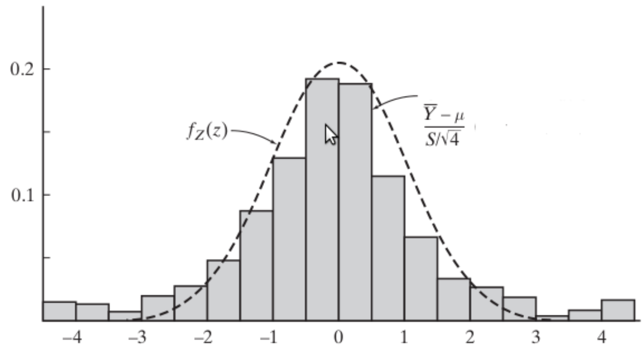
Orneklem Dagilimlari (Sampling Distributions)

$\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ve $\frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ Karsilastirmasi

Diyelim ki normal olarak dagildigini bildigimiz bir nufustan $Y_1, .., Y_n$ rasgele orneklemini topladik, ve amacimiz bilinmeyen gercek μ hakkinda bazi sonuclara varmak. Eger varyans σ^2 biliniyorsa, bu noktadan sonra ne yapacagimiz gayet acik: daha once gordugumuz gibi bir karar kurali ortaya cikartmak, ya da guven araligi hesaplamak cok kolay, ki bu tekniklerin temelinde $Z = \frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ dagiliminin standart normal $f_Z(z)$'ye yaklasmasi yatiyor.

Fakat pratikte σ^2 genellikle bilinmez, o zaman nufus varyansinin tahmin edicisi $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ kullanilir, ki bu maksimum olurluk tahmin edicisinin yansiz (unbiased) versiyonu. Fakat buradaki onemli soru su: σ^2 yerine S^2 koyma Z oranini nasil etkiler? Daha once buyuk orneklemler icin bir fark olmadigindan bahsettik. Peki kucuk orneklemler icin?

Kucuk n icin bu iki oraninin birbirinden farkli oldugununun kesfi William Sealy Gossett adli arastirmaciya ait. 1899'da Oxford'dan Kimya ve Matematik bolumunden mezun olduktan sonra Gossey, Guiness adli sirkette calismaya basladi. Urunlerin uzerinde yapacagi deneylerden aldigi veriler lojistik bazi sebepler dolasisiyla cok azdi, ve "gercek" σ^2'nin bilinmesi mumkun degildi. Cogu zaman n 4 ya da 5'den bile az oluyordu. Bu gibi durumlarla ugrasa ugrasa Gossey $\frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}}$'nin beklendigi gibi can egrisi $f_Z(z)$ seklinde degil, daha "etekleri kabarik" baska bir dagilim gibi gozuktugunu farketti, yani sifirdan cok kucuk ya da ondan cok buyuk oranlarin ihtimali cok dusuk degildi.



Ustteki histogram S kullanarak hesaplanmistir, $n = 4$ olmak uzere 500 orneklem uzerinden hesap yapilmistir. Iki dagilimin birbirinden uzaklastigi goruluyor.

Genel olarak olasilik dagilimlari iki buyuk kategori altina duser. Asagi yukari bir duzine kadari gercek dunyadan alinabilecek her olcumu oldugu haliyle iyi modelleme kabiliyetine sahiptir; mesela normal, binom, Poisson, ustel dagilimlar gibi. Diger yandan daha az sayida (ama bir o kadar onemli) dagilimlar n tane rasgele degiskenin uzerinden hesaplanan *fonksiyonlarin* nasil davrandigini cok iyi modeller. Iste bu dagilimlara orneklem dagilimlari ismi verilir ve tipik kullanim alanlari cikarsama (inference) yapmaktir.

Normal dagilimi her iki kategoriye de aittir. Hem ayri ayri olcumleri modellemek, hem de $T = \frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$'in olasiliksal davranisini modellemek icin kullanilir. Ikinci kullanimi normal dagilimin bir orneklem dagilimi olarak kullanilmasina ornektir.

Normal dagilimdan sonra en onemli uc orneklem dagilimi Ogrenci t Dagilimi, chi kare dagilimi ve F dagilimidir. Son iki dagilim t oranini temsil eden $f_T(t)$'yi, yani $T = \frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$'yi turetmek icin gerekli.

Turetmek

t Dagiliminin ispati icin su basamaklar gerekiyor; Once standart normal rasgele degiskenlerin karelerinin toplaminin gamma dagilimin ozel bir hali olan chi kare dagilimi oldugunu gostermek. Daha sonra normal dagilmis olan bir nufustan alinan n orneklemden elde edilen $\bar{Y}$ ve S^2'nin birbirinden bagimsiz rasgele degiskenler oldugunu gostermek, ve $\frac{n-1}{S^2}$'nin chi kare olarak dagildigini ispatlamak. Daha sonra sira birbirinden bagimsiz iki chi kare yogunluk fonksiyonunun arasindaki orani turetmeye gelecek, ki bu bir F dagilimidir. En son olarak $T^2 = (\frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}})^2$ ifadesinin birbirinden bagimsiz iki chi kare dagiliminin orani oldugunu gostermek ki T^2 ifadesi F dagiliminin ozel bir halidir.

Chi Kare, χ^2 Dagilimi

Tanim

$Z_1, .., Z_p$ bagimsiz standart Normal rasgele degiskenler ise, $U = \sum_{i=1}^{p} Z_p^2$ ki bu dagilima p derecede serbestlige (degrees of freedom) olan chi kare dagilimi (chi square distribution, yani χ^2) ismi verilir.

Teori

U, p derece serbestlige sahip bir χ^2 dagilima sahip ise, ki yogunluk

$$f_U(u) = \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2})2^{p/2}} u^{(p/2)-1} e^{-u/2}$$

$$u \geqslant 0$$

formulune esittir. Ustteki yogunlugun $r = m/2$ ve $\lambda = 1/2$ olan bir Gamma dagilimi oldugu soylenebilir. Ispat icin [1].

F Dagilimi

Diyelim ki U ve V birbirinden bagimsiz, ve sirasiyla m ve n derece serbestlige sahip iki chi kare dagilimi. O zaman $\frac{V/m}{U/m}$ olarak hesaplanan yeni bir rasgele degiskenin dagilimi, m, n derece serbestlige sahip bir F dagilimi olarak ifade edilir.

Teori

Rasgele degisken $\frac{Z^2}{U/n}$, ki U bir chi kare dagilimidir, 1,n derece serbestlige sahip bir F dagilimina sahiptir.

Ispati burada vermiyoruz.

Teori

$Y_1, .., Y_n$ ortalamasi μ, varyansi σ^2 olan bir normal dagilimdan alinan n orneklem olsun. O zaman

a. S^2 ve $\bar{Y}$ birbirinden bagimsizdir

b. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2)$ hesabi $n-1$ derece serbestlige sahip bir chi kare dagilimidir.

Ispat icin [1].

Nihayet $\frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ ifadesinin yogunlugunu bulmak icin tum altyapiya sahibiz.

Tanim

Z bir standart normal rasgele degisken, U ise n derece serbestlikteki bir chi kare rasgele degisken olsun. O zaman n derece serbestligi olan Ogrenci t orani (Student's t ratio)

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n}}} \tag{2}$$

olarak belirtilir.

Teori

$Y_1, .., Y_n$, bir μ, σ normal bir dagilimdan alinmis bir rasgele orneklem olsun. O zaman

$$T_{n-1} = \frac{\bar{Y} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

$n-1$ serbestlik derecesine sahip bir t Dagilimidir.

Ispat

$\frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ ifadesini su sekilde yazabiliriz,

$$\frac{\bar{Y} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}}$$

Degil mi? Bolendeki $n-1$'ler birbirini iptal eder, ve σ bolumdekini iptal eder, ve nihai bolume $\sqrt{S^2}$ yani S yerlestirilmis olur, ve esitligin solundaki ifadeye erisiriz. Fakat bu donusturucu bolum ifadesi sayesinde esitligin sag tarafinda yeni bir formule eristik; karekok ifadesi icine bakarsak ustteki (b) teorisiyle uyumlu olarak $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ goruyoruz, ki bu ifade bir chi kare dagilimi.

Diger yandan esitligin sagindaki bolum kismi bir standart normal. Yani (2)'de tarif edilen duruma erismis oluyoruz, ustteki ifade bu tanima gore bir t Dagilimi.

t Dagilimi (Student's t)

X, n derece bagimsizlikta t dagilimina sahiptir, ve dagilimi

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{(n+1)/2}}$$

Aslinda Normal dagilimi t dagiliminin $\nu = \infty$ oldugu hale tekabul eder. Cauchy dagilimi da t'nin ozel bir halidir, $n = 1$ halidir. Bu durumda yogunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Bu formul hakikaten bir yogunluk mudur? Kontrol icin entegralini alalim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

Cogunlukla entegre edilen yerde "1 arti ya da eksi bir seyin karesi" turunde bir ifade gorulurse, yerine gecirme (subsitution) islemi trigonometrik olarak yapilir.

$$x = \tan\theta, \theta = \arctan x$$

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$dx/d\theta = \sec^2\theta$$

O zaman

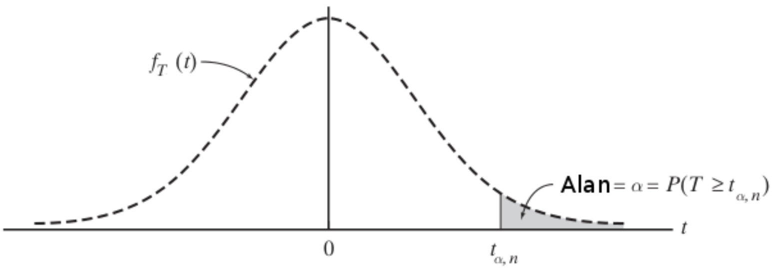
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sec^2\theta}\sec^2\theta d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1\ d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\theta|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}[\arctan(\infty) - \arctan(-\infty)]$$

$$= \frac{1}{\pi}[\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})] = 1$$

Guven Araliklari, Testler

Daha once Z oranini temel alarak guven araliklari ya da hipotez testleri olusturmustuk. Bu islemler icin standart normal dagilimin ust ve alt yuzdelikleri hakkinda bazi bilgiler gerekmisti. Bu bilgiler bir tablodan bakilan degerlerdi ya da istatistik yazilimimizda gerekli bir cagri ile hemen bulunabiliyorlardi.



Ogrenci t'nin Z'ye gore farkli bir tarafi belli bir degeri bulmak icin iki parametreye ihtiyac olmasi, bunlardan biri α digeri ise serbestlik derecesi (degree of freedom -dof-). Standart normal icin tablo paylastik, fakat t icin artik tablolarla ugrasmayacagiz, bilgisayar cagindayiz, yazilim ile bu isi halledelim!

Ornek

T bir Ogrenci t dagilimi ise, ve serbestlik derecesi 3 ise, $\alpha = 0.01$ icin icin $f_T(t)$'nin $100(1-\alpha)$ yuzdeligi nedir? Ustteki grafikteki $t_{\alpha,n}$ notasyonundan hareketle $t_{0.01,3}$ degerini ariyoruz yani.

```
from scipy.stats.distributions import t
df = 3
print t.ppf(0.99,df)
print 1-t.cdf(4.541,df)
```

```
4.5407028587
0.00999823806449
```

Yani

$$P(T_3 \geqslant 4.541) = 0.01$$

$\frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ ifadesinin n-1 derece serbestlige sahip Ogrenci t dagilimina sahip oldugunu bilmek alttaki ifadeyi mumkun kilar,

$$P\bigg(-t_{\alpha/2,n-1} \leqslant \frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leqslant t_{\alpha/2,n-1} \bigg) = 1-\alpha$$

Kaynaklar

Larsen, *Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications*