2018 考研数学三参考答案

一、选择题

1.D　2.D　3.C　4.D　5.A　6.A　7.A　8.B

二、填空题

9. $y = 4x - 3$　　**10**. $e^x \arcsin\sqrt{1-e^{2x}} - \sqrt{1-e^{2x}} + C$　　**11**. $y = C\left(\frac{1}{2}\right)^x - 5$

12. $2e$　　**13**.2　　**14**. $\frac{1}{3}$

三、解答题

15.令 $x = \frac{1}{t}$ 则：

$$\lim_{t\to 0^+}\left[(\frac{a}{t}+b)e^t - \frac{1}{t}\right] = \lim_{t\to 0^+}\frac{(a+bt)e^t - 1}{t} = 2$$

则 $\lim_{t\to 0^+}\left[(a+bt)e^t - 1\right] = 0 \Rightarrow a = 1$

$$原式 = \lim_{t\to 0^+}\frac{(a+bt)e^t - 1}{t} = \lim_{t\to 0^+}\left[e^t(a+bt) + be^t\right]$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[e^t(a+bt+b)\right] = 2$$

则 $a + b = 2 \Rightarrow b = 1$

16.原式= $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}} x^2 dy = \sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2(\sqrt{(1-x^2)} - x)dx$

$$= \sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^2\sqrt{1-x^2}dx - \sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x^3 dx$$

$$= \sqrt{3}\frac{\pi}{32} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}(\pi - 2)}{32}$$

17.解：设圆的周长为x，正三角周长为 y，正方形的周长为 z，由题设$x+y+z=2$，则目标函数：$S=\pi(\frac{x}{2\pi})^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{y}{3})^2+(\frac{z}{4})^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z^2}{16}$，故拉格朗日函数为

$L(x,y,z,\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z^2}{16}+\lambda(x+y+z-2)$ 则：

$$L_x=\frac{x}{2\pi}+\lambda=0$$

$$L_y=\frac{2\sqrt{3}y}{36}+\lambda=0$$

$$L_z=\frac{2z}{16}+\lambda=0$$

$$L_\lambda=x+y+z-2=0$$

解得 $x=\frac{2\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4}$，$y=\frac{6\sqrt{3}\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4},z=\frac{8}{\pi+3\sqrt{3}+4},\lambda=\frac{-1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$.

此时面积和有最小值 $S=\frac{1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$.

18 题

由题知:$\cos 2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}4^n x^{2n}$

$$\because -\frac{1}{(1+x)^2}=\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$$

$$\therefore \cos 2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}4^n x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$$

$$\therefore a_n=\begin{cases}-(2k+1)+(-1)^k\frac{1}{(2k)!}4^k, & n=2k\\ 2k+2, & n=2k+1\end{cases}\quad(k=0,1,2\cdots)$$

19.证明：设 $f(x)=e^x-1-x,x>0,$则有

$$f'(x)=e^x-1>0,\text{因此}f(x)>0,\frac{e^x-1}{x}>1,$$

从而$e^{x_2}=\dfrac{e^{x_1}-1}{x_1}>1, x_2>0;$

猜想$x_1>0,$现用数学归纳法证明；

$n=1$时，$x_1>0,$成立；

假设$n=k(k=1,2,......)$时，有$x_k>0,$则$n=k+1$时有$e^{x_k+1}=\dfrac{e^{x_k}-1}{x_e}>1,$所以$x_{k+1}>0;$

因此$x_n>0,$有下界.

又$x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n}-\ln e^{x_n}=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}};$

设$g(x)=e^x-1-xe^x,$

$x>0$时，$g'(x)=e^x-e^x-xe^x-xe^x<0,$

所以$g(x)$单调递减，$g(x)<g(0)=0,$即有$e^x-1<xe^x,$

因此$x_{n+1}-x_n=\ln\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}<\ln 1=0, x_n$单调递减.

由单调有界准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A,$则有$Ae^A=e^A-1;$

因为$g(x)=e^x-1-xe^x$只有唯一的零点$x=0,$所以$A=0.$

20.解：(1)由$f(x_1,x_2,x_3)=0$得$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0,\\x_2+x_3=0,\\x_1+ax_3=0,\end{cases}$ 系数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\1&0&a\end{pmatrix}\xrightarrow{\vee}\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix},$$

$a\neq 2$时，$r(A)=3,$方程组有唯一解：$x_1=x_2=x_3=0;$

$a=2$时，$r(A)=2$, 方程组有无穷解：$x=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}, k\in R.$

(2) $a\neq 2$时，令$\begin{cases}y_1=x_1-x_2+x_3,\\ y_2=x_2+x_3,\\ y_3=x_1+ax_3,\end{cases}$ 这是一个可逆变换，

因此其规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$；

$$a=2\text{时}，f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2$$
$$=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_2x_3+6x_1x_3$$
$$=2(x_2-\frac{x_2-3x_3}{2})^2+\frac{3(x_2+x_3)^2}{2},$$

此时规范形为$y_1^2+y_2^2$.

因此其规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$；

21 解：（1）A 与 B 等价，则 r(A)=r(B),

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}\overset{r_3-r_1}{=\!=}\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\3&9&0\end{vmatrix}=0$$

$$\text{又所以}|B|=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}\overset{r_3+r_1}{=\!=}\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{vmatrix}=2-a=0,$$

$a=2$

(2)AP=B，即解矩阵方程 AX=B:

$$(A,B)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\text{的}P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix};$$

又P可逆，所以$|P|\neq 0$，即$k_2\neq k_3$,

$$\text{最终}P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}，\text{其中}k_1，k_2，k_3\text{为任意常数，且}k_2\neq k_3$$

22.解：（1）由已知 $P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$，Y服从λ的泊松分布，

所以$\operatorname{cov}(X,Z)=\operatorname{cov}(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)$

$E(X^2)E(Y)-E^2(X)E(Y)=D(X)E(Y)=\lambda.$

（2）由条件可知 Z 的取值为$0,\pm1,\pm2......$

$$P\{Z=0\}=P\{X=-1,Y=0\}+P\{X=1,Y=0\}=e^{-\lambda},$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda},P\{Z=-1\}=P\{X=-1,Y=1\}=\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda},$$

同理，$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^{|k|}e^{-\lambda}}{|k|!},k=\pm1,\pm2......,$

$P\{Z=0\}=e^{-\lambda}.$

23. 解：（1）由条件可知，似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{\eta}\frac{1}{2\sigma}e^{\frac{|x_1|}{n}},x_1\in R,i=1,2...n,$$

$$\text{取对数}:\ln L(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln 2\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln 2-\ln\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma}\right],$$

$$\text{求导}:\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sigma}+\frac{|x_i|}{\sigma^2}\right]=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum_{i=1}^{\mu}|x_i|}{\sigma^2}=0,$$

解得σ得极大似然估计$\sigma=\frac{\sum_{i=1}^{\mu}|x_i|}{n}.$

（2）由第一问可知 $\sigma=\frac{\sum_{i=1}^{\mu}|x_i|}{n}$，所以

$$E(\hat{\sigma})=E(|X|)=\int_{\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{a}}dx=\sigma$$

$$D(\hat{\sigma})=D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_1|}{n}\right)=\frac{1}{n}D(|X|)=\frac{1}{n}\{E(X^2)-E^2(|X|)\}$$

$$=\frac{1}{n}\{\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{a}}dx=\sigma^2\}=\frac{1}{n}\{\int_{0}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{|x|}{a}}dx\}=\frac{\sigma^2}{n}.$$