

La eterna espera

Lucila Stancato, *I.T.B.A*, Damián Modernell, *I.T.B.A*, Juan Brasca, *I.T.B.A*, Conrado Negro, *I.T.B.A*

Resumen—Simulamos un modelo de cola simple con un esquema de simulación forzada por eventos para comparar los resultados con los valores teóricos de dicho modelo. Diseñamos un modelo de un sistema de dos colas en serie para hacer simulaciones y obtener una estimación de los parámetros del sistema.

Palabras clave—Teoría de colas, modelo de cola simple, simulación forzada por eventos



Figura 1. Modelo de cola simple: los clientes llegan por la parte izquierda y entran en el servidor o en la cola, y luego de ser atendidos salen del servidor por la derecha

Parámetro	Valor
Tiempo medio en cola	0.895 minutos
Longitud media de la cola	0.846
Utilización del servidor	0.464
Simulación finalizada a	1057.655 minutos

Tabla 1

Resultados de una simulación forzada por eventos con $\lambda = 1$ minuto y $\mu \sim \epsilon(0.5 \text{ minutos})$ para 1000 clientes

1 INTRODUCCIÓN

La teoría de colas fue originada por Agner Krarup Erlang (1878-1929) en 1909. Es una colección de modelos matemáticos que describen sistemas de líneas de espera (o colas) particulares o de sistemas de colas. Esta teoría es de gran valor en los negocios de hoy en día ya que muchos de sus problemas pueden modelarse como problemas de congestión llegada/partida.

El modelo del sistema de una cola puede verse en la figura 1. Consiste en clientes que van a ser atendidos por un servidor. En el caso de que el servidor este desocupado y llegue un cliente, entonces éste es atendido inmediatamente. Si el servidor estuviera ocupado, entonces el cliente espera en la cola hasta que todos los clientes que llegaron antes sean atendidos.

El problema es determinar qué capacidad tiene la cola o qué tasa de servicio tiene el servidor ya que ni los clientes llegan a tiempos fijos ni los tiempos de servicio son iguales para todos los clientes. Nosotros utilizamos un modelo de cola simple de tipo M/M/1/ ∞ /FIFO en el que tanto el tiempo entre arribos de clientes como el tiempo de servicio son variables aleatorias con distribución exponencial. También supone que la cola tiene capacidad infinita, y sigue una disciplina de tipo FIFO. En la sección 2 simulamos una cola simple con una simulación forzada por eventos para obtener una estimación de los parámetros del sistema. En la sección 3 computamos con un error del 5% la longitud promedio de la cola y el tiempo medio de un cliente en la cola,

en función de la intensidad de tráfico comparando los resultados de la simulación con los valores teóricos. En la sección 4, diseñamos un modelo de un sistema de dos colas en serie, y computamos la longitud media de la cola en función de la intensidad de tráfico. Finalmente en la sección 5, exponemos las conclusiones.

2 SIMULANDO LA COLA

El modelo de cola elegido es el más simple de analizar mediante la simulación forzada por eventos discretos. La simulación por eventos discretos es una técnica informática de modelado dinámico de sistemas. Estos sistemas se caracterizan por mantener un estado interno global que cambia en instantes de tiempo asociados a la ocurrencia de un determinado evento en la dinámica del sistema. En nuestro caso, el conjunto discreto de eventos del sistema es $E = \{\text{llegada}, \text{partida}\}$, y el conjunto de estados del servidor es $S = \{\text{libre}, \text{ocupado}\}$.

Para el caso en que el intervalo entre llegadas sea una variable aleatoria exponencialmente distribuida con tiempo medio entre arribos ($1/\lambda$) de 1 minuto y el tiempo de servicio ($1/\mu$) también sea exponencial con media de 0.5 minutos; una simulación forzada por eventos da los resultados de la tabla 1 (cuando la semilla del generador de números aleatorios está seteada en 5).

El estado del servidor en esta simulación lo mostramos en la figura 2, y en la figura 3 mostramos la longitud de la cola en función del tiempo.

Podemos ver en las figuras 2 y 3 que el servidor se encuentra ocupado en casi todo el tiempo, y la cola llega a un máximo de 7 sobre el final de la simulación.

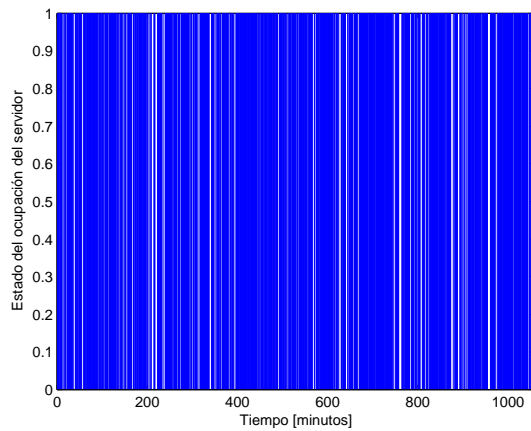


Figura 2. Gráfico que muestra el estado del servidor en función del tiempo. Si el servidor esta desocupado en un instante, el valor es 0, en caso contrario, el valor es 1.

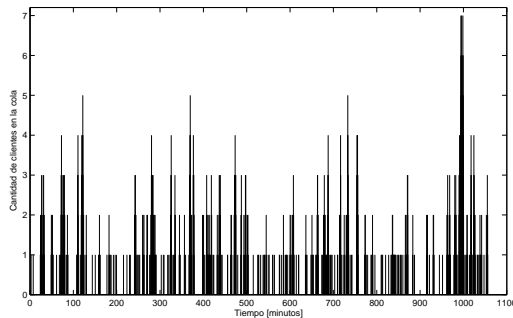


Figura 3. Gráfico que muestra la longitud de la cola en función del tiempo para la simulación realizada.

3 CÁLCULO DE PARÁMETROS DEL SISTEMA

Para distintos sistemas como podría ser la cola de un banco, o de cualquier servicio que pueda ser simulado por el sistema de colas, puede llegar a ser muy útil conocer distintos parámetros como por ejemplo el promedio temporal de clientes en el sistema, o el tiempo medio que un cliente tarda en el sistema.

3.1 Promedio temporal de clientes en el sistema

En un caso práctico, conocer este parámetro puede resultar útil para saber si es necesario tener otra caja de atención al cliente, si la cantidad de clientes en el sistema con una sola es demasiado grande.

Estimamos con un error menor al 5%, el promedio temporal de clientes en el sistema (L), cuyo valor teórico se calcula con la ecuación 1

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} \quad (1)$$

donde $\rho = \lambda/\mu$ es la intensidad de tráfico de la cola. Para lograrlo, simulamos la cola mediante una simu-

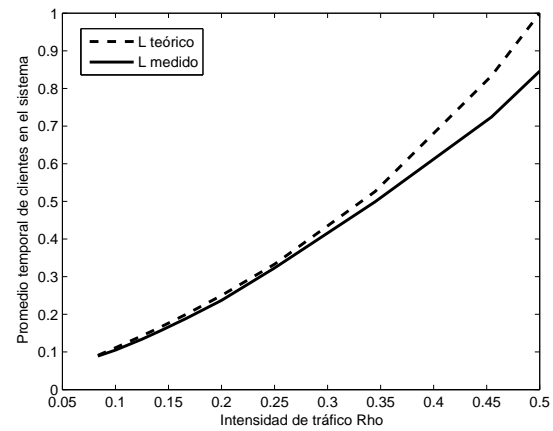


Figura 4. Promedio temporal de clientes en función del tráfico en el sistema. A medida que el tráfico se incrementa, el promedio teórico aumenta más rápidamente que el valor medido en la simulación.

lación forzada por eventos realizada en Matlab. Los resultados de la simulación se ven en la figura 4.

3.2 Tiempo medio de un cliente en el sistema

En algunos casos, podemos necesitar conocer el tiempo medio que un cliente tarda en el sistema desde que llega a la cola hasta que sale, luego de ser atendido.

El valor teórico de este parámetro se calcula según la ecuación 2

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (2)$$

donde λ es la tasa media de clientes que llegan al sistema (en clientes por minuto) y $\frac{1}{\mu}$ es el tiempo que tarda el servidor en atender a un cliente.

Estimamos este tiempo simulando la misma cola que en la sección 3.1 también con un error menor al 5%. Los resultados los mostramos en la figura 5.

4 SISTEMA DE DOS COLAS EN SERIE

Diseñamos un sistema más complejo que el de las secciones 2 y 3, haciendo que haya otra cola en serie. Cuando un cliente termina de ser atendido en el primer servidor, arriba a la siguiente cola que se comporta de la misma forma que la cola de las secciones 2 y 3. Cuando el modelo de colas, representa una cola a continuación de otra, entonces ρ se calcula como $\rho = \lambda/(\mu_1 + \mu_2)$, siendo μ_1 el tiempo medio de atención del primer servidor, y μ_2 el tiempo de atención del segundo servidor. En este caso, simulamos el comportamiento para distintas intensidades de tráfico, calculamos la cantidad media de clientes en el sistema y colocamos los resultados en el gráfico de la figura 6.

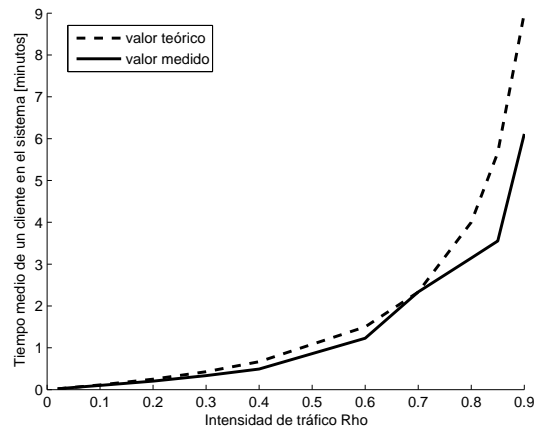


Figura 5. Gráfico del promedio de tiempo en cola por cliente en función de la intensidad de tráfico en el sistema. Podemos observar que a medida que el tráfico aumenta, la diferencia entre el valor teórico y el de la simulación aumenta.

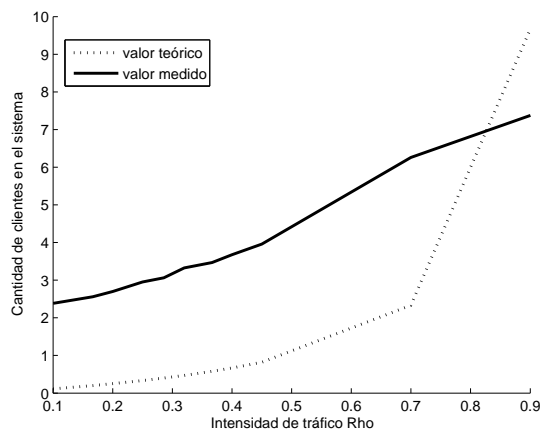


Figura 6. Gráfico de la simulación del sistema de dos colas en serie. Los valores teóricos en este caso no son cercanos a los medidos en la simulación.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Teoría de colas, http://exa.unne.edu.ar/depar/areas/informatica/evalua/teoria_de_colas.pdf
- [2] Simulación de eventos discretos, http://es.wikipedia.org/wiki/Simulaci%C3%B3n_por_eventos_discretos
- [3] Diaz, Alejandro: Notas de Clase Curso 2009, Simulación por Eventos Discretos

5 CONCLUSIÓN

Calculamos los parámetros del sistema para un modelo de colas simples, obteniendo como resultado valores próximos a los teóricos. Sin embargo para un sistema más complejo como el de la sección 4, los valores medidos no resultaron cercanos a los teóricos. Lo importante de este tipo de simulaciones es obtener estimaciones sobre la cantidad de gente que hay en el sistema, eso podría serle útil a un gerente, para saber el tamaño que tiene que tener la sala de espera. O incluso, evaluar el costo de ampliar la sala de espera, contra la posibilidad de contratar otra persona para que atienda a los clientes y así reducir el tiempo de espera y la cantidad de personas.