# Práctica 14: Cadenas de Markov

## Probabilidad Aplicada y Simulación Estocástica

I.I.M.A.S.

U.N.A.M.

Martínez Ostoa Néstor Iván LCD32

14 de enero del 2021

## 1 Introducción

La cadena de Markov que se trabajará en esta práctica son las urnas de Ehrenfest. Sean A y B dos urnas dentro de las cuales se encuentran distribuidas un total de $N$ bolas de acuerdo a cierta configuración inicial, por ejemplo, la urna A hay $i$ bolas y en la urna B hay $Ni$ bolas. En cada unidad de tiempo se escoge una bola al azar y se cambia de urna. Para tal efecto puede considerarse que las bolas se encuentran numeradas y que se escoge un $n$ numero al azar, se busca la bola con ese $n$ numero y se cambia de urna.

Sea $X_n$ el número de bolas en la urna A al tiempo $n$, entonces la colección $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ constituye una cadena de Markov con espacio de estados finito $\{0, 1, \ldots, N\}$. Este modelo fue propuesto por Ehrenfest para describir el intercambio aleatorio de moléculas en dos regiones separadas por una membrana porosa.

## 2 Ejercicios

### 2.1 Escriba todos los estados de la Cadena de Markov

```
Estado 1: X_10
          ['o', 'o', 'o', 'o', 'o', 'o', 'o', 'o', 'o', 'o']

Estado 2: X_9
          ['o', 'o', 'o', 'o', 'o', 'o', 'o', 'o', 'o']

Estado 3: X_8
```

```
            ['o', 'o', 'o', 'o', 'o', 'o', 'o', 'o']

Estado 4: X_7
            ['o', 'o', 'o', 'o', 'o', 'o', 'o']

Estado 5: X_6
            ['o', 'o', 'o', 'o', 'o', 'o']

Estado 6: X_5
            ['o', 'o', 'o', 'o', 'o']

Estado 7: X_4
            ['o', 'o', 'o', 'o']

Estado 8: X_3
            ['o', 'o', 'o']

Estado 9: X_2
            ['o', 'o']

Estado 10: X_1
            ['o']

Estado 11: X_0
            []
```

## 2.2 Escriba la matriz de transición (y explique claramente de dónde viene la expresión)

Si tenemos $N = 10$:

$$P_{0,1} = 1$$

$$P_{10,9} = 1$$

Para $i = 1, \ldots, 9$:

$$P_{i,j} \begin{cases} (10-i)/10 & \text{si } j = i+1, \\ i/10 & \text{si } j = i-1, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por lo que nos queda la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0909 & 0 & 0.9091 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1818 & 0 & 0.8182 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.273 & 0 & 0.7273 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3636 & 0 & 0.6364 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4545 & 0 & 0.5455 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5455 & 0 & 0.4545 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6364 & 0 & 0.3636 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7273 & 0 & 0.273 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8182 & 0 & 0.1818 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.3 A partir de este ejercicio elige un $N$ y déjalo fijo. Haga un programa que simule y grafique la trayectoria del proceso: Empieza inicialmente como una distribución inicial $\pi_0$, y simula la trayectoria $X_0, X_1, \ldots, X_n$ hasta un tiempo $n$ dado por el usuario

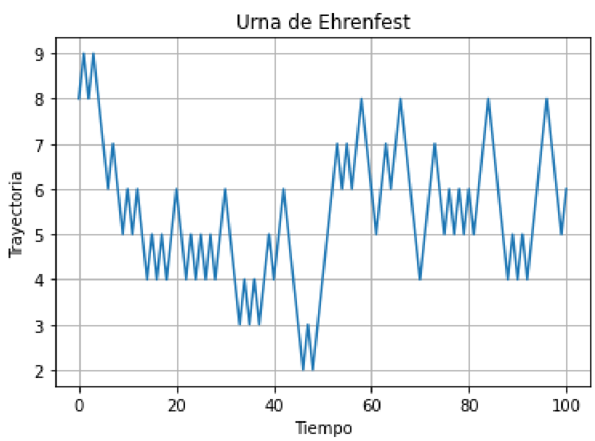


Figura 1: Urna de Ehrenfest hasta un tiempo $n$

**2.4 Haga otro programa que simule la trayectoria del proceso: Empieza inicialmente con una distribución inicial $\pi_0$, y simula la trayectoria $X_0, X_1, ...X_T$ hasta un tiempo aleatorio $T$, definido como la primera vez que el proceso toma el estado fijo $i_0$(el estado $i_0$ está dado por el usuario). Úsalo para contestar las preguntas siguientes**

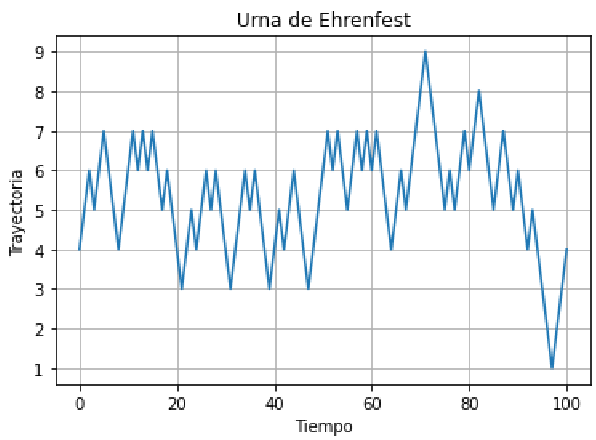


Figura 2: Urna de Ehrenfest hasta un tiempo aleatorio 100

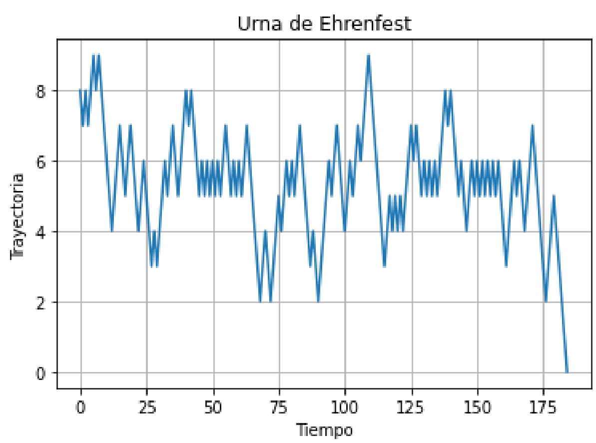


Figura 3: Urna de Ehrenfest hasta un tiempo aleatorio 185

## 2.5 Dado que el proceso empezó en $0$, ¿Cuánto tarda en promedio en llegar al estado $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$?

En promedio para llegar a $\frac{N}{2} = 50$, toma un tiempo de 165 segundos:

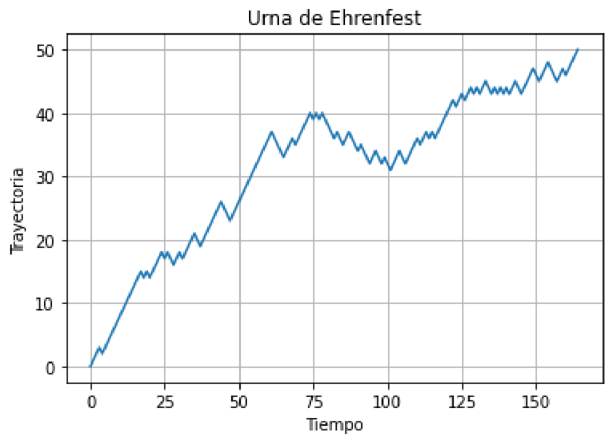


Figura 4: Urna de Ehrenfest desde 0 hasta $\frac{N}{2} = 50$

## 2.6 Dado que el proceso empezó en $0$, ¿Cuánto tarda en promedio en llegar al estado $N$?

En promedio para llegar a $N = 100$, toma un tiempo de 259.44 segundos:

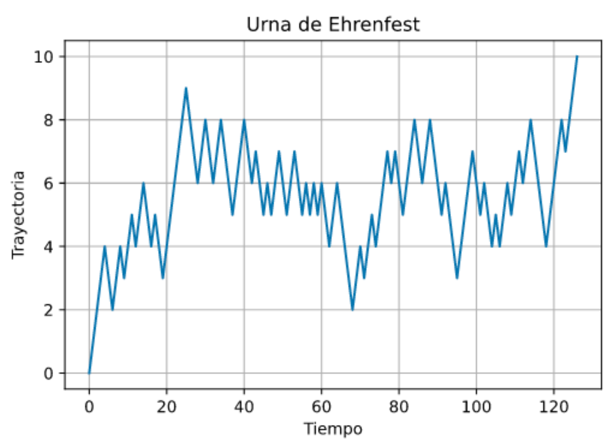


Figura 5: Urna de Ehrenfest desde 0 hasta = 100

## 2.7 Dado que el proceso empezó en $N$, ¿cuánto tiempo tarda en promedio en llegar al estado $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$?

El proceso empezó en $N = 100$ y tomó en promedio 154.324 iteraciones para llegar a $\frac{N}{2} = 50$

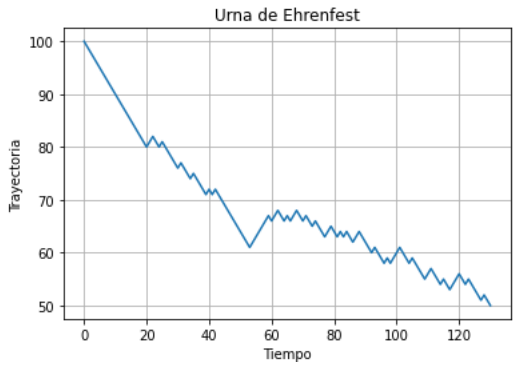


Figura 6: Urna de Ehrenfest desde $N = 100$ hasta $\frac{N}{2} = 50$

## 2.8 Dado que el proceso empezó en $N$, ¿cuánto tiempo tarda en promedio en llegar al estado $0$?

El proceso empezó en $N = 100$ y tomó en promedio 2322.656 iteraciones para llegar a 0

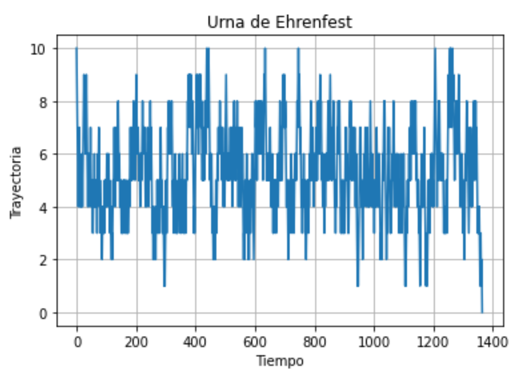


Figura 7: Urna de Ehrenfest desde $N = 100$ hasta 0

### 2.9 Dado $n$ muy grande, calcule la densidad de probabilidades de la variable aleatoria $X_n$ (aproxime por un histograma y después conjeture una densidad conocida con sus parámetros)

Para un $n = 100$:

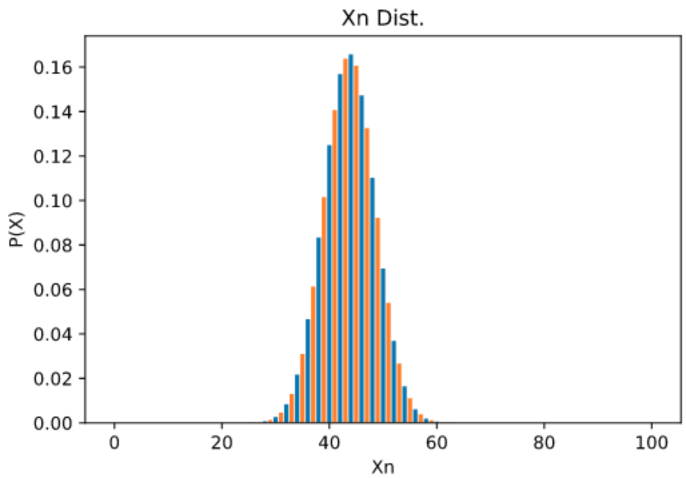


Figura 8: Histograma para $n = 100$

Lo que podemos observar que se comporta con una distribución uniforme.

### 2.10 ¿Qué observas en los resultados de las preguntas $2{,}5 - 2{,}8$?

Lo que se observa es que el tiempo promedio mínimo ocurre para los casos en donde empecemos ya sea en 0 o en $N$ y queramos llegar a $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$. Por otro lado, el tiempo promedio más grande ocurre cuando empecemos en un estado $N$ y queramos llegar a un estado 0, es decir, esperar que la urna A se vacíe por completo. Y en efecto, esperamos que esta sea la que toma más tiempo porque la probabilidad va disminuyendo conforme una bola pasa de la urna A a la urna B.

## Referencias

[1] Rincón, L. Introducción a los Procesos Estocásticos. México: Las prensas de ciencias. 2012