Institut Supérieur Des Arts Multimédias
Université De La Manouba
A.U. : juillet 2020

Examen
Session principale

Section : 1 Mastère de recherche IMD
Epreuve : Optimisation
Enseignant : Mme Damergi

Documents : non autorisés
Calculatrice : autorisée
Durée : 01h30 heure

Exercice 1. *:*
On considère le problème d'optimisation suivant

$$\begin{array}{rl} \min & f(x,y) = x^2 + y^2 \\ s.c & xy = 1 \\ & x, y \in \mathbb{R} \end{array}$$

1- Vérifier que la contrainte est qualifiée. Ecrire le Lagrangien associé à ce problème

2- Appliquer les conditions nécessaires d'ordre 1 (conditions de Lagrange) pour déterminer les points stationnaires du Lagrangien

3- Peut- on exploiter les conditions suffisantes du second ordre pour déterminer la nature de ces points ?

Exercice 2. *:*
Soit le problème de minimisation

$$\min_{x\in\mathbb{R}^3} J(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x) \tag{1}$$

où $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique et $b \in \mathbb{R}^3$ sont définies comme suit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} et \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) a) *Montrer que A est définie positive.*

   b) *Etudier la convexité de J*

   c) *Montrer que le problème (1) admet une solution unique $\overline{x}$. vérifier que $\overline{x}$ est aussi solution de système $Ax = b$.*

2) *Soit $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ la suite générée par l'algorithme du gradient à pas fixe $t \in \mathbb{R}_+^*$ pour approcher le minimum $\overline{x}$ de J dans $\mathbb{R}^3$.*

   a) *Déterminer le spectre de A (l'ensemble des valeurs propres λ_i).*

   b) *En déduire la valeur du rayon spectral $\rho(A) = max_i|\lambda_i|$*

   c) *Sachant que la méthode de gradient à pas fixe converge si et seulement si $t \in]0, \frac{2}{\rho(A)}[$, déterminer pour quelles valeurs de t on a la convergence*

   d) *Pour $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le pas $t = \frac{1}{2}$, calculer $x^{(1)}$ puis $x^{(2)}$*