (D) $2\pi\cos x$

【答案】(A)
【解析】

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2dx&=\int_{-\pi}^{\pi}\left[(x-b\sin x)^2-2a\cos x(x-b\sin x)+a^2x\cos^2 x\right]dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}(x^2-2bx\sin x+b^2\sin^2 x+a^2\cos^2 x)dx\\&=\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx+2\int_0^{\pi}(b^2\sin^2x+a^2\cos^2 x-2bx\sin x)dx\\&=4(a^2+b^2)\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}-4b\frac{\pi}{2}\cdot 2+\frac{2}{3}\pi^3\\&=\pi(a^2+b^2-4b)+\frac{2}{3}\pi^3\\&=\pi\left[a^2+(b-2)^2-4\right]+\frac{2}{3}\pi^3\end{aligned}$$

当 $a=0,b=2$ 时，积分最小.

故选(A).

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ( )

(A) $(ad-bc)^2$　(B) $-(ad-bc)^2$　(C) $a^2d^2-b^2c^2$　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

【答案】(B)

【解析】由行列式的展开定理展开第一列

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -ad(ad-bc)+bc(ad-bc)$$

$$= -(ad-bc)^2.$$

故选(B).

(6) 设 a_1,a_2,a_3 均为三维向量，则对任意常数 k,l，向量组 a_1+ka_3，a_2+la_3 线性无关是向量组 $\boldsymbol{B}=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)$ 线性无关的 ( )

(A)必要非充分条件　(B)充分非必要条件

(C)充分必要条件　(D)既非充分也非必要条件

【答案】(A)

【解析】$(\alpha_1+k\alpha_3 \quad \alpha_2+l\alpha_3)=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$.

$\Leftarrow$) 记 $A=(\alpha_1+k\alpha_3 \quad \alpha_2+l\alpha_3)$，$B=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)$，$A$. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $r(A)=r(BC)=r(C)=2$，故 $P(A-B)=0.3$ 线性无关.

$P(B-A)=$ 举反例. 令 $\alpha_3=0$，则 α_1,α_2 线性无关，但此时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 却线性相关.

综上所述，对任意常数 $Q=40-2p$，向量 p 线性无关是向量 D 线性无关的必要非充分条件.

故选(A).

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5$， $P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$　　(　　)

(A) 0.1　　(B) 0.2　　(C) 0.3　　(D) 0.4

【答案】(B)

【解析】 已知 $a=$，$\because A$ 与 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1{}^2-x_2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 独立， a，

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$$

$$=P(A)-0.5P(A)=0.5P(A)=0.3,$$

则　$P(A)=$ 0.,

则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=0.5-0.5\times0.6=0.5-0.3=0.2$.

故选(B).

(8) 设连续性随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，且方差均存在， X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则　(　　)

(A) $EY_1>EY_2$， $DY_1>DY_2$　　(B) $EY_1=EY_2$， $DY_1=DY_2$

(C) $EY_1=EY_2$， $DY_1<DY_2$　　(D) $EY_1=EY_2$， $DY_1>DY_2$

【答案】(D)

【解析】 用特殊值法. 不妨设 $X_1,X_2\sim N(0,1)$，相互独立.

$$f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\quad Y_1\sim N(0,1).$$

$$Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2),\quad E(Y_2)=\frac{1}{2}(E(X_1)+E(X_2))=0,D(Y_2)=\frac{1}{4}(D(X_1)+D(X_2))=\frac{1}{2}.$$

$$E(Y_1)=E(Y_2)=0,D(Y_1)=1>D(Y_2)=\frac{1}{2}.$$

故选(D).

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为__________.

【答案】$2x-y-z=1$

【解析】由于 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$，所以

$$z_x'=2x(1-\sin y)-\cos x\cdot y^2，\quad z_x'(1,0)=2；$$

$$z_y'=-x^2\cos y+2y(1-\sin x)，\quad z_y'(1,0)=-1.$$

所以，曲面在点 $(1,0,1)$ 处的法向量为 $\vec{n}=\{2,-1,-1\}$.

故切平面方程为 $2(x-1)+(-1)(y-0)-(z-1)=0$，即

$$2x-y-z=1.$$

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1),\quad x\in[0,2]$，则 $f(7)=$__________.

【答案】1

【解析】由于 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$，所以 $f(x)=(x-1)^2+C$，$x\in[0,2]$.

又 $f(x)$ 为奇函数，$f(0)=0$，代入表达式得 $C=-1$，故

$$f(x)=(x-1)^2-1，\quad x\in[0,2].$$

$f(x)$ 是以 4 为周期的奇函数，故

$$f(7)=f(-1+8)=f(-1)=-f(1)=-[(1-1)^2-1]=1.$$

(11) 微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 $y=$__________.

【答案】$y=xe^{2x+1}(x>0)$

【解析】$xy'+y(\ln x-\ln y)=0\Rightarrow y'=\dfrac{y}{x}\ln(\dfrac{y}{x})$.

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=x\cdot u$，$y'=xu'+u$，代入原方程得

$$xu'+u=u\ln u\Rightarrow u'=\frac{u(\ln u-1)}{x}$$

分离变量得，$\dfrac{du}{u(\ln u-1)}=\dfrac{dx}{x}$，两边积分可得

$$\ln|\ln u-1|=\ln x+C，即 \ln u-1=Cx.$$

故$\ln\dfrac{y}{x}-1=Cx$. 代入初值条件$y(1)=e^3$，可得$C=2$，即$\ln\dfrac{y}{x}=2x+1$.

由上，方程的解为$y=xe^{2x+1},(x>0)$.

(12) 设L是柱面$x^2+y^2=1$与平面$y+z=0$的交线，从z轴正向往z轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分$\oint_L zdx+ydz=$__________.

【答案】π

【解析】由斯托克斯公式，得

$$\oint_L zdx+ydz=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z & 0 & y\end{vmatrix}=\iint_\Sigma dydz+dzdx$$

$$=\iint_{D_{xy}}dydz+dzdx=\pi,$$

其中$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$.

(13) 设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$的负惯性指数是1，则$a$的取值范围__________.

【答案】$\left[-2,2\right]$

【解析】配方法：$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1+ax_3\right)^2-a^2x_3^2-\left(x_2-2x_3\right)^2+4x_3^2$

由于二次型负惯性指数为1，所以$4-a^2\ge 0$，故$-2\le a\le 2$.

(14) 设总体X的概率密度为$f\left(x;\theta\right)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$其中$\theta$是未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X$的简单样本，若$E(c\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2)=\theta^2$，则$c=$__________.

【答案】$\dfrac{2}{5n}$

【解析】$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x;\theta)dx=\int_{\theta}^{2\theta}x^2\cdot\dfrac{2x}{3\theta^2}dx$

$$=\frac{2}{3\theta^2}\cdot\frac{1}{4}x^4\Big|_{\theta}^{2\theta}=\frac{5\theta^2}{2},$$

$$E[c\sum_{i=1}^{n}X_i^2]=ncE(X^2)=\frac{5n}{2}\theta^2\cdot c=\theta^2,$$

$$\therefore\quad c=\frac{2}{5n}.$$

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

【解析】 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

$$\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1}{2t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t}{2t}=\frac{1}{2}.$$

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=f\left(x\right)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f\left(x\right)$ 的极值.

【解析】对方程两边直接求导：

$$3y^2y'+y^2+2xyy'+x^2y'+2xy=0 \qquad ①$$

令 x_1 为极值点，则由极值必要性知： $y'(x_1)=0$，代入①式得：

$$y^2(x_1)+2x_1y(x_1)=0.$$

即 $y(x_1)=0$ 或 $y(x_1)=-2x_1$. 将其代入原方程知： $y(x_1)=0$（舍去），即 $y(x_1)=-2x_1$. 代入，有 $-8x_1^3+4x_1^3-2x_1^3+6=$，$\therefore\ x_1=1$. 即 $y(1)=-2$， $y'(1)=0$.

对①式两边再求导：

$$6y(y')^2+3y^2y''+2yy'+2x(y')^2+2xyy''+2yy'+2xy'+x^2y''+2y+2xy'=0.$$

将 $y(1)=-2$，$y'(1)=0$ 代入得：$y''(1)=\dfrac{4}{9}>0$.

$\therefore$ $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处取极小值，$y=f(1)=-2$.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$ 若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

【解析】

因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y+f'(e^x\cos y)e^x\cos y$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-f'(e^x\cos y)e^x\sin y,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)e^{2x}\cos^2 y-f'(e^x\cos y)e^x\cos y$

所以，$f''(e^x\cos y)e^{2x}=\left[4f(e^x\cos y)+e^x\cos y\right]e^{2x}$

$$f''(u)=4f(u)+u$$

上述方程的通解为

$$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{u}{4}$$

由 $f(0)=0, f'(0)=0$ 得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0\\ 2C_1-2C_2=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

解得，$C_1=\dfrac{1}{16},C_2=-\dfrac{1}{16}$

故，$f(u)=\dfrac{1}{16}e^{2u}-\dfrac{1}{16}C_2e^{-2u}-\dfrac{u}{4}$

(18)(本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ $(z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy\,.$$

【解析】$\sum$ 非闭，补 $\sum_1$：平面 $z=1$，被 $z=x^2+y^2$ 所截有限部分下侧，由 Gauss 公式，有

$$-\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1\right]dV$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV-6\iiint\limits_{\Omega}xdV-6\iiint\limits_{\Omega}ydV+7\iiint\limits_{\Omega}dV$$

$\sum$ 和 $\sum_1$ 所围立体为 Ω，Ω 关于 yoz 面和 zox 面对称，则 $\iiint\limits_{\Omega}xdV=\iiint\limits_{\Omega}ydV=0$

$$\because \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dV=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy\int_{x^2+y^2}^{1}dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2(1-r^2)rdr$$

$$=2\pi\left(\frac{1}{4}r^4-\frac{1}{6}r^6\right)\Big|_0^1=2\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$$

$$\iiint\limits_{\Omega}dV=\int_0^1dz\iint\limits_{x^2+y^2\le z}dxdy=\int_0^1\pi zdz=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore -\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}=3\cdot\frac{\pi}{6}+7\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{7}{2}\pi=4\pi$$

$$\therefore -\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}=4\pi$$

$$\text{又}\because \iint\limits_{\Sigma_1}=\iint\limits_{\Sigma_1}(z-1)dxdy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(1-1)dxdy=0$$

$$\therefore I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=4\pi$$

(19)(本题满分 10 分)

设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$，$0<b_n<\frac{\pi}{2}$，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

(I) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(II) 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

【解析】(I) $\because \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\therefore \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

$$\because a_n = \cos a_n - \cos b_n = -2\sin\frac{a_n+b_n}{2}\sin\frac{a_n-b_n}{2} > 0$$

$$\therefore \sin\frac{a_n-b_n}{2} < 0$$

又 $\because -\frac{\pi}{4} < \frac{a_n-b_n}{2} < \frac{\pi}{4}$， $\therefore -\frac{\pi}{4} < \frac{a_n-b_n}{2} < 0$

即： $a_n < b_n$

又 $\because 0 < a_n < b_n, \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ $\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(II) 证明：由 (I) $a_n = -2\sin\frac{a_n+b_n}{2}\sin\frac{a_n-b_n}{2}$

$$\therefore \frac{a_n}{b_n} = \frac{-2\sin\frac{a_n+b_n}{2}\sin\frac{a_n-b_n}{2}}{b_n}$$

$$\le \frac{2\frac{a_n+b_n}{2}\frac{b_n-a_n}{2}}{b_n} = \frac{b_n^2-a_n^2}{2b_n} < \frac{b_n^2}{2b_n} = \frac{b_n}{2}$$

又 $\because \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{2}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$， E 为三阶单位矩阵.

(I)求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

(II)求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B .

【解析】

$$(A|E)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

(I) $Ax=0$ 的基础解系为 $\xi=(-1,2,3,1)^T$

(II) $e_1=(1,0,0)^T, e_2=(0,1,0)^T, e_3=(0,0,1)^T$

$Ax=e_1$ 的通解为 $x=k_1\xi+(2,-1,-1,0)^T=(2-k_1,-1+2k_1,-1+3k_1,k_1)^T$

$Ax=e_2$ 的通解为 $x=k_2\xi+(6,-3,-4,0)^T=(6-k_2,-3+2k_2,-4+3k_2,k_2)^T$

$Ax=e_3$ 的通解为 $x=k_3\xi+(-1,1,1,0)^T=(-1-k_3,1+2k_3,1+3k_3,k_3)^T$

$$\therefore B=\begin{pmatrix} 2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3 \\ -1+2k_1 & -3+2k_2 & 1+2k_3 \\ -1+3k_1 & -4+3k_2 & 1+3k_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \quad （k_1,k_2,k_3 \text{为任意常数}）$$

(21) (本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

【解析】已知 $A=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，

则 A 的特征值为 n，0（$n-1$ 重）.

A 属于 $\lambda=n$ 的特征向量为 $(1,1,\cdots,1)^T$；$r(A)=1$，故 $Ax=0$ 基础解系有 $n-1$ 个线性无关的解向量，即 A 属于 $\lambda=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，故 A 相似于对角阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

B 的特征值为 n，0（$n-1$ 重），同理 B 属于 $\lambda=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，故 B 相似于对角阵 Λ.

由相似关系的传递性，A 相似于 B.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i),(i=1,2)$.

（I）求Y的分布函数$F_Y\left(y\right)$；

（II）求EY.

【解析】（I）设Y的分布函数为$F_Y(\mathrm{y})$，则

$$F_Y(y)=P\left\{Y\le y\right\}=P\left\{X=1\right\}P\left\{Y\le y\mid X=1\right\}+P\left\{X=2\right\}P\left\{Y\le y\mid X=2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}P\left\{Y\le y\mid X=1\right\}+\frac{1}{2}P\left\{Y\le y\mid X=2\right\}$$

当$y<0$时，$F_Y(y)=0$；

当$0\le y<1$时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}(\mathrm{y}+\frac{y}{2})=\frac{3y}{4}$；

当$1\le y<2$时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}(1+\frac{y}{2})$；

当$y\ge 2$时，$F_Y(y)=1$.

所以Y的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{3y}{4}, & 0\le y<1\\ \frac{1}{2}(1+\frac{y}{2}), & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

（II）Y的概率密度为

$$f_Y(\mathrm{y})=\begin{cases}\frac{3}{4}, & 0<y<1,\\ \frac{1}{4}, & 1\le y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 y\frac{3}{4}dy+\int_1^2 y\frac{1}{4}dy$$
$$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{4}$$

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（I）求 $E(X)$，$E(X^2)$；

（II）求 θ 的最大似然估计量 $\widehat{\theta}_n$；

（III）是否存在实数 a，使得对任何 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\widehat{\theta}_n-a\right|\ge\varepsilon\right\}=0$？

【解析】X 的概率密度为 $f(x;\theta)=F'(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}, x>0\\ 0\quad , \text{其它}\end{cases}$

（I）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_0^{+\infty}x\dfrac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$

$$=-\int_0^{+\infty}xde^{-\frac{x^2}{\theta}}=-[xe^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx]$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x;\theta)dx=\int_0^{+\infty}x^2\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}x^2de^{-\frac{x^2}{\theta}}=-[x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}\cdot 2xdx]$$

$$=\theta\int_0^{+\infty}\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=\theta$$

（II）似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x;\theta)==\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{\theta}e^{-\frac{x_i^2}{\theta}}, x_i>0\\ 0\quad ,\quad 其它\end{cases}$

当 $x_i>0(i=1,\cdots,n)$ 时，$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2x_i}{\theta}e^{-\frac{x_i^2}{\theta}}$，

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[\ln 2x_i-\ln\theta-\frac{x_i^2}{\theta}]$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}[-\frac{1}{\theta}+\frac{x_i^2}{\theta^2}]=\frac{1}{\theta^2}[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\theta]=0$$

解得 $\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$

所以，θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

（III）依题意，问 $\hat{\theta}_n$ 是否为 θ 的一致估计量.

$$E(\hat{\theta}_n)=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=E(X^2)=\theta$$

$$D(\hat{\theta}_n)=\frac{1}{n}D(X^2)=\frac{1}{n}[E(X^4)-E^2(X^2)]$$

$$E(X^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4 f(x;\theta)dx=\int_0^{+\infty}x^4\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}x^4 de^{-\frac{x^2}{\theta}}=-[x^4e^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}\cdot 4x^3dx]$$

$$=4\int_0^{+\infty}x^3e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=-2\theta\int_0^{+\infty}x^2de^{-\frac{x^2}{\theta}}=-2\theta[x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}\cdot 2xdx]$$

$$=4\theta\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=-2\theta^2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\theta}}d(-\frac{x^2}{\theta})$$

$$=2\theta^2$$

$$\therefore D(\hat{\theta}_n)=\frac{1}{n}[2\theta^2-\theta^2]=\frac{\theta^2}{n}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} D(\hat{\theta}_n)=0$ $\therefore \hat{\theta}_n$ 为 θ 的一致估计量 $\therefore a=\theta$