Trabajo Práctico N°2
Modelización de Sistemas de Control

1. *Sistema de Trackeo* El sistema de seguimiento de blancos (*tracking*)de una bateria anti-aérea consiste en un radar, cuya dinámica puede modelarse como:

$$I\ddot{\theta} = -b\dot{\theta} + u(t) \tag{1}$$

donde *theta* es el angulo que corresponde a la dirección en la que apunta el radar, I es el momento de inercia de la antena y b consiste en una constante positiva que vincula la fuerza viscosa que actúa sobre la antena. Finalmente $u(t)$ representa el torque que realizan los motores que actúan sobre la antena. La figura 1 muestra como es el preceso de seguimiento de un blanco, cuya dirección es el ángulo θ_R.

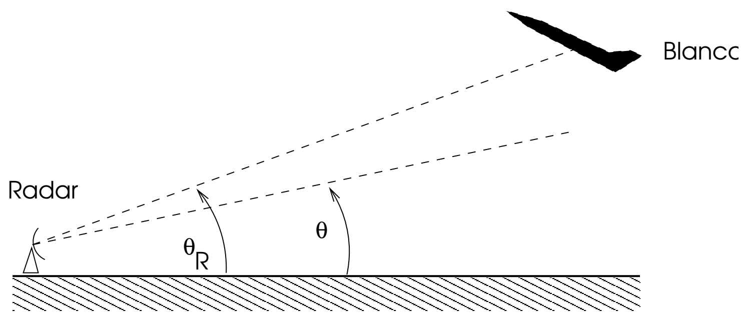

Figure 1: Sistema de seguimiento de blanco

Se desea diseñar un sistema de control de seguimiento, para tal fin se mide el ángulo θ y la discrepancia con la dirección del blanco θ_R, constituye una señal de error $e(t)$. A partir de esta comparación se realiza el control, de modo que genere un torque $u(t)$ que gobierne el radar, de la forma $u(t) = Ke(t)$. El digrama del sistema a lazo cerrado se muestra en la figura 2. El valor de la constante K del controlador hay que determinarla.

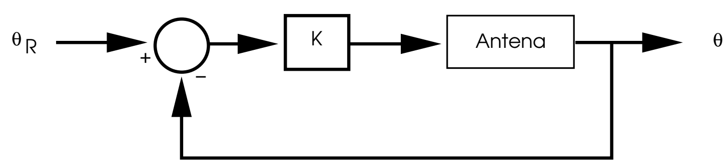

Figure 2: Sistema de seguimiento de blanco a lazo cerrado

En la tabla 1 se dán los valores de los parámetros del sistema a lazo abierto (planta), resultando como objetivo de este trabajo, diseñar y analizar el sistema de control de seguimiento.

Parámetro	símbolo	valor
Momento de inercia	I	0.004 kg m^2
Coeficiente de viscosidad	b	0.02 kg m^2 s^{-1}

Tabla 1: Parámetros de la antena

En todas las simulaciones necesarias para cumplir los requisitos a continuación, considerar condiciones iniciales nulas.

(a) La dirección del blanco (*bearing*) fue computada como $\theta_R(t) = 0.01t$. Obtener $\theta(t)$ a lazo cerrado para distintos valores de K. Graficar dichas curvas en función del tiempo.

(b) ¿Existen oscilaciones? ¿A partir de que valor de K se tiene oscilaciones?

(c) Determinar, mediante simulaciones, el valor de K para que el error realtivo porcentual

$$E\%(t) = \frac{\theta_R(t) - \theta(t)}{\theta_R(t)}$$

sea menor que el 10%, 5%, 1% y 0.1%

(d) Si el controlador tuviese una dinámica de la forma:

$$u(t) = k_i \int_0^t e(\tau)\, d\tau$$

lo que constituye un *control integral*, obtener el modelo matemático de este sistema a lazo cerrado. Realizar todos los cómputos de los items anteriores, pero ahora utilizando el parámetro k_i

(e) Considerar ahora el *controlador derivativo*

$$u(t) = k_d \frac{de}{dt}(t)$$

Realizar todo el análisis de los items anteriores para k_d

2. *Administración de dosis*
El objetivo de este trabajo consiste en establecer una política de administración de una droga para controlar la concentración de una sustancia en sangre. Un ejemplo de este este sistema sería la acción de administrar insulina para controlar la concentración de glucosa en sangre.

La dinámica que describe como una droga se distribuye en el organismo se denomina *cinética farmacológica* y para entender dicha dinámica se propone un *modelo de compartimentos*. En dicho modelo, se considera que los órganos afectados por la droga están separados en compartimentos mediante paredes porosas que permiten el intercambio de materia. El complejo proceso de tranporte en el organismo y su efecto, se reduce a describir los flujos entre compartimientos (sangre, higado, páncreas, etc).

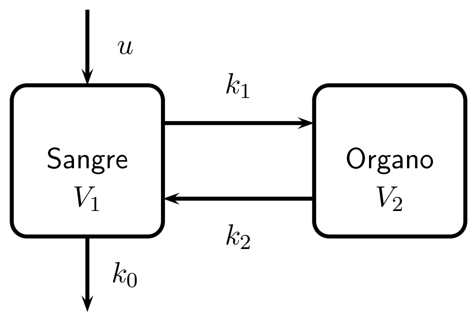

Figure 3: Modelo de 2 compartimentos

Suponiendo que existe una mezcla perfecta, es decir que la concentración de la droga es constante en cada comportamento, la tasa de flujo en un compartimiento es proporcional a la diferencia de concentraciones entre los compartimientos que intercambian.

Consideremos un modelo de dos compartimentos (sistema circulatorio e hígado, por ejemplo) como muestra la figura 3. Entonces, si V_1 y V_2 son los volúmenes en cada compartimento, la tasa de flujo de droga viene dada:

$$V_1 \frac{dc_1}{dt} = q_{12}(c_2 - c_1) - q_0 c_1 + c_0 u \tag{2}$$

$$V_2 \frac{dc_2}{dt} = q_{21}(c_1 - c_2) \tag{3}$$

donde c_1 y c_2 son las concentraciones en cada compartimento, q_0, q_{12} y q_{21} son tasas de difusión, las que dependen de las características del intercambio y en general $q_{12} = q_{21}$. La entrada u, representa la dosis aplicada y es la entrada al sistema. Llamando $k_1 = q_{12}/V_1$, $k_2 = q_{21}/V_2$, $k_0 = q_0/V_1$ y $b_0 = c_0/V_1$, resulta:

$$\frac{dc_1}{dt} = -(k_1 + k_0)c_1 + k_1 c_2 + b_0 u \tag{4}$$

$$\frac{dc_2}{dt} = k_2 c_1 - k_2 c_2 \tag{5}$$

Si lo que se mide como salida es la concentración c_2 (ejemplo: glucosa), entonces la descripción en variables de estado es - haciendo $x = (c_1\ c_2)^T$:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -(k_1+k_0) & k_1 \\ k_2 & -k_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_0 \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{6}$$

$$y = (0\ 1)x \tag{7}$$

Requerimientos: 1. Sabiendo que $k_0 = 0.5$mol/h, $k_1 = 2.5$mol/h, $k_2 = 3$mol/h y $b_0 = 1.5$mol/h, realimentar la salida en la forma $u(t) = K(r(t) - y(t))$, siendo $r(t)$ una concentración deseada de 30 mol. Mediante simulaciones determinar el rango de valores de K para que el sistema sea estable. Y de ser así, estimar el valor de K para que la concentración deseada se alcance en 0.3 horas.
2) Realimentar en variables de estado $u(t) = r(t) - k_1x_1(t) - k_2x_2(t)$ y determinar, de ser posible algún valr de k_1 y k_2 para evitar oscilaciones en la concentración y que x_1 alcance el valor deseado en 0.3 horas.

3. *Sistema de Control de Inventario*

   Una empresa comercializa bienes manufacturados. Los bienes producidos son almacenados en un depósito, cuya dinamica cumple los siguientes rasgos:

   (a) Los productos son homogeneos.

   (b) La cantidad de productos manipulada en cada ejercicio es muy grande.

   En base a esto, es posible aproximar las magintudes discretas a valores continuos sin demasiado error.

   Si se considera como sistema al DEPOSITO y LA BOCA DE COMERCIALIZACION, resulta natural indicar al estado del sistema mediante las variables: *nivel de inventario* $x_1(t)$ y *tasa de ventas* desl producto $x_2(t)$.

   El sistema de producción está regulado mediante la velocidad con que varía la tasa de ventas. De modo que si $u(t)$ es la tasa de producción, se sabe que:

$$\frac{dx_2}{dt}(t) = -Ku(t)$$

   donde K es una constante positiva.

   Requerimientos: 1. Suponiendo que toda la producción es depositada, modelar el sistema escribiendo una ecuación diferencial para la derivada de $x_1(t)$ y explicarla (Sugerencia: Tomar el modelo más simple).
   2. Si se desea controlar el nivel de inventario tomando como output $y(t) = x_1(t)$ y siendo $r(t)$ el *set point* de referencia de modo que $u(t) = r(t) - y(t)$, computar el rango de valores de K para el cual el sistema es (asintoticamente) estable. Indicar el significado de la constante K.
   3. Suponiendo que se regule la tasa de ventas mediante la existencia de productos en el depósito tal que:

$$\frac{dx_2}{dt}(t) = 6x_1 - Ku(t)$$

   realimentar las variables de estado de modo que los que el sitema siga siendo estable. Simular para distintos valores de K.

4. *Sistema de balanceo*
Un sistema de balanceo es un sistema mecánico en el cual el centro de masa está oscilando por sobre un pivote. El Sistema Segway de Transporte Humano (SSTH) es un claro ejemplo de este tipo de sistemas. El SSTH (Figura 4) consiste en una plataforma donde se ubica una persona parada. En la parte inferior hay un eje con dos ruedas y debido a que el centro de masa (de la persona) puede oscilar por encima del eje de las ruedas, este es un sistema inestable. Para estabilizarlo, se utiliza un giróscopo que mantiene al sistema dinamicamente compensado.

Figure 4: Sistema Segway de Transporte Humano usado en ámbitos urbanos.

Para modelar el sistema de balanceo, se considera que la plataforma de masa M tiene en el instante t una coordenada de posición $x(t)$ y una velocidad horizontal $v(t) = \dot{x}(t)$. La fuerza que actúa sobre la plataforma (Figura 5) es $f(t)$ y en ella pivotea una barra de masa m, longitud l y momento de inercia I_{CM} respecto del eje perpendicular a la barra que pasa por el centro de masa de esta. La barra forma un ángulo $\theta(t)$ con la vertical y tiene una velocidad angular $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$. Considerando el eje x horizontal y el eje y vertical, y despreciando los efectos de fricción, las ecuaciones de movimiento del sistema son:

$$(M+m)\ddot{x} - m\frac{l}{2}\ddot{\theta}\cos\theta + m\frac{l}{2}\dot{\theta}^2\sin\theta = f(t) \tag{8}$$

$$(I_{CM} + m\frac{l^2}{4})\ddot{\theta} - m\frac{l}{2}\ddot{x}\cos\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta = 0 \tag{9}$$

El objetivo de este proyecto es diseñar un control que equilibre al sistema de balanceo. Para eso es necesario que el sistema pueda oscilar alrededor de su posición de equilibrio (inestable) bajo pequeñas amplitudes. En base a este objetivo se deben cumplir los siguientes requisitos:

(a) *Linealización*
Linealizar el sistema de ecuaciones alrededor de la posición de equilibrio. Explicar el motivo por la cual se raliza la linealización.

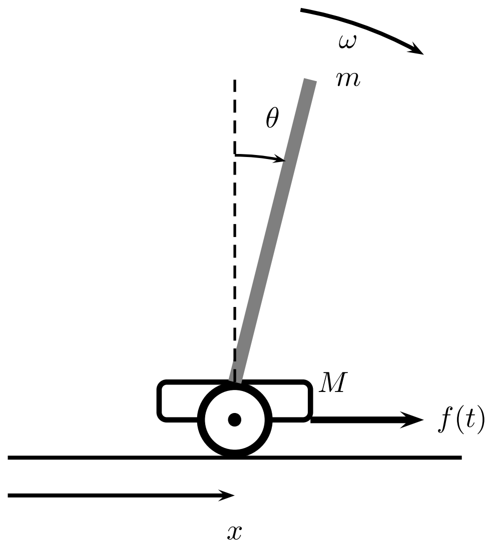

Figure 5: Modelo de sistema de balanceo

(b) *Variables de estado* Describir el modelo linealizado en variables de estado, indicando claramente cuales son las matrices del sistema a lazo abierto.
Parametrizar el modelo a partir de los datos: $M = 50$Kg, $m = 80$Kg, $l = 1.6$m. Tener en cuenta que para una barra homogenea rígida de longitud l y masa m, se tiene que $I_{CM} = \frac{1}{12}ml^2$.

(c) Diseño del Control Diseñar un controlador lineal en variables de estado

$$f(t) = r(t) - k^T x(t)$$

donde $k \in \mathbb{R}^4$ es el vector de las ganancias de control, $x \in \mathbb{R}^4$ es el vector de estado y $r(t)$ la referencia o setup. Diseñar k de modo tal que el sistema se estabilice, de forma que:

i. No haya oscilaciones.
ii. No haya oscilaciones y el equilibrio se establezca en menos de 2 segundos.
iii. Pueda haber oscilaciones pero con un período de oscilación menor que 1 segundo.

Simular cada uno de los distintos comportamientos, a partir de conciciones iniciales razonables.