

Санкт-Петербургский
Политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
ВШТМиМФ

Индивидуальная работа №4
Метод конечных элементов. Исследование функций форм
по дисциплине "Вычислительная механика"

Студент: Сорокопудова Елизавета Сергеевна

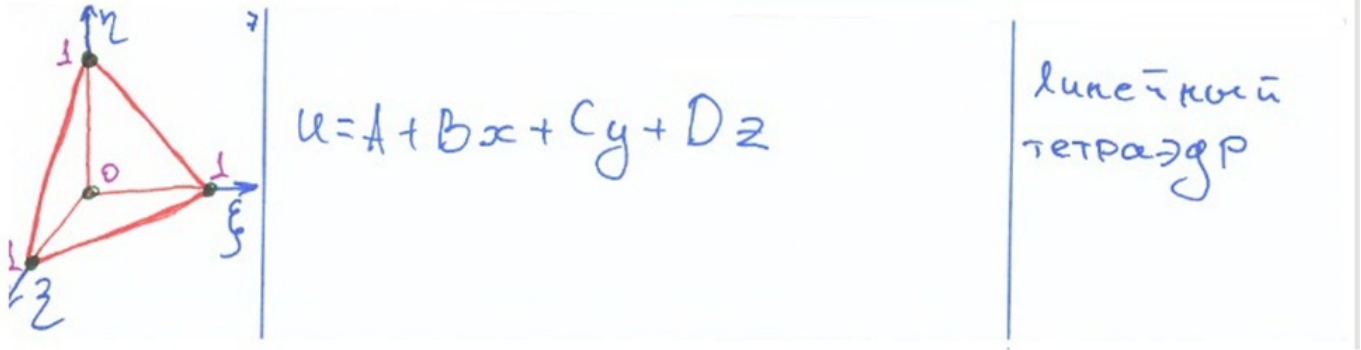
Преподаватель: Витохин Евгений Юрьевич

Группа: 5030103/10201

Санкт-Петербург
2023

Постановка задачи

Дан конечный элемент заданной формы и тип интерполяционного полинома:



Необходимо найти функции формы для линейного тетраэдра, удовлетворяющие следующим свойствам:

1. $\sum N_s(x, y, z) = 1$;
2. $N_s(x_m, y_m, z_m) = \begin{cases} 0, & s \neq m \\ 1, & s = m \end{cases}$

и получить графики поверхностей.

Метод решения

Данная задача решается с помощью метода конечных элементов.

Найдем все узловые точки линейного тетраэдра:

1 – (0, 0, 0); 2 – (1, 0, 0); 3 – (0, 1, 0); 4 – (0, 0, 1).

Функции формы для данного линейного тетраэдра представляют собой плоскости:

$$N_1 = A_1 + B_1x_1 + C_1y_1 + D_1z_1$$

$$N_2 = A_2 + B_2x_1 + C_2y_1 + D_2z_1$$

$$N_3 = A_3 + B_3x_1 + C_3y_1 + D_3z_1$$

$$N_4 = A_4 + B_4x_1 + C_4y_1 + D_4z_1$$

Можем записать систему:

$$\begin{cases} N_1(x_1, y_1, z_1) = A_1 + B_1x_1 + C_1y_1 + D_1z_1 \\ N_2(x_1, y_1, z_1) = A_2 + B_2x_1 + C_2y_1 + D_2z_1 \\ N_3(x_1, y_1, z_1) = A_3 + B_3x_1 + C_3y_1 + D_3z_1 \\ N_4(x_1, y_1, z_1) = A_4 + B_4x_1 + C_4y_1 + D_4z_1 \end{cases}$$

По свойствам функций форм:

$$\begin{cases} N_1 = 1 \\ N_2 = 0 \\ N_3 = 0 \\ N_4 = 0 \end{cases}$$

То же самое можем проделать для других узлов:

$$\begin{cases} N_1(x_2, y_2, z_2) = A_1 + B_1x_1 + C_1y_1 + D_1z_1 = 1 \\ N_2(x_2, y_2, z_2) = A_2 + B_2x_1 + C_2y_1 + D_2z_1 = 0 \\ N_3(x_2, y_2, z_2) = A_3 + B_3x_1 + C_3y_1 + D_3z_1 = 0 \\ N_4(x_2, y_2, z_2) = A_4 + B_4x_1 + C_4y_1 + D_4z_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1(x_2, y_2, z_2) = A_1 + B_1x_2 + C_1y_2 + D_1z_2 = 0 \\ N_2(x_2, y_2, z_2) = A_2 + B_2x_2 + C_2y_2 + D_2z_2 = 1 \\ N_3(x_2, y_2, z_2) = A_3 + B_3x_2 + C_3y_2 + D_3z_2 = 0 \\ N_4(x_2, y_2, z_2) = A_4 + B_4x_2 + C_4y_2 + D_4z_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1(x_3, y_3, z_3) = A_1 + B_1x_3 + C_1y_3 + D_1z_3 = 0 \\ N_2(x_3, y_3, z_3) = A_2 + B_2x_3 + C_2y_3 + D_2z_3 = 0 \\ N_3(x_3, y_3, z_3) = A_3 + B_3x_3 + C_3y_3 + D_3z_3 = 1 \\ N_4(x_3, y_3, z_3) = A_4 + B_4x_3 + C_4y_3 + D_4z_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_1(x_4, y_4, z_4) = A_1 + B_1x_4 + C_1y_4 + D_1z_4 = 0 \\ N_2(x_4, y_4, z_4) = A_2 + B_2x_4 + C_2y_4 + D_2z_4 = 0 \\ N_3(x_4, y_4, z_4) = A_3 + B_3x_4 + C_3y_4 + D_3z_4 = 0 \\ N_4(x_4, y_4, z_4) = A_4 + B_4x_4 + C_4y_4 + D_4z_4 = 1 \end{cases}$$

В матричном виде получим:

$$[X] \cdot [A] = [E]$$

Где $[X]$ - матрица с координатами

$[A]$ - матрица с коэффициентами функций формы

Иначе:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{bmatrix} = E$$

Где $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$; $(x_2, y_2, z_2) = (1, 0, 0)$; $(x_3, y_3, z_3) = (0, 1, 0)$; $(x_4, y_4, z_4) = (0, 0, 1)$.

По определению:

$$A \cdot A^{-1} = E$$

А значит, $A = X^{-1}$. Таким образом, получим матрицу коэффициентов функций форм.

Введем интерполяционный полином в виде вектора-столбца:

$$\{P\}^T = \{1 \ x \ y \ z\}$$

Теперь матрицу с функциями форм вида:

$$[N] = [N_1 N_2 N_3 N_4]$$

Тогда функции форм можно найти:

$$[N] = \{P\}^T \cdot A$$

Результаты

В результате работы программы были получены функции форм для каждого из узлов:

$$N(x, y, z) = [1 - y - z - x, x, y, z]$$

$$N_1 = 1 - y - z - x \text{ для узла } (0, 0, 0)$$

$$N_2 = x \text{ для узла } (1, 0, 0)$$

$$N_3 = y \text{ для узла } (0, 1, 0)$$

$N_4 = z$ для узла $(0, 0, 1)$

Проверим выполнение свойств функции формы:

$$1. N_s(x_m, y_m, z_m) = \begin{cases} 0, s \neq m \\ 1, s = m \end{cases}$$

$$N_1(0, 0, 0) = 1 - 0 - 0 - 0 = 1$$

$$N_2(1, 0, 0) = 1$$

$$N_3(0, 1, 0) = 1$$

$$N_4(0, 0, 1) = 1$$

$$2. \sum N_s(x, y, z) = 1;$$

$$N_1(x, y, z) + N_2(x, y, z) + N_3(x, y, z) + N_4(x, y, z) = 1.$$

Также построим графики функции форм:

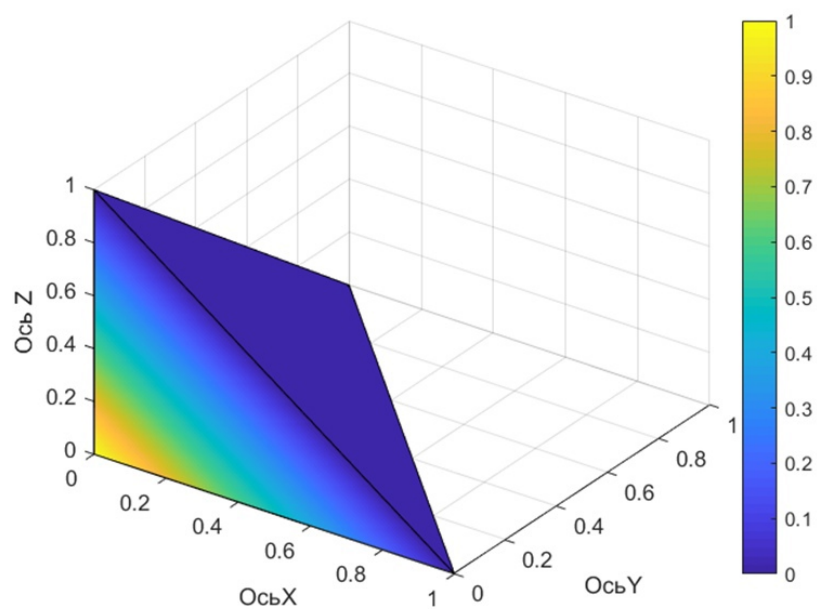


Рис. 1: Функция формы N_1 в точке $(0,0,0)$

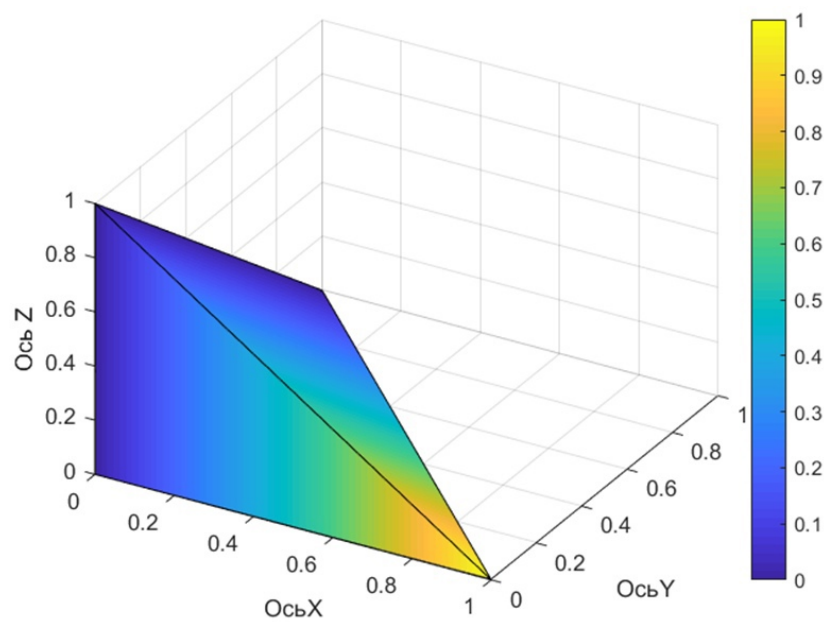


Рис. 2: Функция формы N_2 в точке $(1,0,0)$

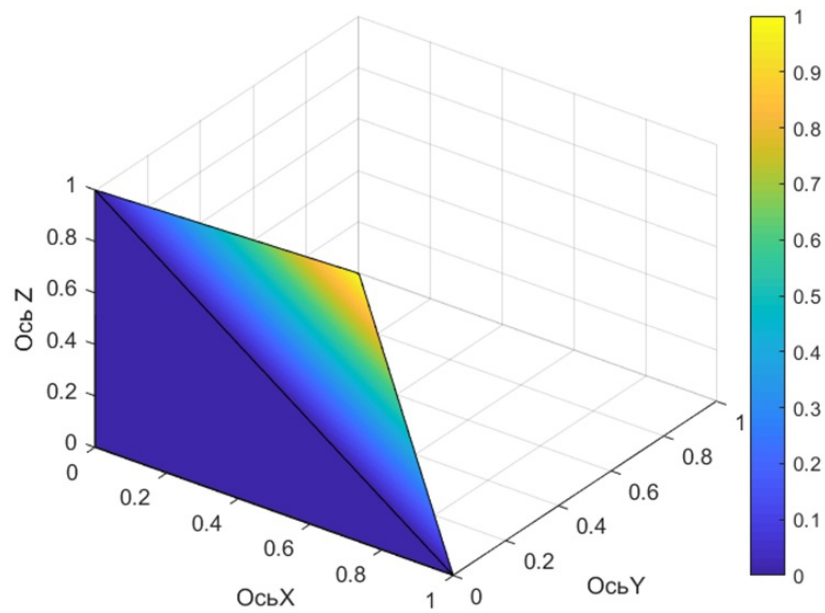


Рис. 3: Функция формы N_3 в точке $(0, 1, 0)$

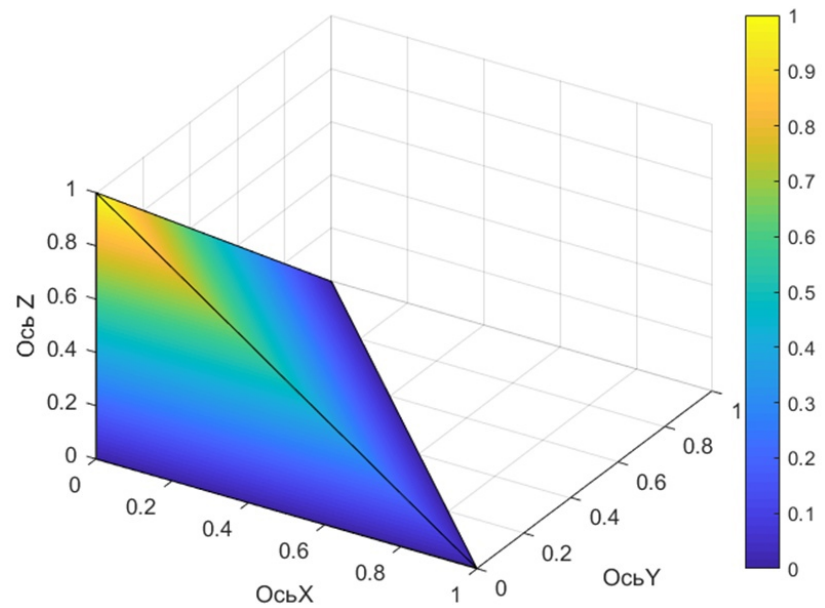


Рис. 4: Функция формы N_4 в точке $(0, 0, 1)$

Таким образом, в ходе работы были найдены функции форм для линейного тетраэдра. Построены графики для соответствующих узлов и проверено выполнение свойства.

Код программы

```
clear all
clc

x1 = [0 1 0 0];
y1 = [0 0 1 0];
z1 = [0 0 0 1];

coord = zeros(4);
coord(:, 1) = 1;
coord(:, 2) = x1;
coord(:, 3) = y1;
coord(:, 4) = z1;

E = eye(4);
coef = coord \ E;

%A = inv(coord);
syms P(x, y, z);
P(x,y,z) = [1 x y z];
N = P * coef
L = formula(N)

for i = [1:4]

N1 = subs(L(1,i));
%N1 = subs(L(1,1)); N2 = subs(L(1,2)); N3 = subs(L(1,3)); N4 = subs(L(1,4));
|
C1 = [double(subs(N1, [x, y, z], [x1(2), y1(2), z1(2)])) 0;
      double(subs(N1, [x, y, z], [x1(3), y1(3), z1(3)])) 0;
      double(subs(N1, [x, y, z], [x1(4), y1(4), z1(4)])) 0];
```

```

|
C2 = [double(subs(N1, [x, y, z], [x1(1), y1(1), z1(1)])) 0;
      double(subs(N1, [x, y, z], [x1(2), y1(2), z1(2)])) 0;
      double(subs(N1, [x, y, z], [x1(4), y1(4), z1(4)])) 0];

C3 = [double(subs(N1, [x, y, z], [x1(1), y1(1), z1(1)])) 0;
      double(subs(N1, [x, y, z], [x1(3), y1(3), z1(3)])) 0;
      double(subs(N1, [x, y, z], [x1(4), y1(4), z1(4)])) 0];

C4 = [double(subs(N1, [x, y, z], [x1(1), y1(1), z1(1)])) 0;
      double(subs(N1, [x, y, z], [x1(2), y1(2), z1(2)])) 0;
      double(subs(N1, [x, y, z], [x1(3), y1(3), z1(3)])) 0];

figure
hold on
grid on
fill3([x1(2), 1; x1(3), 1; x1(4), 1], [y1(2), 1; y1(3), 1; y1(4), 1], [z1(2), 1; z1(3), 1; z1(4), 1], C1)
fill3([x1(1), 1; x1(2), 1; x1(4), 1], [y1(1), 1; y1(2), 1; y1(4), 1], [z1(1), 1; z1(2), 1; z1(4), 1], C2)
fill3([x1(1), 1; x1(3), 1; x1(4), 1], [y1(1), 1; y1(3), 1; y1(4), 1], [z1(1), 1; z1(3), 1; z1(4), 1], C3)
fill3([x1(1), 1; x1(2), 1; x1(3), 1], [y1(1), 1; y1(2), 1; y1(3), 1], [z1(1), 1; z1(2), 1; z1(3), 1], C4)
xlabel('Ось X')
ylabel('Ось Y')
zlabel('Ось Z')
end

```