

## 2017 全国研究生入学考试考研数学一真题

本试卷满分 150，考试时间 180 分钟

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 若函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{ax}, & x > 0 \\ b, & x \leq 0 \end{cases}$ ，在  $x=0$  处连续，则 ( )

- (A)  $ab = \frac{1}{2}$  (B)  $ab = -\frac{1}{2}$  (C)  $ab = 0$  (D)  $ab = 2$

(2) 若函数  $f(x)$  可导，且  $f(x)f'(x) > 0$ ，则 ( )

- (A)  $f(1) > f(-1)$  (B)  $f(1) < f(-1)$   
(C)  $|f(1)| > |f(-1)|$  (D)  $|f(1)| < |f(-1)|$

(3) 函数  $f(x, y, z) = x^2y + z^2$  在点  $(1, 2, 0)$  处沿向量  $n = (1, 2, 2)$  的方向导数为 ( )

- (A) 12 (B) 6 (C) 4 (D) 2

(4) 甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10(单位: m) 处，图中实线表示甲的速度曲线  $v = v_1(t)$  (单位: m/s)，虚线表示乙的速度  $v = v_2(t)$ ，三块阴影部分面积的数值依次为 10、20、3，计时开始后乙追上甲的时刻记为  $t_0$  (单位: s)，则 ( )

- (A)  $t_0 = 10$  (B)  $15 < t_0 < 20$  (C)  $t_0 = 25$  (D)  $t_0 > 25$

(5) 设  $\alpha$  是  $n$  维单位列向量， $E$  为  $n$  阶单位矩阵，则

- (A)  $E - \alpha\alpha^T$  不可逆 (B)  $E + \alpha\alpha^T$  不可逆  
(C)  $E + 2\alpha\alpha^T$  不可逆 (D)  $E - 2\alpha\alpha^T$  不可逆

(6) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，则

- (A)  $A$  与  $C$  相似， $B$  与  $C$  相似 (B)  $A$  与  $C$  相似， $B$  与  $C$  不相似  
(C)  $A$  与  $C$  不相似， $B$  与  $C$  相似 (D)  $A$  与  $C$  不相似， $B$  与  $C$  不相似

(7) 设  $A, B$  为随机事件，若  $0 < P(A) < 1$ ， $0 < P(B) < 1$ ，则  $P(A|B) > P(A|\bar{B})$  的充要条件是

(A)  $P(B|A) > P(B|\bar{A})$  (B)  $P(B|A) < P(B|\bar{A})$

(C)  $P(\bar{B}|A) > P(B|\bar{A})$  (D)  $P(\bar{B}|A) < P(B|\bar{A})$

(8) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$  为来自总体  $N(\mu, 1)$  的简单随机样本, 记  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , 则下列结论中不正确的是

(A)  $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$  服从  $\chi^2$  分布 (B)  $2(X_n - X_1)^2$  服从  $\chi^2$  分布

(C)  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  服从  $\chi^2$  分布 (D)  $n(\bar{X} - \mu)^2$  服从  $\chi^2$  分布

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 已知函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 则  $f^{(3)}(0) =$  \_\_\_\_\_。

(10) 微分方程  $y'' + 2y' + 3y = 0$  的通解为  $y =$  \_\_\_\_\_。

(11) 若曲线积分  $\int_L \frac{xdx - ydy}{x^2 + y^2 - 1}$  在区域  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$  内与路径无关, 则  $a =$  \_\_\_\_\_。

(12) 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} nx^{n-1}$  在区间  $(-1, 1)$  内的和函数  $S(x) =$  \_\_\_\_\_。

(13) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组  $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$  的

秩为 \_\_\_\_\_。

(14) 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$ , 其中  $\Phi(x)$  为标准正态分布函数, 则  $EX =$  \_\_\_\_\_。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分) 设函数  $f(u, v)$  具有 2 阶连续偏导数,  $y = f(e^x, \cos x)$ , 求  $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=0}$ 。

(16) (本题满分 10 分) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln(1 + \frac{k}{n})$ 。

(17) (本题满分 10 分) 已知函数  $y(x)$  由方程  $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$  确定, 求  $y(x)$  的极值。

微信公众号【最强考研】  
考研人的精神家园!

(18) (本题满分 11 分) 设函数  $f(x)$  在区间  $[0,1]$  上具有二阶导数, 且  $f(1) > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} < 0$ 。

证明: (I) 方程  $f(x) = 0$  在区间  $(0,1)$  内至少存在一个实根。

(II) 方程  $f(x)f''(x) + (f'(x))^2 = 0$  在区间  $(0,1)$  内至少存在两个不同实根。

(19) (本题满分 10 分) 设薄片型物体  $S$  是圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被柱面  $z^2 = 2x$  割下的有限部分, 其上任一点的密度为  $\mu = 9\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 记圆锥面与柱面的交线为  $C$ 。

(I) 求  $C$  在  $xOy$  面上的投影曲线的方程;

(II) 求  $S$  的质量  $M$ 。

(20) (本题满分 11 分) 设 3 阶矩阵  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  有 3 个不同的特征值, 且  $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ 。

1) 证明:  $r(A) = 2$

2) 若  $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ , 求方程组  $Ax = \beta$  的通解。

(21) (本题满分 11 分) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + ax_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 + 2x_2x_3$ , 在正交变换  $x = Qy$  下的标准型为  $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ , 求  $a$  的值及一个正交矩阵  $Q$ 。

微信公众号【最强考研】  
考研人的精神家园!

(22) (本题满分 11 分) 设随机变量为  $X$ ,  $Y$  相互独立, 且  $X$  的概率分布为

$$P(X = 0) = P(X = 2) = \frac{1}{2}, Y \text{ 的概率密度为 } f(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

- 1) 求  $P(Y \leq EY)$  ;
- 2) 求  $Z = X + Y$  的概率密度。

(23) (本题满分 11 分) 某工程师为了解一台天平的精度, 用该天平对一物体的质量做  $n$  次测量, 该物体的质量  $\mu$  是已知的, 设  $n$  次测量结果  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立且均服从正态分布

$N(\mu, \sigma^2)$ 。该工程师记录的是  $n$  次测量的绝对误差  $Z_i = |X_i - \mu| (i = 1, 2, \dots, n)$ , 利用

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  估计  $\sigma$ 。

- 1) 求  $Z_i$  的概率密度;
- 2) 利用一阶矩求  $\sigma$  的矩估计量。
- 3) 求  $\sigma$  的最大似然估计量。