2016年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

本试卷满分150，考试时间180分钟

一、选择题： 1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在**答题纸**指定位置上.

（1）若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛，则( )

$(A)\,a<1$且$b>1$　$(B)\,a>1$且$b>1$　$(C)\,a<1$且$a+b>1$　$(D)\,a>1$且$a+b>1$

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1),x<1\\ \ln x,x\ge1\end{cases}$，则 $f(x)$ 一个原函数是（　）

$(A)\,F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x-1),x\ge1\end{cases}$　$(B)\,F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x+1)-1,x\ge1\end{cases}$

$(C)\,F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x+1)+1,x\ge1\end{cases}$　$(D)\,F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1\\ x(\ln x-1)+1,x\ge1\end{cases}$

（3）若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$，$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 两个解，则 $q(x)=$（　）

$(A)\,3x(1+x^2)$　$(B)\,-3x(1+x^2)$　$(C)\,\frac{x}{1+x^2}$　$(D)\,-\frac{x}{1+x^2}$

（4）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x,x\le0\\ \frac{1}{n},\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}\end{cases}$，$n=1,2,\cdots$（　）

$(A)\,x=0$ 是 $f(x)$ 第一类间断点　$(B)\,x=0$ 是 $f(x)$ 第二类间断点

$(C)\,f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导　$(D)\,f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

（5）设 A,B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是（　）

$(A)\,A^T$ 与 B^T 相似　$(B)\,A^{-1}$ 与 B^{-1} 相似

(C) $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似　　　(D) $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_1x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标系下表示的二次曲面是（　　）

(A) 单叶双曲面　　(B) 双叶双曲面　(C) 椭球面　　(D) 柱面

（7）设随机变量 X 为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$, 记 $p=P\{X\le\mu+\sigma^2\}$. 则（　　）

(A) p 随着 μ 增加而增加　　　　(B) p 随着 σ 增加而增加

(C) p 随着 μ 增加而减少　　　　(D) p 随着 σ 增加而减少

（8） 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 $A_1,A_2,A_3,$ 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做两次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示两次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X Y 的相关系数为（　　）

$(A)-\frac{1}{2}$　　$(B)-\frac{1}{3}$　　$(C)\frac{1}{3}$　　$(D)\frac{1}{2}$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,dt}{1-\cos x^2}=$________.

（10）向量场 $A(x,y,z)=(x+y+z)\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，旋度 $rotA=$________

（11）设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz|_{(0,1)}=$_______

（12）设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$_______

（13）行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$_______

（14）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，样本均值 $\overline{X}=9.5$，参数 μ 置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 置信度为 0.95 的双侧置信区间为________.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）已知平面区域 $D=\left\{\left(r,\theta\right)|\,2\le r\le 2\left(1+\cos\theta\right),-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D x\,dx\,dy$。

（16）设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$。

（1）证明：反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛

（2）若 $y\left(0\right)=1,y'\left(0\right)=1$，求 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 的值

（17）设函数 $f\left(x,y\right)$ 满足 $\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}=\left(2x+1\right)e^{2x-y}$，且 $f\left(0,y\right)=y+1$，L_t 是从点 $\left(0,0\right)$ 到点 $\left(1,t\right)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I\left(t\right)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}dy$，并求 $I\left(t\right)$ 的最小值。

（**18**）设有界区域Ω由曲面$2x+y+2z=2$与三个坐标平面围成，Σ为Ω整个表面的外侧，计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+1\right)dydz-2ydzdx+3zdxdy$。

（**19**）已知函数$f\left(x\right)$可导，且$f\left(0\right)=1, 0<f'\left(x\right)<\dfrac{1}{2}$，设数列$\left\{x_n\right\}$满足$x_{n+1}=f\left(x_n\right)\left(n=1,2,\cdots\right)$，证明（1）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x_{n+1}-x_n\right)$绝对收敛；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在且$0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$。

（**20**）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & -2\end{pmatrix}$，当$a$为何值时，方程$AX=B$无解，有唯一解，有无穷多解？在有解时，求解此方程。

（21）（本题满分 11 分）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

（1）求 A^{99}.

（2）设三阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$，记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

（22）（本题满分 11 分）设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1 & X\le Y\\ 0 & X>Y\end{cases}$

（1）写出 (X,Y) 的概率密度.

（2）问 U 与 X 是否相互独立，说明理由。

（3）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(Z)$.

（**23**）设总体 X 的概率密度为 $f\left(x;\theta\right)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta\\ 0,else\end{cases}$，其中 $\theta\in\left(0,+\infty\right)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，$T=\max\left\{X_1,\mathrm{X}_2,X_3\right\}$。

（1）求 T 的概率密度；

（2）确定 a，使得 aT 为 θ 的无偏估计.