2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)设 $\{x_n\}$ 是数列,下列命题中不正确的是 (　　)

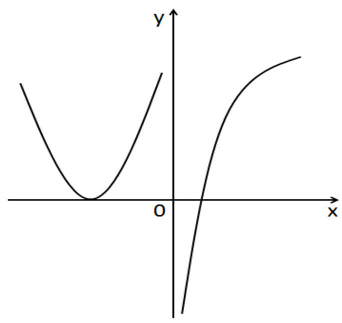
(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示,则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为 (　　)



(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(3) 设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2x, x^2+y^2\le 2y\right\}$,函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续,则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ (　　)

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(C) $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$

(D) $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

(4) 下列级数中发散的是(　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$

(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

(5)设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$.若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为（ ）

(A) $a\notin\Omega,d\notin\Omega$ (B) $a\notin\Omega,d\in\Omega$

(C) $a\in\Omega,d\notin\Omega$ (D) $a\in\Omega,d\in\Omega$

(6)_设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$ 则 $f=(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为（ ）

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$ (B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$ (D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件,则: （ ）

(A) $P(AB)\le P(A)P(B)$ (B) $P(AB)\ge P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\le\frac{P(A)+P(B)}{2}$ (D) $P(AB)\ge\frac{P(A)+P(B)}{2}$

(8) 设总体 $X\sim B(m,\theta)$, $X_1,X_2,\dots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值,则 $E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=$（ ）

(A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$ (B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$

(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$ (D) $mn\theta(1-\theta)$

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=$__________.

(10)设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)\mathrm{d}t$, 若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$, 则 $f(1)=$__________.

(11)若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=$__________.

(12)设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处取得极值 3，则

$y(x)=$________.

(13)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$________.

(14)设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$_________.

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=c=kx^3$.若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 2, y\ge x^2\}$.

(17)(本题满分 10 分)

为了实现利润的最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设 Q 为该商品的需求量，P 为价格，MC 为边际成本，η 为需求弹性 $(\eta>0)$.

(I) 证明定价模型为 $P=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$ ；

(II) 若该商品的成本函数为 $C(Q)=1600+Q^2$，需求函数为 $Q=40-P$，试由（I）中的定价模型确定此商品的价格.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 表达式.

(19)(本题满分 10 分)

（I）设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

（II）设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

(20) (本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

(I) 求 a 的值；

(II)若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，求 $\boldsymbol{X}$.

(21) (本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 a,b 的值；

（II）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, x>0\\0, \quad x\le 0\end{cases}$,对 X 进行独立重复的观测,直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数

(I)求 Y 的概率分布；

(II)求 $E(Y)$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, \theta\le x\le 1,\\0, \quad \text{其他},\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I)求 θ 的矩估计量;

(II)求 θ 的最大似然估计量.