Tarea 2

Simulación

Profesor Alan Riva Palacio Cohen

1. Programe el algoritmo de Metrópolis-Hastings (MH) basado en una caminata aleatoria Gaussiana para la distribución de propuesta en el lenguaje de programación de su preferencia para simular $X = Z + 7$ tal que Z tiene una distribución $\text{Beta}(0.35, 0.65)$. (3 pts)

2. Muestre directamente que el algoritmo de Gibbs satisace la condición de balance detallado (en particular no es valido para el ejercicio usar que el algoritmo de Gibbs puede ser interpretado como caso particular de Metropolis-Hastings). (2 pts)

3. Sean n, d enteros positivos, $\mu_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in (\mathbb{R}^+)^d$ y $\alpha, \beta, \nu \in \mathbb{R}^+$. Considere el modelo probabilístico

$$
\begin{aligned}
\lambda_j &\sim \text{Gamma}(\alpha, \beta), && j \in \{1, \ldots, d\} \\
\boldsymbol{\Pi} &\sim \text{Dirichlet}(\boldsymbol{\alpha}) && \\
Z_i | \boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\pi} &\sim \text{Categorico}(\boldsymbol{\pi}), && i \in \{1, \ldots, n\} \\
X_i | Z_i = j, \boldsymbol{\lambda}, &\sim \text{Poisson}(\lambda_j), && i \in \{1, \ldots, n\}
\end{aligned}
$$

Determine las distribuciones condicionales

$$
\begin{aligned}
& f_{\boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{\pi} | \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}=\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}(\boldsymbol{\pi} | \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}) \\
& f_{Z_i = z_i | \boldsymbol{Z}_{\setminus i} = \boldsymbol{z}_{\setminus 1}, \boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}=\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}(z_i | \boldsymbol{z}_{\setminus i}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}), \quad i \in \{1, \ldots, n\} \\
& f_{\lambda_j | \boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\Pi}=\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\lambda}_{\setminus j}=\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\setminus j}}(\lambda_j | \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\setminus j}), \quad j \in \{1, \ldots, d\}
\end{aligned}
$$

donde $\boldsymbol{v}_{\setminus j} = (v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots v_d)$ es el vector conformado por las entradas de $\boldsymbol{v}$ en orden sin incluir la entrada j. Recuerde que la densidad de una distribución Dirichlet está dada por

$$
f_{\text{Dir}(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{x}) = \left(\Gamma\left(\sum_{j+1}^{d} \alpha_j\right) \right)^{-1} \prod_{j=1}^{d} \Gamma(\alpha_j) x_j^{\alpha_j - 1}
$$

Implemente el muuestreador de Gibbs para $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{Z} \,|\, \boldsymbol{X}$ utilizando las distribuciones condicionales anteriores. (5 pts)