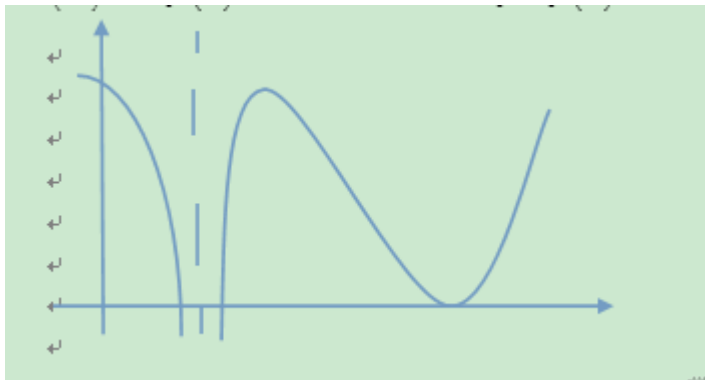


2016 全国研究生入学考试考研数学三试题

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题卡指定位置上。

(1) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，其导数的图像，如图所示，则



(A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

(B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点

(C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点

(D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

(2) 已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$ ，则

(A) $f'_x - f'_y = 0$

(B) $f'_x + f'_y = 0$

(C) $f'_x - f'_y = f$

(D) $f'_x + f'_y = f$

(3) 设 $J_i = \iint_{D_i} \sqrt[3]{x-y} dx dy (i=1, 2, 3)$ ，其中

$D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$, $D_3 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$

(A) $J_1 < J_2 < J_3$

(B) $J_3 < J_1 < J_2$

(C) $J_2 < J_3 < J_1$

(D) $J_2 < J_1 < J_3$

(4) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k)$, k 为常数

(A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 收敛性与 k 有关

(5) 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是 ()

(A) A^T 与 B^T 相似

(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似

(C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似

(D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为 1, 2, 则

(A) $a > 1$ (B) $a < -2$ (C) $-2 < a < 1$ (D) $a = 1$ 或 $a = -2$

(7) 设 A, B 为两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 如果 $P(A|B) = 1$, 则

(A) $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$ (B) $P(A|\bar{B}) = 0$ (C) $P(A \subseteq B) = 1$ (D) $P(B|A) = 1$

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(1, 2), Y \sim N(1, 4)$, 则 $D(XY) =$

(A) 6 (B) 8 (C) 14 (D) 15

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____.

(10) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \cdots + n \sin \frac{n}{n} \right) =$ _____.

(11) 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则 $\left. \frac{dz}{dy} \right|_{(0,1)} =$ _____

(12) 设 $D = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$, 则 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy =$ _____

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$ _____

(14) 设袋中有红、白、黑球各 1 个, 从中有放回地取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的球都取

到时停止，则取球次数恰好为 4 的概率为_____.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}$

(16) (本题满分 10 分)

设某商品的最大需求量为 1200 件，该商品的需求函数 $Q = Q(p)$ ，需求弹性

$$\eta = \frac{p}{120 - p} (\eta > 0), \quad p \text{ 为单价 (万元)}$$

(I) 求需求函数的表达式

(II) 求 $p = 100$ 万元时的边际收益，并说明其经济意义。

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt \quad (x > 0)$ ，求 $f'(x)$ ，并求 $f(x)$ 的最小值。

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园!

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$

(19) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数。

(20) (本题满分 11 分) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解.

(1) 求 a 的值.

(2) 求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

(21) (本题满分 11 分) 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(1) 求 A^{99} .

(2) 设三阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$, 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合。

(22) (本题满分 11 分) 设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 服从均匀分布, 令 $U = \begin{cases} 1 & X \leq Y \\ 0 & X > Y \end{cases}$

(1) 写出 (X, Y) 的概率密度.

(2) 问 U 与 X 是否相互独立, 说明理由.

(3) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(Z)$.

(23) (本题满分 11 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(X; q) = \begin{cases} \frac{3x^2}{q^3}, & 0 < x < q \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本,

令 $T = \max\{X_1, X_2, X_3\}$

(1) 求 T 的概率密度。

(2) 确定 a , 使得 $E(aT) = \theta$.

微信公众号【最强考研】
考研人的精神家园!