Trabajo Práctico N°5
Generadores de números pseudoaleatorios y Simulación de Montecarlo

1. **Primera Parte**
   Considerar el Generador Lineal Congruencial:

$$x_{n+1} = \left((2^{18} + 1)\, x_n + 1 \right) \mod 2^{35}$$

con $x_0 = 314159265$. Generar una secuencia $\{u_i\}$, con $i = 1, \ldots, 10000$ en el intervalo (0, 1).

   (a) Aplicar el test χ^2.
   (b) Representar los pares (u_i, u_{i+1}) y las ternas (u_i, u_{i+1}, u_{i+2})
   (c) Estimar $\mathrm{Cov}(U, e^U)$, mediante simulaciones, donde $U \sim \mathcal{U}[0,1]$
   (d) Para $U_1, U_2, \ldots$ variables aleatorias uniformes en (0, 1), se define:

$$N = \min_n \left\{ \sum_{i=1}^{n} U_i > 1 \right\}$$

Es decir, que N es la cantidad de números aleatorios que hay que sumarse hasta exceder a 1. Estimar, mediante simulación $\mathcal{E}\{N\}$ generando $10, 100, \ldots, 10000$ valores de N. Indicar cuál cree que es el valor de $\mathcal{E}\{N\}$?

Segunda Parte
La evolución del valor de unas acciones varía diariamente siguiendo el siguiente esquema:

Cambio en la cotización	probabilidad
$-1/8$	3/36
sin cambios	7/36
$+1/8$	16/36
$+1/2$	7/36
$+1$	3/36

Simular de la evoluciónon del valor de estas acciones a lo largo de un mes, considerando que el valor inicial de la acción es de \$ 100.

(a) Estimar el beneficio medio en un mes al operar con esta acción, para n realizaciones simuladas. Para eso estudiar como varía dicho beneficio medio mensual al aumentar n. Graficar. Calcular la varianza del beneficio y establecer un criterio para decidir cuantas simulaciones deben realizarse.
(b) Calcular, mediante simulaciones el beneficio medio, dia a dia y su varianza.
(c) Concluya.

HINT: El beneficio debido a la acción, en el día t, es :$\beta_t = p_t - p_0$, siendo p_t el precio de la acción al día t (cierre de jornada) y p_0 el precio inicial de la acción, en este caso: \$ 100 (En este caso no se ha tenido en cuenta las comisiones del corredor de bolsa)

2. **Primera Parte**
El siguiente generador, sugerido por L'Ecuyer (1998), combina dos LCG's, según el siguiente algoritmo:

PASO 1 Seleccionar una semilla $X_{1,0}$ en el rango $[1, 2147483562]$ para el LCG1 y $X_{2,0}$ en el rango $[1, 2147483398]$ para el LCG2

PASO 2 Evaluar cada generador individual

$$\begin{aligned} X_{1,n+1} &= 40014\, X_{1,n} \mod 2147483563 \\ X_{2,n+1} &= 40692\, X_{2,n} \mod 2147483399 \end{aligned}$$

PASO 3 Computar

$$X_{n+1} = (X_{1,n+1} - X_{2,n+1}) \mod 2147483562$$

PASO 4 Computar

$$U_{n+1} = \begin{cases} \frac{X_{n+1}}{2147483563}, & X_{n+1} > 0 \\ \frac{2147483562}{2147483563}, & X_{n+1} = 0 \end{cases}$$

PASO 5 Hacer $n = n + 1$ e ir al PASO 2.

Este generador combinado tiene período $\approx 2 \times 10^{18}$. A partir de una realización de 10000 muestras:

(a) Realizar el tests χ^2.

(b) Analizar y graficar las duplas (U_i, U_{i+1}) y las ternas (U_i, U_{i+1}, U_{i+2}).

(c) Obtener un algoritmo que, a partier de los valores obtenidos del generador anterior, devuelva numeros pseudoaleatorios distribuidos según una función densidad triangular:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a \leq x \leq b \\ \frac{2(c-x)}{(c-b)(c-a)} & b < x \leq c \\ 0 & \text{en otro lado} \end{cases}$$

(d) Implementar una funcion `mi_randtraing(u,a,b,c)` y generar para $a = 0$, $b = 1$ y $c = 3$ variables IID $X_1, X_2, \ldots, X_{10000}$. Computar:

$$\bar{X}(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

para $n = 50, 100, 150, \ldots, 10000$ y verificar empiricamente la *Ley de los Grandes Números*, es decir, que : $\bar{X}(n) \to \mathcal{E}\{X_i\}$

Segunda Parte
El sistema de propulsión WARP de la nave espacial *USS Enterprise*, deriva a dos propulsores en las nescellas laterales, ubicadas a estribor y babor. Ambos propulsores son alimentados mediante un *Núcleo WARP* en el interior de un reactor donde se llevan a

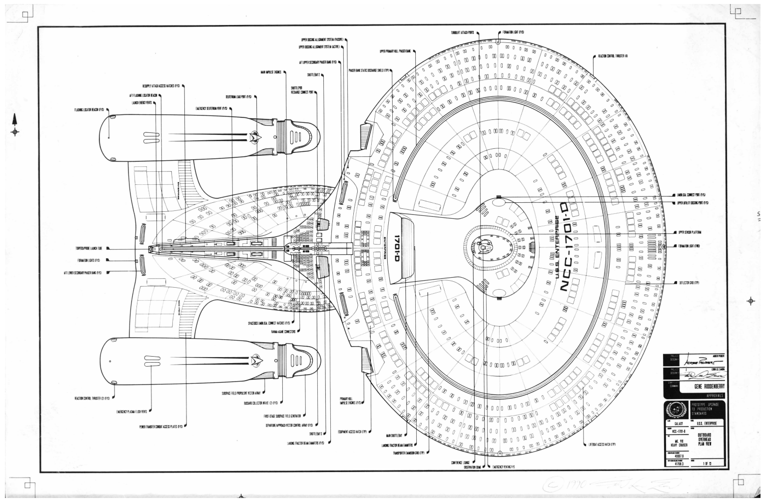

Figure 1: Esquematico del USS Enterprise visto de planta

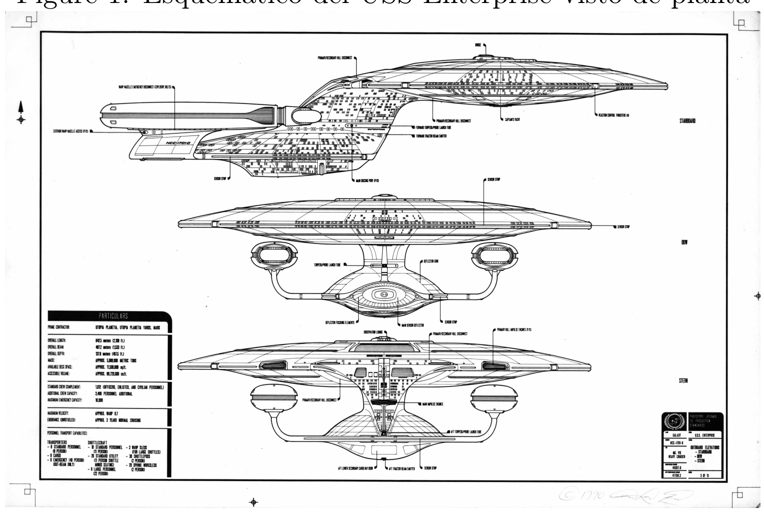

Figure 2: Esquematico del USS Enterprise vistas frontal, lateral y trasera

cabo reacciones de aniquilación materia-antimateria, moderadas por cristales de dilitio. El tiempo de operación de cada propulsor es una variable aleatoria exponencialmente distribuida, con tiempo medio de 10 dias. Del mismo modo, el tiempo de operación entre fallos del núcleo WARP es de 72 horas, pudiendo variar linealmente hasta en 12 horas. La nave puede propulsarse a velocidad WARP con una sola nescella operativa.
Estimar, mediante simulaciones, el tiempo de vuelo medio de la nave espacial. Calcule la varianza del tiempo medio de vuelo y justifique la cantidad de simulaciones.

3. **Primera Parte**
El generador que implementa el método `nextDouble` en la clase `java.util.Random` de la libreria estándar de Java (ver `http://java.sun.com/j2se/1.3/docs/api/java/util/Random.html`) está basado en un congruencial lineal con período de longitud 2^{48}, pero cada salida se

construye tamando dos valores sucesivos:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (25214903917x_i + 11) \mod 2^{48} \\ u_i &= (2^{27}\lfloor x_{2i}/2^{22}\rfloor + \lfloor x_{2i+}/2^{21}\rfloor)/2^{53} \end{aligned}$$

Notar que el generador `rand48` de la libreria estándar de Unix utiliza exactamente la misma recurrencia, pero produce la salida vía $u_i = x_i/2^{48}$.

(a) Aplicar el test χ^2 y el test KS.

(b) Representar los pares (u_i, u_{i+1}) y las ternas (u_i, u_{i+1}, u_{i+2})

(c) Usando el generador testeado (en caso de pasar ambos tests), mostrar mediante el método de Montecarlo que si $Z \sim \mathcal{N}[0,1]$, entonces:

$$\mathcal{E}\{Z\} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \approx 0.798$$

Segunda Parte

En una región agreste de la cordillera patagónica donde coexisten pumas y guanacos, se establece una dinámica del tipo *presa–predador*. Los pumas se alimentan de los guanacos haciendo variar la población de estos, mientras que la rapidez con que cresece la población de pumas, se ve afectada por la cantidad de guanacos.

Llamando $x(t)$ e $y(t)$ a la cantidad de guanacos y pumas respectivamente, un modelo que describe la interacción de predación es:

$$\frac{dx}{dt} = rx - axy \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -sy + bxy \tag{2}$$

donde a, b, r y s son parámetros que tienen que ver con la tasa de crecimiento poblacional de ambas especies y potenciales bióticos de interacción entre ambas especies. Dichas constantes, desde el punto de vista matemático son reales positivas.

Los requerimientos de este trabajo son:

(a) Interpretar los términos rx, $-axy$, $-sy$ y bxy de las ecuaciones diferenciales.

(b) Para $x(0) = 12000$ e $y(0) = 600$, simular la evolución del sistema si $r = 0.001$ yr^{-1}, $a = 2.0 \times 10^{-6}$ yr^{-1}, $s = 0.01$ yr^{-1} y $b = 10^{-6}$ yr^{-1}. Comentar el resultado obtenido.

(c) Analizar la evolución del sistema en el espacio x, ypara distintas condiciones iniciales. Cometar el resultado obtenido. Obtener la expresión analítica de las curvas obtenidas numericamente.

(d) No es posible obtener una forma analítica con que depende el *período poblacional* T con los parámetros. Mediante simulaciones hallar la dependencia de T con r y con s. Comentar los resultados obtenidos.

(e) A partir de datos observacionales, se estimó el parámetro $r = 0.001 \pm 0.00025$ yr^{-1}. Analizar la distribución del período poblacional T.