L'Ecuyer disparando a velocidad WARP

Campelo, Guillermo
Instituto Tecnológico de Buenos Aires
Madero 399
Buenos Aires, Argentina
gcampelo@alu.itba.edu.ar

Goñi, Juan Ignacio
Instituto Tecnológico de Buenos Aires
Madero 399
Buenos Aires, Argentina
jgoni@alu.itba.edu.ar

Gutierrez, Agustín
Instituto Tecnológico de Buenos Aires
Madero 399
Buenos Aires, Argentina
aggutier@alu.itba.edu.ar

RESUMEN

Se estudia el generador de números pseudo-aleatorio propuesto por L'Ecuyer y se lo utiliza para la simulación del tiempo de vuelo de la nave espacial USS Enterprise. Se utiliza el test Chi-cuadrado para analizar el generador de L'Ecuyer y el método de Montecarlo para la simulación.

Palabras Clave

L'Ecuyer, número pseudo-aleatorio, Generadora Lineal Congruencial , WARP, USS Enterprise, Test Chi-cuadrado, Simulación MonteCarlo

1. INTRODUCCIÓN

La aleatoriedad de los números no sólo es utilizada por los casinos para sacarnos la plata. En la simulación de sistemas la aleatoriedad juega un papel importante en los resultados obtenidos, un parámetro sesgado en la entrada del sistema podría llevarnos a falsas conclusiones. Otra aplicación de los números pseudo-aleatorios es el estudio de la estadística, donde a partir de una función aleatoria podemos generar cualquier función de distribución de probabilidad, otra vez, un sesgo en la generación de los números aleatorios y nuestra función de distribución se verá afectada.

En cualquiera de los dos casos, es normal utilizar una computadora para generar la secuencia de números aleatorios. Siendo este un sistema determinístico la aleatoriedad no existe. Pero existen algoritmos de generación de números pseudo-aleatorios que nos garantizan una secuencia de números dispersa (distribución uniforme).

Un generador muy conocido es el Generador Lineal Congruencial (LCG). En este informe se analiza el generador de L'Ecuyer, que utiliza dos generadores LCG para producir la secuencia de números. En la sección 2 se describe el generador. En la sección 3 se pone a prueba el generador para chequear la distribución de la secuencia de números generados. En la sección 4 se muestra cómo puede utilizarse el generador para crear una función de distribución triangular. En la sección 5 se utiliza el generador para realizar una simulación del vuelo del USS Enterprise, utilizando el generador para el método de Montecarlo.

2. GENERADOR DE L'ECUYER

El generador sugerido por L'Ecuyer (1998) combina dos LCGś según el siguiente algoritmo:

PASO 1 seleccionar una semilla $X_{1,0}$ en el rango $[1, 2147483562]$ para el LCG1, y $X_{2,0}$ en el rango $[1, 2147483398]$ para el LCG2.

PASO 2 evaluar cada generador individual

$$X_{1,n+1} = 40014 X_{1,n} \quad mod \quad 2147483563 \tag{1}$$

$$X_{2,n+1} = 40692 X_{2,n} \quad mod \quad 2147483399 \tag{2}$$

PASO 3 Computar

$$X_{n+1} = (X_{1,n+1} - X_{2,n+1}) \quad mod \quad 2147483562 \tag{3}$$

PASO 4 Computar

$$U_{n+1} = \begin{cases} \frac{X_{n+1}}{2147483563}, X_{n+1} > 0 \\ \frac{2147483562}{2147483563}, X_{n+1} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

PASO 5 Hacer $n = n + 1$ e ir al PASO 2.

3. L'ECUYER A PRUEBA

Es importante que la secuencia de números pseudo-aleatorios generados esté distribuida uniformemente en el rango de números generados. Un método para evaluar la distribución de la secuencia es el test χ^2, con el que podemos determinar si la secuencia esta dada por una variable aleatoria uniforme.

Realizamos el test χ^2 con la hipótesis H_0: la secuencia generada por el LGC propuesto por L'Ecuyer proviene de una distribución $L \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Para realizar el test se utilizaron las semillas (1,1) y se generaron 10000 números, los cuales se agruparon en 100 intervalos de clase. Como se espera una distribución uniforme, el valor esperado de cada clase es $E_i = 100$. Los valores obtenidos de las clases O_i se ven en la tabla 3 y en la figura 3.

81	106	118	105	82	135	98	93	94	94
97	95	88	114	92	109	105	85	96	95
109	95	105	100	84	117	107	93	100	105
87	89	99	91	97	93	117	91	99	95
106	97	97	105	113	108	112	94	96	99
105	97	111	78	104	95	81	119	88	103
98	106	107	98	105	116	103	101	93	87
97	92	94	88	92	107	105	95	95	110
102	96	101	112	92	100	110	77	107	117
115	105	96	109	91	105	116	94	98	105

Table 1: Cantidad de números por clase O_i

Se calculó el estadístico $\chi_0^2 = \sum_{i=1}^{100} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = 100.32$ y el valor crítico $\chi^2_{99,0.05} = 124.34$. Por lo tanto, con un nivel

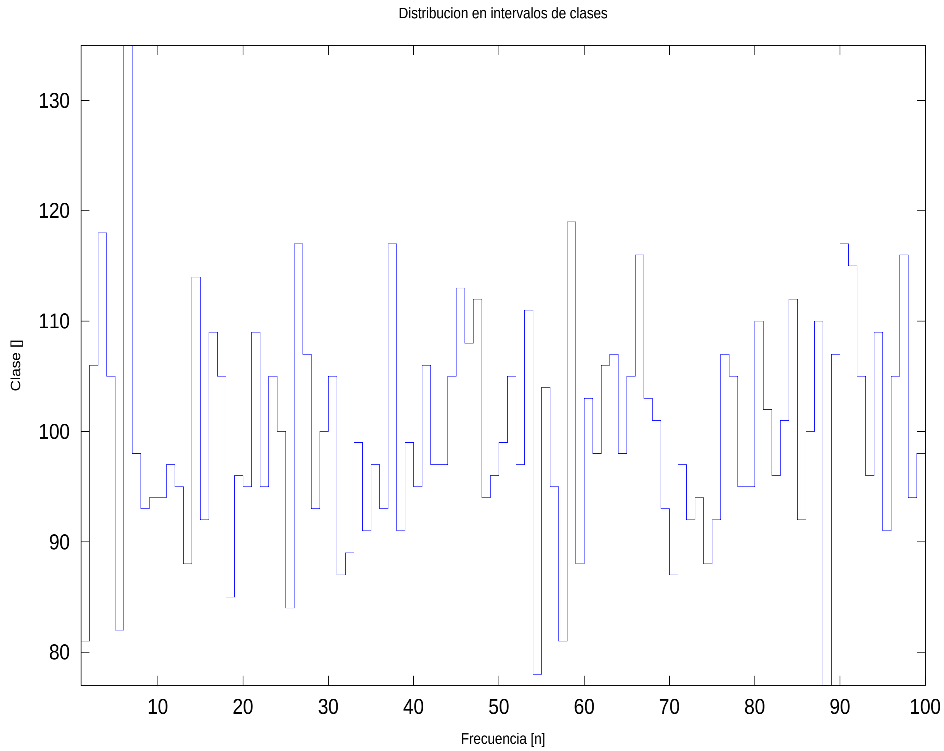

Figure 1: Distribución de los 10000 números en 100 intervalos de clase

de significación del 5% y 99 grados de libertad, no se rechaza la hipótesis H_0.

Otra forma de ver la independencia de los números de la secuencia es en un gráfico. Como muestran los gráficos 3 y 3 los puntos no demuestran seguir ningún patrón detectable.

4. L'ECUYER PARA SIMULAR

En la sección 3 se probó que la secuencia del generador de L'Ecuyer tiene una distribución uniforme, sin embargo en la simulación, los sucesos pueden tener otro tipo de distribución. Existen varias técnicas que nos permiten obtener secuencias de números pseudo-aleatorios con otras distribuciones. En esta sección utilizaremos el método de la transformada inversa para generar una secuencia de distribución triangular dada por la ecuación 5.

$$fX(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \le x \le b \\ \frac{2(c-x)}{(c-b)(c-a)} & b \le x \le c \\ 0 & \text{en otro lado} \end{cases} \tag{5}$$

La técnica consiste en, dado un número u que es una realización de U con distribución $U[0,1]$, entonces $x = F^{-1}(u)$ es una realización de una VA x con función de distribución $F(x)$.

Usando esta técnica en la ecuación 5, obtenemos la ecuación 6.

$$FX(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x^2-2ax}{(b-a)(c-a)} & a \le x \le b \\ \frac{2cx-x^2}{(c-b)(c-a)} & b \le x \le c \\ 1 & x > c \end{cases} \tag{6}$$

Por lo tanto, nos queda

$$X = -(x-c)^2+c^2 \begin{cases} \sqrt{(b-a)(c-a)u+a^2}+a & a \le U \le b \\ -\sqrt{(c-b)(c-a)u-c^2}+c & b \le U \le c \end{cases} \tag{7}$$

Usando los valores: $a = 0, b = 1, c = 3$, la gráfica 4 nos muestra la función de distribución propuesta por la ecuación 5, y en la gráfica 4 vemos los resultados de la variable X propuesta por 7.

En la gráfica 4 se observa la gráfica de la media muestral comparada con la media teórica de la función e distribución. Como se ve, se cumple la Ley de los grandes números, de modo que $X(n) \to \xi X_i$.

5. TIEMPO A VELOCIDAD WARP

El sistema de propulsión WARP consiste en un núcleo WARP, energizado por aniquilación materia-antimateria controlada por cristales de dilitio, que alimenta dos propulsores. Se puede propulsar a velocidad WARP con un sólo propulsor. El tiempo operación de cada propulsor es una variable aleatoria exponencialmente distribuida X_2, X_3 con tiempo medio $T_p = 240$ horas. El tiempo de operación entre fallos del núcleo es una variable uniforme $X_1 \sim \mathcal{U}[72, 12]$ medido en horas.

Si x_1 es una realización de la variable X_1, entonces su función de distribución f_{x1} es:

$$f_{x1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{12} & x \in (72, 84) \\ 0 & x \notin (72, 84) \end{cases} \tag{8}$$

Para los propulsores, si x_2 y x_3 son realizaciones de X_2 y

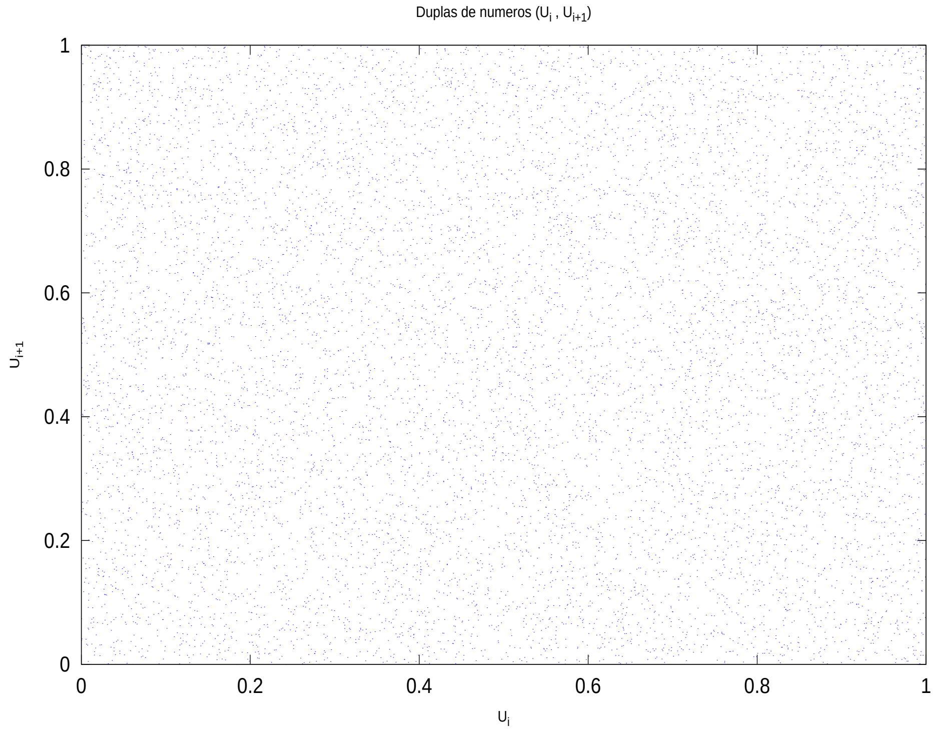

Figure 2: Duplas de números pseudo-aleatorios

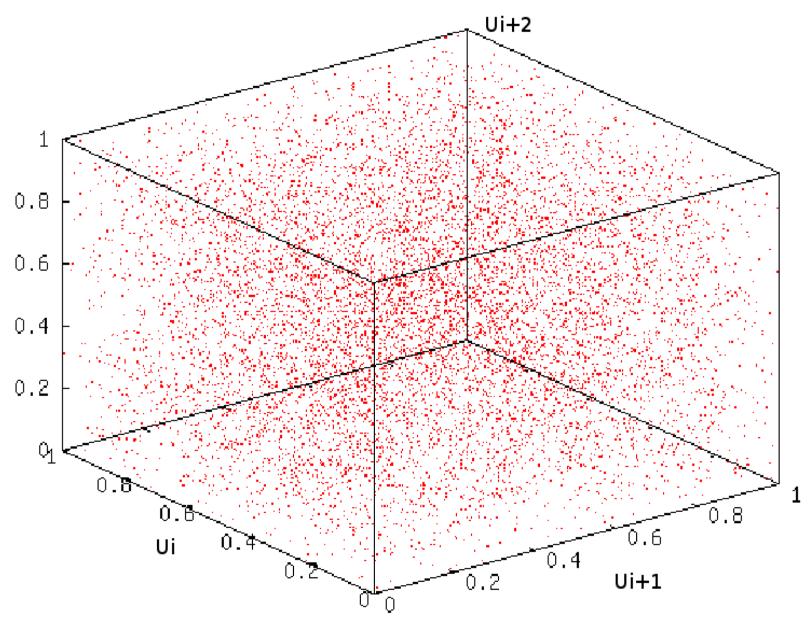

Figure 3: Triplas de números pseudo-aleatorios

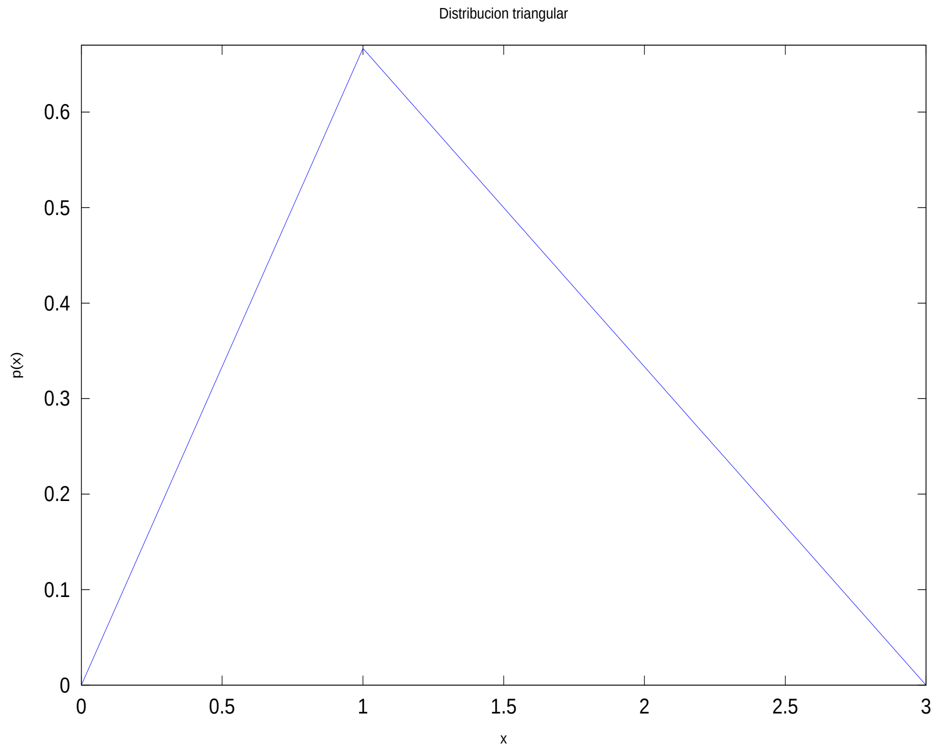

Figure 4: Distribución triagular

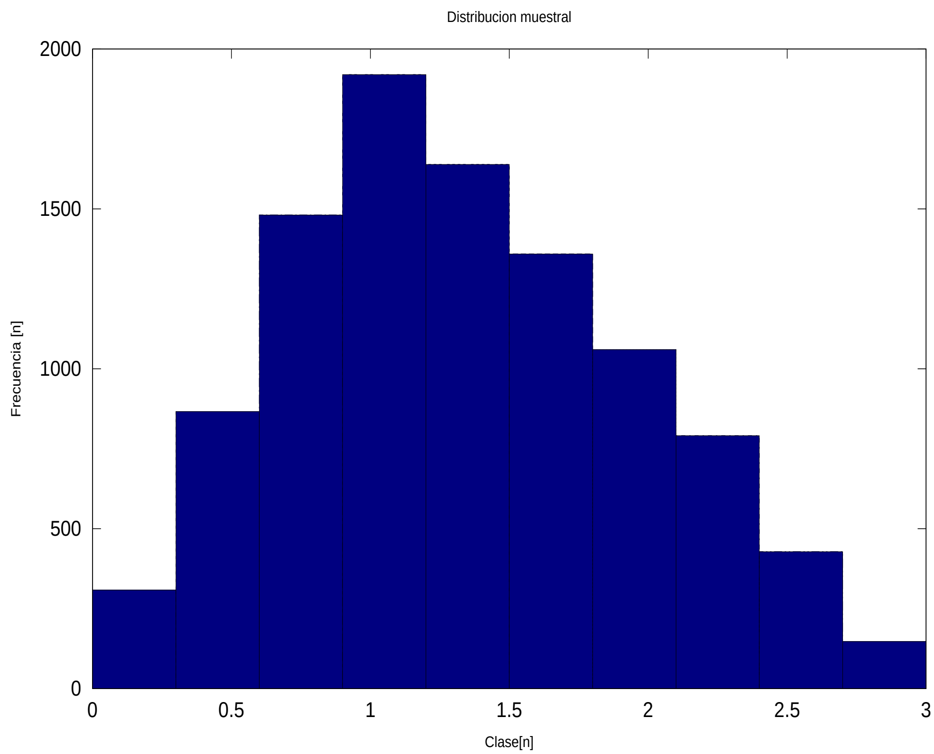

Figure 5: Variable X

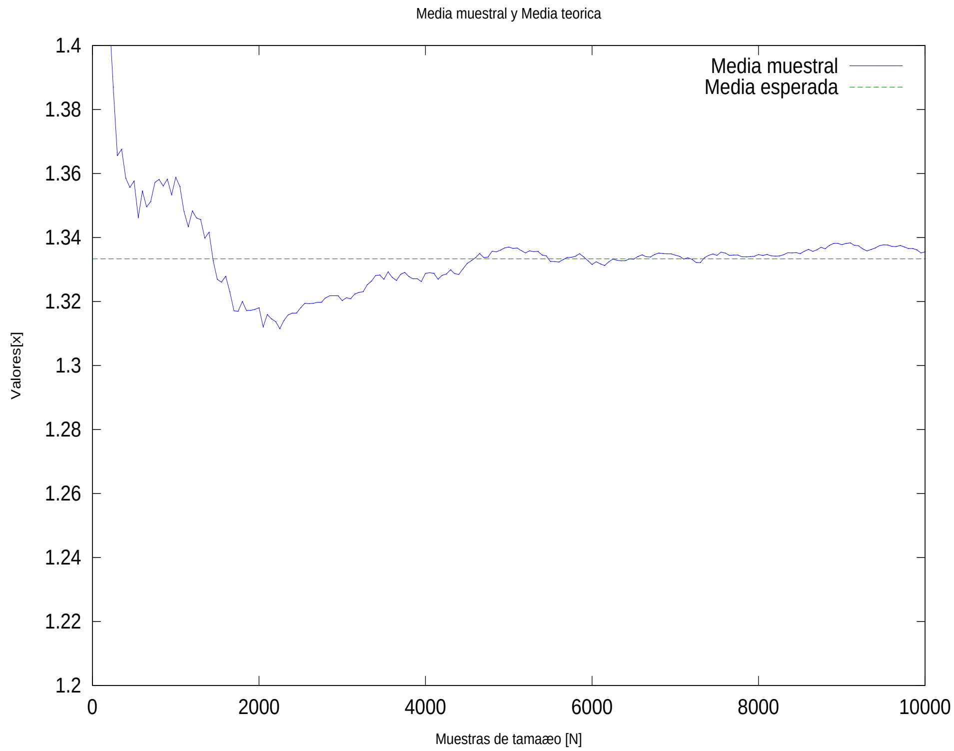

Figure 6: Media muestral comparada con la media teórica

X_3 respectivamente, sus funciones de distribución son:

$$f_p(t) = \begin{cases} \frac{1}{T_p} e^{-\frac{t}{T_p}} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{9}$$

El tiempo de operación del sistema integrado, es una variable aleatoria T definida como:

$$T = \min\{X_1, \max\{X_2, X_3\}\} \tag{10}$$

Haciendo uso del modelo de las variables X_i, el tiempo medio entre fallos del sistema es:

$$\mathcal{E}\{T\} = \int\limits_{\mathcal{D}} \min\{x_1, \max\{x_2, x_3\}\} f_{x1}(x_1) f_p(x_2) f_p(x_3) d^3x \tag{11}$$

donde $\mathcal{D}$ es el dominio $[72; 84]$ x $[0, \infty]$ x $[0, \infty]$.

Para realizar la simulación de Montecarlo para este sistema, es necesario transformar el dominio de integración $\mathcal{D} \to [0, 1]^3$ usando las siguientes trasformaciones:

$$x_1 = 12u_1 + 72 \tag{12}$$

$$x_2 = -T_p \ln(1 - u_2) \tag{13}$$

$$x_3 = -T_p \ln(1 - u_3) \tag{14}$$

siendo u_i realizaciones de variables aleatorias $\mathcal{U}[0, 1]$. También es necesario calcular el determinante jacobiano de la transformación J, siendo este:

$$J = \begin{vmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_p}{1-u_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T_p}{1-u_3} \end{vmatrix} = \frac{12T_p^2}{(1 - u_2)(1 - u_3)} \tag{15}$$

Finalmente, reemplazando en (11) con (12), (13), (14) y multiplicando por (15) obtenemos la integral transformada:

$$\mathcal{E}\{T\} = \int\limits_{[0,1]^3} \min\{12u_1+72, \max\{-T_p \ln(1-u_2), -T_p \ln(1-u_3)\}\} d^3u \tag{16}$$

Usando el generador de números pseudo-aleatorios de L'Ecuyer obtenido en la sección 2 calculamos 3 secuencias, cada una correspondiente a $u_i \in [0, 1]$. En la tabla 5 se muestran las semillas usadas para generar cada secuencia. Mediante la simulación de Montecarlo, obtenemos 20 realizaciones de la integral (16), resultando el estimador de tiempo medio de vuelo $\langle T \rangle = 75.937700$ horas y el desvío muestral $S = 0.88369$ horas. Los valores de las 20 realizaciones T_i se pueden ver en la figura 5. Entonces, para un nivel de significación del 5%, el tiempo medio de vuelo del sistema de propulsión WARP pertenece al rango 75.93 ± 0.413 horas.

u_1	13	20
u_2	52	87
u_3	101	115

Table 2: Semillas para los generadores de L'Ecuyer de u_i

6. CONCLUSIÓN

La aplicación de los generadores de números pseudo-aleatorios es amplia. Algoritmos como el de Lecuyer hacen posible realizar simulaciones de muchos pasos, garantizando una dis-

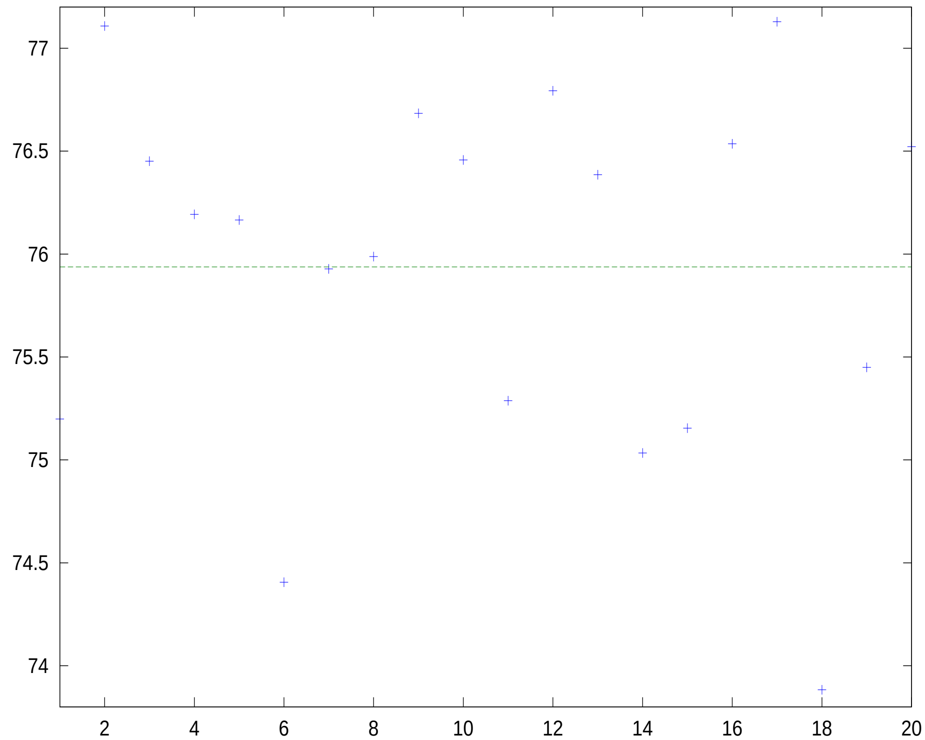

Figure 7: 20 realizaciones de la integral (16) **mediante simulación de Montecarlo**

tribución uniforme en la secuencia de números que serán usados como entrada al sistema.