Procesos Estocásticos

1st Néstor Martínez
Licenciatura en Ciencia de Datos
I.I.M.A.S - U.N.A.M.
Ciudad de México, México
nestor.martinez@iimas.unam.mx

***Resumen*—Tarea número dos de la materia Reconocimiento de Patrones impartida por el Dr. Boris Escalanre Ramírez y la Dra. Jimena Montiel Olveres. Esta tarea corresponde con una investigación previa sobre los proceso estocásticos; desde su definición hasta aplicaciones.**

I. Preguntas a contestar

I-A. Diferencias entre variables y vectores aleatorios

I-A1. Variable aleatoria: Informalmente, denominamos una variable aleatoria a un proceso aleatorio tal que el resultado de dicho proceso es un número. Dicho resultado puede tomar valores discretos o continuos. Formalmente, una variable aleatoria la podemos definir como una función de mapeo entre el espacio muestral de un proceso aleatorio y un número real.

Definición: Sea S un espacio muestral asociado con una probabilidad P y sea $X : S \to \mathbb{R}$. Entonces X es una *variable aleatoria* y $P(X \in A) = P(\{s \in S | X(s) \in A\})$

Las variables aleatorias son las herramientas principales para modelar cantidades desconocidas para análisis estadístico. Concretamente, esto se realiza por medio de una distribución, la cual es la probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores en $\mathbb{R}$. Es decir, podemos pensar a la variable aleatoria X como una función real definida en el espacio muestral S.

I-A2. Vectores aleatorios: Como mencionamos en la sección I-A1, una variable aleatoria nos es de interés pues nos ayuda a modelar diversos fenómenos y al encontrar su distribución podemos responder a preguntas de interés en el análisis de datos. Sin embargo, hay fenómenos para los cuales nos interesa caracterizar a más de una variable aleatoria. El conjunto de estas variables aleatorias se le conoce como un vector aleatorio. Una de la suposiciones principales de los vectores aleatorios es que las variables aleatorias son independientes e idénticamente distribuidas.

Denotamos a un vector aleatorio como:

$$X = (X_1, \ldots, X_n)$$

y a parte de que un vector es un conjunto de variables aleatorias, las definiciones de funciones de densidad y densidad conjunta son análogas pero en un espacio $\mathbb{R}^{\ltimes}$.

I-B. Proceso aleatorio

Definición: un proceso aleatorio X es un conjunto $\{X_t : t \in T\}$ de variables aleatorias que mapean el espacio muestral Ω a un conjunto S.

Tanto T como S pueden ser muy variables y las características del proceso aleatorio estarán definidas por estas dos variables. Algunas combinaciones de estas dos variables pueden ser las siguientes:

- $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ o $T = [0, \infty)$
- $S = \mathbb{Z}$ o $S = \mathbb{R}$

I-C. Proceso estacionario

Existen procesos que tienen la propiedad de que sus distribuciones son invariantes entre cambios de tiempo; dichos procesos son los estacionarios.

Definición: Sea X un proceso aleatorio tal que $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ el cual toma valores en $\mathbb{R}$ entonces X es un proceso fuertemente estacionario si:

$$\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\} \text{ y } \{X(t_1{+}h), X(t_2{+}h), \ldots, X(t_n{+}h)\}$$

tienen las mismas distribuciones conjuntas para todas los $t_1, t_2, \ldots, t_n$ y $h > 0$. Es decir, un proceso X será fuertemente estacionario cuando sus distribuciones finitas y dimensionales sean invariantes ante cambios en el tiempo.

Definición: Sea X un proceso aleatorio tal que $X = \{X(t) : t \geq 0\}$, este será débilmente estacionario si para todo t_1, t_2 y $h > 0$ se cumple que:

$$\mathbb{E}(X(t_1)) = \mathbb{E}(X(t_2)) \text{ y}$$
$$\text{cov}(X(t_1 + h), X(t_2 + h))$$

Concretamente, X será un proceso aleatorio débilmente estacionario si y solo si tiene medias constante y su función autocovariante

$$c(t, t + h) = \text{cov}(X(t), X(t + h))$$

cumple que

$$c(t, t + h) = c(0, h)$$

para toda $t, h \geq 0$. Es decir, si su función autocovariante es invariante ante cambios de tiempo.

I-D. *Ruido blanco*

El ruido blanco se define como la secuencia de variables aleatorias independientes $X = \{X_n : n \geq 0\}$ con medias cero y varianzas unitarias. El espectro de X debe ser el intervalo $[-\pi, \pi]$. En el campo del procesamiento de señales, el ruido blanco se puede pensar como una señal aleatoria que tiene la misma intensidad en diferentes frecuencias, por lo que obtenemos una densidad espectral de potencia constante.

I-E. *Ergodicidad*

De manera informal, la ergodicidad es la idea de que un punto de un sistema en movimiento (tanto dinámico como estocástico) eventualmente visitará todas las partes del espacio del sistema de manera uniforme y aleatoria. Esto tiene significancia en el sentido de que a partir de la trayectoria de un punto se puede obtener el comportamiento promedio del sistema y pues evidentemente es una ventaja porque no tenemos que simular todo el sistema.

Concretamente, ergodicidad es una propiedad de un sistema en la cual un sistema no poodrá ser reducido o factorizado en componentes más pequeños.

I-F. *Proceso aleatorio gausiano*

Definición: Sea X un proceso continuo en el tiempo y real en el que cada vector $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ tiene una distribución normal multivariada $N(\mu(t), V(t))$ para un vector de medias μ y alguna matriz de covarianzas V que puede depender del tiempo $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ entonces X es un proceso aleatorio gausiano.

Estos procesos son útiles para modelar colecciones finitas de variables reales por sus propiedades analíticas pues la distribución Gausiana es muy frecuente en datos de la vida real. De manera informal, un proceso Gausiano es una colección de variables aleatorias de tal forma que su distribución conjunta, de cada subconjunto finito de variables aleatorias, es una gausiana multivariada:

$$f \sim GP(\mu, k)$$

I-G. *Proceso estocástico*

Un proceso estocástico es una secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ en donde cada X_i tiene una distribución marginal y el proceso entero una distribución conjunta. Un aspecto peculiar de los procesos estocásticos es que puede ser definido como un proceso aleatorio con un parámetro discreto de tiempo, lo que hace referencia a que el proceso es observado solo en puntos discretos o separados del tiempo.

REFERENCIAS

[1] Pruim R, "Foundations and Applications of Statistics: An Introduction Using R" Am. Math. Soc. Providence, sec. ed. 2018.

[2] M. H. DeGroot and M. J. Schervish, "Probability and Statistics"'. Pearson College Division, 2012.

[3] G. Grimmett and D. Stirzaker, "Probability and random processes". Oxford: Oxford University Press, 2009.

[4] C. University, "Lecture 15: Gaussian Process" 2018. [Online]. Disponible: https://www.cs.cornell.edu/courses/cs4780/2018fa/lectures/lecturenote15.html. [Accesado: 09-Mar-2021].

[5] Wikipedia contributors, "Ergodicity", [Online]. Disponible: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Ergodicityoldid=1002316880. [Accesado: 09-Mar-2021].