Kovaryans ve Korelasyon

Bugun “kovaryans gunu”, bu teknigi kullanarak nihayet bir toplamin varyansini bulabilecegiz, varyans lineer degildir (kiyasla beklenti -expectation- lineerdir). Bu lineer olmama durumu bizi korkutmayacak tabii, sadece yanlis bir sekilde lineerlik uygulamak yerine probleme farkli bir sekilde yaklasmayi ogrenecegiz.

Diger bir acidan, hatta bu ana kullanimlardan biri, kovaryans iki rasgele degiskeni beraber / ayni anda analiz etmemize yarayacak. Iki varyans olacak, ve onlarin alakasina bakiyor olacagiz, bu sebeple bu analize *ko*varyans deniyor zaten.

Tanim

$$Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) \qquad (1)$$

Burada X, Y ayni uzayda tanimlanmis herhangi iki rasgele degisken. Ustteki diyor ki bu iki rasgele degisken X, Y'in kovaryansi, X'ten ortalamasi cikartilmis, Y'ten ortalamasi cikartilmis halinin carpilmasi ve tum bu carpimlarin ortalamasinin alinmasidir.

Tanim boyle. Simdi bu tanima biraz bakip onun hakkinda sezgi / anlayis gelistirmeye ugrasalim. Tanim niye bu sekilde yapilmis, baska bir sekilde degil?

Ilk once esitligin sag tarafindaki bir carpim, bir sey carpi bir baska sey. Bu seylerden biri X ile digeri Y ile alakali, onlari carparak ve carpimin bir ozelliginden faydalanarak sunu elde ettik; arti deger carpi arti yine arti degerdir, eski carpi arti eksidir, eksi carpi eksi artidir. Bu sekilde mesela “ayni anda arti” olmak gibi kuvvetli bir baglanti carpimin arti olmasi ile yakalanabilecektir. Ayni durum eksi,eksi de icin gecerli, bu sefer her iki rasgele degisken ayni sekilde negatiftir. Eksi carpim sonucu ise sifirdan az bir degerdir, “kotu korelasyon” olarak alinabilir ve hakikaten de eksi arti carpiminin isareti oldugu icin iki degiskenin ters yonlerde oldugunu gosterir. Demek ki bu arac / numara hakikaten faydali.

Unutmayalim, ustteki carpimlardan birisinin buyuklugu X'in ortalamasina bagli olan bir diger, Y ayni sekilde. Simdi X, Y'den bir orneklem (sample) aldigimizi dusunelim. Veri setinin her veri noktasi bagimsiz ve ayni sekilde dagilmis (i.i.d) durumda. Yani X, Y degiskenlerine “gelen” x_i, y_i ikilileri her i icin digerlerinden bagimsiz; fakat her ikilinin arasinda bir baglanti var, yani demek ki bu rasgele degiskenlerin baz aldigi dagilimlarin bir alakasi var, ya da bu iki degiskenin bir birlesik dagilimi (joint distribution) var.

Not: Eger X, Y bagimsiz olsaydi, o zaman

$$Cov(X,Y) = E((X - E(X))E(Y - E(Y))$$

olarak yazilabilirdi, yani iki beklentinin ayri ayri carpilabildigi durum... Ama biz bu derste bagimsizligin olmadigi durumla ilgileniyoruz..

Korelasyon kelimesinden bahsedelim hemen, bu kelime gunluk konusmada cok kullaniliyor, ama bu ders baglaminda korelasyon kelimesinin matematiksel bir anlami olacak, onu birazdan, kovaryans uzerinden tanimlayacagiz.

Bazi ilginc noktalar:

Ozellik

varyansi nasil tanimlamistik?

$$ Var(X) = E((X - E(X))^2) $$

Bu denklem aslinda

$$ Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) $$

denkleminde Y yerine X kullandigimizda elde ettigimiz seydir, yani

$$ Cov(X, X) = E((X - E(X))(X - E(X))) $$

$$ Cov(X, X) = E((X - E(X))^2) $$

$$ = Var(X) $$

Yani varyans, bir degiskenin "kendisi ile kovaryansidir". Ilginc degil mi?

Ozellik

$$ Cov(X, Y) = Cov(Y, X) $$

Ispati kolay herhalde, (1) formulunu uygulamak yeterli.

Teori

$$ Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y) $$

Ispat

Bu ispat cok kolay, esitligin sol tarafindaki carpimi parantezler uzerinden acarsak, ve beklenti lineer bir operator oldugu icin toplamin terimleri uzerinde ayri ayri uygulanabilir,

$$ E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) $$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

Carpimi uygularken mesela $E(-X \cdot E(Y))$ gibi bir durum ortaya cikti, burada $E(Y)$'nin bir sabit oldugunu unutmayalim, cunku beklenti rasgele degiskene uygulaninca tek bir sayi ortaya cikartir, ve vu $E(Y)$ uzerinde bir beklenti daha uygulaninca bu "icerideki" beklenti sabitmis gibi disari cikartilabilir, yani $-E(X)E(Y)$.