

# Seguimiento de un blanco móvil

Villa Fernández, Santiago  
svillafe@alu.itba.edu.ar

Gomez Vidal, Maximiliano  
dgomezvi@alu.itba.edu.ar

Sessa, Carlos  
csessa@alu.itba.edu.ar

Abramowicz, Pablo  
pabramow@alu.itba.edu.ar

## RESUMEN

En este artículo se modela un sistema de seguimiento de blancos a lazo cerrado. Se analiza el comportamiento del sistema con distintos controladores de tipo proporcional, integral y derivativo.

## Palabras clave

Seguimiento de blancos, sistema de control, controlador proporcional, controlador derivativo, controlador integral

## 1. INTRODUCCIÓN

Un sistema de seguimiento de blancos consiste en un radar y una antena. Se desea que la antena apunte al blanco, por lo que se debe ajustar su posición según corresponda. Para esto se incluye un controlador que compara el ángulo de la antena con el ángulo en donde se encuentra el objetivo y proporciona el torque correspondiente para minimizar la discrepancia entre ambos.

En la sección 2 se describe el modelo del sistema. En la sección 3 se realizan las simulaciones correspondientes a los tres tipos de controladores utilizados: proporcional, integral y derivativo. Por último, se exponen las conclusiones en la sección 4.

## 2. MODELO

La dinámica de la antena se modela según la ecuación diferencial:

$$I\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} + u(t) \quad (1)$$

donde  $\theta$  es el ángulo que corresponde a la dirección en la que apunta el radar,  $I$  es el momento de inercia de la antena y  $b$  es una constante positiva que vincula la fuerza viscosa que actúa sobre la antena. El torque que producen los motores sobre la antena está representado por la función  $u$ .

Se desea que el sistema sea a lazo cerrado. Para esto se mide el ángulo  $\theta$  de la antena y se lo compara con el ángulo  $\theta_R$  que denota la ubicación real del objetivo. La diferencia

entre ambos constituye una señal de error  $e(t) = \theta_R(t) - \theta(t)$  que se ingresa nuevamente al controlador.

## 3. SIMULACIONES

Para realizar la simulación se consideran los parámetros  $I = 0.004 \text{ kg m}^2$  y  $b = 0.02 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ . También se establece que el blanco se mueve de acuerdo a  $\theta_R(t) = 0.01t$ . Se estudian tres tipos de controladores: proporcional, integral y derivativo. En todos los casos se utiliza el método de Runge-Kutta de orden 4 para la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales.

### 3.1 Controlador proporcional

Se propone un primer controlador que se comporta según la ecuación lineal:

$$u(t) = Ke(t) \quad (2)$$

donde  $e(t)$  es la señal de error. La relación de entrada-salida puede expresarse entonces como la siguiente ecuación diferencial:

$$I\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} + K(\theta_R(t) - \theta(t)) \quad (3)$$

La descripción en variables de estado resulta:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{I}x_2 + \frac{K}{I}(\theta_R(t) - x_1) \end{cases} \quad (4)$$

donde  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$  y la salida es  $\theta = x_1$ .

Siendo la estabilidad del sistema dependiente de la excitación  $u(t)$ , es posible estudiar la estabilidad utilizando el polinomio característico. Si la parte real de las raíces de todos los autovalores del polinomio característico es negativa, entonces el sistema es estable. Entonces, presentando la ecuación 4 en forma vectorial:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{I} & -\frac{b}{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Ax(t)$$

El polinomio característico de  $A$  es:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| \quad (5)$$

Aplicándolo a la matriz que hemos definido resulta:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{K}{I} & -\frac{b}{I} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{b}{I}\lambda + \frac{K}{I} \quad (6)$$

Permission to make digital or hard copies of all or part of this work for personal or classroom use is granted without fee provided that copies are not made or distributed for profit or commercial advantage and that copies bear this notice and the full citation on the first page. To copy otherwise, to republish, to post on servers or to redistribute to lists, requires prior specific permission and/or a fee.

Copyright 200X ACM X-XXXXX-XX-X/XX/XX ...\$5.00.

Siendo los autovalores las raíces de  $P(\lambda) = 0$ , las mismas son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2I} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2}{I^2} - 4\frac{K}{I}} \quad (7)$$

Se observa que para todo  $K > 0$  las raíces son negativas, por lo que el sistema es estable para  $K \in (0, +\infty)$ . Respecto a la presencia de oscilaciones en régimen estacionario, uno de los autovalores (ecuación 6) debe tener parte imaginaria no nula y en consecuencia el determinante debe ser negativo. Esta condición se asegura para valores de  $K > \frac{b^2}{4I}$ .

En la figura 1 se observan las distintas salidas al ir variando los valores de la constante  $K$ . En la figura 4 se muestra el error relativo porcentual, definido por:

$$E\%(t) = \frac{\theta_R(t) - \theta(t)}{\theta_R(t)} \quad (8)$$

Se observan oscilaciones que se estabilizan alrededor de los cinco segundos.

### 3.2 Controlador integral

Otro tipo de controlador es el integral, cuya forma es:

$$u(t) = K_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (9)$$

siendo  $e(t)$  la señal de error. Se obtiene la relación de entrada-salida como:

$$I\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} + K_i \int_0^t \theta_R(\tau) - \theta(\tau) d\tau \quad (10)$$

La descripción en variables de estado de la ecuación 10 resulta:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -\frac{b}{I}x_3 - \frac{K_i}{I} \left[ \int_0^t \theta_R(\tau) d\tau - x_1 \right] \end{cases} \quad (11)$$

donde  $x_1 = \int_0^t \theta(\tau) d\tau$ ,  $x_2 = \theta$ ,  $x_3 = \dot{\theta}$  y la salida es  $\theta = x_2$ . Representando dichas variables en forma matricial:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K_i}{I} & 0 & -\frac{b}{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = Ax(t)$$

El polinomio característico queda definido como:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\frac{K_i}{I} & 0 & -\frac{b}{I} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \frac{b}{I}\lambda^2 + \frac{K_i}{I} \quad (12)$$

Se concluye que para este polinomio característico siempre existe alguna raíz positiva para  $K_i \in (0, +\infty)$ . Por lo tanto, el sistema no es estable, presentando oscilaciones cuya amplitud aumenta en el tiempo. Este fenómeno se observa claramente en la figura 2. El error relativo porcentual se muestra en la figura 5, presentando también las oscilaciones características.

### 3.3 Controlador derivativo

Como tercer controlador se propone un modelo derivativo, cuyo comportamiento se define como:

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (13)$$

siendo  $e(t)$  la señal de error. Se obtiene la relación de entrada-salida como:

$$I\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} + K_d(\dot{\theta}_R(t) - \dot{\theta}(t)) \quad (14)$$

Se representa la ecuación 14 en variables de estado como:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{K_d}{I} \dot{\theta}_R(t) - x_2 \frac{b+K_d}{I} \end{cases} \quad (15)$$

donde  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$  y la salida es  $\theta = x_1$ . Representando dichas variables en forma matricial resulta:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{b+K_d}{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Ax(t)$$

El polinomio característico queda definido como:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda - \frac{b+K_d}{I} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda \frac{b+K_d}{I} \quad (16)$$

Las raíces de este polinomio son 0 y  $-\frac{b+K_d}{I}$ , por lo que el sistema es estable siempre y cuando  $K_d \in (-b, +\infty)$ .

En la figura 3 se presenta la salida para distintos valores de  $K_d$ . En la figura 6 se muestra el error relativo porcentual para este tipo de controlador.

## 4. CONCLUSIONES

A partir de las simulaciones se observa que el controlador proporcional es el más estable y preciso de los tres controladores analizados. El controlador integral resulta sumamente inestable, presentando oscilaciones que aumentan su amplitud con el paso del tiempo. Para determinados casos puede utilizarse un controlador derivativo, aunque dependerá de los parámetros del radar, pues resulta menos efectivo que el proporcional.

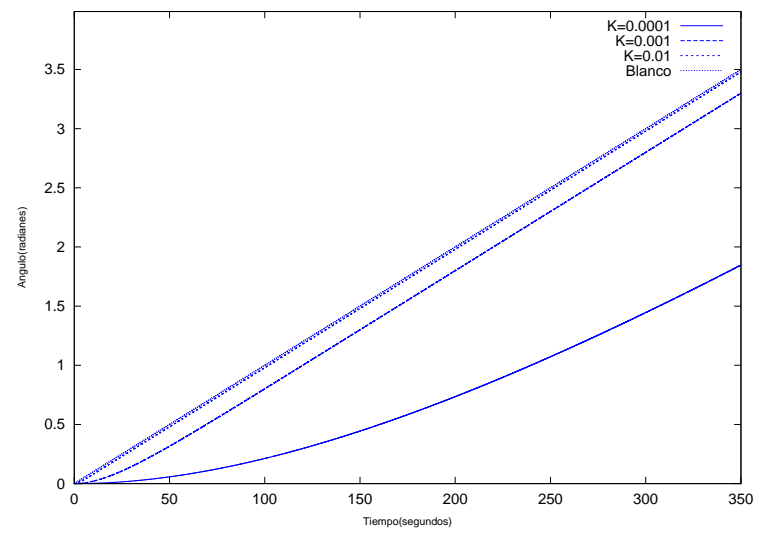


Figura 1: Salida  $\theta(t)$  con controlador proporcional

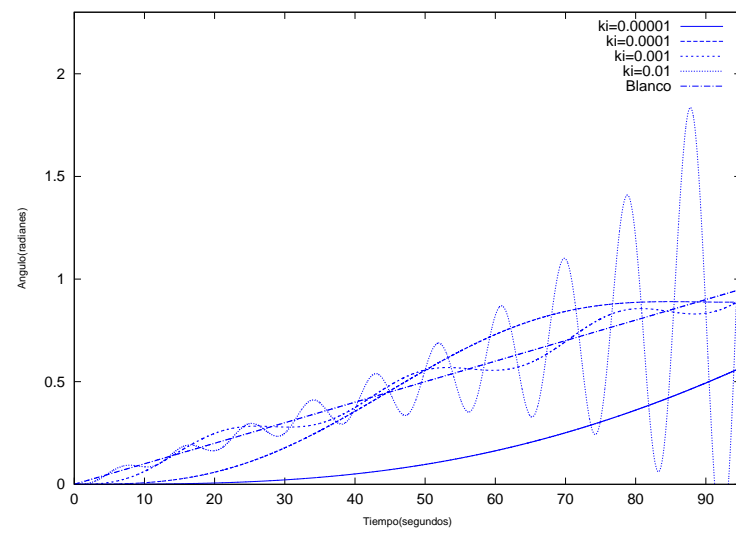


Figura 2: Salida  $\theta(t)$  con controlador integral

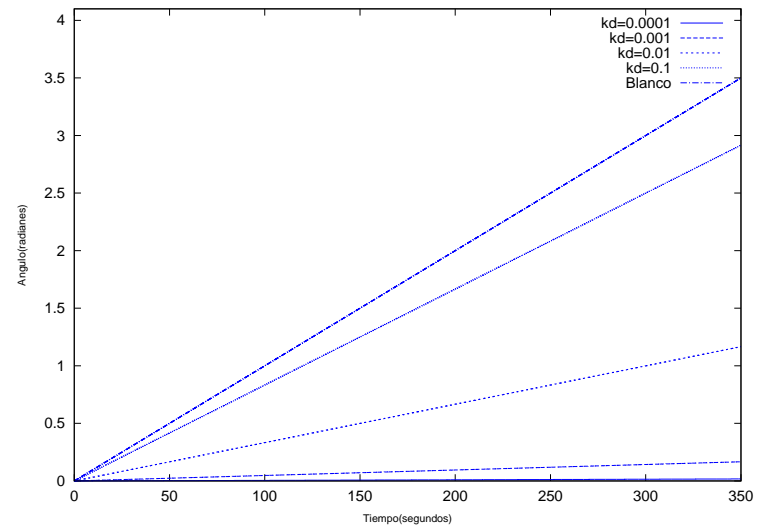


Figura 3: Salida  $\theta(t)$  con controlador derivativo

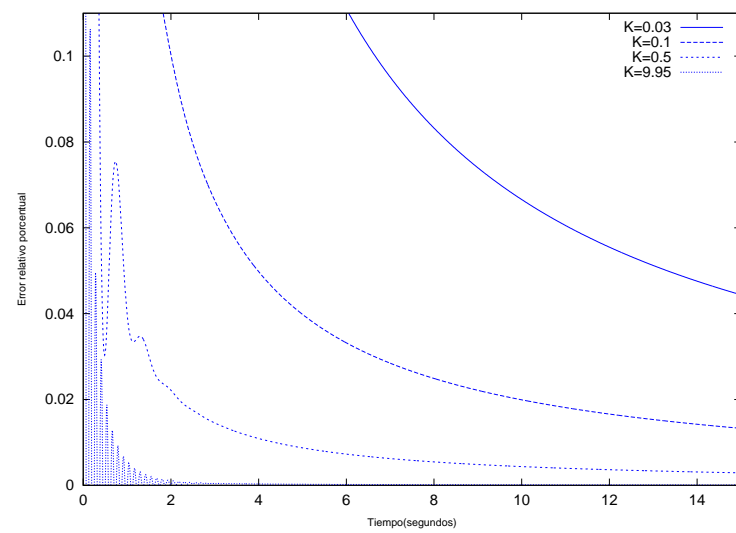


Figura 4: Error relativo porcentual al utilizar un controlador proporcional

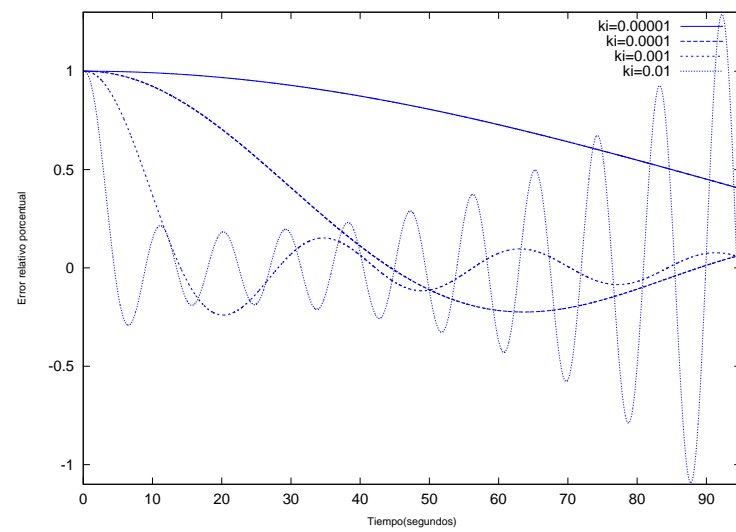


Figura 5: Error relativo porcentual al utilizar un controlador integral

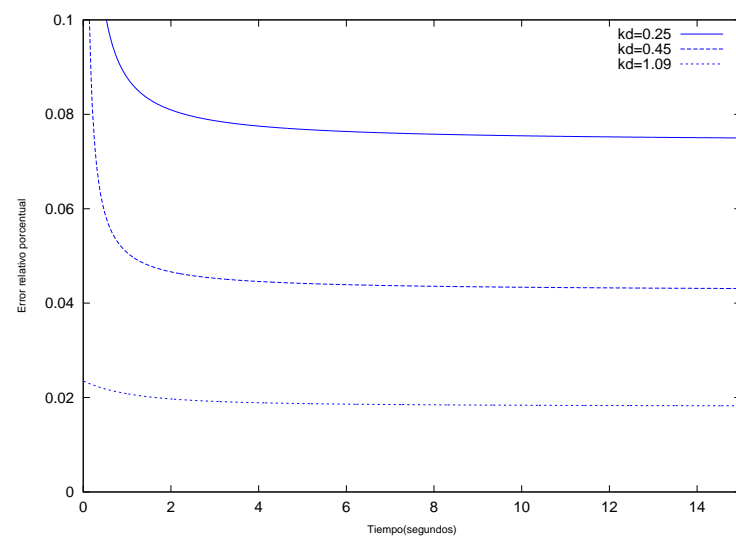


Figura 6: Error relativo porcentual al utilizar un controlador derivativo