

Calcul du prix optimal d'un billet d'avion pour maximiser les bénéfices d'un trajet en fonction de l'opinion des acheteurs sur la compagnie aérienne

Nestor CARMONA
21809539

Université Paul Sabatier
L2 Mathématiques

2019-2020



UE Modélisation

Résumé

L'optimisation est l'un des domaines des mathématiques les plus intéressants grâce à son impact sur la vie quotidienne. En effet, dans un monde où la moindre action peut avoir des conséquences graves, il est important de trouver la meilleure solution à chaque problématique.

Dans ce rapport, nous présentons une solution pour calculer le prix optimal d'un billet d'avion afin de maximiser les bénéfices d'un trajet en fonction de l'opinion acheteur sur la compagnie aérienne. Pour répondre à cette problématique, notre projet propose une approche qui permet à une compagnie aérienne, souhaitant ouvrir un nouveau trajet, de fixer un prix optimal en fonction de l'opinion de l'acheteur sur cette compagnie aérienne. Grâce à cette méthode, l'opérateur aérien peut avoir une estimation des bénéfices maximaux qu'il pourrait engendrer sur ce trajet.

Dans un premier temps, nous allons calculer la probabilité qu'une personne, ayant une appréciation, γ , de la qualité de la compagnie, achète un billet d'avion à un prix p en utilisant une fonction sigmoïde ainsi qu'une régression logistique pour estimer les coefficients de celle-ci. Ensuite, nous utiliserons l'équation de Bellman pour rechercher le maximum de bénéfice que nous pouvons espérer atteindre lorsque nous avons T jours pour vendre N billets.

Finalement, nous comparons notre approche avec deux autres méthodes : **probabiliste**, qui repose en le calcul de la probabilité que la demande du jour suivant soit plus haute et nous adaptons le prix du billet en fonction de celle-ci, et **optimale**, qui calcule tous les cas possibles de chaque jour, pour chaque niveau de demande, pour chaque nombre de billet restant et pour chaque prix, et nous prenons le prix du billet qui obtient le meilleur bénéfice du jour. Finalement, nous en concluons que la méthode décrite dans ce rapport est la plus proche de la réalité et, par conséquent, la plus adaptée pour une compagnie aérienne qui cherche à ouvrir un nouveau trajet.

Mots clés — Optimisation, Prix, Bellman, Billet Avion, Programmation Dynamique

I.1 Hypothèses du modèle

Dans tout problème de modélisation, il est fondamental instaurer une série d'hypothèses qui vont permettre d'encadrer notre cas d'étude. Ici, nous avons choisi d'introduire :

- Le vol est optimal : direct, pas de contraintes externes et trajet prédéfini. Dans notre cas, il s'agit du vol Toulouse Blagnac (TLS) - Milan Malpensa (MXP)
- Pas de concurrence entre compagnies aériennes.
- Chaque personne achète un seul et unique billet d'avion et occupe une seule place dans celui-ci.
- La décision d'achat d'une personne est indépendante de celle d'une autre personne.
- Nous vendons au maximum le nombre de places prédéfini donc pas d'overbooking, ni d'annulation du billet.
- L'opinion des acheteurs sur la qualité de la compagnie aérienne suit une distribution connue obtenue grâce aux critiques d'Air France sur TripAdvisor.
- Les potentiels acheteurs sont myopes dans le sens où ils ne se demandent pas si le prix du billet d'avion du jour suivant sera plus bas que le jour courant.
- Les personnes ayant acheté un billet à un prix compétitif donneront une note d'appréciation élevée tandis que les personnes ayant acheté ou vu un prix très élevé, auront une mauvaise opinion.

I.2 Calcul de la distance du trajet

En premier lieu, nous calculons la distance entre les deux aéroports dont nous avons les coordonnées géographiques (latitude, longitude). Nous avons les couples :

- $ville_1 = (lat_1, long_1) =$ Pour notre cas d'étude Toulouse : $(43.629101, 1.36382)$
- $ville_2 = (lat_2, long_2) =$ Pour notre cas d'étude Milan : $(45.6306, 8.72811)$

Soient :

- D : distance du grand cercle entre les deux points et d la distance euclidienne entre les deux villes.
- r : rayon de la Terre et O son centre.
- θ_1, θ_2 : latitudes des points 1 et 2, en radians.
- ϕ_1, ϕ_2 : longitudes des points 1 et 2, en radians.
- $ville_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $ville_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dans le système des coordonnées cartésiennes

Nous avons, en se plaçant dans le systèmes des coordonnées sphériques :

$$(x, y, z) = (R \cos(\theta) \cos(\phi), R \cos(\theta) \sin(\phi), R \sin(\theta))$$

Nous pouvons obtenir la distance entre les deux villes en appliquant la formule de Pythagore en trois dimensions : $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$. Ainsi, en remplaçant les variables par leurs expressions respectives, nous obtenons :

$$\frac{d^2}{R^2} = 2 - 2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \cos(\phi_1 - \phi_2) - 2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2)$$

Soit α l'angle entre les deux villes et le centre de la terre. Nous avons : $\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{d}{2R} \rightarrow D = R\alpha = R \arcsin(\frac{d}{2R} \sqrt{4R^2 - d^2})$

Cette distance est souvent exprimée avec la fonction Haversine [4] définie par :

$$\begin{aligned} hav(A) &= \sin^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 - \cos(A)}{2} \\ \cos(A) &= 1 - 2hav(A) \end{aligned} \tag{I.1}$$

Finalement, en utilisant l'égalité I.1 :

$$\frac{d^2}{R^2} = 4hav(\theta_1 - \theta_2) + 4\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)hav(\phi_1 - \phi_2)$$

Ce qui implique que : $hav(\alpha) = hav(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)hav(\phi_1 - \phi_2)$
Donc :

$$D = R\alpha = 2R \arcsin\left(\sqrt{\sin^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\sin^2\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)}\right) \quad (I.2)$$

Finalement, dans notre cas d'étude, en utilisant nos valeurs de latitude et longitude de nos villes dans I.2, nous obtenons une distance de : 623.52 Km. Nous pouvons voir dans la figure I.1a, le trajet :



(a) Trajet Toulouse Blagnac - Milan Malpensa - 623.52 Km

II – Modélisation probabilité achat

II.1 Introduction

II.1.1 Paramètres

L'idée principale réside dans le choix des différents paramètres qui constituent notre probabilité. Effectivement, en fonction d'elle, nous pouvons calculer combien de personnes, dans notre demande du jour, procéderont à l'achat du billet. Pour cela, nous avons décidé de choisir :

- **Qualité** γ : perception de la personne de la qualité de la compagnie aérienne. Plus cette valeur est élevée, plus la personne a une bonne opinion de la compagnie et donc sera moins sensible au prix pour l'achat final du billet d'avion. Par contre, une valeur moyenne, suppose une opinion plus neutre sur la qualité de la compagnie aérienne, et donc la personne sera plus regardante du prix du billet d'avion ; alors qu'une personne ayant une opinion médiocre, voir horrible sur la qualité de la compagnie, n'achètera jamais un billet d'avion. $\gamma \in [0, 100]$
- **Prix** p : prix du billet d'avion lors de l'achat. Ce paramètre est strictement lié à la qualité. En effet, plus le prix est élevé, plus la personne pensera que c'est une perte de temps et qu'il pourra trouver meilleur ailleurs. Inversement, si le prix est bas, la personne aura une bonne appréciation. Dans le cas intermédiaire, concernant les prix autour du milieu de l'intervalle $[0, 200]$, les personnes auront une opinion moyenne.

II.1.2 Variable Y

Soit Y une variable qualitative binaire (ex. : 1/0, achat/non-achat), elle peut donc prendre deux valeurs possibles. Dans notre cas :

- La personne achète le billet : $Y = 1$
- La personne n'achète pas le billet : $Y = 0$

II.1.3 Observations

Soit K un échantillon de 31826 individus dont nous connaissons les paramètres γ_i , p_i et les résultats y_i pour $i \in \{0, 1, \dots, 31825\}$ que nous avons obtenu grâce à TripAdvisor¹ en recherchant les critiques des utilisateurs, quant aux services offerts, de la compagnie aérienne Air France. Nous avons la répartition suivante :

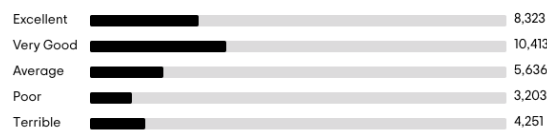


FIGURE II.1 – Répartition Critiques Air France - TripAdvisor

Sur la base de la distribution d'opinions de TripAdvisor, nous utilisons l'hypothèse que l'ensemble de la demande journalière aura une distribution d'opinions suivant les critiques à Air France et que la qualité a un impact sur la décision de l'achat, voir I.1. Nous définissons les trois classes suivantes :

- **Excellent - Très Bien** : 75 - 100. Résultat : 1. Ces personnes ont sûrement acheté le billet à un prix compétitif et sont très satisfaites. Nous pouvons leur attribuer un prix distribué uniformément dans l'intervalle $[1, 100]$.
- **Moyen** : 35 - 74. Résultat : aléatoire. Malheureusement, nous ne connaissons pas si l'achat était un succès ou non. Nous pouvons attribuer un prix distribué uniformément dans l'intervalle $[51, 200]$.
- **Médiocre - Horrible** : 0 - 34. Résultat : 0. Ces personnes ont acheté, ou vu, un prix exorbitant et ont tout de suite fermé la page web de notre compagnie aérienne (et sont allés directement sur TripAdvisor

1. Lien de la répartition Critiques Air France - TripAdvisor

pour laisser une mauvaise note). Nous pouvons leur attribuer un prix distribué uniformément dans l'intervalle $[151, 200]$.

Par exemple, dans le tableau II.1, nous pouvons voir les valeurs de qualité et prix présent par 10 individus de notre échantillon K :

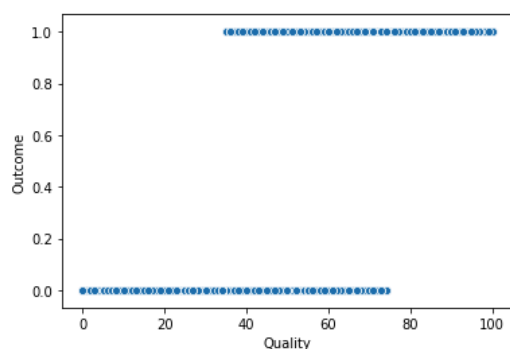
	Résultat/ y_i	Qualité/ γ_i	Prix/ p_i
0	1	43	189
1	0	5	193
2	1	51	122
3	1	90	80
4	1	48	138
5	0	71	134
6	1	55	157
7	0	34	169
8	1	37	176
9	1	88	34

TABLE II.1 – Valeurs de qualité et prix pour 10 personnes dans notre échantillon K

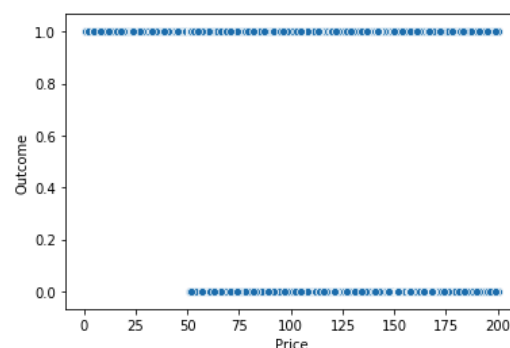
II.2 Modèle logistique binaire

II.2.1 Lien entre le résultat et la qualité et prix

Traçons le résultat de chaque individu en fonction de leur perception individuelle de la compagnie aérienne et du prix du billet, nous obtenons :



(a) Résultat en fonction de la qualité



(b) Résultat en fonction du prix

Dans les graphiques II.2a et II.2b, chaque point bleu représente un individu. S'il a acheté un billet, il se trouve dans la droite horizontale $y = 1$. Dans le cas contraire, il est sur la droite $y = 0$. Ainsi, nous remarquons :

- Quand la perception de la qualité est proche de 0, les individus de cette classe (32.28%) n'ont pas acheté de billet
- Quand la perception est proche de 100, les individus de cette classe (67.72%) ont acheté un billet.

Il y a donc un lien positif entre la qualité et l'achat du billet et un lien négatif entre le prix et l'achat. Ainsi, nous pouvons nous demander : "De combien augmente la probabilité d'achat du billet si on augmente la qualité de une unité ? Et si on descend le prix ?". Une question comme cela nous fait penser à une régression.

Rappel : nous voulons modéliser le lien entre la probabilité d'achat du billet, la qualité et le prix.

Pour cela, nous allons introduire la fonction sigmoïde :

$$f(A) = \frac{\exp(A)}{1 + \exp(A)} \quad (\text{II.1})$$

Le logarithme du rapport des probabilités $\frac{\mathbb{P}(Y=1|X)}{\mathbb{P}(Y=0|X)}$, avec X le vecteur des paramètres, est l'hypothèse fondamentale où repose la régression logistique et est égal à :

$$\log\left(\frac{\mathbb{P}(Y=1|X)}{\mathbb{P}(Y=0|X)}\right) = \log\left(\frac{\mathbb{P}(Y=1|X)}{1 - \mathbb{P}(Y=1|X)}\right) = \beta_0 + \beta_1\gamma + \beta_2p$$

:

Donc, si nous notons $\pi(\gamma, p)$ la probabilité. Nous avons :

$$\pi(\gamma, p) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1\gamma + \beta_2p)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1\gamma + \beta_2p)} \quad (\text{II.2})$$

Nous obtenons ainsi la même fonction que $f(X)$ dans la partie II.1. C'est donc bien une sigmoïde.

$\pi(\gamma, p)$ est bien une probabilité car :

- $\gamma, p \rightarrow +\infty$ alors $\pi(\gamma, p) \rightarrow 1$ et $\gamma, p \rightarrow -\infty$ alors $\pi(\gamma, p) \rightarrow 0$ donc $\pi(\gamma, p) \in [0, 1]$
- $\pi(K) = 1$
- $\pi((\gamma_i, p_i) \cup (\gamma_j, p_j)) = \pi(\gamma_i, p_i) + \pi(\gamma_j, p_j)$. Par indépendance des observations.

Cependant, nous avons deux inconnues, β_0 , β_1 et β_2 dans l'égalité et pour les trouver, nous allons utiliser la méthode du maximum de vraisemblance (maximum likelihood).

II.2.2 Estimation des coefficients : Maximum de vraisemblance

Pour estimer les coefficients de notre probabilité II.2.1, nous allons utiliser la méthode du maximum de vraisemblance [1] en remarquant, d'une part, que Y suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\pi(X))$, car $Y \in 0, 1$, de paramètre $p = \pi(X)$. Ainsi, nous pouvons écrire, avec Y_i un individus et y_i le résultat de l'observation et en posant : $h(x_i) = \left(\frac{\exp(\beta_0 + \beta_1\gamma_i + \beta_2p_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1\gamma_i + \beta_2p_i)}\right)$, $\vec{\beta}$ le vecteur $(\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ et $x_i = (\gamma_i, p_i)$

$$\mathbb{P}(Y_i = y_i) = \pi(\gamma_i, p_i)^{y_i} [1 - \pi(\gamma_i, p_i)]^{1-y_i} = h(x_i)^{y_i} [1 - h(x_i)]^{1-y_i} \quad (\text{II.3})$$

D'autre part, la vraisemblance est la probabilité d'observer l'échantillon donc :

$$L = \mathbb{P}(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_i = y_i) = \prod_{i=1}^n \pi(\gamma_i, p_i)^{y_i} [1 - \pi(\gamma_i, p_i)]^{1-y_i} = \prod_{i=1}^n h(x_i)^{y_i} [1 - h(x_i)]^{1-y_i} \quad (\text{II.4})$$

Où nous avons utilisé le fait que les observations soient indépendantes entre elles et II.3.

Il nous reste donc à calculer le maximum de L , voir II.4 en β_0 , β_1 et β_2 . Pour simplifier, nous pouvons prendre le logarithme népérien et, comme c'est une fonction strictement croissante, le calcul du maximum revient au même.

$$l(\vec{\beta}) = \log(L(\vec{\beta})) = \sum_{i=1}^n [y_i \log(h(x_i)) + (1 - y_i) \log(1 - h(x_i))] \quad (\text{II.5})$$

Ce qui revient à calculer le gradient de $l(\vec{\beta})$: $\nabla l(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial l}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial l}{\partial \beta_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i + h(x_i) \\ \sum_{i=1}^n (y_i + h(x_i))\gamma_i \\ \sum_{i=1}^n y_i + h(x_i)p_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ et trouver

quand il s'annule. De cette façon, nous obtiendrons β_0 , β_1 et β_2 . Cependant, cette équation n'a pas de solution sous forme close. Par conséquent, nous chercherons à les estimer par la méthode de Newton-Raphson [3] qui repose sur la formule, en dimension n , de la tangente au vecteur x_n ² : $x_{n+1} = x_n - \nabla f(x_n)^{-1} f(x_n)$.

Comme la fonction II.5 est strictement concave, elle admet un unique maximum donc, la solution ci-dessus est unique.

En effectuant la substitution : $f(x_n) = \nabla l(\vec{\beta}^{(n)})$, nous obtenons :

$$\vec{\beta}^{(n+1)} = \vec{\beta}^{(n)} - H_{l(\vec{\beta}^{(n)})}^{-1} \nabla l(\vec{\beta}^{(n)}) \quad (\text{II.6})$$

2. $f(x_{n+1}) = f(x_n) + \nabla f(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$.

avec :

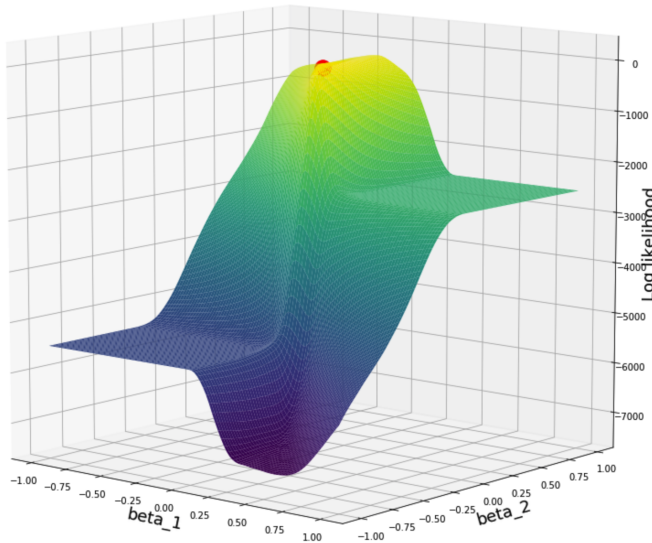
$$\begin{aligned}
H_{l(\vec{\beta}^{(n)})} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial (\beta_0^{(n)})^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_0^{(n)} \beta_1^{(n)}} & \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_0^{(n)} \beta_2^{(n)}} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_1^{(n)} \beta_0^{(n)}} & \frac{\partial^2 l}{\partial (\beta_1^{(n)})^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_1^{(n)} \beta_2^{(n)}} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_2^{(n)} \beta_0^{(n)}} & \frac{\partial^2 l}{\partial \beta_2^{(n)} \beta_1^{(n)}} & \frac{\partial^2 l}{\partial (\beta_2^{(n)})^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n h(x_i)(1-h(x_i)) & \sum_{i=1}^n h(x_i)(1-h(x_i))\gamma_i & \sum_{i=1}^n h(x_i)(1-h(x_i))p_i \\ \sum_{i=1}^n h(x_i)(1-h(x_i))\gamma_i & \sum_{i=1}^n h(x_i)(1-h(x_i))\gamma_i\gamma_i & \sum_{i=1}^n h(x_i)(1-h(x_i))\gamma_i p_i \\ \sum_{i=1}^n h(x_i)(1-h(x_i))p_i & \sum_{i=1}^n h(x_i)(1-h(x_i))p_i\gamma_i & \sum_{i=1}^n h(x_i)(1-h(x_i))p_i p_i \end{pmatrix} \quad (II.7)
\end{aligned}$$

la Hessienne dans $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, et $\vec{\beta}^{(n)}$ le vecteur des coefficients à l'étape n de l'itération.

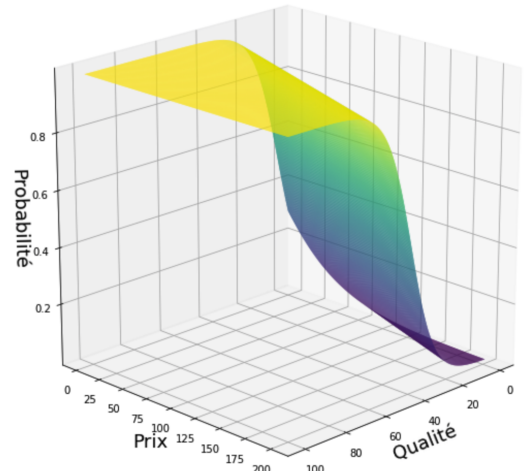
Pour le calcul avec les 31826 observations de la partie II.1.3, nous obtenons les estimations suivantes pour nos coefficients³ :

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= 2.0971983195480335 \\
\beta_1 &= 0.04954822316340974 \\
\beta_2 &= -0.029543448551370134
\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons notre courbe du logarithme de vraisemblance, II.2c, qui est bien concave et a bien un maximum en le point $(2.097, 0.0495, -0.0295)$, représenté en rouge sur le graphique, que nous avons calculé. De plus, nous avons aussi notre courbe de probabilité, II.2d, qui est bien une sigmoïde dans \mathbb{R}^3 .



(c) Graphique de la fonction II.5 selon β_1, β_2 ⁴



(d) Probabilité en fonction de γ et p

3. Ce résultat dépend bien sûr des observations qui ont elles-mêmes des qualités et prix attribués aléatoirement donc, les coefficients peuvent varier. Cependant, cela n'influe pas sur le résultat final ni le raisonnement

III – Recherche du bénéfice maximal

Maintenant que nous avons modélisé la probabilité qu'une personne ayant pour paramètres, son opinion, γ , de la qualité de la compagnie aérienne et le prix p du billet, nous voulons maximiser le bénéfice. En d'autres mots, nous cherchons le prix optimal selon le nombre de jours et de billets restants. Pour le résoudre, il existe différentes approches mais nous avons décidé d'utiliser l'équation de Bellman.

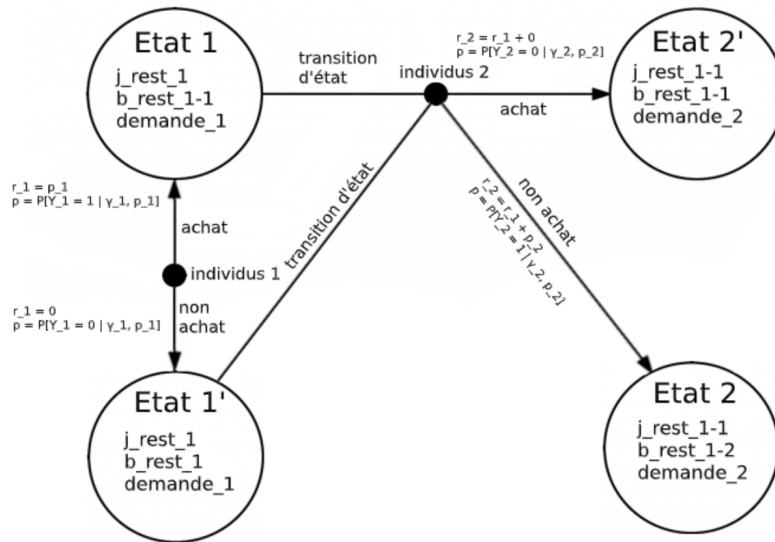
III.1 Équation de Bellman

Nous allons introduire d'abord les chaînes de Markov ainsi que le processus de décision markovien.

III.1.1 Chaîne de Markov et processus de décision markovien

La chaîne de Markov est un modèle mathématique où il y a des transitions d'états, s , avec des règles probabilistes. Par exemple, deux états, E et A , où la probabilité d'arriver à l'état A depuis E est 70%.

Avec cette information, nous pouvons définir le processus de décision markovien, qui est une extension d'une chaîne de Markov dans des environnements plus complexes. En effet, nous ajoutons cette fois-ci la possibilité de faire un choix, dans chaque étape, appelée action, a , et une récompense R qui est la réaction de l'environnement d'un état à un autre après avoir effectué une action a .



(a) Processus décision markovien

Dans cette figure, nous avons représenté l'environnement de notre cas d'étude lorsque nous vendons un billet par jour. Nous remarquons plusieurs choses :

- La probabilité de passer d'un état à un autre est toujours égale à 1 : . Les uniques cas où elle est égale à 0 est quand la demande est nulle et quand il n'y a plus de jours ou de billets restants mais, dans ce cas, nous arrêtons notre simulation. Ainsi, nous pouvons considérer que la probabilité de transition d'un état s_t s_{t+1} en prenant une action a_t : $\mathbb{P}[s_{t+1}|s_t, a_t] = 1$
- La récompense finale est la somme de toutes les récompenses dans chaque état s . $R_t = \sum_{i=0}^n r_{t+i} = r_{t+1} + R_{t+1}$
- Finalement, chaque action a à l'état s est prise en fonction de la probabilité d'achat $p = \mathbb{P}[Y_i = 1|\gamma_i]$ que nous avons défini dans la section II.2. Nous appellerons cette probabilité **stratégie**, notée : $\pi(s, a)$. De cette façon, notre objectif est donc de trouver la stratégie qui maximise notre récompense. Comme c'est une probabilité, la somme de toutes les actions à l'état s est bien égale à 1 : $\sum_a \pi(s, a) = 1$

III.1.2 Fonctions Valeurs

Il nous reste plus qu'à créer deux fonctions qui nous permettront de mesurer l'impact positif d'un état ou d'une action. Nous avons décidé de les définir ainsi :

- **Fonction valeur de l'état** : $V^\pi(s) = \mathbb{E}[R_t|s_t]$
- **Fonction valeur de l'action** : $Q^\pi(s, a) = \mathbb{E}[R_t|s_t, a_t]$

La première correspond à la récompense totale attendue, selon une stratégie π , quand nous sommes à l'état s_t . La deuxième est la récompense totale attendue, en fonction d'une stratégie π , quand nous sommes dans un état s_t et nous prenons une action a_t .

Développons les deux fonctions :

$$\begin{aligned} V^\pi(s) &= \mathbb{E}[R_t|s_t] = \mathbb{E}[r_{t+1} + R_{t+1}|s_t] = \mathbb{E}[r_{t+1}|s_t] + \mathbb{E}[R_{t+1}|s_t] \\ &= \sum_a \pi(s, a) \sum_{s_{t+1}} R_{s_t, s_{t+1}}^a + \sum_a \pi(s, a) \sum_{s_{t+1}} V^\pi(s_{t+1}) \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

$$\begin{aligned} Q^\pi(s, a) &= \mathbb{E}[R_t|s_t, a_t] = \mathbb{E}[r_{t+1} + R_{t+1}|s_t, a_t] = \mathbb{E}[r_{t+1}|s_t, a_t] + \mathbb{E}[R_{t+1}|s_t, a_t] \\ &= \sum_{s_{t+1}} R_{s_t, s_{t+1}}^a + \sum_{s_{t+1}} V^\pi(s_{t+1}) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Cependant, nous cherchons la meilleure action conduisant au meilleur état donc, nous obtenons : $V(s_t) = \max_a Q(s_t, a)$. Ainsi :

$$Q(s_t, a_t) = r(s_t, a_t) + \max_{a_{t+1}} Q(s_{t+1}, a_{t+1}) \quad (\text{III.3})$$

Ainsi, nous avons bel et bien l'équation de Bellman. Elle nous dit que la valeur d'une action a dans un état s est la récompense immédiate que nous obtenons en prenant telle action, à laquelle nous ajoutons le maximum de la récompense attendue dans l'état suivant.

III.2 Maximisation de la récompense

III.2.1 Étapes initiales

Comme nous l'avons dit précédemment, la fonction valeur de l'état, $V^\pi(s)$ nous donne la récompense totale attendue. Par conséquent, notre objectif est de trouver son maximum. Ainsi, nous pouvons l'écrire, en posant x_t le nombre de places restantes le jour t , p_t le prix du jour t et q_t la probabilité définie dans la sous-partie II.2 :

$$\begin{aligned} V_t(x_t) &= \max_p [q_t(p_t + V_t(x_t - 1)) + (1 - q_t)V_{t-1}(x_t)] \\ &= \max_p [q_t(p_t - X) + V_{t-1}(x_t)][2] \end{aligned}$$

Avec : $X_{t,x_t} = V_{t-1}(x_t) - V_t(x_t - 1)$ et avec les conditions suivantes sur V :

- $V_0(x_t) = 0$ pour tout x_t : le dernier jour nous ne vendons pas de billets donc pas de bénéfice.
- $V_t(0) = 0$ pour tout t : s'il n'y a plus de places restantes, nous ne pouvons plus vendre de billets le restant des jours donc pas de bénéfice.

Posons $\varphi(x_t, p_t) = q_t(p_t - X_{t,x_t})$.

Nous pouvons également exprimer p_t en s'aidant de la formule de la probabilité II.2 :

$$p_t = \frac{1}{\beta_2} \log\left(\frac{q_t}{1 - q_t} - \beta_0 - \beta_1 \gamma_i\right)$$

Nous avons ainsi :

- $V_t(x_t) = \max_p \left[\frac{q_t}{\beta_2} \left(\log \frac{q_t}{1 - q_t} - \beta_0 - \beta_1 \gamma_i - X_{t,x_t} \right) + V_{t-1}(x_t) \right]$
- $\varphi(x_t, p_t) = \frac{q_t}{\beta_2} \left(\log \frac{q_t}{1 - q_t} - \beta_0 - \beta_1 \gamma_i - X_{t,x_t} \right)$

Cherchons le maximum de la fonction $\varphi(x_t, p_t)$ en q_t , en démontrant, d'abord, qu'elle est concave (donc son maximum existe et est unique) et ensuite en cherchant ce maximum en calculant la solution quand la dérivée partielle est nulle. Exprimons la dérivée partielle $\frac{\partial \varphi(x_t, p_t)}{\partial q_t}$:

$$\frac{\partial \varphi(x_t, p_t)}{\partial q_t} = \frac{\log \frac{q_t}{1-q_t} - \beta_0 - \beta_1 \gamma_i + \frac{1}{1-q_t}}{\beta_2} - X_{t,x_t} \quad (\text{III.4})$$

Exprimons maintenant la dérivée partielle seconde $\frac{\partial^2 \varphi(x_t, p_t)}{\partial q_t^2}$:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x_t, p_t)}{\partial q_t^2} = \frac{1}{\beta_2 q_t (1 - q_t)^2} \quad (\text{III.5})$$

Or,

- $\beta_2 < 0$
- $q_t \in [0, 1]$
- $(1 - q_t)^2 > 0$ pour tout $q_t \in [0, 1]$

Ainsi, $\frac{\partial^2 \varphi(x_t, p_t)}{\partial q_t^2} < 0$ donc $\varphi(x_t, q_t)$ est concave en q_t . Le maximum existe et est unique. Nous pouvons le trouver en calculant la solution de : $\frac{\partial \varphi(x_t, p_t)}{\partial q_t} = 0$.

III.2.2 Recherche du maximum

$$\frac{\partial \varphi(x_t, p_t)}{\partial q_t} = \frac{q_t}{(1 - q_t)} \exp\left(\frac{1}{1 - q_t}\right) - \exp(\beta_2 X_{t,x_t} + \beta_0 + \beta_1 \gamma_i) = 0 \quad (\text{III.6})$$

En remplaçant la dérivée partielle par son expression, III.4. La solution de III.6 est unique. En effet, en posant : $\Phi(q_t) = \frac{\partial \varphi(x_t, p_t)}{\partial q_t}$, nous avons :

- $\frac{\partial \Phi(q_t)}{\partial q_t} = \frac{1}{(1 - q_t)^2} \exp\left(\frac{1}{1 - q_t}\right) \left(1 + \frac{q}{1 - q_t}\right) > 0$ car $q_t \in [0, 1]$. Donc Φ est strictement croissante.
- $\Phi(0) < 0$ et $\Phi(+\infty) = +\infty$ par croissances comparées.

Donc, par le Théorème des Valeurs Intermédiaires, $\Phi(q_t) = 0$ admet une unique solution q_t^* ¹ que nous devons, à nouveau, estimer car il n'y a pas d'expression sous forme close. Ainsi, nous obtenons le prix optimal et le bénéfice optimal pour le nombre de places choisies :

- $p_t^* = \frac{1}{\beta_2} \log\left(\frac{q_t^*}{1 - q_t^*}\right) - \beta_0 - \beta_1 \gamma_i$
- $V_t^*(x_t) = q_t^*(p_t^* - X_{t,x_t}) + V_{t-1}(x_t)$

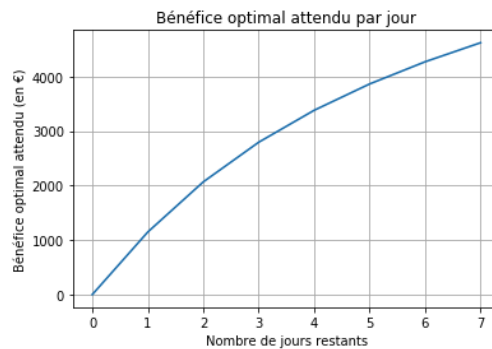
Ayant fait l'hypothèse que la demande du jour suit la même distribution que nos observations, nous supposons que la moyenne de la qualité de l'ensemble des individus constituant la demande du jour et celle des observations est la même. Par conséquent, nous prenons : $\gamma_i = 64.32$.

1. q_t^* dépend de la qualité de l'individu, des jours restants et des billets restants. Nous avons ainsi un tableau de probabilités optimales pour chaque cas similaire à celui dans III.1b des prix. Il est important de remarquer que le fait que nous obtenons un prix optimal ne veut pas dire qu'il y aura nécessairement une personne qui achètera à ce prix là. Effectivement, si nous voulons ce cas précis, nous devons prendre une probabilité supérieure à, par exemple, 0.50 ou 0.75 mais nous n'aurons pas le prix optimal sinon celui pour lequel nous pouvons être sûrs d'avoir des chances de vendre le billet.

Finalement, pour une valeur $T = 7$ et 50 sièges, nous obtenons :

	t0	t1	t2	t3	t4	t5	t6	t7	Moyenne
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1	0.0	146.87	187.0	210.06	225.85	237.72	247.17	255.01	188.71
2	0.0	123.02	159.88	182.03	197.46	209.16	218.52	226.3	164.55
3	0.0	110.02	144.48	165.9	181.02	192.57	201.84	209.56	150.67
4	0.0	101.27	133.82	154.6	169.45	180.85	190.05	197.72	140.97
5	0.0	94.77	125.71	145.93	160.54	171.82	180.94	188.57	133.54
6	0.0	89.66	119.21	138.93	153.3	164.47	173.53	181.12	127.53
7	0.0	85.49	113.81	133.06	147.23	158.28	167.27	174.82	122.5
8	0.0	81.98	109.21	128.04	142.0	152.94	161.87	169.38	118.18
9	0.0	78.98	105.2	123.64	137.42	148.26	157.12	164.59	114.4
10	0.0	76.37	101.68	119.74	133.33	144.08	152.89	160.32	111.05
11	0.0	74.07	98.53	116.24	129.66	140.31	149.07	156.46	108.04
12	0.0	72.04	95.7	113.07	126.33	136.89	145.59	152.95	105.32
13	0.0	70.21	93.12	110.17	123.28	133.75	142.4	149.72	102.83
14	0.0	68.55	90.78	107.52	120.47	130.85	139.45	146.74	100.54
15	0.0	67.04	88.61	105.06	117.86	128.17	136.71	143.97	98.43
16	0.0	65.67	86.62	102.78	115.44	125.66	134.16	141.39	96.46
17	0.0	64.41	84.76	100.65	113.18	123.32	131.77	138.97	94.63
18	0.0	63.24	83.04	98.66	111.05	121.12	129.51	136.68	92.91
19	0.0	62.16	81.42	96.8	109.05	119.04	127.39	134.53	91.3
20	0.0	61.17	79.91	95.04	107.16	117.08	125.38	132.49	89.78
21	0.0	60.24	78.49	93.37	105.37	115.21	123.48	130.55	88.34
22	0.0	59.37	77.15	91.8	103.67	113.44	121.66	128.71	86.98
23	0.0	58.56	75.88	90.31	102.06	111.76	119.93	126.95	85.68
24	0.0	57.8	74.69	88.89	100.52	110.15	118.28	125.27	84.45
25	0.0	57.09	73.55	87.53	99.04	108.61	116.7	123.66	83.27
26	0.0	56.42	72.47	86.24	97.64	107.14	115.19	122.12	82.15
27	0.0	55.79	71.45	85.01	96.3	105.72	113.73	120.64	81.08
28	0.0	55.19	70.47	83.83	95.0	104.37	112.34	119.21	80.05
29	0.0	54.63	69.54	82.7	93.76	103.06	110.99	117.84	79.06
30	0.0	54.09	68.65	81.62	92.57	101.8	109.69	116.52	78.12
31	0.0	53.58	67.8	80.58	91.42	100.6	108.44	115.24	77.21
32	0.0	53.1	66.99	79.57	90.31	99.42	107.23	114.01	76.33
33	0.0	52.64	66.2	78.61	89.25	98.29	106.06	112.81	75.48
34	0.0	52.21	65.45	77.68	88.21	97.2	104.93	111.65	74.67
35	0.0	51.8	64.74	76.79	87.22	96.14	103.83	110.53	73.88
36	0.0	51.41	64.05	75.92	86.25	95.12	102.77	109.44	73.12
37	0.0	51.03	63.39	75.09	85.32	94.13	101.74	108.38	72.39
38	0.0	50.68	62.75	74.28	84.42	93.16	100.74	107.36	71.67
39	0.0	50.33	62.13	73.5	83.54	92.23	99.76	106.36	70.98
40	0.0	50.01	61.54	72.75	82.69	91.32	98.82	105.39	70.32
41	0.0	49.69	60.97	72.02	81.86	90.44	97.9	104.44	69.66
42	0.0	49.4	60.42	71.31	81.06	89.58	97.0	103.52	69.04
43	0.0	49.12	59.89	70.62	80.28	88.74	96.13	102.63	68.43
44	0.0	48.84	59.38	69.96	79.52	87.92	95.28	101.75	67.83
45	0.0	48.59	58.88	69.31	78.79	87.13	94.44	100.89	67.25
46	0.0	48.34	58.4	68.69	78.07	86.35	93.63	100.06	66.69
47	0.0	48.1	57.94	68.07	77.37	85.6	92.85	99.24	66.15
48	0.0	47.87	57.49	67.48	76.69	84.87	92.07	98.45	65.61
49	0.0	47.65	57.06	66.91	76.02	84.15	91.32	97.67	65.1
50	0.0	47.44	56.64	66.35	75.38	83.45	90.58	96.91	64.59

(b) Prix optimal par nombre de sièges, par jour



(c) Bénéfice accumulé que l'on pourrait espérer chaque jour pour chaque nombre de sièges

IV – Discussion des résultats et Conclusion

Dans la partie informatique du projet, nous avons programmé, au total, trois façons (incluant celle décrite dans ce rapport) de résoudre ce problème d’optimisation. Nous avons choisi comme paramètres : la demande du jour est prise uniformément entre 1 et 10, 7 jours restants et 50 billets restants.

La première, probabiliste, consiste à fixer un prix en fonction de la probabilité que la demande du jour suivant soit plus élevée. En effet, plus elle est haute, plus nous augmenterons le prix du jour, pour vendre moins de billets donc, qu’on en ait plus à vendre le jour suivant. Avec cette méthode, nous obtenons un bénéfice moyen de : **704.48€** sur 10000 simulations. L’avantage de cette méthode est qu’elle nous donne un ordre de grandeur des bénéfices que nous pouvons espérer mais elle est loin d’être optimale.

La deuxième méthode, similaire à celle décrite dans ce rapport, consiste à calculer tous les bénéfices possibles en fonction de chaque prix, chaque niveau demande, chaque nombre de billets restants et chaque jour restant. Ainsi, nous obtenons un bénéfice moyen de : **8305.97€** sur 10000 simulations. L’avantage de cette méthode est qu’elle nous permet d’avoir une estimation précise grâce au calcul de tous les cas possibles. Cependant, elle est loin d’être proche de la réalité car le prix, chaque jour, reste constant autour du maximum vu que nous sommes intéressés que par le bénéfice immédiat sans vraiment punir des prix élevés qui pourraient dissuader les acheteurs. D’autre par, les compagnies aériennes changent le prix en fonction des jours restants et des sièges restants. Ainsi, un prix fixe n’est pas forcément le plus réaliste, ni le meilleur.

La troisième méthode, que nous avons expliqué le long de ce rapport, nous donne un bénéfice optimal de : **4618.03€**. Cette dernière semble être la plus proche de la réalité et du concept des prix dynamiques où, nous prenons en compte différents paramètres qui influencent directement sur le prix des billets : perception moyenne de la qualité, jours restants et prix. D’autre part, les prix varient le long de la journée en fonction du nombre de sièges restants qui est une des stratégies adoptées par les compagnies aériennes. Nous remarquons plusieurs choses : la distance du trajet n’influe pas sur le prix attribué, plus l’opinion des acheteurs sur la compagnie est bonne, plus le prix sera élevé, connaissant l’intervalle des prix auquel les individus seraient prêts à acheter, nous pouvons trouver les prix pour notre billet. Ce dernier point est particulièrement intéressant pour étudier, par exemple, sur une longue période, les prix d’une compagnie aérienne existante et voir s’ils sont optimaux. Dans notre cas, vu les circonstances actuelles avec le COVID-19, il est compliqué de faire une comparaison avec la réalité.

Par contre, notre modèle pourrait être amélioré de plusieurs façons :

- Prendre en compte la concurrence afin de proposer des prix qui attireraient plus compétitifs.
- Ajouter des paramètres supplémentaires à la probabilité d’achat. Par exemple : numéros de consultations du billet (plus la personne consulte, plus elle est intéressée donc la probabilité augmente) ou la tendance des voyageurs.
- Diversifier la gamme de classes de sièges : économie, affaire et première avec des prix en accord avec les services offerts.
- Obtenir ou réaliser des sondages plus fréquents auprès d’anciens passagers afin d’avoir une opinion à jour et avoir des intervalles de prix plus précis.
- Fixer les prix selon les vacances et jours fériés.

En conclusion, ce rapport présente une nouvelle approche mathématique du problème d’optimisation des prix des billets afin de maximiser les bénéfices d’une compagnie aérienne. D’une part, nous avons modélisé la probabilité d’achat d’un billet d’avion en fonction de la qualité et du prix en exprimant le logarithme du rapport $\frac{\mathbb{P}(Y=1|\gamma,p)}{\mathbb{P}(Y=0|\gamma,p)}$, qui est l’hypothèse fondamentale de la régression logistique binaire, et nous donne une fonction sigmoïde. Pour calculer les coefficients de cette application, nous avons utilisé la méthode du maximum du logarithme de vraisemblance et avons obtenu une estimation grâce à la méthode de Newton-Raphson. Une fois cette probabilité calculée, nous avons nécessaires tous les outils pour trouver les prix et bénéfices optimaux en fonction de la qualité des personnes. En utilisant l’équation de Bellman, nous avons trouvé une expression de la valeur de la probabilité q_t qui maximise le prix, p_t^* , et le bénéfice espéré, V_t^* . Par exemple, quand il reste un jour et 5 billets à vendre, $q_1 = 0.8925$ ce qui donne $p_1 = 80.56\text{€}$ pour le 5ème siège et $V_1(5) = 307.25$ comme bénéfice que l’on peut espérer accumuler. Enfin, après application de la formule dans un cas concret, nous obtenons le tableau III.1b qui finalise, ainsi, notre étude.

V – Bibliographie

- [1] TALLURI, Kalyan ; VAN RYZIN Garrett, **"The Theory and Practice of Revenue Management"**., Springer, 2004
- [2] ALDERIGHI, Marco ; GAGGERO, Alberto ; PIGA, Claudio, **"The hidden side of dynamic pricing in airline markets"**. 2016. Lien : https://mpra.ub.uni-muenchen.de/76977/1/MPRA_paper_76977.pdf
- [3] WAHDE, M., **"Biologically Inspired Optimization Methods - An Introduction"**. WIT Press, 2008.
- [4] ROBUSTO, C. C., **"The Cosine-Haversine Formula"**. The American Mathematical Monthly, 1957.
- [5] NUNES, Abraham, **"Newton-Raphson Logistic Regression"**. 2018. Lien : <http://doi.org/10.5281/zenodo.1211725>