Simulación forzada por eventos de una cola M/M/1

Domé Damián
Instituto Tecnológico de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina
ddome@alu.itba.edu.ar

Amorós Juan Manuel
Instituto Tecnológico de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina
jamoros@alu.itba.edu.ar

Teisaire Emmanuel
Instituto Tecnológico de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina
eteisair@alu.itba.edu.ar

Pampliega Juan Martín
Instituto Tecnológico de Buenos Aires
Buenos Aires, Argentina
jpamplie@alu.itba.edu.ar

Resumen

En el presente artículo se estudia la simulación forzada según eventos discretos mediante un sistema de cola simple del tipo M/M/1/∞/FIFO.

Palabras clave

Eventos discretos, Cola simple, M/M/1/∞/FIFO, Simulación forzada por eventos

1. INTRODUCCIÓN

La simulación mediante eventos discretos tiene como objetivo recabar información estadística (macroscópica) a partir de la evolución del estado interno (microscópico) del modelo.
Se estudia la evolución de algunas variables de interés que conforman el estado del sistema. Este, varía en un conjunto discreto de valores y esta transición ocurre en instantes de tiempo asociados a la ocurrencia de un evento.
La forma más eficiente de realizar una simulación de eventos discretos es mediante una simulación forzada por eventos. Esto se debe a que este tipo de simulación es asincrónica por lo que los intervalos de tiempo entre eventos resultan irrelevantes y no insumen recursos de cómputo.
En este trabajo se analiza un sistema de cola simple que resulta fácil de analizar mediante una simulación por eventos discretos. En la sección 2 se modela el sistema de Cola Simple. En la sección 3 se realizan diversas simulación del sistema y se comparan los resultados con los obtenidos analíticamente. Finalmente, en la sección 4 se presentan las conclusiones obtenidas.

2. MODELADO DEL SISTEMA DE COLA

En este sistema hay clientes que llegan a un servicio que los atiende. Si un cliente llega y el servicio está ocupado, el cliente espera en cola hasta ser atendido. Para la simulación de este comportamiento se tienen las siguientes cosideraciones:

1. Es un único servidor.
2. La población de donde llegan los clientes es infinita.
3. La disciplina de la cola es FIFO (*First in First out*).
4. Los clientes llegan al sistema mediante un proceso de Poisson con una tasa media de λ [clientes/hora]
5. El servidor atiende a cada cliente con tiempo de servicio exponencialmente distribuido con media $\frac{1}{\mu}$.
6. Si $q(t)$ es la longitud de la cola en el instante t y $b(t)$ es el estado de ocupación del servicio, el estado del sistema es $x = (q, b)^T$.
7. Los tipos de eventos son: A: Llegada de un cliente, D: Partida de un cliente después de ser servido. El conjunto de eventos es $E = \{A, D\}$.
8. El espacio de estados es $S = \{(n, m)/n = 0, 1, 2, ...m = 0, 1\}$.

3. SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE COLA M/M/1

Se tiene que en el modelo las probabilidades en estado estacionario estan dadas por:

$$p_n = \lim_{t\to\infty} P\{N_t = n\} \tag{1}$$

Donde N_t es el número de clientes en el sistema en el instante t.
En el estado estacionario, se supone que el sistema está en "equilibrio". De esta forma, para un determinadao estado del sistema, la *tasa de salida* es igual a la *tasa de entrada* de dicho estado.
Para el estado correspondiente a $n = 0$ clientes en el sistem se tiene:

$$\mu p_1 = \lambda p_0 \tag{2}$$

Para $n = 1$ se tiene:

$$\lambda p_0 + \mu p_2 = (\lambda + \mu)p_1 \tag{3}$$

Generalizando para el n-ésimo estado, se tiene:

$$p_{n+1} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} p_n - \frac{\lambda}{\mu} p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{4}$$

cuya condición inicial es:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 \tag{5}$$

La solución de la ecuación(4) con la condición inicial (5) tiene como solución:

$$p_n = \frac{\lambda}{\mu}^n p_0 \tag{6}$$

Se tiene que $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ es la *intensidad de tráfico* del sistema de cola simple.
La probabilidad del estado $n = 0$ es:

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \tag{7}$$

$$= p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu^n} \tag{8}$$

$$= p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \tag{9}$$

$$= \frac{p_0}{1-\rho} \tag{10}$$

Donde se asume que $\rho < 1$, lo cual resulta razonable ya que si fuese mayor o igual la cantidad de clientes crecería indefinidamente. Finalmente, se tiene que:

$$p_n = (1-\rho)\rho^n \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{11}$$

3.1 Cálculo del promedio temporal de clientes en cola

Según los desarrollos presentados previamente en esta sección se puede obtener el número medio de clientes en la cola L_q como:

$$L_q = 0 \times (p_0 + p_1) + \sum_{n=1}^{\infty} n p_{n+1} \tag{12}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{13}$$

De esta forma se puede obtener analíticamente el valor del número medio de clientes en la cola en función de la intensidad de tráfico ρ. Partiendo de las condiciones iniciales en las que $\frac{1}{\lambda} = 150$ y que $\frac{1}{\mu} = 60$ se tiene que $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.4$. De esta forma se calcula analíticamente el valor deseado y se obtiene:

$$L_q = \frac{0.4^2}{1-0.4} = 0.2667 \tag{14}$$

A continuación se comparan los resultados obtenidos analíticamente con los obtenidos mediante la simulación mediante un programa escrito en *GNU Octave*.

Para calcular el valor del número medio de clientes en la cola se utilizó el Método de Montecarlo. Se utilizó como condición de corte que el error porcentual sea menor a un 5%. El error porcentual se calcula como:

$$E_{\%} = \frac{L}{\bar{L_q}} \times 100 \tag{15}$$

donde $\bar{L_q}$ es la media del valor que se desea computar. L es la longitud del intervalo de confianza cuyo valor es $2 \times 1.6 \times \frac{S}{\sqrt{n}}$ siendo S el desvío y n la cantidad de simulaciones (el valor 1.6 se obtiene de tabla).
De acuerdo con las consideraciones mencionadas se pasa a simular el sistema tomando como condiciones iniciales del sistema $\frac{1}{\lambda} = 150$, $\frac{1}{\mu} = 60$ y la cantidad de clientes a atender de 500. Los resultados obtenidos se pueden observar en las Figuras 1 y 2.

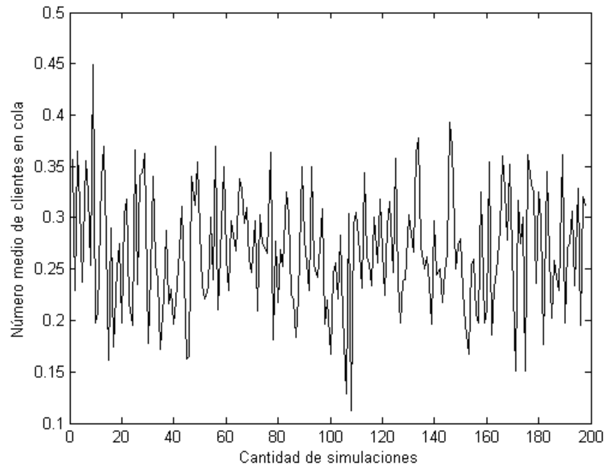

Figura 1: Valor del número medio de clientes en cola en función de la cantidad de simulaciones

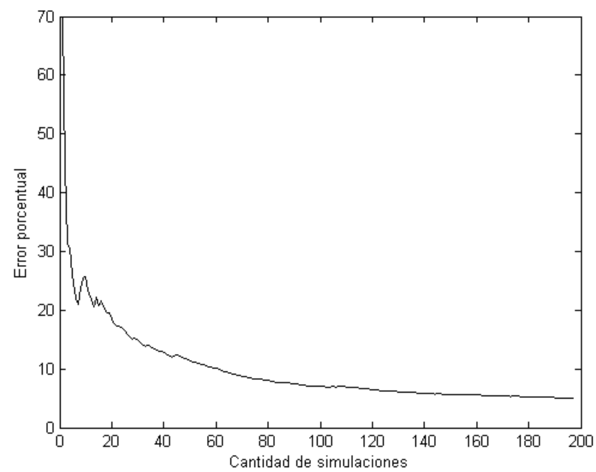

Figura 2: Error porcentual en el cómputo del número medio de clientes en cola en función de la cantidad de simulaciones

Finalmente, se debieron realizar 198 simulaciones para obtener un error porcentual $E_{\%} = 4.9813$ y el valor computado fue de $L_q = 0.3129$ el cual es similar al valor calculado teóricamente.

3.2 Tiempo medio de espera en cola por cliente

Mediante este programa se realizan nuevas simulaciones con el fin de obtener en forma experimental el tiempo medio de espera en cola W_q con un error menor al 5%. Se consideran como tiempo medio entre arribos 150 minutos y como tiempo medio de servicio 60 minutos. Cada simulación finaliza cuando se atienden a 1000 clientes. Luego de 102 simulaciones, se obtuvo $W_q = 35.3262$ con un error porcentual de 4.9746. Los resultados de las simulaciones se encuentran plasmados en las figuras 3 y 4.

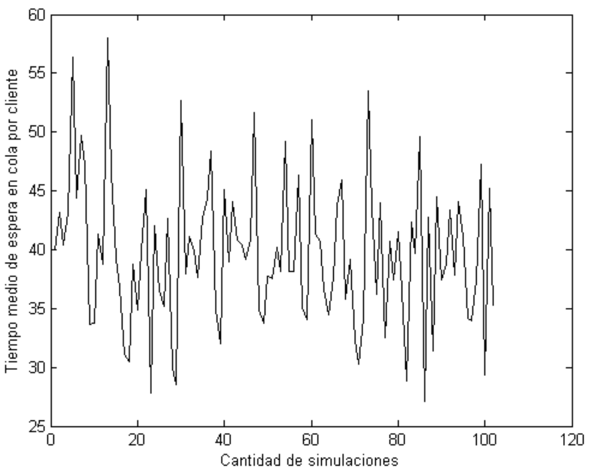

Figura 3: Valor del tiempo medio de espera en cola por cliente en función de la cantidad de simulaciones

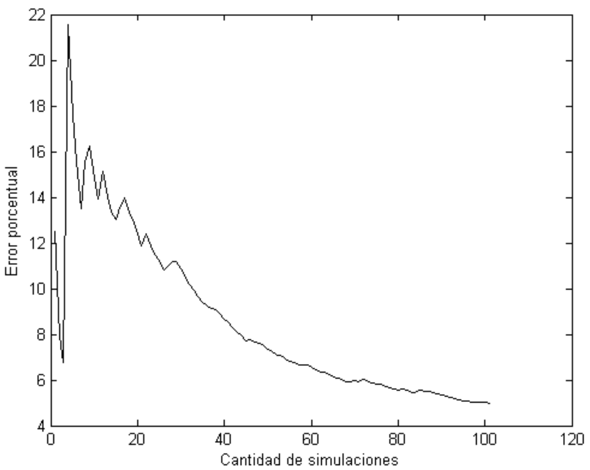

Figura 4: Error porcentual en el cómputo del tiempo medio de espera en cola por cliente en función de la cantidad de simulaciones

Se sabe que el valor teórico de W_q está dado por:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda} \tag{16}$$

siendo λ la tasa media de arribos de clientes por hora, $\frac{1}{\mu}$ el tiempo medio de servicio y $\rho = \lambda/\mu$ la intensidad de tráfico para el sistema.

En nuestras simulaciones $1/\lambda = 150[minutos]$ y $1/\mu = 60[minutos]$, resultando $W_{q-Teorico} = 40[minutos]$, que como se puede observar es similar al hayado experimentalmente.

3.3 Simulación de sistema con dos servicios

Se realiza una nueva simulación para obtener resultados para ser comparados con los anteriores. Para esto se modifican los algoritmos anteriormente utilizados con la intención de que la atención de los servicios sea realizada por medio de dos servidores en paralelo.

El pseudo algoritmo utilizado es:

```
while no haya alcanzado los clientes atendidos esperados
do
    se calcula el próximo evento
    if próximo evento es un arrivo then
        if el servicio 1 esta libre then
            lo atiende el servidor 1
        else if el servicio 2 esta libre then
            lo atiende el servidor 2
        else
            se encola
        end if
    else if próximo evento es una partida de servicio 1
then
        if hay clientes en la cola then
            se atiende al siguiente cliente
        else
            se libera al servicio 1
        end if
    else if próximo evento es una partida de servicio 2
then
        if hay clientes en la cola then
            se atiende al siguiente cliente
        else
            se libera al servicio 2
        end if
    end if
end while
```

Se ejecutan simulaciones en *GNU-Octave* para determinar con un error menor al 5% la longitud media de cola. Se utilizan como parámetros del sistema los mismos anterior mente utlizados siendo $\frac{1}{\lambda_{1,2}} = 150min$ y $\frac{1}{\mu} = 60min$ para ambos servidores $servidor_{1,2}$. Usando un tiempo medio entre arrivos $T_{mean} = 1min$ y $n = 1000$ siendo n la cantidad de clientes por simulación.

Las ejecuciones sucesivas de este programa arrojan como resultado una cantidad media de clientes en espera de $Queue_{length} = 0.016695$ con un tiempo medio de espera de $2.4887min$, siendo 300 la cantidad de simulaciones. Se observa entonces cómo la ejecución de un sistema de colas con 2 servidores de atención en paralelo mejoran notablemente la longitud de cola de sucesos para ser atendidos, reduciéndola en este caso a un 5.33%.

Los resultados se pueden apreciar en las figuras 5, 6 y 7.

4. CONCLUSIONES Y RESULTADOS

Los resultados simulados en el sistema forzado por eventos M/M/1 se aproxima a los resultados teóricos. Comparativamente se aprecia que tanto la longitud de cola como el tiempo de espera de cada cliente en la cola simple con dos servidores simulatáneos es menor que en el caso del modelo de cola simple con un solo servidor.

5. BIBLIOGRAFÍA

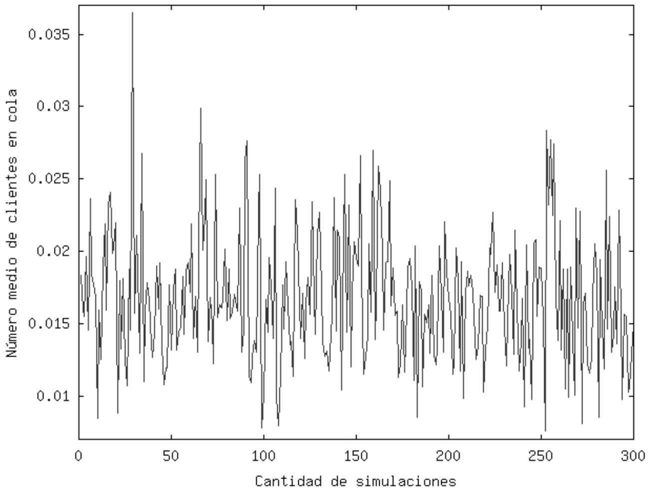

Figura 5: Valor del número medio de clientes en cola en función de la cantidad de simulaciones

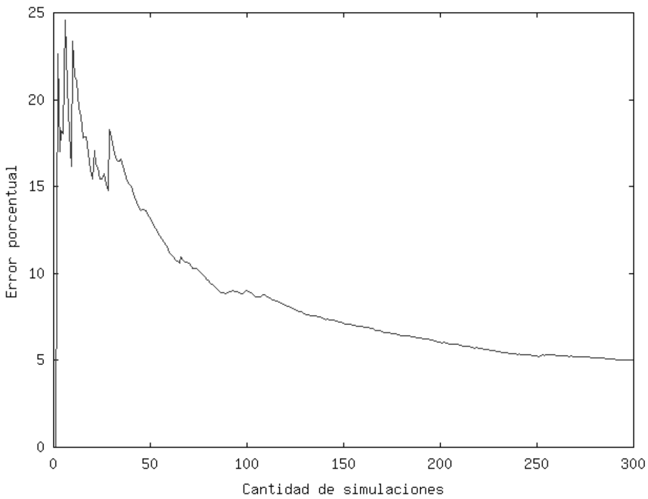

Figura 6: Error porcentual en el cómputo del número medio de clientes en cola en función de la cantidad de simulaciones

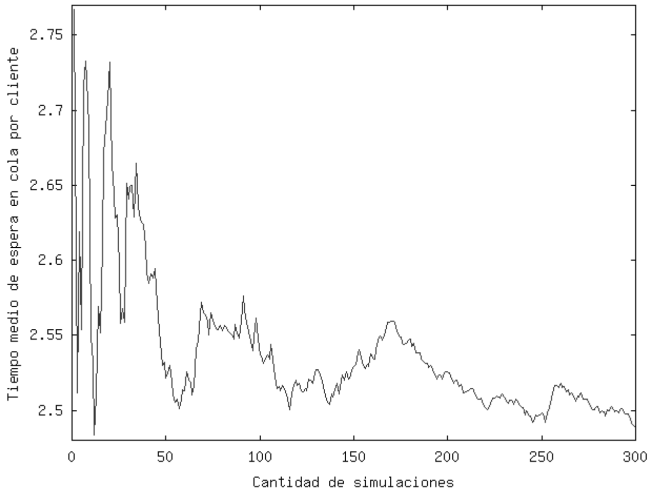

Figura 7: Valor del tiempo medio de espera en cola por cliente en función de la cantidad de simulaciones

Notas de clase, Simulación de sistemas. Instituto Tecnológico de Buenos Aires.