Модели влияния в сетях

Рассмотрим граф (ориентированный или неориентированный), в котором вершины могут быть в двух состояниях: неактивированном или активированном. Если вершина активирована, то это означает, что она подверглась определённому влиянию (например, она поверила в какую-то информацию, либо приняла сторону какого-то кандидата на выборах, либо заразилась некоторой болезнью и т. п.).

Реализовать это можно, присвоив вершинам атрибут и назвав его, например, `activated`. Это может быть логический, числовой или символьный атрибут. Для математического описания активации мы введём функцию $A(v)$, аргументом которой является вершина $v \in V$:

$$A(v) = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v \text{ активирована,} \\ 0, & \text{если вершина } v \text{ не активирована.} \end{cases}$$

Примем, что имеется дискретное время, в каждый момент которого сеть может иметь разное состояние, которое выражается в активированности или неактивированности определённого подмножества вершин.

Пусть в начальный момент времени какие-то вершины активированы. Как будет распространяться активация далее? Естественно предположить, что активация может передаваться только непосредственным соседям. И вот здесь можно придумать разные правила активации.

Пороговая модель. В данной модели вершина v активируется в том и только том случае, когда суммарный вес связей, исходящих от активированных соседей этой вершины, превосходит некоторый порог h.

Если граф ориентированный и взвешенный, то рассматриваются только дуги, для которых вершина v является концевой, и вычисляется сумма весов этих дуг.

Если граф неориентированный и взвешенный, то рассматриваются все рёбра, которые подходят от соседних вершин к вершине v, и вычисляется сумма весов этих рёбер.

Если граф ориентированный и невзвешенный, то рассматриваются только дуги, для которых вершина v является концевой, и вычисляется количество этих дуг.

Если граф неориентированный и невзвешенный, то рассматриваются все рёбра, которые подходят от соседних вершин к вершине v, и вычисляется количество этих дуг.

Пусть $N(v)$ – подмножество вершин, которые являются соседями вершины v (от них есть ребро e_{uv}, если граф неориентированный, либо есть входящая в v дуга a_{uv}, если граф ориентированный). Пусть w – вес связи (граф взвешенный). Тогда вершина v активируется, если она не была активирована ранее и

$$\sum_{u \in N(v)} A(u) \cdot w(e_{uv}) > h \qquad \text{или} \qquad \sum_{u \in N(v)} A(u) \cdot w(a_{uv}) > h.$$

Для невзвешенного графа формулы принимают вид (точнее, получается одна формула):

$$\sum_{u \in N(v)} A(u) > h.$$

Задание №1. Реализовать модель пороговой активации вершин графа. Исходные данные – некоторый граф (ориентированный или неориентированный) в начальном состоянии, в котором у некоторых вершин задан атрибут активированности, а также порог h. Модель должна показывать, как меняется состояние графа в течение времени. Это можно сделать либо визуализацией графа на каждом (или не каждом) шаге, либо выводом статистической таблицы, в которой отражены активированные и неактивированные вершины на каждом шаге.

Модификация пороговой модели. Если граф взвешенный и все веса находятся в промежутке $[0;1]$, то можно рассматривать **среднее влияние** соседей. Тогда формулы активации принимают вид:

$$\frac{1}{|N(v)|} \cdot \sum_{u \in N(v)} A(u) \cdot w(e_{uv}) > h \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{|N(v)|} \cdot \sum_{u \in N(v)} A(u) \cdot w(a_{uv}) > h.$$

В этом случае порог h также должен задаваться из промежутка $[0;1]$.

Задание №2. Реализовать модифицированную модель пороговой активации вершин графа.

Вероятностная модель. Есть несколько разновидностей вероятностной модели. В каждой из них влияние одной вершины на другую осуществляется с некоторой вероятностью, которую можно ассоциировать с весом связи, протянутой от влияющей вершины к вершине, которая испытывает влияние.

В модели SIS (susceptible-infected-susceptible = восприимчивый-инфицированный-восприимчивый) каждый узел может находиться в двух состояниях: восприимчивый (может заразиться от соседа) и инфицированный (заразился от соседа).

Опишем динамику состояний узла. Если узел находится в состоянии восприимчивости, то он может заразиться и стать инфицированным от инфицированного соседа с некоторой вероятностью $p \in (0;1)$. В процессе моделирования генерируется случайное число, равномерно распределённое на единичном интервале, и если оно меньше p, то узел заболевает, а в противном случае узел не заболевает. Инфицированный узел может вылечиться на каждой итерации времени с вероятностью $q \in (0;1)$. Если на некоторой итерации сгенерированное случайное число меньше q, то узел выздоравливает и снова становится восприимчивым, а в противном случае продолжает болеть. Инфицированный узел является источником заболевания для своих непосредственных соседей. Данная модель соответствует ситуации, когда у переболевших не появляется иммунитет от болезни.

В модели SIR (susceptible-infected-resistant = восприимчивый-инфицированный-невосприимчивый) каждый узел может находиться в трёх состояниях: восприимчивый (может заразиться от соседа), инфицированный (заразился от соседа) и невосприимчивый (переболел и имеет иммунитет от болезни).

Опишем динамику состояний узла. Если узел находится в состоянии восприимчивости, то он может заразиться и стать инфицированным от инфицированного соседа с некоторой вероятностью $p \in (0;1)$. Инфицированный узел может вылечиться на каждой итерации времени с вероятностью $q \in (0;1)$. Инфицированный узел является источником заболевания для своих непосредственных соседей. Если инфицированный узел выздоровел, то он переходит в состояние невосприимчивости, и уже заболеть повторно от соседей не может. Также невосприимчивый узел не распространяет болезнь к соседям. Данная модель соответствует ситуации, когда у переболевших появляется устойчивый иммунитет от болезни.

Задание №3. Реализовать модели SIS и SIR. Поварьируйте параметры модели: структуру графа (граф может быть разрежённым или плотным), вероятности заболевания и выздоровления.

У модели SIR может быть модификация, которая более относится к отношениям людей, когда распространяется некоторая информация (например, слух). Модификация касается роли невосприимчивого агента. Так, если встретятся восприимчивый человек с инфицированным, то оба становятся инфицированными (с некоторой вероятностью). Если инфицированный встречается с невосприимчивым, то оба становятся невосприимчивыми (опять же, с некоторой вероятностью). И уж что совсем странно в этой модификации, так это то, что если встречаются два инфицированных, то они оба становятся невосприимчивыми (также с некоторой вероятностью). В трактовке распространения слухов восприимчивый – это тот, кто может поверить в слух и начать его далее распространять. Инфицированный – это тот, кто поверил в слух и распространяет его. Невосприимчивый – это тот, кто не верит слуху и не распространяет его.

Критерии оценки

Если модели реализованы и вывод идёт в текстовом виде – 4 балла. В текстовом виде можно выводить таблицу динамики состояний индивидов (какие инфицированы, а какие нет): первый столбец – момент времени, а остальные – состояния индивидов.

Если модели реализованы и вывод идёт в графическом виде – 8 баллов. Можно отобразить граф связей между индивидами, подкрашивать здоровые и больные индивиды разными цветами, меняя граф в течение времени. Так, в Python имеется библиотека `networkx`. С некоторыми возможностями библиотеки можно ознакомиться по ссылкам:

https://colab.research.google.com/drive/1ZVL5hrytd_rS6-eiD1mO2P5hdRY65U8J

https://networkx.org/documentation/stable/reference