

# Método de diferencias finitas aplicado a un sistema de placas térmicas

Martínez Ostoa N.I.<sup>1</sup>

Profesores: Benítez Pérez H., Pérez Quezadas N., Sánchez Duque R.

*Métodos Matemáticos Computacionales para Ciencia de Datos*

I.M.A.S. - U.N.A.M.

29 de enero del 2021

**Resumen**—El método numérico de diferencias finitas provee una forma iterativa de resolver ecuaciones diferenciales parciales mediante la discretización de un sistema. Concretamente, se aplicará éste método a un sistema de placas térmicas rectangulares con condiciones de fronteras.

## I. INTRODUCCIÓN

Tenemos un sistema térmico para el cual queremos conocer su temperatura  $T(x, y)$  dado las coordenadas  $(x, y)$ . La distribución de la temperatura sobre estos sistemas térmicos está gobernada por la ecuación de dos dimensiones de Laplace:

$$T_{xx} + T_{yy} = 0 \quad (1)$$

más condiciones de frontera especificadas por los bordes del sistema. Para este sistema en particular sí se conoce la solución analítica, es decir, la ecuación que dadas dos coordenadas  $x, y$ , se puede obtener la temperatura del sistema. Dicha ecuación es la siguiente:

$$T(x, y) = 100 \frac{\sinh(\pi y/w) \sin(\pi x/w)}{\sinh(\pi h/w)} \quad (2)$$

Sin embargo, para el caso en el que no se conoce una ecuación similar a 2, se puede aplicar el método de diferencias finitas. Este método será descrito con mayor profundidad en II.

## II. DIFERENCIAS FINITAS

Es un método numérico utilizado para resolver ecuaciones diferenciales parciales (PDEs) al **discretizar** el dominio continuo en una malla de pasos discreta. Concretamente, se aproximan las PDEs por medio de aproximaciones en diferencia finitas (FDAs), sustituyendo las FDAs en PDEs y resolviendo la ecuaciones en diferencias finita (FDEs) para la variable dependiente.

### II-A. Malla de diferencias finitas

Esta malla abarca todo el dominio  $D(x, y)$  del problema físico a resolver. La intersección de esta malla son los puntos en los cuales se obtiene la solución en diferencias finitas para la ecuaciones diferencial parcial.

Estas mallas tienen un espaciamiento en  $x$  y en  $y$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  respectivamente pero no necesariamente se cumple que  $\Delta x$  sea igual a  $\Delta y$ .

La función  $f(x, y)$  en el punto de la malla  $(i, j)$  se denota por

$$f(x_i, y_j) = f_{ij} \quad (3)$$

y de manera análoga, las derivadas están denotadas por

$$\frac{\partial f(x_i, y_j)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{ij} = f_x \Big|_{ij} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{ij} = f_{xx} \Big|_{ij} \quad (5)$$

### II-B. Aproximaciones de Diferencias Finitas (FDAs)

Ahora, debemos desarrollar aproximaciones de diferencias finitas de las derivadas parciales de las ecuaciones diferenciales parciales. Para lograr esto, empleamos la serie de Taylor para la variable dependiente. Antes, debemos dejar en claro la diferencia entre la solución exacta y la solución aproximada:

$\hat{f}(x, y)$  : solución exacta

$f(x, y)$  : solución aproximada

Concretamente, la aproximación, por medio del método de malla de diferencias finitas, de las derivadas parciales exactas en el punto de la malla

$(i, j)$  se obtiene en términos de los valores de  $\hat{f}$  en el punto  $(i, j)$  y puntos adyacentes a él dentro de la malla.

### II-C. Solución de la ecuación de Laplace por medio de diferencias finitas

Para obtener esta solución emplearemos la serie de Taylor. Recordemos que la serie de Taylor de una función  $f$  es la siguiente:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(x)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n \quad (6)$$

y la ecuación de Laplace:

$$\hat{f}_{xx} + \hat{f}_{yy} = 0 \quad (7)$$

Para continuar con la solución, necesitaremos hacer el desarrollo de la serie de Taylor de la función  $f$  con  $\pm\Delta x$  hasta obtener las segundas derivadas:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) &= f(x_0) + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \Delta x \\ &\quad + \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots \\ f(x_0 - \Delta x) &= f(x_0) - \frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \Delta x \\ &\quad + \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Sumando ambas series de Taylor:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) &= \\ 2f(x_0) + \frac{2\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2!} \end{aligned} \quad (8)$$

Obteniendo la segunda derivada con respecto a  $x$  y  $y$  de 8:

$$\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 f(y_0)}{\partial y^2} = \frac{f(y_0 + \Delta y) - 2f(y_0) + f(y_0 - \Delta y)}{\Delta y^2} \quad (10)$$

Finalmente, sustituyendo  $x_0$  y  $y_0$  por  $ij$  en las ecuaciones 9 y 10:

$$f_{xx}|_{ij} = \frac{f_{i+1j} - 2f_{ij} + f_{i-1j}}{\Delta x^2} \quad (11)$$

$$f_{yy}|_{ij} = \frac{f_{i+1j} - 2f_{ij} + f_{i-1j}}{\Delta y^2} \quad (12)$$

### II-D. Discretización

El método de diferencias finitas se basa en la discretización de las ecuaciones parciales diferenciales para un intervalo  $\Delta x$  y  $\Delta y$ . Si sustituimos las ecuaciones 11 y 12 en la ecuación de Laplace (7), obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{f_{i+1j} - 2f_{ij} + f_{i-1j}}{\Delta x^2} \\ + \frac{f_{ij+1} - 2f_{ij} + f_{ij-1}}{\Delta y^2} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

y si consideramos  $\beta$  como  $\beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} f_{i+1j} + \beta^2 f_{ij+1} + f_{i-1j} \\ + \beta^2 f_{ij-1} - 2(1 + \beta^2) f_{ij} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Finalmente, podemos despejar  $f_{ij}$  de la ecuación 14 para obtener:

$$f_{ij} = \frac{f_{i+1j} + \beta^2 f_{ij+1} + f_{i-1j} + \beta^2 f_{ij-1}}{2(1 + \beta^2)} \quad (15)$$

Al observar la ecuación 15 podemos apreciar que la solución para cada punto de la malla depende de los cuatro puntos vecinos a él. Cuando tenemos el caso que  $\Delta x = \Delta y$ ,  $\beta = 1$  por lo que obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$f_{ij} = \frac{1}{4}(f_{i+1j} + f_{ij+1} + f_{i-1j} + f_{ij-1}) \quad (16)$$

$$f_{i+1j} + f_{ij+1} + f_{i-1j} + f_{ij-1} - 4f_{ij} = 0 \quad (17)$$

No existe una ventaja matemáticamente formal para usar  $\beta = 1$ , sin embargo, valores de  $\beta$  más grandes que la unidad tienden a producir resultados menos certeros que cuando se utiliza un  $\beta$  cerca de la vecindad de la unidad.

### III. SISTEMAS DE ECUACIONES

Planteando algebraicamente el sistema de ecuaciones discretizadas para una malla de  $3 \times 3$  tenemos que restringirnos a usar un  $\Delta x = 1$  y  $\Delta y = 2/3$  pues el ancho de la placa es de  $w = 3$  y el alto de  $h = 2$ . Debido a que  $\Delta x \neq \Delta y$ , el valor de beta deberá ser  $\beta = 3/2$ .

Considerando lo anterior y las siguientes condiciones de frontera:

$$x = 0, T = 100y;$$

$$x = 3, T = 250y;$$

$$y = 2, T = 200 + \frac{100}{3}x^2;$$

$$y = 0, T = 0;$$

obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2.25(525) + 2.25T_{01} + T_{10} + 200 - 6.5T_{00} &= 0 \\ 2.25(750) + T_{02} + 2.25T_{11} + T_{00} - 6.5T_{01} &= 0 \\ 2.25(1125) + 500 + 2.25T_{12} + T_{01} - 6.5T_{02} &= 0 \\ 2.25T_{00} + T_{11} + 2.25T_{20} + 400/3 - 6.5T_{10} &= 0 \\ 2.25T_{01} + T_{12} + 2.25T_{21} + T_{10} - 6.5T_{11} &= 0 \\ 2.25T_{02} + 1000/3 + 2.25T_{22} + T_{11} - 6.5T_{12} &= 0 \\ 2.25T_{10} + T_{21} + 0 + 200/3 - 6.5T_{20} &= 0 \\ 2.25T_{11} + T_{22} + 0 + T_{20} - 6.5T_{21} &= 0 \\ 2.25T_{12} + 500/3 + 0 + T_{21} - 6.5T_{22} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que la matriz de diferencias finitas  $A$  para resolver el sistema de ecuaciones anterior nos queda de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} -6.5 & 1 & 0 & 2.25 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 2.25 & 0 & 1 & -6.5 \end{bmatrix}$$

y el vector  $b$ , que representa las condiciones de frontera se muestra a continuación:

$$b = \begin{bmatrix} -725.0 \\ -750.0 \\ -1625.0 \\ -133.33 \\ 0.0 \\ -333.33 \\ -66.67 \\ 0.0 \\ -166.67 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la numeración para los valores de temperatura  $T_{ji}$  se tomaron de arriba hacia abajo y de derecha hacia izquierda. Un ejemplo (para la misma matriz de  $3 \times 3$ ) se muestra a continuación:

|       |          |          |          |
|-------|----------|----------|----------|
| 2     | $T_{00}$ | $T_{01}$ | $T_{02}$ |
| 4/3   | $T_{10}$ | $T_{11}$ | $T_{12}$ |
| 2/3   | $T_{20}$ | $T_{21}$ | $T_{22}$ |
| $y/x$ | 1        | 2        | 3        |

### IV. SOLUCIÓN

#### IV-A. Directa

Para la solución directa del sistema de ecuaciones planteado en la sección III, empleé el método de eliminación Gaussiana. El código general se muestra a continuación: <sup>1</sup>

```
def gauss(A, B=None):
    if B is not None:
        A = np.append(A, B, axis=1)
    for i in range(len(A)):
        element = A[i][i]
        if element == 0:
            A = swap(i, A)
            element = A[i][i]
        A = norm(i, A)
        A = operate(i, A)
    return solve(A)
```

Los resultados de este método al aplicarlo a la matriz  $A$  y el vector  $b$  presentados en la sección III son los siguientes:

$$x = \begin{bmatrix} 203.954 \\ 270.936 \\ 380.667 \\ 146.562 \\ 189.539 \\ 257.067 \\ 75.948 \\ 97.23 \\ 129.584 \end{bmatrix} \quad (18)$$

#### IV-B. Iterativa

Para la solución iterativa empleé el método de Gauss-Seidel pues converge más rápido que el método de Jacobi. Aunado a esto, el método está

<sup>1</sup>Las funciones auxiliares se encuentran en el archivo Diferencias-Finitas.ipynb

programado para que se detenga hasta que su solución sea mejor que una cierto error  $\epsilon$ , en lugar de definir el número de iteraciones. El código general se presenta a continuación:

```
def gauss_seidel(A, B,
    min_error=10e-4,
    verbose=False):
    A = np.append(A, B, axis=1)
    old_seed = list(
        np.ones(A.shape[1]-1)
    )
    new_seed = []
    error = 10e10
    i = 1
    while error >= min_error:
        new_seed = solve_for_row(
            A, old_seed.copy()
        )
        error = get_error(
            old_seed, new_seed
        )
        old_seed = new_seed
        if verbose:
            print(f'Iteracion_{i}')
            print(f'error:{error}')
        i += 1
    return np.array(new_seed)
```

Los resultados obtenidos con este método son los siguientes:

$$x = \begin{bmatrix} 203.954 \\ 270.936 \\ 380.667 \\ 146.562 \\ 189.539 \\ 257.067 \\ 75.948 \\ 97.23 \\ 129.584 \end{bmatrix} \quad (19)$$

y al compararlos con los resultados obtenidos en el método directo 18, podemos observar que son los mismos.

Con respecto a la convergencia, decidí que la semilla inicial para este método fuera un vector de unos. Este vector tiene como longitud el número de columnas en la matriz  $A$ . Para que este método convergiera a los mismos valores encontrados en el método directo (IV-A), usé un error  $\epsilon = 10e-7$  y

tomó 22 iteraciones. Esta convergencia se muestra en la tabla I.

| No. Iteración | Error $\epsilon$ |
|---------------|------------------|
| 1             | 269.8264         |
| 2             | 66.7322          |
| 3             | 36.4792          |
| 4             | 18.7283          |
| 5             | 9.4003           |
| 6             | 4.7028           |
| 7             | 2.3516           |
| 8             | 1.1758           |
| 9             | 0.5879           |
| 10            | 0.294            |
| 11            | 0.147            |
| 12            | 0.0735           |
| 13            | 0.0367           |
| 14            | 0.0184           |
| 15            | 0.0092           |
| 16            | 0.0046           |
| 17            | 0.0023           |
| 18            | 0.0011           |
| 19            | 0.0006           |
| 20            | 0.0003           |
| 21            | 0.0001           |

Cuadro I  
CONVERGENCIA DEL ERROR  $\epsilon$  PARA GAUSS-SEIDEL

## V. EXPERIMENTOS

Para realizar los experimentos decidí usar el método directo (Eliminación Gaussiana) pues fue el que menor tiempo de ejecución tomó; como se puede observar en la figura 1.

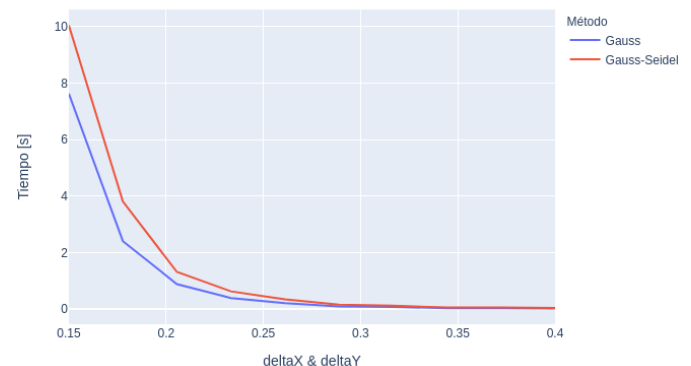


Figura 1. Tiempo de ejecución Gauss vs. Gauss-Seidel

V-A.  $\Delta x = \Delta y$

Conforme  $\Delta \rightarrow 0$ , tanto para  $x$  como para  $y$ , lo que se puede apreciar es una mayor granularidad en la malla. Esta granularidad se traduce en una mayor precisión de la solución. De acuerdo a las imágenes mostradas en esta sección, podemos observar que conforme  $\Delta \rightarrow 0$ , la temperatura promedio de la malla disminuye. Es decir, conforme aumenta la granularidad de la malla, el calor se disipa más. Un análisis más fino sobre los resultados presentados en las siguientes imágenes se muestra en VIII.

V-B.  $\Delta x \neq \Delta y$

Al igual que lo sucedido en la sección V-A, cuando  $\Delta x \neq \Delta y$  y ambos valores tienden a 0, podemos observar que la temperatura promedio de la malla disminuye. Para estos experimentos intenté mantener la granularidad de la malla muy similar a la granularidad de la malla en la sección V-A. Como podemos apreciar, la única diferencia considerable aparece en la figura 5, pues para una malla de poca granularidad ( $3 \times 3$ ), los valores de la temperatura son muy diferentes comparándolo con la figura 2.

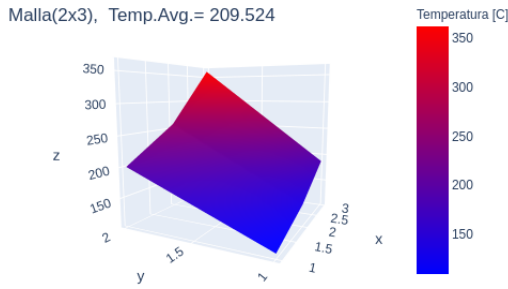


Figura 2.  $\Delta x = \Delta y = 1$

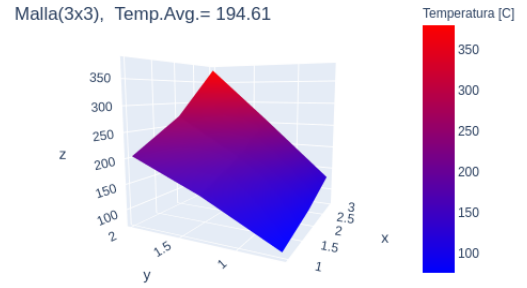


Figura 5.  $\Delta x = 1, \Delta y = 2/3$

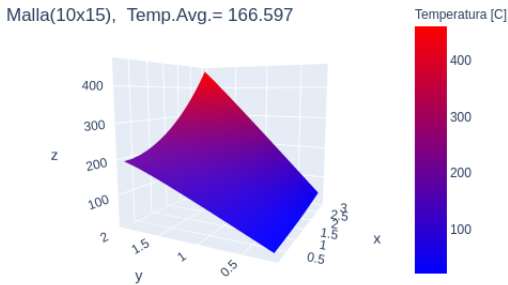


Figure 3.  $\Delta x = \Delta y = 0.2$

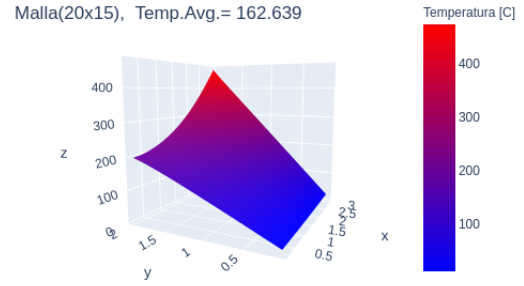


Figure 6.  $\Delta x = 0.2, \Delta y = 0.1$

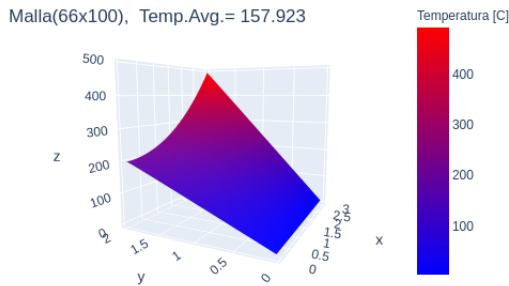


Figure 4.  $\Delta x = \Delta y = 0.03$

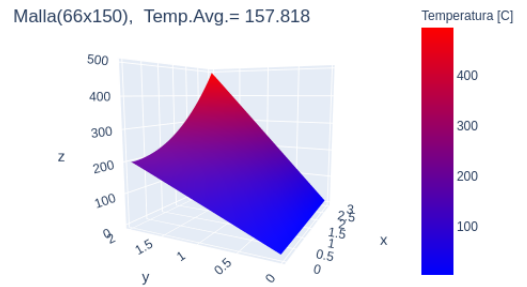


Figure 7.  $\Delta x = 0.02, \Delta y = 0.03$

## VI. CONVERGENCIA

Con respecto a los valores de convergencia, consistencia y orden, podemos apreciar que el método converge conforme nos acercamos a un punto base. Para graficar la convergencia, decidí emplear una malla con  $\Delta x = \Delta y = 0,02$ , lo cual resultó ser una malla de  $100 \times 150$  y la tomé como referencia de convergencia. El punto seleccionado fue el (1,1) con un valor de temperatura de 129,07913. En la siguiente figura podemos apreciar la convergencia del método, comenzando con un  $\Delta x = \Delta y = 1$  hasta 0,1.

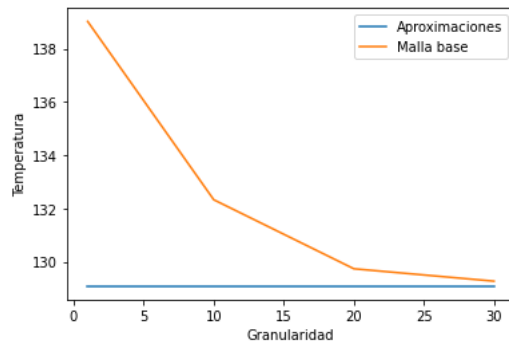


Figure 8. Convergencia

## VII. COMPORTAMIENTO DEL ERROR

Como se muestra en la siguiente figura, podemos apreciar que el error disminuye considerablemente conforme decrementamos el valor de las  $\Delta$ .

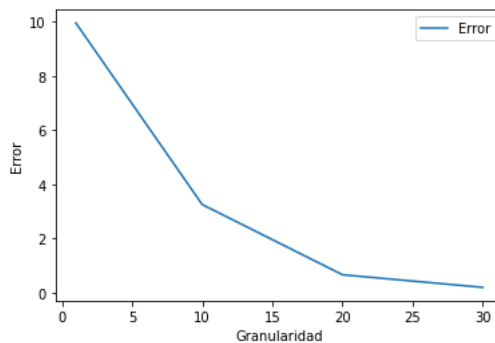


Figure 9. Disminución del error conforme la granularidad de la malla aumenta

## VIII. CONCLUSIONES

Finalmente, después de analizar todos los resultados, me parece que hay dos puntos importantes a destacar:

- Por un lado, el método de diferencias finitas converge hacia un valor esperado. Es decir, se comprobó empíricamente la convergencia conforme la granularidad de la malla se incrementó.
- Por otro lado, pudimos verificar lo que Hoffmann asegura en *Numerical Methods for Engineers and Scientists*:

There is no formal mathematical advantage when  $\beta$  is unity, values of  $\beta$  greater than unity tend to produce less accurate solutions than values of  $\beta$  in the neighborhood of unity

[Hoffmann, 537], es decir, con los resultados obtenidos podemos concluir que no hay una ventaja clara al utilizar un  $\beta \neq 1$

## REFERENCIAS

- 1 HOFFMAN D. *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. Segunda edición. Marcel Dekker. 1992.