Práctica 9: Teorema Central del Límite

Martínez Ostoa Néstor LCD 32

11/12/2020

1. Simulación de una variale $N(0,1)$ a partir de binomiales $Bin(n,p)$

Utilizando el teorema del límite central

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} X_i \ - k\mu}{\sqrt{k\sigma^2}}$$

generamos ocho histogramas de $10,000$ variables aleatorias normales con los parámetros mostrados en las figuras siguientes.

El código utilizado para generar una variable Z fue el siguiente:

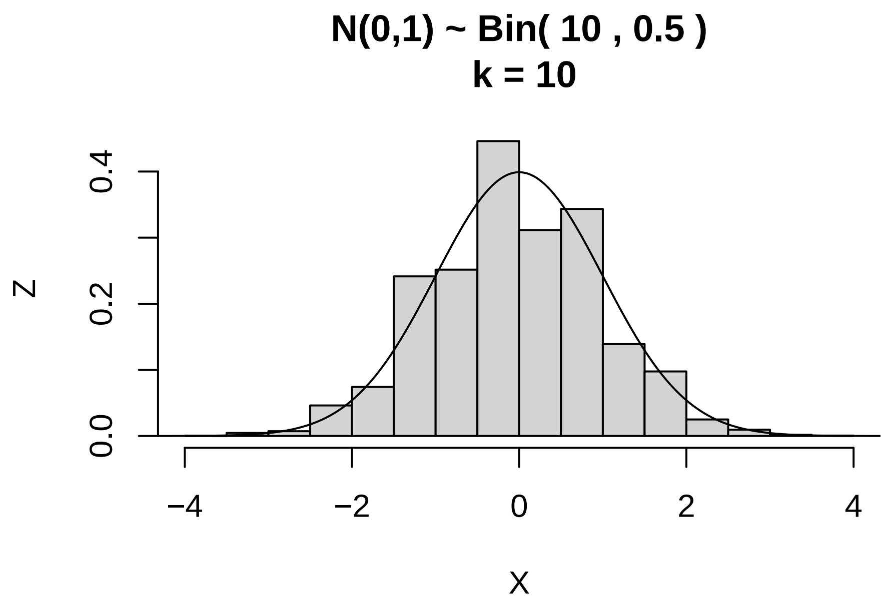
```
Z <- function(n, p, k) {
  bin <- rbinom(n, k, p)
  mu_k <- k*n*p
  sigma_k <- sqrt(k*n*p*(1-p))
  z <- (sum(bin) - mu_k) / sigma_k
  return (z);
}
```

El código utilizado para hacer la comparación entre la distribución normal y la aproximación por medio de la binomial fue el siguiente:

```
bin_vs_norm <- function(N, n, p, k) {
  Z_vec <- c()
  for (i in 1:N) {
    Z_vec <- c(Z_vec, Z(n, p, k))
  }
  hist(Z_vec, probability = TRUE, xlab = 'X', ylab = 'Z',
       main = paste('N(0,1) ~ Bin(',n,',',p,')\n k =', k));
  sop <- seq(-6, 6, length.out=1000)
  par(new = TRUE)
  lines(sop, dnorm(sop))
}
```

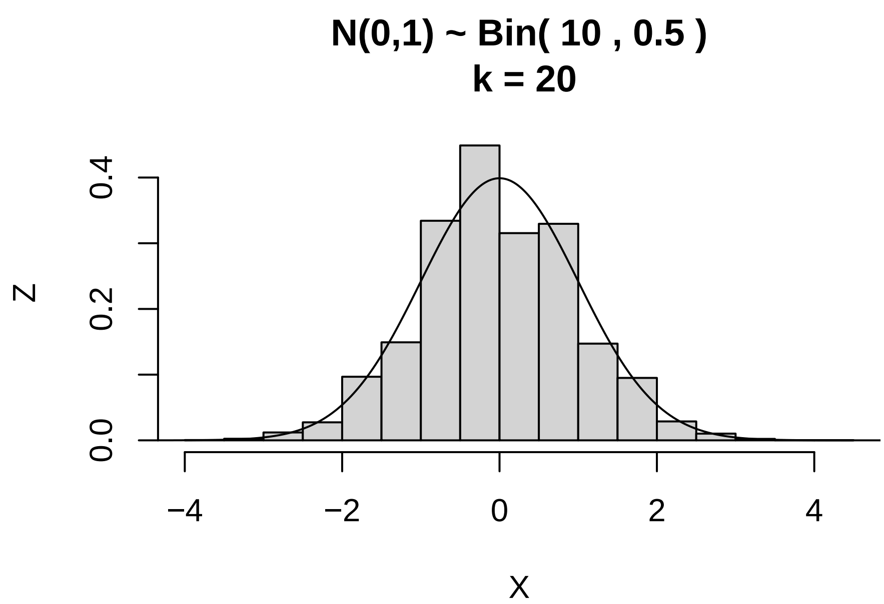
Los histogramas son los siguientes, todos consideran $N = 10000$: $n = 10, p = 0.5, k = 10$

```
N = 10000
bin_vs_norm(N,10, 0.5, 10)
```



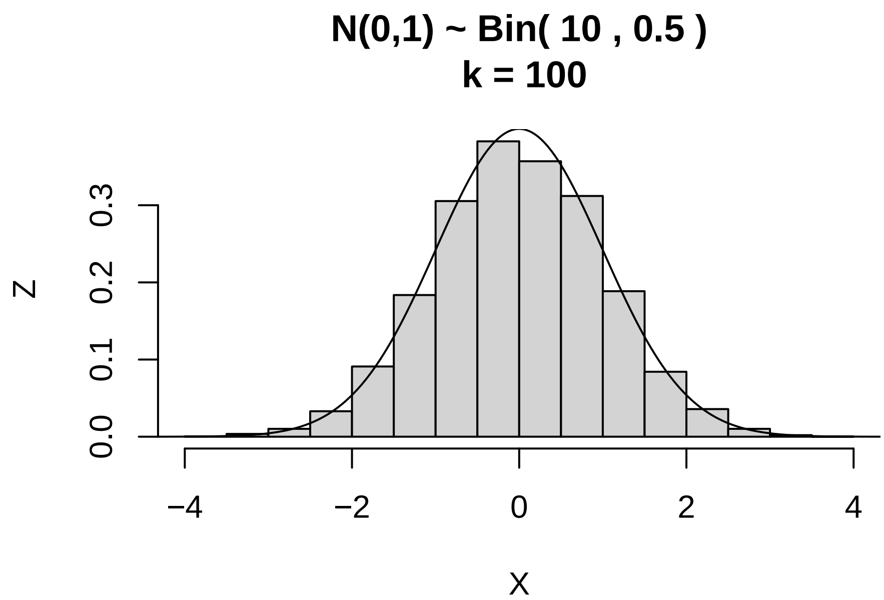
$n = 10, p = 0.5, k = 20$

```
bin_vs_norm(N,10, 0.5, 20)
```



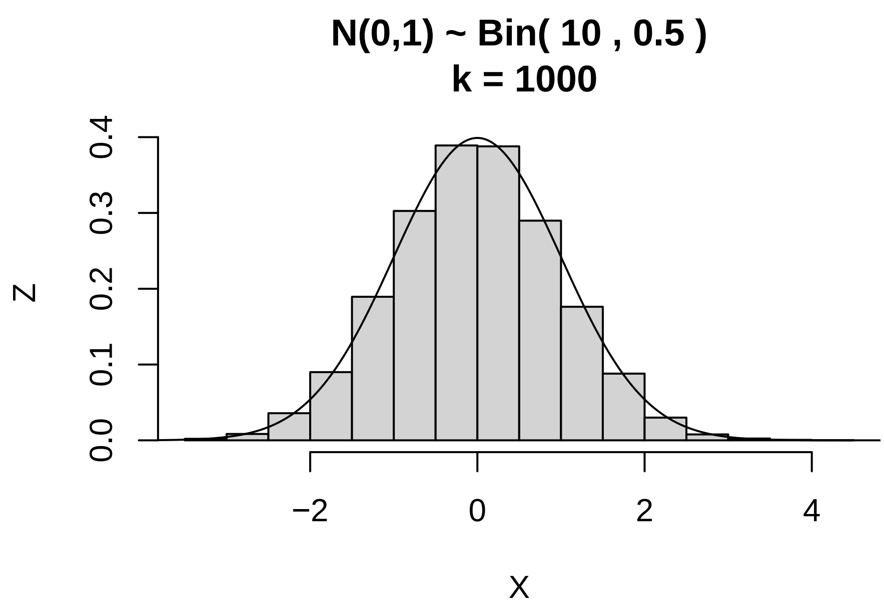
$n = 10, p = 0.5, k = 100$

```
bin_vs_norm(N,10, 0.5, 100)
```



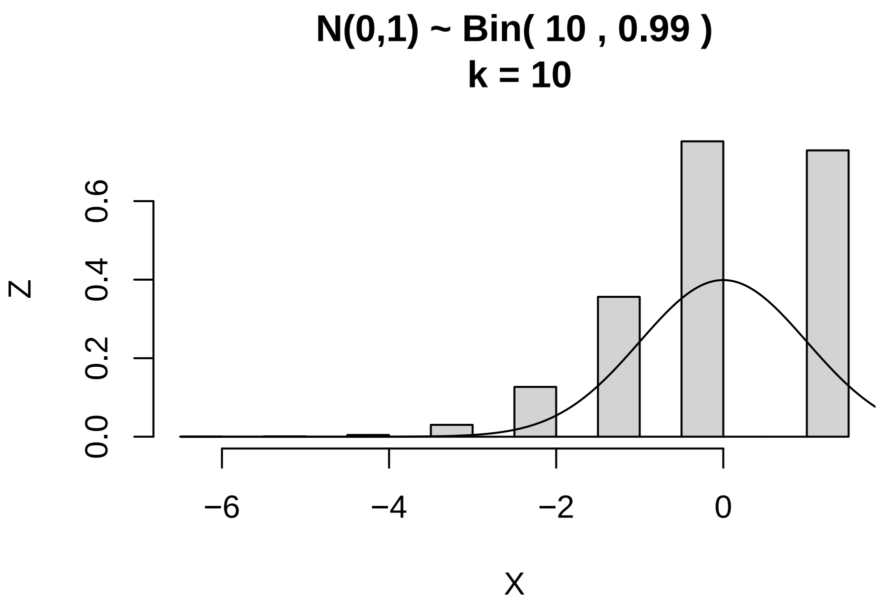
$n = 10, p = 0.5, k = 1000$

```
bin_vs_norm(N,10, 0.5, 1000)
```



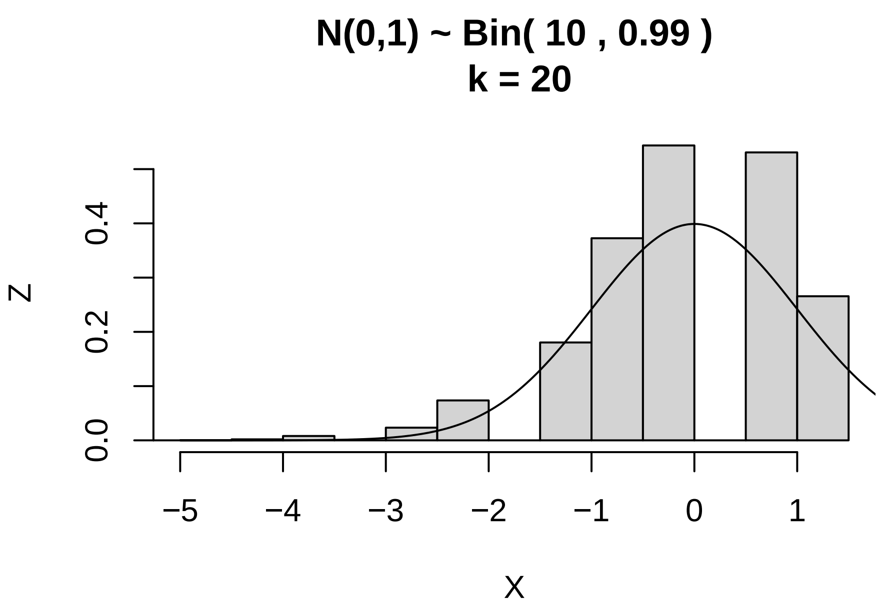
$n = 10, p = 0.99, k = 10$

```
bin_vs_norm(N,10, 0.99, 10)
```



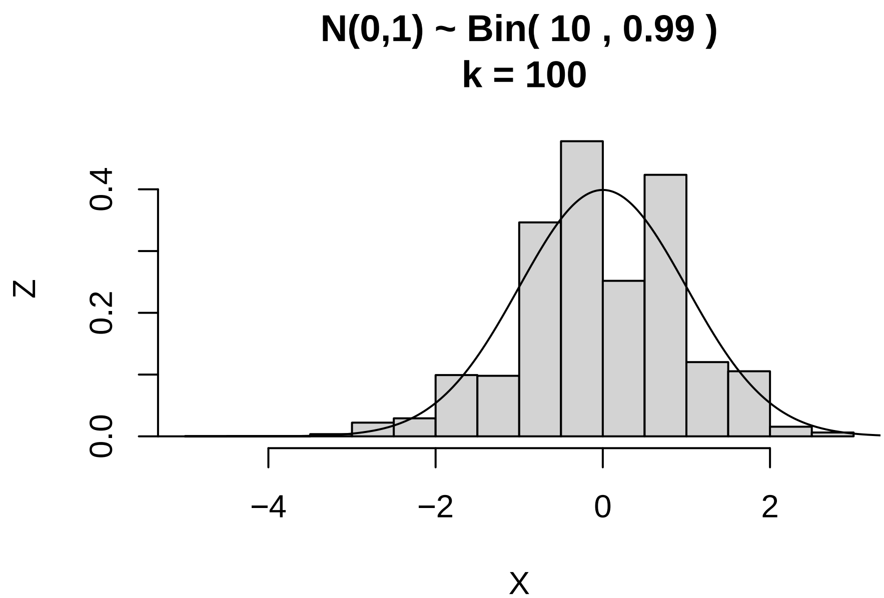
$n = 10, p = 0.99, k = 20$

```
bin_vs_norm(N,10, 0.99, 20)
```



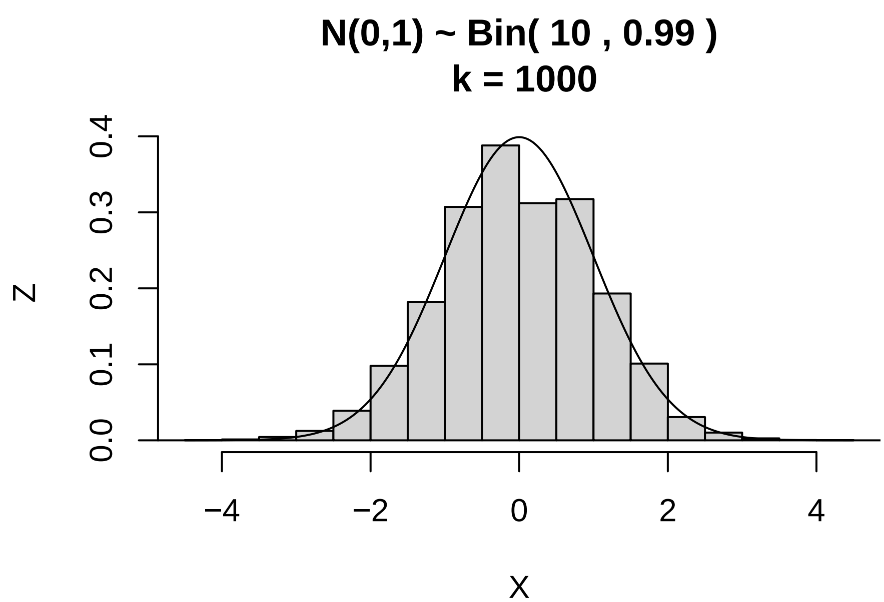
$n = 10, p = 0.99, k = 100$

```
bin_vs_norm(N,10, 0.99, 100)
```



$n = 10, p = 0.99, k = 1000$

```
bin_vs_norm(N,10, 0.99, 1000)
```



2. Velocidad de convergencia

De las gráficas anteriores vemos con facilidad que $Ber(n, 0.5)$ converge más rápido que $Ber(n, 0.99)$. Lo anterior lo atribuyo a dos razones principales:

1. Una variable aleatoria con distribución Bernoulli tiene como esperanza $E(X) = np$ por lo que sin importar la n, una p mayor o menor que 0.5 siempre taradará más en converger que $p = 0.5$ ues su valor esperado está más alejado del valor esperado de la distribución $N(0, 1)$ que tiene un valor medio de 0.5.
2. Por otro lado, vemos que para n suficientemente grande, la distribución $Ber(1000, 0.99)$ sí converge con mayor precisión a la $N(0, 1)$. El hecho de que eventualmente la distribución Bernoulli converga se debe a la ley de los grandes números que nos indica que para una cantidad grande de experimentos, la media de esos experimentos tenderá al valor esperado, en este caso, 0.5.