2018 考研数学一参考答案

一、选择题

1.D　2.B　3. B　4. C　5.A　6.A　7.A　8. D

二、填空题

9. -2　**10.** $2\ln 2-2$　**11.** $\vec{i}-\vec{k}$　**12.** 0　**13.** -1　**14.** $\frac{1}{4}$

三、 解答题

15. 解：$\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}dx=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}de^{2x}$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}}{1+(e^x-1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^x-1+1}{\sqrt{e^x-1}}de^x$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}d(e^x-1)$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C$$

16. 解：设圆的周长为 x，正三角周长为 y，正方形的周长为 z，由题设 $x+y+z=2$，则

目标函数：$S=\pi(\frac{x}{2\pi})^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{y}{3})^2+(\frac{z}{4})^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z^2}{16}$，故拉格朗日函数为

$L(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z^2}{16}+\lambda(x+y+z-2)$ 则：

$L_x=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0$

$$L_y=\frac{2\sqrt{3}y}{36}+\lambda=0$$

$$L_z=\frac{2z}{16}+\lambda=0$$

$$L_\lambda=x+y+z-2=0$$

解得 $x=\dfrac{2\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4}$， $y=\dfrac{6\sqrt{3}\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4},z=\dfrac{8}{\pi+3\sqrt{3}+4},\lambda=\dfrac{-1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$.

此时面积和有最小值 $S=\dfrac{1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$.

17. 解：构造平面 $\sum':\begin{cases}3y^2+3z^2=1\\x=0\end{cases}$，取后侧，设 $\sum'$ 和 $\sum$ 所围区域为 Ω；

记 $P=x,Q=y^3+z,R=z^3$;借助高斯公式，有：

$$\iint\limits_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx-Rdxdy=\iint\limits_{\Sigma-\Sigma'}Pdydz+Qdzdx-Rdxdy-\iint\limits_{\Sigma'}Pdydz+Qdzdx-Rdxdy$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(P_x^{'}+Q_y^{'}+R_z^{'})dxdy-0=\iiint\limits_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)dxdydz$$

$$=\iint\limits_{2y^2+3z^2n^1}dydz\int_0^{\sqrt{1-3y^2-3z^2}}(1+3y^2+3z^2)dx$$

$$=\iint\limits_{2y^2+3z^2n^1}\sqrt{1-3y^2-3z^2}(1+3y^2+3z^2)dydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}(1+3r^2)\cdot rdr$$

$$=2\pi(-\frac{1}{6})\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}(1+3r^2)d(1-3r^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}(1-3r^2-2)d(1-3r^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left[(1-3r^2)^{\frac{3}{2}}-2(1+3r^2)^{\frac{1}{2}}\right]d(1-3r^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}\left[\frac{2}{5}(1-3r^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(1-3r^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{14\pi}{45}$$

18. （1）解：通解

$$
\begin{aligned}
y(x) &= e^{-\int dx}(\int xe^{\int dx}dx + C) \\
&= e^{-x}(\int xe^{x}dx + C) \\
&= e^{-x}\left[(x-1)e^{z} + C\right] \\
&= (x-1) + Ce^{x}
\end{aligned}
$$

(2)证明：设 $\int(x+T) = f(x)$,即T是$f(x)$的周期

通解

$$
\begin{aligned}
y(x) &= e^{-\int dx}[\int f(x)e^{\int dx}dx + C] \\
&= e^{-x}[\int f(x)e^{x}dx + C] \\
&= e^{-x}\int f(x)e^{x}dx + Ce^{-x}
\end{aligned}
$$

不妨设$y(x) = e^{-x}\int_0^x f(x)e^{x}dx + Ce^{-x}$, 则有

$$
\begin{aligned}
y(x+T) &= e^{-(x+T)}\int_x^{x+T} f(x+T)e^{x+T}d(x+T) + Ce^{(x+y)} \\
&= e^{-(x+T)}\int_0^x f(u+T)e^{u+T}d(u+T) + (Ce^{-T})\cdot e^{-x} \\
&= e^{-(x+y)}\int_0^x f(u)e^{u}\cdot e^{y}du + (Ce^{-T})\cdot e^{-x} \\
&= e^{-x}\int_0^2 f(u)e^{u}du + (Ce^{-y})\cdot e^{-x}
\end{aligned}
$$

即$y(x+T)$依旧是方程的通解，结论得证

19. 证明：设 $f(x) = e^{x} - 1 - x, x > 0$,则有

$f'(x) = e^{x} - 1 > 0$,因此$f(x) > 0, \dfrac{e^{x}-1}{x} > 1$,

从而$e^{x_2} = \dfrac{e^{x_1}-1}{x_1} > 1, x_2 > 0$;

猜想 $x_1 > 0$,现用数学归纳法证明;

$n = 1$时，$x_1 > 0$,成立;假设

$n = k(k = 1,2,......)$ 时，有$x_k > 0$, 则$n = k+1$时有

$e^{x_{k+1}} = \dfrac{e^{x_k}-1}{x_e} > 1$, 所以$x_{k+1} > 0$;

因此 $x_n > 0$,有下界.

又 $x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-\ln e^{x_n}=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_ne^{x_n}}$;

设 $g(x)=e^x-1-xe^x$,

$x>0$时，$g'(x)=e^x-e^x-xe^x-xe^x<0$,

所以 $g(x)$单调递减，$g(x)<g(0)=0$,即有$e^x-1<xe^x$,

因此 $x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_ne^{x_n}}<\ln 1=0$, x_n单调递减.

由单调有界准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,则有$Ae^A=e^A-1$;

因为$g(x)=e^x-1-xe^x$只有唯一的零点$x=0$, 所以$A=0$.

20. 解：(1)由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$得 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\ x_2+x_3=0,\\ x_1+ax_3=0,\end{cases}$ 系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\1&0&a\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix},$$

$a\neq 2$时，$r(A)=3$,方程组有唯一解：$x_1=x_2=x_3=0$;

$a=2$时，$r(A)=2$, 方程组有无穷解：$x=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $k\in R$.

(2) $a\neq 2$时，令$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3,\\ y_2=x_2+x_3,\\ y_3=x_1+ax_3,\end{cases}$ 这是一个可逆变换，

因此其规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$;

$a=2$时，$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2$

$=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_2x_3+6x_1x_3$

$=2(x_2-\frac{x_2-3x_3}{2})^2+\frac{3(x_2+x_3)^2}{2}$,

此时规范形为$y_1^2+y_2^2$.

因此其规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$;

21 解:

(1) A 与 B 等价，则 r(A)=r(B),

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}\overset{r_3-r_1}{=\!=}\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\3&9&0\end{vmatrix}=0$$

$$\text{又所以}|B|=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{=\!=}\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{vmatrix}=2-a=0,$$

$$a=2$$

(2)AP=B，即解矩阵方程 AX=B:

$$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\text{得}P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix};$$

又 P 可逆，所以 $|P|\neq 0$，即 $k_2\neq k_3$，

$$\text{最终}P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}\text{，其中}k_1,k_2,k_3\text{为任意常数，且}k_2\neq k_3$$

22.解:(1) 由已知 $P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$，Y 服从 λ 的泊松分布，

所以 $\mathrm{cov}(X,Z)=\mathrm{cov}(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)$

$E(X^2)E(Y)-E^2(X)E(Y)=D(X)E(Y)=\lambda.$

(2) 由条件可知 Z 的取值为 $0,\pm1,\pm2......$

$$P\{Z=0\}=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}=e^{-\lambda},$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda},P\{Z=-1\}=P\{X=-1,Y=1\}=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda},$$

同理，$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^{|k|}e^{-\lambda}}{|k|!},k=\pm1,\pm2......,$

$$P\{Z=0\}=e^{-\lambda}.$$

23. 解：（1）由条件可知，似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{\eta}\frac{1}{2\sigma}e^{\frac{|x_1|}{n}},x_1\in R,i=1,2\ldots n,$$

$$\text{取对数}:\ln L(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln 2\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln 2-\ln\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma}\right],$$

$$\text{求导}:\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sigma}+\frac{|x_i|}{\sigma^2}\right]=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{\mu}|x_i|}{\sigma^2}=0,$$

$$\text{解得}\sigma\text{得极大似然估计}\sigma=\frac{\sum_{i=1}^{\mu}|x_i|}{n}.$$

（2）由第一问可知 $\sigma=\dfrac{\sum_{i=1}^{\mu}|x_i|}{n}$ ，所以

$$E(\hat{\sigma})=E(|X|)=\int_{\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{a}}dx=\sigma$$

$$D(\hat{\sigma})=D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_1|}{n}\right)=\frac{1}{n}D(|X|)=\frac{1}{n}\{E(X^2)-E^2(|X|)\}$$

$$=\frac{1}{n}\{\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{a}}dx=\sigma^2\}=\frac{1}{n}\{\int_{0}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{|x|}{a}}dx\}=\frac{\sigma^2}{n}.$$