

### 2012 年全国硕士研究生入学统一考试

## 数学三试题

一、选择题: 1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

- (1) 曲线  $y = \frac{x^2 + x}{x^2 1}$  渐近线的条数为 ()
- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3
- (2) 设函数  $f(x) = (e^x 1)(e^{2x} 2)\cdots(e^{nx} n)$ , 其中 n 为正整数,则 f'(0) =
- (A)  $(-1)^{n-1}(n-1)!$
- (B)  $(-1)^n (n-1)!$
- (C)  $(-1)^{n-1}n!$
- (D)  $(-1)^n n!$
- (3) 设函数 f(t)连续,则二次积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r dr = ($
- (A)  $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2) dy$
- (B)  $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) dy$
- (C)  $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) dx$
- (D)  $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x^2+y^2) dx$
- (4) 已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^{\alpha}}$  绝对收敛,  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$  条件收敛,则  $\alpha$  范围为( )
- (A)  $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$
- $(B) \frac{1}{2} < \alpha \le 1$
- (C)  $1 < \alpha \le \frac{3}{2}$



(D) 
$$\frac{3}{2} < \alpha < 2$$

$$(5) \ \textbf{设}\ \boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix} \\ \textbf{其中}\ c_1, c_2, c_3, c_4$$
为任意常数,则下列向量组线性相关

的是()

(A)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 

(B)  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 

(C)  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 

(D)  $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 

(6) 设 
$$A$$
 为 3 阶矩阵,  $P$  为 3 阶可逆矩阵,且  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ ,  $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,

 $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3) \bowtie Q^{-1}AQ = ($ 

- $(A)\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$
- $(B)\begin{pmatrix}1\\&1\\&&2\end{pmatrix}$
- $(\mathbf{C}) \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$
- $(D)\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$
- (7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且都服从区间  $\left(0,1\right)$  上的均匀分布,则  $P\left\{X^2+Y^2\leq 1\right\}$  ( )
- (A)  $\frac{1}{4}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{\pi}{8}$  (D)  $\frac{\pi}{4}$
- (8) 设  $X_1, X_2, X_3, X_4$ 为来自总体  $N(1, \sigma^2)(\sigma > 0)$  的简单随机样本,则统计量  $\frac{X_1 X_2}{|X_3 + X_4 2|}$  的分布

( )

- (A) N(0,1)
- (B) t(1)
- (C)  $\chi^2(1)$
- (D) F(1,1)
- 二、填空题: 9-14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.
- (9)  $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x \sin x}} \underline{\hspace{1cm}}_{\circ}$





(11) 函数 
$$z = f(x, y)$$
 满足  $\lim_{\substack{x \to 0 \ y \to 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} = 0$ ,则  $dz|_{(0,1)} =$ 

- (12) 由曲线  $y = \frac{4}{x}$  和直线 y = x 及 y = 4x 在第一象限中所围图形的面积为?
- (13) 设A为3阶矩阵,|A|=3, $A^*$ 为A的伴随矩阵,若交换A的第一行与第二行得到矩阵B,则

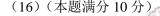
$$|BA^*| =$$
\_\_\_\_\_\_

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A, C 互不相容,  $P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}, \text{则 } P(ABC) = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分10分)

计算
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$$



计算二重积分  $\iint_D e^x xy dx dy$ ,其中 D 是以曲线  $y = \sqrt{x}$  与  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  及 y 轴为边界的无界区域。

# 沪江网校·考研

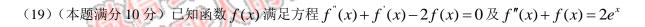


(17)(本题满分 10 分)某企业为生产甲、乙两种型号的产品,投入的固定成本为 10000(万元),设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为  $\mathbf{x}$  (件)和( $\mathbf{y}$  件),且这两种产品的边际成本分别为  $\mathbf{20} + \frac{x}{2}$  (万元/件)。

- 1) 求生产甲乙两种产品的总成本函数 C(x, y) (万元)
- 2) 当总产量为50件时,甲乙两种的产量各为多少时可以使总成本最小?求最小的成本。
- 3) 求总产量为50件且总成本最小时甲产品的边际成本,并解释其经济意义。

(18)(本题满分10分)

证明: 
$$x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \ge 1 + \frac{x^2}{2} (-1 < x < 1)$$



- 1) 求 f(x) 的表达式
- 2) 求曲线  $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$  的拐点

# 罗沪江网校·考研



(20)(本题满分10分)

设 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (I) 计算行列式|A|;
- (II) 当实数a为何值时,方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解,并求其通解.

(21) (本题满分 10 分) 已知 
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}$$
, 三次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x^T (A^T A) x$  的秩为 2

- (I) 求实数 a 的值;
- (II) 求正交变换 x = Qy 将 f 化为标准形.





### (22)(本题满分10分)

设二维离散型随机变量(X,Y)的概率分布为

Y	0	1	2
X	0	1	2
	<u>1</u>		<u>1</u>
0	4	0	4
		1	
1	0	$\frac{\overline{3}}{3}$	0
	1		1
2	12	0	12

- (  $\coprod$  ) 求Cov(X-Y,Y).

### (23)(本题满分10分)

设随机变量 X 和 Y 相互独立,且均服从参数为1的指数分布, $V = \min(X,Y), U = \max(X,Y)$ .

求(1)随机变量V的概率密度;

(2) E(U+V).