Guven Araliklari, Hipotez Testleri

Guven Araliklari

Diyelim ki $X_1, .., X_i$ orneklemi birbirinden bagimsiz, ayni dagilimli ve ortalamasi μ, standart sapmasi σ ve yine ayni olan bir nufus dagilimindan geliyor. O zaman biliyoruz ki, Merkezi Limit Teorisi (Central Limit Theorem) teorisine gore, orneklem ortalamasi $\bar{X} = \frac{1}{n} X_1 + .. + X_n$, ortalamasi μ, standart sapmasi σ / n^2 olan bir normal dagilima yaklasiyor.

Peki veriyi (yani orneklemi) ve CLT'yi kullanarak μ hakkinda bir tahmin yapabilir miyiz? Yani Buyuk Sayilar Kanunua gore μ hakkinda noktasal tahmin yapabiliriz fakat, belki ondan bir adim otesi, bir "guven araligi" hesaplamaktan bahsediyoruz. Bu tahmin "gercek μ, %95 ihtimalde su iki deger arasindadir" turunde bir tahmin olacak.

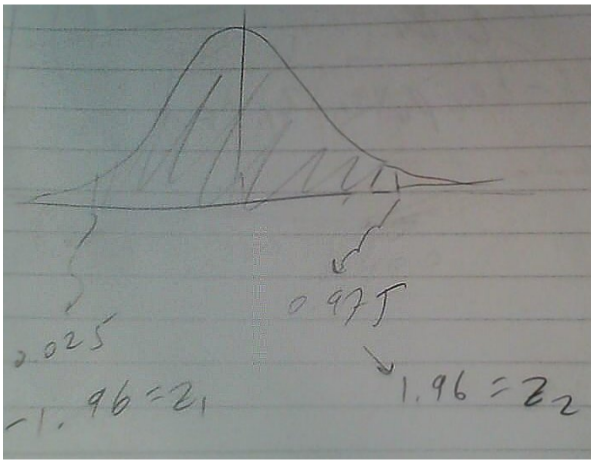
Bu araligin hesabi icin once $\bar{X}$'i standardize edelim, yani $N(0, 1)$ haline cevirelim,

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Z-skorlarini isledigimiz yazida

$$P(z_1 < Z < z_2) = \Phi(z_1) - \Phi(z_2)$$

gibi bir ifade gorduk. Esitligin sag tarafi aslinda bir alan hesabidir, surekli fonksiyonlarda olasilik bir entegral, ya da iki kumulatif yogunluk fonksiyonunun farki. Guven araligi icin bize lazim olan da bir olasilik, hatta "kesin" bir olasilik, %95 olasiligi. Demek ki esitligin sag tarafi .95 olacak. .95 hesabi icin, normal egrisini dusunursek, sagindan ve solundan 0.25 buyuklugunde iki parcayi "kirpmamiz" lazim. O zaman 0.975 olasiliginin z degeri ile, 0.025 olasiliginin z degeri arasindaki olasilikta olmamiz lazim. Bu hesaplarda baz alinan $z_{\alpha/2}$ degeri ve bu $100 \cdot \alpha/2$ ust yuzdelik kismina, ornegimizde 0.975 kismina tekabul ediyor. Normal dagilimin simetrisi sebebiyle onun eksisi alinmis hali oteki (soldaki) parcayi verir, yani $-z_{\alpha/2}$.



Z-skoru hesaplarken tabloya danismistik, simdi tabloya tersinden bakacagiz, kesisme noktasinda 0.975 diyen yeri bulup kordinatlari alacagiz, ki bu deger 1.96.

```python
from scipy.stats.distributions import norm
print norm.ppf(0.975)
```

```
1.95996398454
```

Bazi Istatistik kaynaklarinda "sihirli deger" seklinde tarif edilen bir deger bu, gozlerimiz kamasmasin, geldigi yer burasi iste. Simdi formulu buna gore degistirelim,

$$P\bigg(-z_{\alpha/2} \leqslant \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leqslant z_{\alpha/2} \bigg) = 1-\alpha$$

$P(\cdot)$ icinde biraz duzenleme, tum terimleri $\sigma/\sqrt{n}$ ile carpalim, $\bar{X}$ cikartalim, ve -1 ile carpalim,

$$P\bigg(\bar{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \bigg) = 1-\alpha$$

Guven araligi ifadesine aslina erismis olduk. Eger %95 kesinlikten bahsediyor olsaydik, ve nufusun gercek varyansi σ^2 biliniyor olsaydi, $P(\cdot)$ icine bu degerleri gececektik, $\bar{X}$ zaten verinin aritmetik ortalamasindan ibarettir, bu bize μ'nun solunda ve saginda bazi degerler dondurecekti. Bu degerler bizim guven araligimiz olacakti. Mesela veri 64.1, 64.7, 64.5, 64.6, 64.5, 64.3, 64.6, 64.8, 64.2, 64.3 seklinde, $n = 10$ cunku 10 nokta var, $\sigma = 1$ olarak verilmis. Ortalamayi hesapliyoruz, 64.46. $\alpha = 0.05$ icin

$$P\bigg(64.46 - 1.96\frac{1}{\sqrt{10}} \leqslant \mu \leqslant 64.46 + 1.96\frac{1}{\sqrt{10}} \bigg) = 0.95$$

$$P\bigg(63.84 \leqslant \mu \leqslant 65.08 \bigg) = 0.95$$

Yani %95 guven araligi $63.84 \leqslant \mu \leqslant 65.08$.

Neler yaptik? CLT bilgisinden hareketle $\bar{X}$ hakkinda bir seyler biliyorduk. Fakat $\bar{X}$'in *kesin* hangi normal dagilima yaklastigini bilmek icin nufus paremetreleri μ, σ da bilinmelidir. Diger yandan eger tek bilinmeyen μ ise, teoriyi bu bilinmez etrafinda tamamen tekrar sekillendirip / degistirip CLT'yi bilinmeyen μ etrafinda bir guven araligi yaratmak icin kullandik.

Kac Tane n?

Hatirlarsak guven araligini ustteki sekilde hesaplayabilmemizin sebebi CLT sayesinde $\bar{X}$'in normal dagilima yaklasiyor olmasiydi. Ve, teoriyi tekrar dusunursek yaklasma $n \to \infty$ oldugu zaman oluyordu. Buradan $\bar{X}$'in normalliginin "buyukce" n degerleri icin daha gecerli olacagi sonucuna varabiliriz. Peki n ne kadar buyuk olmali? Literature gore CLT'nin genellikle $n \geqslant 30$ durumunda gecerli oldugu soylenir. Tabii nufus dagiliminin ne oldugu da onemlidir, eger nufus normal ise, ya da genel olarak simetrik tek tepeli dagilim ise orneklem daha ufak kalsa da bazi sonuclara varabiliriz. Eger nufus dagilimi cok yamuk (skewed), etekleri genis dagilim ise o zaman daha buyuk orneklem daha iyi olur.

Soru

IO 800 yillarinda Italya'da Etrusali (Etruscan) toplumu vardi. Bu toplum geldigi gibi birdenbire ortadan kayboldu. Bilimciler bu toplumun Italyalilar ile fizyolojik, genetik ve kulturel olarak baglantisi olup olmadigini hep merak etmistir. Bazilari hafa olculerine bakarak sonuclara varmaya ugrasmistir. Arkeolojik kazilarda yapilan olcumlerde 84 Etrusyalinin kafasi olculmustur. Ayrica bugunku Italyanlarin kafa olcumlerinin normal dagilimda $\mu = 132.4mm, \sigma = 6.0mm$ oldugu bilinmektedir. Iki toplum arasindaki baglanti kurmak icin, veriye bakarak kafa olcumu ortalamasi icin bir %95 guvenlik araligi olusturabiliriz, ve eger bugunku Italyanlarin olcusu o araliga dusmuyorsa, Etrusyalilarla baglantilarinin olmadigini iddia edebiliriz.

```
import pandas as pd
df = pd.read_csv('etrus.csv')
print float(df.mean()-1.96*(6.0/np.sqrt(84)))
print float(df.mean()+1.96*(6.0/np.sqrt(84)))
```

```
142.524107721
145.09035011
```

Bugunku Italyanlarin kafa ortalamasi $\mu = 132.4$ bu araliga dusmuyor. Diger bir deyisle, 84 tane orneklemden gelen orneklem ortalamasi 143.8 buyuk bir ihtimalle $\mu = 132.4, \sigma = 6.0$ boyutlarindaki bir normal dagilimdan gelmemistir. Buna gore, buyuk bir ihtimalle Etrusyalilar Italyanlarin atasi degildir.

Bilinmeyen σ

Guven Araliklari bolumunden devam edelim. Bilinmeyen μ durumunu gorduk. Eger σ bilinmiyorsa, bu durumda σ yerine orneklem varyansi S kullanilabilir,

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum (X_i - \bar{X})^2$$

ki ustteki degerin karekoku S olacaktir. σ yerine S kullanmanin buyuk n degerlerinde CLT'yi etkilemedigi ispat edilmistir [5].

Binom Dagilimlar ve Normal Yaklasiksallik

Binom ile Bernoulli dagilimi arasindaki baglantiyi biliyoruz. Diyelim ki $X_1, .., X_n$ birbirinden bagimsiz ve ayni Bernoulli olarak dagilmis, Bernoulli dagilimini temsil eden Y tanimlayalim, o zaman

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Simdi orneklem ortalamasini hatirlayalim,

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

O zaman

$$Y = n\bar{X}$$

Merkezi Limit Teorisinden $\bar{X}$'in nufus beklentisi ve sapmasini iceren $N(\mu, \sigma)$ olarak dagilacagini biliyoruz. Nufus parametreleri nedir? Her X_i'in ayni olan μ, σ'si ile alakli, durumda Bernoulli parametrelerini alip $N(\cdot)$ icinde direk kullanabiliriz,

$$E(X_i) = p, Var(X_i) = p(1-p)$$

o zaman

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma), \mu = p, \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Y ile $\bar{X}$ baglantisi: Bir genel teoriye gore eger $\bar{X}$ normal ise $n\bar{X}$'in de normal oldugu bilinir, ve bu dagilim $N(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$ olarak gosterilir. Bu teorinin ispatini simdilik vermeyecegiz. O zaman $Y = n\bar{X}$ is ve normal olarak dagilmis ise, o zaman

$$Y \sim N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$$

demek dogru olacaktir. Standardize etmek gayet basit,

$$Z = \frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

ya da, bolum ve boleni n ile bolersek,

$$Z = \frac{Y/n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$$

$$Z = \frac{Y/n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

Soru

Amerikalilarin yuzde 12'sinin zenci oldugunu biliyoruz. Eger 1500 kisiyi iceren bir orneklem alsaydik, bu orneklemde 170'den daha az zenci olmasinin olasiligi nedir?

Cevap

%12 nufus parametresidir, yani $p = 0.12$. Orneklem $n = 1500$. Normal yaklasiksallamasi ile

```
from scipy.stats import norm
n = 1500
p = 0.12
mu = n*p
std = np.sqrt(n*p*(1-p))
print mu,std
print 'olasilik',norm.cdf(170,loc=mu,scale=std)
```

```
180.0 12.585706178
olasilik 0.213437028747
```

Yani $N(180, 12.58)$ dagilimini elde ettik ve hesaplari onun uzerinden yaptik. Sonuc diyor ki verilen orneklem ve nufus p degeri ile 170 altinda zenci sayisi elde etmek oldukca dusuk bir ihtimalde.

Ornek

Diyelim ki elimizde bir Web sitesinin gunluk ziyaret, tiklama sayilarini gosteren bir veri seti var, CVR ziyaretcilerin sitedeki tiklayan musteriye donusmesi orani (conversion).

```
import pandas as pd
from scipy import stats
a = pd.DataFrame({'tiklama': [20.,2.,40.,5.,10.,100.],
                  'ziyaret': [100.,10.,300.,400.,30.,800.]})
a['cvr'] = a['tiklama'] / a['ziyaret']
print a
```

```
   tiklama  ziyaret       cvr
0       20      100  0.200000
1        2       10  0.200000
2       40      300  0.133333
3        5      400  0.012500
4       10       30  0.333333
5      100      800  0.125000
```

Bu veri seti icin cvr'in 0.16, yani yuzde 16 oldugunu onceden biliyoruz. Ustteki basari orani binom dagili ile modellenebilir, ziyaretler "deneylerdir", yani orneklem buyuklugunu gosterirler. Tiklama ise basaridir, onceki binom ornegindeki ayni formulu kullanirsak, normal yaklasiksalligi uzerinden bir z-skoru hesaplayabiliriz,

```python
p = 0.16
btest = lambda x: (x['cvr']-p) / np.sqrt( p*(1-p)/x['ziyaret'])
a['guven'] = a.apply(btest, axis=1)
a['guven'] = np.round(stats.zprob(a['guven'])*100,2)
print a
```

```
   tiklama  ziyaret       cvr  guven
0       20      100  0.200000  86.24
1        2       10  0.200000  63.50
2       40      300  0.133333  10.39
3        5      400  0.012500   0.00
4       10       30  0.333333  99.52
5      100      800  0.125000   0.35
```

Binom Guven Araligi

Binom'un Normal yaklasiksalligi konusundan bir ornek daha. Eger p bilinmiyor ise onun icin maksimum olurluk tahmin edicisi (maximum likelihood estimator) Y/n'dir. Ispat icin ek bolumune bakabiliriz.

$$Z = \frac{X/n - p}{\sqrt{\frac{(X/n)(1-(X/n))}{n}}}$$

Ustteki ifade yaklasiklalliktan geliyor. Bu durumda Z uzerinden, aynen daha once yaptigimiz gibi, bir guvenlik araligi tanimlayabiliriz.

$$P\left(-z_{\alpha/s} \leqslant \frac{X/n - p}{\sqrt{\frac{(X/n)(1-(X/n))}{n}}} \leqslant z_{\alpha/s}\right) = 1 - \alpha$$

ve yine daha oncekine benzer cebirsel islemler sonrasi, ve Binom deneydeki basari sayisi olarak X yerine k kullanalim, $P()$ ifadesini cikartalim, cunku zaten o ifadenin icinde olusacak sayilarla ilgileniyoruz,

$$\left(\frac{k}{n} - z_{\alpha/s}\sqrt{\frac{(k/n)(1-(k/n))}{n}}, \frac{k}{n} + z_{\alpha/s}\sqrt{\frac{(k/n)(1-(k/n))}{n}}\right)$$

Ustteki iki sayi bize gerekli guven araligini verecektir.

Soru

Amerika'da 2009 yilinda halkin ne kadarinin arabalarinda yakit tasarrunu destekledigi merak konusuydu. Bir Gallup telefon anketinde bu soru 1012 yetiskine (18 ve ustu yasta) soruldu. Cevap 810 kisinin tasarrufu destekledigi yonundeydi. Yani $n = 1012, k = 810$. O zaman p icin %95 guven araligini bulun.

Cevap

$$\left(\frac{810}{1012} - 1.96 \frac{(810/1012)(1-810/1012)}{1012}, 1.96 \frac{(810/1012)(1-810/1012)}{1012} \right)$$

$$= (0.776, 0825)$$

Hata Payi (Margin of Error)

Basinda oranlari rapor ederken onunla beraber telafuz edilen bir kavram hata payidir. Aslinda bu binom dagilimlarda guven araligi ile cok yakinda alakalidir; hata payi %95 guven araliginin en maksimum genisliginin yarisi olarak bilinir. Yani %95 araliginin bir ucunu diger ucundan cikartirsak ve ikiye bolersek, istenen sonuca erisiriz. Formulsel olarak genislik w,

$$w = \frac{k}{n} + 1.96\sqrt{\frac{(k/n)(1-k/n)}{n}} - - \left[\frac{k}{n} - 1.96\sqrt{\frac{(k/n)(1-k/n)}{n}} \right]$$

$$= 3.92\sqrt{\frac{(k/n)(1-k/n)}{n}}$$

Simdi $(k/n)(1-k/n)$ carpimini dusunelim. *Orneklem Buyuklugu* bolumunde gorduk, n her zaman k'den buyuk olduguna gore k/n her zaman 0 ve 1 arasindadir, o zaman $(k/n)(1-k/n) \leqslant 1/4$ olmalidir, yani gosterilen carpim $1/4$'ten buyuk olamaz. Bunu alip ustteki formul icine koyarsak,

$$\max w = 3.92\sqrt{\frac{1}{4n}}$$

elde ederiz. Bunun yarisi hata payidir d olur, yani

$$d = \frac{0.98}{\sqrt{n}}$$

Ornek

Bir secim kampaynasi sirasinda A ve B adaylari arasinda hangisinin daha once oldugunu bulmak icin bir anket yapilir. Telefonda 597 kisiye soruldugunda A adayinin 299 kisinin oyunu alacagi saptanmistir. Basin durumu "A adayinin avantaji hata payi %4 icinde oldugu icin o onde kabul edilebilir" diye rapor etmistir. A oylarinin hata payi hakikaten %4'mudur?

```
n = 597.
k = 299
print n/2
print k/n
d = 0.98/np.sqrt(n)
print d*100
```

```
298.5
0.500837520938
4.01087299444
```

Evet hata payi %4 cikti.

Dikkat edilirse hata payinin anketten gelen sonuclarla hicbir alakasi yok, A icin tercih %25, %75 olabilirdi ama ustteki hata payi hesabi yine ayni kalirdi. Bunun sebebi formulun n'ye bagli olmasi.

Daha onemli soru hata payi basinin ustteki ifadesinin gercekten secim sonucu ile alakali olup olmadigi!

Hipotez Testleri (Hypothesis Testing)

Istatistik tek ya da araliklar olarak sayisal tahminler uretmenin otesinde, "iki sey arasinda birisini secmek" turunde bir karar baglaminda da kullanilabilir. Bir psikolog bir davaya uzman gorus vermek icin cagrilmistir ve sanik hakkinda 'akli olarak dengesiz ya da dengeli' arasinda bir secim yapacaktir. Ilac regulasyonu ile ugrasan kurum yeni bir ilac hakkinda 'etkili' ya da 'etkisiz' seklinde bir karara ulasacaktir.

Bir deneyin mumkun sonuclarini belli seceneklere yonlendirip olasilik teorisini kullanarak bunlardan birisini secmeye Istatistik biliminde Hipotez Test Etmek adi verilir.

Birbiriyle yaris halinde olan iki hipotez vardir, bunlar sifir hipotezi (H_0 olarak yaziliyor) ve alternatif hipotezdir (H_1 olarak yaziliyor). H_o ve H_1 arasinda nasil secim yapacagimiz kavramsal olarak bir davada jurinin yaptigi secime benzer: aynen sanigin, tersi ispatlanana kadar, masum kabul edilmesi gibi eger veri tersi sonuca varmaya yetmezse H_0 da "kabul edilir", yani sucsuzlugun devam etmesi gibi H_0 gorusu terkedilmemis olur. Statusko devam eder. Bu karari verirken mahkemenin kanitlari incelemesi, hipotez testinde rasgele degiskenlerle verinin uzerinden hesaplar yapmaya benzer.

Bunu bir ornek uzerinden daha iyi anlayabiliriz. Diyelim ki araba ureten bir sirket yakit performansini (gas mileage) arttirmaya ugrasiyor. Benzine katilan yeni bir madde uzerinde deneyler yapiyorlar, deney icin Boston / Los Angeles arasinda 30 tane araba sefer yapiyor. Yeni katki maddesi olmadigi durumda (statuko) yakit performansinin ortalama 25.0 mil/galon ve standart sapmanin 2.4 mil/galon oldugu biliniyor. Diyelim ki deney sonrasinda arabalar ortalama olarak $\bar{y}$=26.3 mil/galon performansi gostermisler. Katki maddesi etkili mi, etkili degil mi?

Arastirmacilar 25.0'dan 26.3'e olan degisikligi daha once bahsettigimiz mahkeme ornegindeki gibi bir cercevede incelerler. Tipik olarak sifir hipotezi statukoyu temsil eder, yani degismesi icin "ezici sekilde aksi yonde veri olmasi gereken sey" budur. Oyle degil mi? Eger etkisiz bir katki maddesine evet dersek, ve ileride oyle olmadigi belli olursa bunun sirket icin cok negatif etkileri olacaktir, aynen masum bir kisiyi yanlislikla hapse atmis olmak gibi. O yuzden kalmak istedigimiz guvenli konum H_0'i temsil etmelidir.

Bu noktada problemi rasgele degiskenlerin terminolojisi uzerinden tekrar tanimlamak faydali olur. Diyelim ki test sirasinda 30 tane aldigimiz olcum $y_1,..,y_n$, her y_i normal olarak dagilmis ve bu dagilimlarin μ'su ayni, ve μ'u birazdan "eski" olcumlerin ortalamasi olarak alacagiz, cunku curutmek istedigimiz hipotez bu. Ayrica daha onceki tecrubelerimiz gosteriyor ki $\sigma = 2.4$. Yani,

$$f_Y(y;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2.4)} e^{-\frac{1}{2}(\frac{y-\mu}{2.4})^2}, -\infty < y < \infty$$

Hipotezleri soyle tanimlayalim,

H_0: $\mu = 25.0$ (Katki maddesi etkili *degildir*)

H_0: $\mu > 25.0$ (Katki maddesi etkilidir)

Simdi yeni dagilimi standardize edip, bir hayali ortalama esik degeri uzerinden bir sonuc cikartalim, standardize etmek icin kullandigimiz $\mu = 25.0$ cunku eski ortalama bu. Simdi diyelim ki test ettigimiz esik deger 25.25 (esas amac 26.3 ama oraya gelecegiz), aradigimiz olasilik,

$$P(\bar{Y} \geqslant 25.25)$$

Ustteki ifade "eger orneklem eski dagilimdan geliyor olsaydi, 25.25 esik degerini gecmesi ne kadar mumkun olabilirdi" diye bir soru soruyor. $\bar{Y}$'yi standardize edelim, o sirada esitsizligin sag tarafi da degisir,

$$P(\frac{\bar{Y} - 25.0}{2.4/\sqrt{30}} \geqslant \frac{25.25 - 25.0}{2.4/\sqrt{30}})$$

$$P(Z \geqslant 0.57)$$

z-Skoru tablosunu kullanakarak bu hesabi yapmak icin

$$1 - P(Z < 0.57)$$

0.57'nin z-skoru (satir 0.5 kolon .07) 0.7157 olarak gosterilmis, o zaman 1-0.7157 = 0.2843. Kod ile

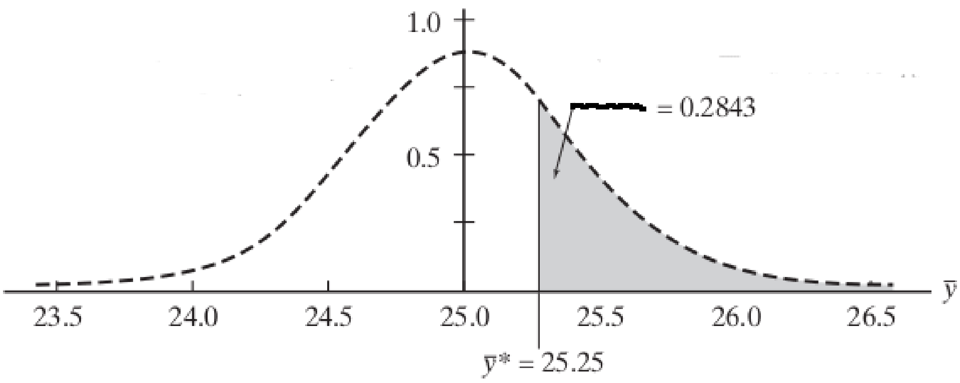
```
print 1-norm.cdf(0.57)
```

```
0.284338849046
```

Demek ki

$$P(Z \geqslant 0.57) = 0.2843$$

Demek ki yeni deney sonuclarinin, eski dagilima gore, esik degerinden fazla gelmesi hala az da muhtemel, demek ki eski hipotezi tam curutemedik. Sectigimiz esik degeri bize kesin bir sonuc saglamadi, sezgisel olarak bu olasiligin buyuk oldugunu goruyoruz. Mahkeme durumunda sucsuz olmasi cok muhtemeldir diyemiyoruz. Ya da araba orneginde (ve pozitif baglamda) yeni yakit kesinlikle farklidir / fazladir diyemiyoruz. Bize daha kesin noktalar lazim, aklimizda bize "acaba?" dedittirecek esik degerler istemiyoruz.



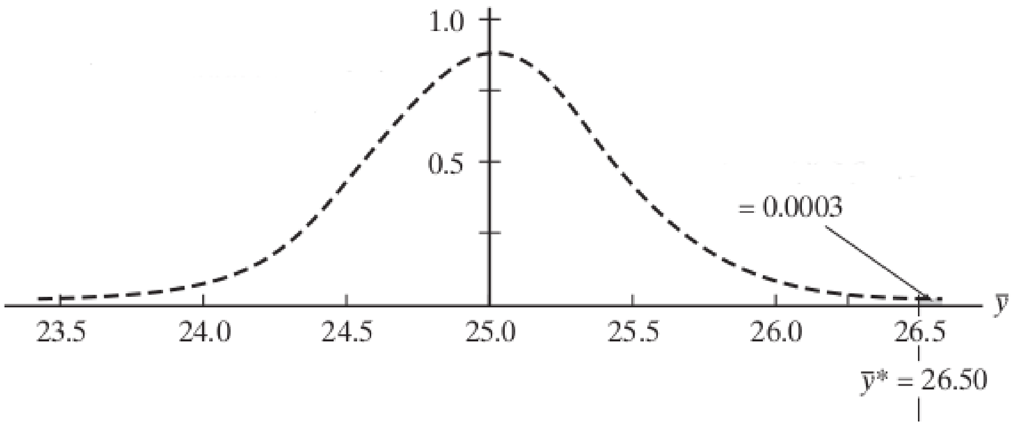
Hayali esik noktasi $\bar{y}^*$'nin daha buyuk yapsak (ki o zaman ona bagli olan sagdaki olasilik kuculecek). Bu olur mu? Eger $\bar{y}^* = 26.50$ olsaydi?

$$P(\frac{\bar{Y} - 25.0}{2.4/\sqrt{30}} \geqslant \frac{26.50 - 25.0}{2.4/\sqrt{30}})$$

$$P(Z \geqslant 3.42)$$

$$= 0.0003$$

Bu olasilik ise cok kucuk, yani esik degeri cok buyuk! Citayi cok fazla kaldirdik, mahkeme durumunda sanki diyoruz ki sucun 1000 tane tanigi lazim, sanik sucunu itiraf etmis olmali, hersey apacik olmali, bir de herseyi bizzat ben gormus olmaliyim, yoksa kabul etmem. Araba orneginde katki maddesi arabaya Formula-1 yarisi kazandirmazsa biz bu yakiti daha iyi olarak kabul etmeyiz diyoruz.



Peki eger 0.28 cok fazla, 0.0003 cok kucuk ise hangi olasilik en iyi esik degerini verir? Bu soruya kesin olarak ve matematiksel bir cevap vermek mumkun degil, fakat hipotez test etme teknigini kullanan arastirmacilarin ulastigi konsensus 0.05 olasilik seviyesinin en iyi sonuclar verdigidir. Bu duruma sifir hipotezinin cok kolayca kenara atilmamasi, ya da ona gereginden fazla bagli kalinmamasi mumkun oluyor.

O zaman 0.05 olasiligini verdirtecek esik degeri hesaplayalim,

$$P(\frac{\bar{Y} - 25.0}{2.4/\sqrt{30}} \geqslant \frac{\bar{y}^* - 25.0}{2.4/\sqrt{30}}) = 0.05$$

$$P(Z \geqslant \frac{\bar{y}^* - 25.0}{2.4/\sqrt{30}}) = 0.05$$

ya da

$$P(Z \leqslant \frac{\bar{y}^* - 25.0}{2.4/\sqrt{30}}) = 0.95$$

z-Skor tablosuna bakiyoruz, "hangi z degeri 0.95 degeri sonucunu verir", kordinatlardan 1.64 z-skorunu buluyoruz. Ya da

```
print norm.ppf(0.95)
```

```
1.64485362695
```

$$P(Z \leqslant 1.64) = 0.95$$

O zaman

$$\frac{\bar{y}^* - 25.0}{2.4/\sqrt{30}} = 1.64$$

ve buradan $\bar{y}^* = 25.178$ sonucu cikiyor. 26.3 degeri bu degerden yuksektir demek ki sifir hipotezi curutulmustur. Yeni yakit katkisinin performansi arttiriyor olmasi buyuk bir olasiliktir.

Not: Bu testi aslinda daha basit sekilde $\bar{y}^* = 26.3$ degerini vererek elde edilen degeri 0.05'ten kucuk olup olmadigina bakarak ta yapabilirdik. Fakat metotu insa ediyorduk o sebeple daha fazla ornekli anlatmak gerekti.

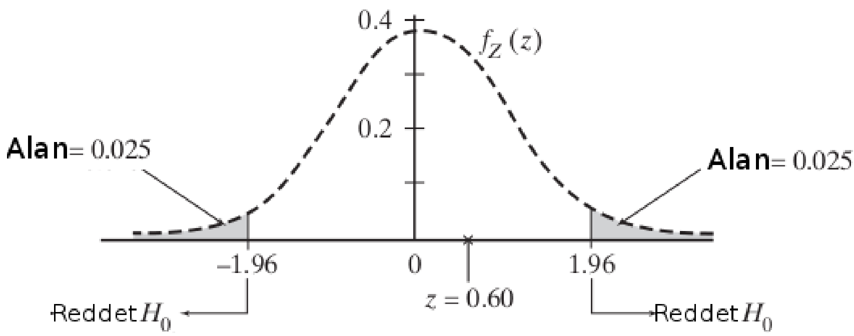
Ornek

SAT-I testinde ulke averajina oldukca yakin sonuclar alan bir lisede yeni bir mufredat denenmesine karar veriliyor. Deneme icin 86 ogrenci rasgele sekilde seciliyor ve yeni bir tur cebir ve geometri dersine sokuluyor. Sonraki SAT-1 testinde sonuclarina gore bu cocuklar ortalama 502 sonuc almislar, ulke capindaki ortalama 494, standart sapma 124. $\alpha = 0.05$ onemliligi (significance) seviyesinde yeni mufredatin basarili oldugu iddia edilebilir mi?

Ilk once μ parametresinin yeni mufredatin gercek ortalamasi oldugunu farzediyoruz. O zaman statusko nedir? Bu ortalamanin ulke ortalamasi seviyesinde kalmasidir, yani $\mu_0 = 494$ olmasidir. Fakat bu sefer alternatif hipotez iki yonlu (two-sided) olmali cunku yeni mufredat hic istenmese de test sonuclarinda negatif sonuca da yol acabilir! O zaman H_0'i reddetmeliyiz eger z istatistigi $\leqslant -z_{0.025}$ ise (yani -1.96'dan kucuk ise), ya da $\geqslant z_{0.025}$ (yani 1.96'dan buyuk ise).

$$z = \frac{502 - 494}{124\sqrt{86}} = 0.60$$

Sonuc 1.96'dan buyuk degil. O zaman H_0'i, yani statukoyu degistiremedik. Elde edilen sonuclar bir ilerlemedir fakat bu ilerlemenin sans eseri olmasi da muhtemel.



Binom Hipotez Testleri

Binom dagiliminin Normal yaklasiksalligi bize

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

vermisti. Bu yaklasiksalligi hipotez testleri icin kullanilabilir.

Ornek

Erteleme Teorisi: Yaygin bir inanisa gore insanlar olum tarihlerini onlar icin onemli bir gun sonrasina erteleyebiliyorlar, mesela kendi dogum gunleri, aile toplantilari, bir akrabanin donusunu beklemek, vs. gibi Hatta ulke capinda secimlerin bile olum gunlerini etkiledigi gorulmustur, baskanlik secimleri olan Eylul ve Ekim aylari sirasinda olum oranlarinin dustugu saptanmistir. Bu teoriye gore pek cok yasli insan kimin kazandigini gormek icin "biraz daha dayaniyor".

Bir arastirma bu teorinin dogru olup olmadigini kontrol etti. Bu baglamda Salt Lake City sehrindeki bir gazetenin olum ilani kismina bakildi ve 747 kisi icinden sadece 60 kisinin, daha dogrusu %8'inin kendi dogumgunlerinin 3 ay oncesi icinde oldugunu saptadi. Eger insanlarin olumu rasgele olsaydi yaklasik olarak %25'inin bu periyod icinde olmesini beklerdiniz. O zaman bu %25'den %8'e dususu nasil aciklamaliyiz? Arastirma teoriyi destekleyecek rakamlari veriyor mu?

Diyelim ki 747 olum iki kategori uzerinden temsil edilsin, dogumgunu oncesindeki 3 ay icinde olenler ve olmeyenler. $k_i = 1$ ile i'inci kisinin 1. kategoriye, $k_i = 0$ ise 2. kategoriye ait olmasini temsil ediyoruz. O zaman $k = k_1 + k_2 + .. + k_{747}$ birinci kategorideki toplam olumu temsil ediyor. Ustteki her k dogal olarak Binom dagilimi, ve p parametresini kullaniyor ki

$$p = P(\text{sahis dogumgunu oncesindeki 3 ay icinde oluyor})$$

Eger insanlar olumlerini ertelemeseydi $p = 3/12 = 0.25$ olurdu. Eger erteliyorlar ise p 0.25'den daha kucuk olmali. Bu azalmanin ne kadar onemli (significant) oldugunu irdelemek icin tek tarafli bir Binom Testi uygulamak lazim.

H_0: $p = 0.25$

H_1: $p < 0.25$

Test icin p_0 oldugunu farzettigimiz "gercek" dagilimi (ki statuskoyu onun uzerinden temsil edecegiz) kullanacagiz.

$$z = \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \leqslant -z_{0.05} = -1.64$$

$$= \frac{60 - 747(0.25)}{747(0.25)(0.75)} = -10.7$$

Test istatistigi kritik degerin asiri derecede sol tarafina dustu. Demek ki ezici miktarda kanit, veri, sonuc elde ettik, %25'ten %8'e dususun pur sans disinda baska bir sebebi var. Tabii bu sebep Erteleme Teorisi haricinde bir sey de olabilir, fakat yine de ortaya cikan kalip bize olum vaktimizin kontrolumuzde oldugunu destekleyen yonde bir sonuc veriyor.

Not: Ustteki test "buyuk orneklem" oldugu durumlarda gecerlidir. Kucuk orneklem durumunda Binom dagiliminin kendisi test icin kullanilabilir.

Tek Orneklem t Testi (One-sample t test)

Bu test verinin Normal dagilimdan geldigini farzeder, tek orneklem durumunda elde $x_1, ..., x_n$ verisi vardir, ve bu veri $N(\mu, \Sigma)$ dagilimindan gelmistir ve test etmek istedigimiz hipotez / karsilastirma $\mu = \mu_0$.

```
from scipy.stats import ttest_1samp, wilcoxon, ttest_ind
import pandas as pd
daily_intake = np.array([5260,5470,5640,6180,6390,6515, 6805,7515,7515,8230,8770])
df = pd.DataFrame(daily_intake)
print df.describe()
```

```
                  0
count    11.000000
mean   6753.636364
std    1142.123222
min    5260.000000
25%    5910.000000
50%    6515.000000
75%    7515.000000
max    8770.000000
```

```
t_statistic, p_value = ttest_1samp(daily_intake, 7725)
print "one-sample t-test", p_value
```

```
one-sample t-test 0.0181372351761
```

Sonuc `p_value` `0.05`'ten kucuk cikti yani yuzde 5 onemliligini (significance) baz aldik bu durumda veri hipotezden onemli derecede (significantly) uzakta. Demek ki ortalamanin 7725 oldugu hipotezini reddetmemiz gerekiyor.

Testi iki orneklemli kullanalim, gruplar 0/1 degerleri ile isaretlendi, ve test etmek istedigimiz iki grubun ortalamasinin (mean) ayni oldugu hipotezini test etmek. t-test bu arada varyansin ayni oldugunu farzeder.

```
energ = np.array([
[9.21, 0],
[7.53, 1],
[7.48, 1],
[8.08, 1],
[8.09, 1],
[10.15, 1],
[8.40, 1],
[10.88, 1],
[6.13, 1],
```

```
[7.90, 1],
[11.51, 0],
[12.79, 0],
[7.05, 1],
[11.85, 0],
[9.97, 0],
[7.48, 1],
[8.79, 0],
[9.69, 0],
[9.68, 0],
[7.58, 1],
[9.19, 0],
[8.11, 1]])
group1 = energ[energ[:, 1] == 0][:, 0]
group2 = energ[energ[:, 1] == 1][:, 0]
t_statistic, p_value = ttest_ind(group1, group2)
print "two-sample t-test", p_value
```

```
two-sample t-test 0.00079899821117
```

$p - value < 0.05$ yani iki grubun ortalamasi ayni degildir. Ayni oldugu hipotezi reddedildi.

Eslemeli t-Test (Paired t-test)

Eslemeli testler ayni deneysel birimin olcumu alindigi zaman kullanilabilir, yani olcum alinan ayni grupta, deney sonrasi deneyin etki edip etmedigi test edilebilir. Bunun icin ayni olcum deney sonrasi bir daha alinir ve ”farklarin ortalamasinin sifir oldugu” hipotezi test edilebilir. Altta bir grup hastanin deney oncesi ve sonrasi ne kadar yiyecek tukettigi listelenmis.

```
intake = np.array([
[5260, 3910],
[5470, 4220],
[5640, 3885],
[6180, 5160],
[6390, 5645],
[6515, 4680],
[6805, 5265],
[7515, 5975],
[7515, 6790],
[8230, 6900],
[8770, 7335],
])
pre = intake[:, 0]
post = intake[:, 1]
t_statistic, p_value = ttest_1samp(post - pre, 0)
print "paired t-test", p_value
```

```
paired t-test 3.05902094293e-07
```

Wilcoxon isaretli-sirali testi (Wilcoxon signed-rank test)

t Testleri Normal dagilima gore sapmalari yakalamak acisindan, ozellikle buyuk orneklemler var ise, oldukca saglamdir. Fakat bazen verinin Normal dagilimdan geldigi faraziyesini yapmak istemeyebiliriz. Bu durumda *dagilimdan bagimsiz* *metotlar* daha uygundur, bu tur metotlar icin verinin yerine cogunlukla onun sira istatistiklerini (order statistics) kullanir.

Tek orneklemli Wilcoxon testi icin prosedur μ_0'i tum veriden cikartmak ve geri kalan (farklari) isaretine bakmadan numerik degerine gore siralamak, ve bu sira degerini bir kenara yazmak. Daha sonra geri donup bu sefer cikartma islemi sonucunun isaretine bakmak, ve eksi isareti tasiyan sira degerlerini toplamak, ayni islemi arti isareti icin yapmak, ve eksi toplami arti toplamindan cikartmak. Sonucta elimize bir istatistik W gelecek. Bu test istatistigi aslinda $1..n$ tane sayi icinden herhangi birini 1/2 olasiligiyla secmek, ve sonuclari toplamaya tekabul etmektedir. Ve bu sonuc yine `0.05` ile karsilastirilir.

```
z_statistic, p_value = wilcoxon(daily_intake - 7725)
print "one-sample wilcoxon-test", p_value
```

```
one-sample wilcoxon-test 0.0279991628713
```

Hipotezi yine reddettik.

Ustte yaptigimiz eslemeli t-testi simdi Wilcoxon testi ile yapalim,

```
z_statistic, p_value = wilcoxon(post - pre)
print "paired wilcoxon-test", p_value
```

```
paired wilcoxon-test 0.00463608893545
```

Gaussian Kontrolu

Diyelim ki Gaussian dagilimina sahip oldugunu dusundugumuz $\{x_i\}$ verilerimiz var. Bu verilerin Gaussian dagilimina uyup uymadigini nasil kontrol edecegiz? Normal bir dagilimin her veri noktasi icin soyle temsil edebiliriz,

$$y_i = \Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)$$

Burada Φ standart Gaussian'i temsil ediyor (detaylar icin *Istatistik Ders 1*) ve CDF fonksiyonuna tekabul ediyor. CDF fonksiyonunun ayni zamanda ceyregi (quantile) hesapladigi soylenir, aslinda CDF son derece detayli bir olasilik degeri verir fakat evet, dolayli yoldan noktanin hangi ceyrek icine dustugu de gorulecektir.

Simdi bir numara yapalim, iki tarafa ters Gaussian formulunu uygulayalim, yani Φ^{-1}.

$$\Phi^{-1}(y_i) = \Phi^{-1}\left(\Phi\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$\Phi^{-1}(y_i) = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

$$x_i = \Phi^{-1}(y_i)\sigma + \mu$$

Bu demektir ki elimizdeki verileri $\Phi^{-1}(y_i)$ bazinda grafiklersek, bu noktalar egimi σ, baslangici (intercept) μ olan bir duz cizgi olmalidir. Eger kabaca noktalar duz cizgi olusturmuyorsa, verimizin Gaussian dagilima sahip olmadigina karar verebiliriz.

Ustte tarif edilen grafik, olasilik grafigi (probability plot) olarak bilinir.

Ters Gaussian teorik fonksiyonunu burada vermeyecegiz, Scipy `scipy.stats.invgauss` hesaplar icin kullanilabilir. Fakat y_i'nin kendisi nereden geliyor? Eger y_i, CDF'in bir sonucu ise, pur veriye bakarak bir CDF degeri de hesaplayabilmemiz gerekir. Bunu yapmak icin bir baska numara lazim.

1. Eldeki sayilari artan sekilde siralayin

2. Her veri noktasina bir derece (rank) atayin (siralama sonrasi hangi seviyede oldugu yeterli, 1'den baslayarak).

3. Ceyrek degeri y_i bu sira / $n+1$, n eldeki verinin buyuklugu.

Bu teknik niye isliyor? x'in CDF'i $x_i < x$ sartina uyan x_i'lerin orani degil midir? Yani bir siralama soz konusu ve ustteki teknik te bu siralamayi biz elle yapmis olduk, ve bu siralamadan gereken bilgiyi aldik.

[1] Introductory Statistics with R

[2] Introduction to Probability and Statistics Using R

[3] `https://gist.github.com/mblondel/1761714`

[4] Applied Statistics and Probability for Engineers

[5] `http://math.stackexchange.com/questions/243348/sample-variance-conver`