2014年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题答案

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）A

（2）C

（3）D

（4）D

（5）B

（6）A

（7）（B）

（8）（C）

二、填空题：9–14小题，每小题4分，共24分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）20-Q

（10）$\frac{3}{2}-ln\,2$

（11）$a=\frac{1}{2}$

（12）$\frac{1}{2}(e-1)$

（13）[-2,2]

（14）$\frac{2}{5n}$

三、解答题：15—23小题，共94分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）【答案】

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)\int_1^x t^2dt-\int_1^x tdt}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2(e-1)-x$$

令$u=\frac{1}{x}$，

则$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(e-1)-x$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1-u}{u^2}$$

$$=\lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1}{2u}=\frac{1}{2}$$

（16）【答案】

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\frac{\rho\cos\theta\sin\pi\rho}{\rho\cos\theta+\rho\sin\theta}\rho d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta\int_1^2\rho\sin\pi\rho d\rho$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta\int_1^2\rho d\cos\pi\rho$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta(\rho\cos\pi\rho\Big|_1^2-\frac{1}{\pi}\int_1^2\cos\pi\rho d\pi\rho)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta\cdot(2+1)$$

$$=-\frac{3}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$

$$=-\frac{3}{4}$$

（17）【答案】

因为$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)e^x\cos y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(e^x\cos y)e^x\sin y$

所以，$\cos y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x$ 化为 $f'(e^x\cos y)e^x=\left[4f(e^x\cos y)+e^x\cos y\right]e^x$

此函数满足方程 $f'(u)-4f(u)=u$

该方程的通解为 $f(u)=Ce^{4u}-\frac{u}{4}-\frac{1}{16}$

又，$f(0)=0$ 得 $C=\frac{1}{16}$,故 $f(u)=\frac{1}{16}e^{4u}-\frac{u}{4}-\frac{1}{16}$

（18）【答案】

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)}=1$，得 $R=1$

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)$ 发散，当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)$ 发散，

故收敛域为 $(-1,1)$。

$x\neq 0$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=(\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)\int_0^x(n+1)x^n dx)'$$
$$=(\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+1})'=(\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+2})'$$
$$=(\frac{1}{x}(\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(n+3)x^{n+2}dx)')'=(\frac{1}{x}(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+3})')'$$ 。
$$=(\frac{1}{x}(\frac{x^3}{1-x})')'=(\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2})'=\frac{3-x}{(1-x)^3}=s(x)$$

$x=0$ 时，$s(x)=3$，故和函数 $s(x)=\frac{3-x}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$

（19）【答案】

证明：1）因为 $0\le g(x)\le 1$，所以有定积分比较定理可知，$\int_a^x 0dt\le\int_a^x g(t)dt\le\int_a^x 1dt$，即

$0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a$。

2）令

$$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt-\int_a^{x+\int_a^x g(t)dt-} f(u)du$$
$$F(a)=0$$
$$F'(x)=f(x)g(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]g(x)$$
$$=g(x)\{f(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]\}$$

由 1）可知 $\int_a^x g(t)dt\le x-a$，

所以 $a+\int_a^x g(t)dt\le x$。

由 $f(x)$ 是单调递增，可知

$f(x)-f[a+\int_a^x g(t)dt]\ge 0$

由因为$0\le g(x)\le 1$，所以$F'(x)\ge 0$，$F(x)$单调递增，所以$F(b)>F(a)=0$，得证。

（20）【答案】①$(-1,2,3,1)^T$ ②$B=\begin{pmatrix}-k_1+2 & -k_2+6 & -k_3-1\\ 2k_1-1 & 2k_2-3 & 2k_3+1\\ 3k_1-1 & 3k_2-4 & 3k_3+1\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}(k_1,k_2,k_3\in R)$

（21）【答案】利用相似对角化的充要条件证明。

（22）【答案】（1）$F_Y(y)=\begin{cases}0, y<0,\\ \frac{3}{4}y, 0\le y<1,\\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}y\right), 1\le y<2,\\ 1, y\ge 2.\end{cases}$

（2）$\frac{3}{4}$

（23）【答案】（1）

Y \ X	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

（2）$\frac{4}{9}$