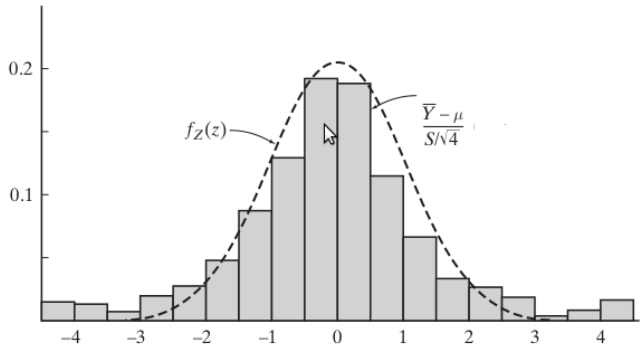
Orneklem Dagilimlari (Sampling Distributions)

$\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ve $\frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ Karsilastirmasi

Diyelim ki normal olarak dagildigini bildigimiz bir nufustan $Y_1, .., Y_n$ rasgele orneklemini topladik, ve amacimiz bilinmeyen gercek μ hakkinda bazi sonuclara varmak. Eger varyans σ^2 biliniyorsa, bu noktadan sonra ne yapacagimiz gayet acik: daha once gordugumuz gibi bir karar kurali ortaya cikartmak, ya da guven araligi hesaplamak cok kolay, ki bu tekniklerin temelinde $Z = \frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ dagiliminin standart normal $f_Z(z)$'ye yaklasmasi yatiyor.

Fakat pratikte σ^2 genellikle bilinmez, o zaman nufus varyansinin tahmin edicisi $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ kullanilir, ki bu maksimum olurluk tahmin edicisinin yansiz (unbiased) versiyonu. Fakat buradaki onemli soru su: σ^2 yerine S^2 koyma Z oranini nasil etkiler? Daha once buyuk orneklemler icin bir fark olmadigindan bahsettik. Peki kucuk orneklemler icin?

Kucuk n icin bu iki oraninin birbirinden farkli oldugununun kesfi William Sealy Gossett adli arastirmaciya ait. 1899'da Oxford'dan Kimya ve Matematik bolumunden mezun olduktan sonra Gossey, Guiness adli sirkette calismaya basladi. Urunlerin uzerinde yapacagi deneylerden aldigi veriler lojistik bazi sebepler dolasisiyla cok azdi, ve "gercek" σ^2'nin bilinmesi mumkun degildi. Cogu zaman n 4 ya da 5'den bile az oluyordu. Bu gibi durumlarla ugrasa ugrasa Gossey $\frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}}$'nin beklendigi gibi can egrisi $f_Z(z)$ seklinde degil, daha "etekleri kabarik" baska bir dagilim gibi gozuktugunu farketti, yani sifirdan cok kucuk ya da ondan cok buyuk oranlarin ihtimali cok dusuk degildi.



Ustteki histogram S kullanarak hesaplanmistir, $n = 4$ olmak uzere 500 deney uzerinden hesap yapilmistir. Iki dagilimin birbirinden uzaklastigi goruluyor.

Genel olarak dusunmek gerekirse, olasilik dagilimlari iki buyuk kategori altina duser. Asagi yukari bir duzine kadari gercek dunyadan alinabilecek her olcumu oldugu haliyle iyi modelleme kabiliyetine sahiptir; mesela normal, binom, Poisson, ustel dagilimlar gibi. Diger yandan daha az sayida (ama bir o kadar onemli) dagilimlar n tane rasgele degiskenin uzerinden hesaplanan *fonksiyonlarin* nasil davrandigini cok iyi modeller. Iste bu dagilimlara orneklem dagilimlari ismi verilir ve tipik kullanim alanlari cikarsama (inference) yapmaktir.

Normal dagilimi her iki kategoriye de aittir. Hem ayri ayri olcumleri modellemek, hem de $\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$'in olasiliksal davranisini modellemek icin kullanilir. Ikinci kullanimi normal dagilimin bir orneklem dagilimi olarak kullanilmasina ornektir.

Normal dagilimdan sonra en onemli uc orneklem dagilimi Ogrenci t Dagilimi, chi kare dagilimi ve F dagilimidir. Son iki dagilim t oranini temsil eden $f_T(t)$'yi, yani $T = \frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}}$'yi turetmek icin gerekli.

Turetmek

Sasirtici gelebilir ama t dagiliminin yogunluk fonksiyonunu turetmek pek kolay bir is degildir, ilk basta kolay yapilabilirmis gibi geliyor, cunku Merkezi Limit Teorisinin temelini olusturan $\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$'in yogunlugunu turetmek nisbeten basit, moment ureten fonksiyonlar ile yapilabiliyor. Fakat $\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ifadesinden $\frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ ifadesine gecmek cok daha zor, cunku bu durumda T *iki tane* rasgele degiskeninin bir orani haline gelmistir.

t Dagiliminin ispati icin su basamaklar gerekiyor; Once standart normal rasgele degiskenlerin karelerinin toplaminin gamma dagilimin ozel bir hali olan chi kare dagilimi oldugunu gostermek. Daha sonra normal dagilmis olan bir nufustan alinan n orneklemden elde edilen $\bar{Y}$ ve S^2'nin birbirinden bagimsiz rasgele degiskenler oldugunu gostermek, ve $\frac{n-1}{S^2}$'nin chi kare olarak dagildigini ispatlamak. Daha sonra sira birbirinden bagimsiz iki chi kare yogunluk fonksiyonunun arasindaki orani turetmeye gelecek, ki bu bir F dagilimidir. En son olarak $T^2 = (\frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}})^2$ ifadesinin birbirinden bagimsiz iki chi kare dagiliminin orani oldugunu gostermek ki T^2 ifadesi F dagiliminin ozel bir halidir.

Chi Kare, χ^2 Dagilimi

Tanim

$Z_1, .., Z_p$ bagimsiz standart Normal rasgele degiskenler ise, $U = \sum_{i=1}^{p} Z_p^2$ ki bu dagilima p derecede serbestlige (degrees of freedom) olan chi kare dagilimi (chi square distribution, yani χ^2) ismi verilir.

Teori

U, p derece serbestlige sahip bir χ^2 dagilima sahip ise, ki yogunluk

$$f_U(u; p) = \frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2})2^{p/2}} u^{(p/2)-1} e^{-u/2}$$

$$u \geqslant 0$$

formulune esittir. Ustteki yogunlugun $r = m/2$ ve $\lambda = 1/2$ olan bir Gamma dagilimi oldugu soylenebilir. Fonksiyonunun parametresi sadece p'dir. Ispat icin [1].

$$E[U] = p$$

$$Var[U] = 2p$$

F Dagilimi

Diyelim ki U ve V birbirinden bagimsiz, ve sirasiyla m ve n derece serbestlige sahip iki chi kare dagilimi. O zaman $\frac{V/m}{U/m}$ olarak hesaplanan yeni bir rasgele degiskenin dagilimi, m, n derece serbestlige sahip bir F dagilimi olarak ifade edilir.

Teori

Rasgele degisken $\frac{Z^2}{U/n}$, ki U bir chi kare dagilimidir, 1,n derece serbestlige sahip bir F dagilimina sahiptir.

Ispati burada vermiyoruz.

Teori (1)

$Y_1, .., Y_n$ ortalamasi μ, varyansi σ^2 olan bir normal dagilimdan alinan n orneklem olsun. O zaman

a. S^2 ve $\bar{Y}$ birbirinden bagimsizdir

b. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2)$ hesabi $n-1$ derece serbestlige sahip bir chi kare dagilimidir.

Ispat icin [1].

Nihayet $\frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ ifadesinin yogunlugunu bulmak icin tum altyapiya sahibiz.

Tanim

Z bir standart normal rasgele degisken, U ise n derece serbestlikteki bir chi kare rasgele degisken olsun. O zaman n derece serbestligi olan Ogrenci t orani (Student's t ratio)

$$T_n = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{n}}}$$

olarak belirtilir.

Teori

$Y_1, .., Y_n$, bir μ, σ normal bir dagilimdan alinmis bir rasgele orneklem olsun. O zaman

$$T_{n-1} = \frac{\bar{Y} - \mu}{S/\sqrt{n}}$$

$n-1$ serbestlik derecesine sahip bir t Dagilimidir.

Ispat

$\frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ ifadesini su sekilde yazabiliriz,

$$\frac{\bar{Y} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\frac{\bar{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2(n-1)}}}$$

Degil mi? Bolendeki $n-1$'ler birbirini iptal eder, ve σ bolumdekini iptal eder, ve nihai bolume $\sqrt{S^2}$ yani S yerlestirilmis olur, ve esitligin solundaki ifadeye erisiriz. Fakat bu donusturucu bolum ifadesi sayesinde esitligin sag tarafinda yeni bir formule eristik; karekok ifadesi icine bakarsak ustteki (b) teorisiyle uyumlu olarak $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ goruyoruz, ki bu ifade bir chi kare dagilimi.

Diger yandan esitligin sagindaki bolum kismi bir standart normal. Yani (2)'de tarif edilen duruma erismis oluyoruz, ustteki ifade bu tanima gore bir t Dagilimi.

t Dagilimi (Student's t)

X, n derece bagimsizlikta t dagilimina sahiptir, ve dagilimi

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{(n+1)/2}}$$

Aslinda Normal dagilimi t dagiliminin $\nu = \infty$ oldugu hale tekabul eder. Cauchy dagilimi da t'nin ozel bir halidir, $n = 1$ halidir. Bu durumda yogunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

Bu formul hakikaten bir yogunluk mudur? Kontrol icin entegralini alalim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$$

Cogunlukla entegre edilen yerde "1 arti ya da eksi bir seyin karesi" turunde bir ifade gorulurse, yerine gecirme (subsitution) islemi trigonometrik olarak yapilir.

$$x = \tan\theta, \theta = \arctan x$$

$$1 + x^2 = 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$dx/d\theta = \sec^2\theta$$

O zaman

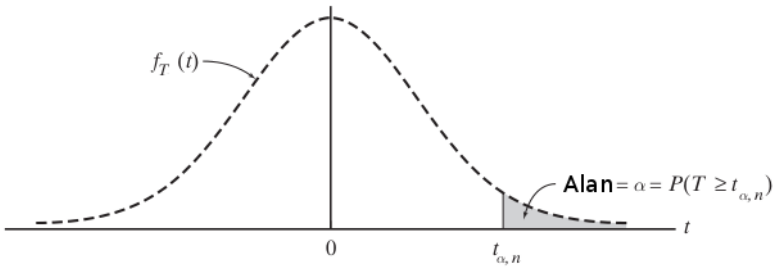
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sec^2\theta}\sec^2\theta d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\theta|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}[\arctan(\infty) - \arctan(-\infty)]$$

$$= \frac{1}{\pi}[\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})] = 1$$

Guven Araliklari, Testler

Daha once Z oranini temel alarak guven araliklari ya da hipotez testleri olusturmustuk. Bu islemler icin standart normal dagilimin ust ve alt yuzdelikleri hakkinda bazi bilgiler gerekmisti. Bu bilgiler bir tablodan bakilan degerlerdi ya da istatistik yazilimimizda gerekli bir cagri ile hemen bulunabiliyorlardi.



Ogrenci t'nin Z'ye gore farkli bir tarafi belli bir degeri bulmak icin iki parametreye ihtiyac olmasi, bunlardan biri α digeri ise serbestlik derecesi (degree of freedom -dof-). Standart normal icin tablo paylastik, fakat t icin artik tablolarla ugrasmayacagiz, bilgisayar cagindayiz, yazilim ile bu isi halledelim!

Ornek

T bir Ogrenci t dagilimi ise, ve serbestlik derecesi 3 ise, $\alpha = 0.01$ icin icin $f_T(t)$'nin $100(1-\alpha)$ yuzdeligi nedir? Ustteki grafikteki $t_{\alpha,n}$ notasyonundan hareketle $t_{0.01,3}$ degerini ariyoruz yani.

```
from scipy.stats.distributions import t
df = 3
print t.ppf(0.99,df)
print 1-t.cdf(4.541,df)
```

```
4.5407028587
0.00999823806449
```

Yani

$$P(T_3 \geqslant 4.541) = 0.01$$

$\frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ ifadesinin n-1 derece serbestlige sahip Ogrenci t dagilimina sahip oldugunu bilmek alttaki ifadeyi mumkun kilar,

$$P\left(-t_{\alpha/2,n-1} \leqslant \frac{\bar{Y}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leqslant t_{\alpha/2,n-1} \right) = 1-\alpha$$

Bu ifadeyi daha once standart normal icin yaptigimiz gibi tekrar duzenlersek,

$$P\left(\bar{Y} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{Y} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha$$

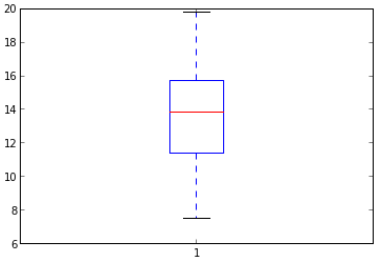
Tabii, Y_i'larin normal dagilimdan gelmis olmasi lazim. Bunun sonucunda gercek veri temel alinarak hesaplanacak S ve $\bar{Y}$ bize μ icin bir $\%100(1-\alpha)$ guven araligi verecektir.

Ornek

Yapiskan elementlerin uzerinde yapilan deneyler sonucundaki olcumler altta verilmistir. Acaba μ icin %95 guven araligi nedir?

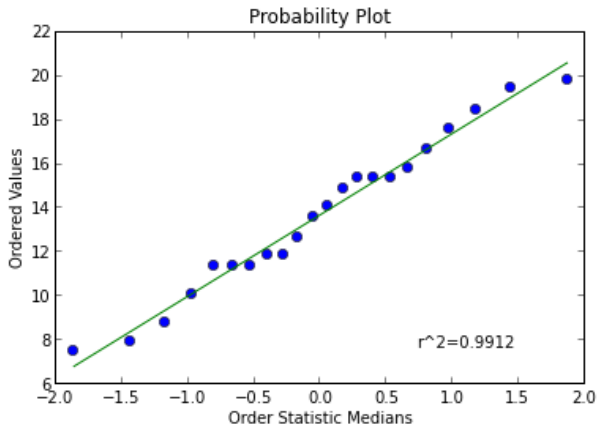
Oncelikle verinin normal dagilimdan geldigi dogru mudur? Bu faraziyeyi kontrol etmemiz gerekir yoksa t dagilimini kullanamayiz. Once bir kutu grafigi (boxplot) yapalim,

```
data = np.array([19.8,10.1,14.9,7.5,15.4,15.4,15.4,18.5,7.9,12.7,
11.9,11.4,11.4,14.1,17.6,16.7,15.8,19.5,8.8,13.6,11.9,11.4])
plt.boxplot(data)
plt.savefig('stat_sampling_dist_01.png')
```



Simdi normal olasilik grafigi (normal probability plot) yapalim, ki bu grafik verinin normal dagilima ne kadar uyumlu oldugunu grafik olarak gosterir, eger uyumlu ise veri duz cizgiye yakin cikmalidir,

```
import scipy.stats as stats
res = stats.probplot(data, plot=plt)
plt.savefig('stat_sampling_dist_02.png')
```



Bu grafiklere bakinca verinin normal oldugu belli oluyor. Zaten orneklem sayisi az, bu sebeple t dagilimi kullanmak uygun. Veri sayisal ortalamasi ve sayisal standart sapmasina bakalim, ve guven araligini hesaplayalim, yani

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n} \leqslant \mu \leqslant \bar{x} + t_{\alpha/2,n-1}s/\sqrt{n}$$

```
from scipy.stats.distributions import t
n = len(data)
dof = len(data)-1
m = np.mean(data)
s = np.std(data)
print 'ortalama',m
print 'sapma',s
print m + t.ppf(0.025,dof) * s / np.sqrt(n),\
      m - t.ppf(0.025,dof) * s / np.sqrt(n)
```

```
ortalama 13.7136363636
sapma 3.47187340764
12.174293931 15.2529787962
```

Guven araligi oldukca genis, cunku (demek ki) olcumlerde yuksek degiskenlik var.

Tek Orneklem t Testi (The One-Sample t test)

Bu test verinin bir $N(\mu, \sigma)$ Normal dagilimindan geldigini farzeder, test etmek istedigimiz hipotez / karsilastirma $\mu = \mu_0$. Ayrica σ bilinmiyor, ki Ogrenci t dagilimindan bahsetmemizin ana sebebi buydu zaten, o zaman hipotez testine Tek Orneklem t Testi adi verilir.

Ornek

Alttaki veride bir grup hanimin ne kadar kalori tukettigi kayitlanmis. Acaba bu hanimlarin aldigi enerji tavsiye edilen 7725'ten ne kadar sapmistir?

```
daily_intake = np.array([5260.,5470.,5640.,6180.,6390.,6515.,6805.,\
7515.,7515.,8230.,8770.])
```

Orneklem kucuk. O sebeple t dagilimi kullanmak mantikli. t degerini $\frac{\bar{y}-\mu_o}{s/\sqrt{n}}$ olarak hesaplayacagiz, ki $\mu_0 = 7725$ olacak.

```
from scipy.stats.distributions import t
import pandas as pd, math
data = pd.DataFrame(daily_intake)
n = len(data)
df = n-1 # serbestlik derecesi
mu0 = 7725.
ybar = float(data.mean())
s = float(data.std())
print 'ortalama',ybar,'std',s
tval = (ybar-mu0)/(s/np.sqrt(n))
print 'df',df,'tval',tval
print 'sol',t.ppf(0.025,df)
print 'sag',t.ppf(0.975,df)
```

```
ortalama 6753.63636364 std 1142.12322214
df 10 tval -2.82075406083
sol -2.22813885196
sag 2.22813885196
```

Sol ve sag esik degerlerini hesapladik ve t degeri bu araligin icine dusmuyor. Yani hipotezi reddediyoruz. Bazilari bu problemde p degeri gormek isteyebilir,

```
print 't degeri', tval
print 'iki tarafli p degeri', 2*t.cdf(tval,df)
```

```
t degeri -2.82075406083
iki tarafli p degeri 0.0181372351761
```

p degeri hesapladik 0.05'ten kucuk cikti. Ikiyle carpmamizin sebebi iki-tarafli p-testi yapmis olmamiz, yani kabul edilebilir bolgenin hem solundan hem de sagindan ne kadar disina dusuyorsak, bu iki taraftaki p degerini birbirine toplamaliyiz. Tabii t dagilimi simetrik oldugu icin her iki taraftan da ayni sekilde disarida kaliyoruz. Bazi kaynaklar iki tarafli p testinin $|t| < -t_{esik,derece}$ karsilastirmasini yaptigini soyler.

Benzer bir hesabi kutuphane cagrisi ile yaparsak,

```
from scipy.stats import ttest_1samp
t_statistic, p_value = ttest_1samp(daily_intake, mu0)
print 't', t_statistic, 'one-sample t-test', p_value
```

```
t -2.82075406083 one-sample t-test 0.0181372351761
```

Sonuc p degeri 0.05'ten kucuk cikti yani yuzde 5 onemliligini (significance) baz aldik bu durumda veri hipotezden onemli derecede (significantly) uzakta. Demek ki ortalamanin 7725 oldugu hipotezini reddetmemiz gerekiyor.

Iki Orneklemli Test

Gruplar 0/1 degerleri ile isaretlendi, ve test etmek istedigimiz iki grubun ortalamasinin (mean) ayni oldugu hipotezini test etmek. t-test bu arada varyansin ayni oldugunu farzeder.

```
energ = np.array([
[9.21, 0],[7.53, 1],
[7.48, 1],[8.08, 1],
[8.09, 1],[10.15, 1],
[8.40, 1],[10.88, 1],
[6.13, 1],[7.90, 1],
[11.51, 0],[12.79, 0],
[7.05, 1],[11.85, 0],
[9.97, 0],[7.48, 1],
[8.79, 0],[9.69, 0],
[9.68, 0],[7.58, 1],
[9.19, 0],[8.11, 1]])
group1 = energ[energ[:, 1] == 0][:, 0]
group2 = energ[energ[:, 1] == 1][:, 0]
t_statistic, p_value = ttest_ind(group1, group2)
print "two-sample t-test", p_value
```

```
two-sample t-test 0.00079899821117
```

p degeri < 0.05 yani iki grubun ortalamasi ayni degildir. Ayni oldugu hipotezi reddedildi.

Eslemeli t-Test (Paired t-test)

Eslemeli testler ayni deneysel birimin olcumu alindigi zaman kullanilabilir, yani olcum alinan ayni grupta, deney sonrasi deneyin etki edip etmedigi test edilebilir. Bunun icin ayni olcum deney sonrasi bir daha alinir ve "farklarin ortalamasinin sifir oldugu" hipotezi test edilebilir. Altta bir grup hastanin deney oncesi ve sonrasi ne kadar yiyecek tukettigi listelenmis.

```
intake = np.array([
[5260, 3910],[5470, 4220],
[5640, 3885],[6180, 5160],
[6390, 5645],[6515, 4680],
[6805, 5265],[7515, 5975],
[7515, 6790],[8230, 6900],
[8770, 7335],
])
pre = intake[:, 0]
post = intake[:, 1]
t_statistic, p_value = ttest_1samp(post - pre, 0)
print "paired t-test", p_value
```

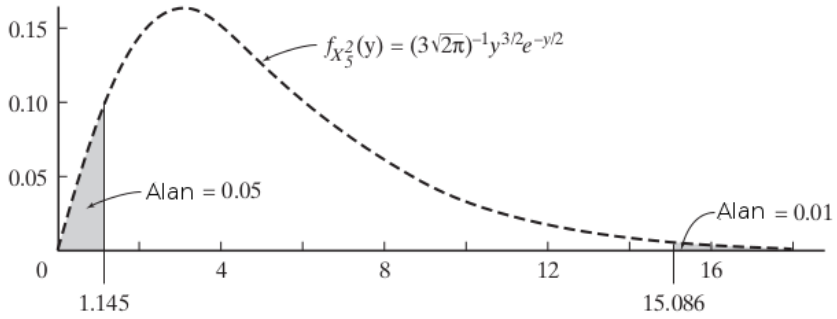
```
paired t-test 3.05902094293e-07
```

Normal Nufusun Varyansinin Guvenlik Araligi

Bazen nufusun varyansi ya da standart sapmasi uzerinde bir guven araligi hesaplamak gerekebilir. Eger nufus normal olarak dagilmis ise, simdiye kadar goster-

digimiz tekniklerin hepsi kullanilabilir. (1) teorisinin b kismindaki ifadeyi kullanirsak, nufusu μ, σ parametreli bir normalden alinan $X_1, .., X_n$ orneklemi uzerinden hesaplanan $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ifadesinin $n-1$ serbestlik derecesindeki bir chi kare dagilimi oldugunu biliyoruz.

Chi karenin yuzdelik kisimlari altta gorulebilir,




```
from scipy.stats.distributions import chi2
print chi2.ppf(0.05,5)
print chi2.ppf(0.99,5)
```

```
1.14547622606
15.0862724694
```

Dikkat edilmesi gereken bir konu chi karenin yamuk (skewed) olmasi sebebiyle sagdaki ve soldaki alan hesaplarinin arasinda z skorunda oldugu gibi her seferinde birebir gecis yapilamayabilecegi.

Notasyonel olarak $\chi^2_{p,n}$ ifadesi, x eksenindeki bir esik noktasini ifade eder ki bu degerin sol tarafindaki alan buyuklugu p, n serbestlik derecesindeki chi kare dagiliminin alanidir. Mesela ustte $\chi^2_{0.05,5} = 1.145$ ve $\chi^2_{0.99,5} = 15.086$. Olasilik ifadesi olarak

$$P(\chi^2_5 \leqslant 1.145) = 0.05$$

$$P(\chi^2_5 \leqslant 15.086) = 0.05$$

Kaynaklar

[1] Larsen, *Introduction to Mathematical Statistics and Its Applications*

[2] Runger, *Applied Statistics and Probability for Engineers*