

Aplicación de Procesos de Decisión Markovianos en el Mercado de Divisas

Grupo: Los Analíticos

Nicolás Joel Cáceres (273195)

Isabella Endara Chitiva (288852)

Juan David Lasso (292677)

Nestor Andres Tabares (287880)

Universidad de la Sabana

6080: Procesos Estocásticos

Esteban A. López

19 de noviembre de 2024

Índice

Introducción	4
Marco teórico	5
Modelo de Markov	5
Proceso de Decisión Markoviano	5
Extracción de Datos Divisas	8
Importación de datos	8
Limpieza de datos	9
Estructura de datos	12
Estructuración del modelo MDP	16
Vectores de Estado	17
Estado Inicial	17
Restricciones del modelo	17
Conjunto de Acciones	18
Conjunto de Eventos	18
Ecuaciones de Transición	18
Probabilidad de Transición	19
Contribución de la Acción	20
Contribución del Evento	20
Función de Calidad	20
Función de Valor	21
Condiciones de Contorno	22
Ganancia óptima esperada	22
Análisis de Sensibilidad	22
Usando las divisas GBP - MXN	23

Iniciando con la Divisa CHF	23
Cambiando los Porcentajes de Comisión	23
Variables s3 y s4 inician en Baja	24
Variables s3 inicia en Baja y s4 inicia en Sube	24
Variables s3 inicia en Baja y s4 inicia en Baja	24
Variables s3 inicia en Baja y s4 inicia en Baja	25
Variable s3 inicia en Sube y s4 inicia en Baja	25
Modificando la cantidad inicial	26
Impacto del Ajuste de la Ventana Temporal	26
MDP con Seis Estados	28
Análisis y conclusiones	29

Introducción

Los mercados son un medio en donde inversores y compradores pueden buscar oportunidades para hacer crecer su capital por medio de acciones, divisas, bonos u otros bienes económicos. Un mercado como el de divisas puede dar una noción acerca del estado económico de una sociedad respecto al mundo (Aronsson & Folkesson, 2023).

Una particularidad que es común entre estos mercados es la constante fluctuación de sus precios y su comportamiento impredecible; en otras palabras, son mercados volátiles con bastantes fuentes de incertidumbre. Por esto mismo, surge el interés de intentar predecir el comportamiento de estos mercados, puesto que, si se logra acertar pronósticos de forma confiable, eso podría representar enormes oportunidades de ganancias a partir de inversiones en estos mercados (Aronsson & Folkesson, 2023). Sin embargo, según teorías económicas, los mercados son eficientes son aquellos cuyos precios son impredecibles, y por tanto, la ganancia de un inversor no puede ser constantemente mayor al promedio de ganancia del mercado, porque la acción misma del comprador influye en el mercado (Svoboda & Říhová, 2021). Históricamente se ha buscado implementar análisis técnicos sobre mercados de todo tipo alrededor del mundo, no obstante, los resultados obtenidos hasta la actualidad se han encargado de demostrar la dificultad y poca eficacia de los mismos, dando mayor consenso a las hipótesis de mercados eficientes (Svoboda & Říhová, 2021).

El interés por comprender a fondo los mercados financieros, se presenta tanto desde una perspectiva teórica como empírica. Este estudio se centra en el mercado de divisas, analizando el comportamiento de las tasas de cambio del Yen Japonés, la Libra Esterlina, el Franco Suizo y el Peso Mexicano frente al Peso Colombiano durante los últimos cuatro años. El objetivo principal es explorar la dinámica de este mercado y evaluar si los movimientos de las tasas de cambio siguen un proceso Markoviano; es decir, si el estado futuro de una variable depende únicamente de su estado presente y no de estados pasados. Al identificar las propiedades estadísticas de estos procesos, se busca desarrollar un modelo

de decisión Markoviano para generar una política de inversión entre dos monedas extranjeras en pesos colombianos, con un horizonte de planificación de 3 días hábiles.

Marco teórico

Modelo de Markov

Para el análisis del mercado de divisas se ha de hacer uso de las cadenas de Markov y procesos Markovianos. Estos modelos funcionan bajo el supuesto de que la historia de una variable aleatoria no influye en el estado siguiente, sino que simplemente depende del estado actual. Esto se puede describir de la siguiente manera (Aronsson & Folkesson, 2023):

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i) = P(X_{t+1} = j | X_t = i_n, X_{t-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \quad (1)$$

Esto permite definir el estado de la variable aleatoria X en el estado $t + 1$ a partir únicamente del estado t . Asimismo, existe la propiedad de homogeneidad, la cual sugiere que no importa el periodo en que se comparen los estados, la probabilidades de transición entre estados son iguales. Por ejemplo, es lo mismo la transición del estado t a $t + 1$ que del estado $t + 100$ al $t + 101$. Las probabilidades que se tiene para saltar de un estado a otro van a generar una matriz cuadrada de tamaño $E \times E$, indicando E la cantidad de estados posibles, que en este ejemplo solo tendrá 6 estados posibles.

$$P_{E \times E} = \begin{pmatrix} E_1, E_1 & E_1, E_2 & E_1, E_3 \\ E_2, E_1 & E_2, E_2 & E_2, E_3 \\ E_3, E_1 & E_3, E_2 & E_3, E_3 \end{pmatrix}$$

La matriz de transición P_{ij} muestra los valores de probabilidad de transición (E_i, E_j) entre todos los estados E posibles.

Proceso de Decisión Markoviano

Una vez demostrado que el mercado de la divisa sigue procesos markovianos y homogéneos, es posible desarrollar un modelo de aprendizaje por refuerzo basado en un proceso de decisión markoviano (MDP, por sus siglas en inglés). Para construir dicho modelo, es necesario tener en cuenta la estructura SATR, que corresponde a las siglas en

inglés de Estados, Acciones, Transiciones y Recompensas. La definición de cada uno de estos cuatro componentes requiere utilizar la información disponible tanto para el agente como para el entorno en el que este se encuentra.

El agente, en este contexto, se refiere a la red neuronal encargada de tomar decisiones basadas en la información proporcionada por el entorno. El entorno, por su parte, se define como el conjunto de condiciones que pueden variar y ser interpretadas como variables que afectan al agente. A partir del conocimiento de estos elementos, se construye cada componente del conjunto SATR de la siguiente manera (van der Veen, 2020):

■ Estados

- *Espacio de estados S* : conjunto de todas las posibles configuraciones que el agente puede adoptar en cualquier momento. Cada estado $s \in S$ representa una combinación de variables que caracterizan la situación del agente en el entorno en un tiempo dado, por ejemplo, $s = (s_1, s_2, s_3, \dots)$.
- *Estado inicial s_0* : es el estado de partida del modelo, en el que se definen los valores iniciales de todas las variables del espacio de estados S . El agente comienza el proceso de toma de decisiones desde este estado.

■ Acciones

- *Conjunto de acciones AS* : conjunto de todas las acciones a que el agente puede tomar cuando se encuentra en el estado s .

■ Transiciones

- *Conjunto de eventos ES* : conjunto de todos los eventos e que pueden ocurrir dado un estado s y una acción a tomada por el agente.
- *Ecuaciones de transición $T(s, a, s')$* : describen cómo, a partir del estado actual s , la acción a tomada por el agente y un posible evento e , se determina los valores de cada variable s_i al transitar al siguiente estado $s' = (s_{n1}, s_{n2}, s_{n3}, \dots)$.

- *Probabilidad de transición* $p(s'|s, a, e)$: probabilidad de que, dado un estado s y una acción a , el agente transite al siguiente estado s' al ocurrir el evento e .
- *Restricciones*: son limitaciones o condiciones impuestas al entorno o al agente. Un ejemplo común es el horizonte de planificación, que limita la cantidad de decisiones que el agente puede tomar durante el proceso de toma de decisiones.

■ Recompensa

- *Contribución de la acción* $Ca(s, a)$: recompensa o costo asociado a la toma de una acción a en un estado s .
- *Contribución del evento* $Ce(s, a, e)$: recompensa o costo asociado a la ocurrencia de un evento e , dado el estado actual s y la acción a realizada por el agente.
- *Función de calidad* $Q(s, a)$: función que mide la calidad de una acción a tomada en un estado s , en función de las recompensas futuras esperadas, y se calcula usando la ecuación recursiva de Bellman.
- *Función de valor óptimo* $V(s)$: función que calcula la recompensa máxima esperada desde un estado s , considerando la política óptima. Se expresa como $V^*(s) = \max_a Q^*(s, a)$, donde $Q^*(s, a)$ es la función de calidad asociada a la política óptima para el estado s al tomar la acción a .
- *Condición de contorno*: valores de la función de valor $V(s)$ en los estados terminales o finales, es decir, aquellos estados que marcan el fin del proceso de decisión, o el horizonte de planificación.

Una vez que sea defina el modelo completo según la estructura SATR, basta con transferir la lógica y los datos disponibles en un lenguaje de programación como Python, para realizar los cálculos y obtener la política óptima para el agente.

Extracción de Datos Divisas

Los datos que se manejaron para este estudio fueron tomados de la página oficial del Banco de la República de Colombia en la sección de Monedas disponibles (Banrep, 2024). Allí se tiene a disposición una base de datos la cuál se puede filtrar por rango de fecha y por una o varias monedas en simultáneo. Desde allí, se seleccionaron las cuatro divisas, las cuales son: Yen Japonés (JPY), la Libra Esterlina (GBP), el Franco Suizo (CHF) y el Peso Mexicano (MXN). Estas monedas se escogieron por diversas razones y criterios, entre los cuales se tuvo en cuenta que hubiese al menos una moneda por continente.

Por ejemplo, para elegir al JPY se observó que se considera una moneda de refugio para los inversores. Los factores que influyen en esta percepción general son, la tasa de ahorro, la base industrial sólida y la baja inflación de Japón (FasterCapital, 2024). Para la GBP se investigó que esta divisa es la cuarta moneda más negociada del mundo, luego del Dólar, Euro y Yen; adicionalmente es la tercera más usada para pagos mundiales, al igual que una de las divisas más representativas en la reservas a nivel mundial (MarketScreener, 2024).

En cuanto al peso Mexicano, se tiene en cuenta que es uno de los mercado emergentes con mayor fuerza en el continente, agregando el hecho de que posee una frontera extensa con los Estados Unidos y grandes reservas de petróleo, pues todo lo anterior son elementos que consideran los inversionistas (Imparcial, 2024). Por último, el franco suizo es reconocido como un salvavidas en tiempos de crisis, pues se invierte en esta divisa por su reputación de estabilidad, puesto que las políticas monetarias suelen priorizar la estabilidad monetaria a los intereses de los exportadores; adicionalmente suiza es reconocido como un país neutral ante muchos conflictos y por esto mismo suele tener un entorno menos volátil que otras divisas (Eugster, 2023).

Importación de datos

Al haber seleccionado estas monedas, se exportó de la página del Banco de la República un archivo en formato .csv con toda la información relacionada a esas monedas

en el periodo del 1 de Septiembre del 2020 al 1 de Septiembre del 2024. Este archivo fue subido a un repositorio de GitHub con la finalidad de que la base de datos fuera accesible mediante el siguiente [enlace](#). Este archivo contiene un total de 52.632 registros y 8 columnas con las variables que se muestran en el cuadro 1.

Cuadro 1

información disponible en la base de datos (Banrep, 2024).

Columna	Valores
Fecha (aaaa/mm/dd)	2020-09-01 a 2024-09-01 (diario)
Moneda	Franco suizo, Yen japonés, Libra Esterlina, Peso Mexicano
Continente	Europa, América, Asia del Pacifico
Tipo de Cambio	USD por moneda, Moneda por USD, COP por moneda
Tipo de Tasa	Venta, Media, Compra
Tasa Cambio	'1,1024409', ... , '28,56963'
Id Moneda	CHF, JPY, GBP, MXN

Limpieza de datos

La limpieza de datos es un componente esencial en el modelado de la matriz de transición para cada divisa; de modo que, en primer lugar, se revisa el tipo de dato de cada columna en la base de datos y si es necesario, se realiza un cambio de tipo de dato. Paralelamente, se verifica la presencia de datos nulos; en caso de encontrarlos, se aplican técnicas avanzadas de preprocesamiento de datos para completar estos valores faltantes. El siguiente cuadro presenta la información de la base de datos. Este proceso garantiza la precisión y la eficacia del modelo resultante.

Con lo que se observa en el Cuadro 2, no existen datos nulos o faltantes en esta base de datos. Además, todos los datos de las columnas son de tipo 'Object', a excepción de la columna 'año', que es de tipo 'int64'. En el cuadro siguiente, se realizará una verificación

Cuadro 2*Información de la base de datos*

columna	Non-null count	Dtype
Fecha	52632 non-null	Object
Año	52632 non-null	Int64
Moneda	52632 non-null	Object
Continente	52632 non-null	Object
Tipo de cambio	52632 non-null	Object
Tipo de tasa	52632 non-null	Object
Id Moneda	52632 non-null	Object

para confirmar la ausencia de datos nulos en la base de datos. Esta inspección es crucial para garantizar la integridad y la calidad de los datos antes de proceder con cualquier análisis o modelado.

Cuadro 3*Cantidad de datos nulos en cada columna*

Columna	Cantidad Datos nulos
Fecha	0
Año	0
Moneda	0
Continente	0
Tipo de cambio	0
Tipo de tasa	0
Id Moneda	0

Como se puede observar en el Cuadro 3, no existen datos nulos en toda la base de datos, lo que elimina la necesidad de aplicar técnicas de preprocesamiento para tratar con

valores faltantes. No obstante, en esta base de datos de divisas, se observa que existen datos correspondientes a todos los días de la semana, incluyendo los días sábados y domingo. Sin embargo, estos datos son repetitivos, ya que el mercado de divisas cierra el día viernes; así que, lo que hace esta base de datos es sostener la tasa de cambio del día viernes. Esto podría generar sesgos debido a datos repetidos, por lo tanto, en el siguiente código, se procederá a eliminar todos los datos correspondientes a los sábados y domingo. Esta acción mejora la precisión de los datos y evita cualquier distorsión en el análisis posterior. Al hacer esta limpieza, la base de datos queda en el formato como se muestra en la siguiente Cuadro:

Cuadro 4

Base de datos

Fecha	Nombre_Moneda	Tipo_tasa	TRM
2020-09-01	Franco suizo	Venta	1,102409
2020-09-01	Franco suizo	Venta	0,9076
2020-09-01	Franco suizo	Venta	4128,993489
2020-09-01	Libra esterlina	Venta	1,345
2020-09-01	Libra esterlina	Venta	0,74377

Por razones de espacio y comodidad, se decidió no mostrar las columnas ‘año’, ‘continente’, ‘tipo de cambio’ e ‘id de la moneda’. Sin embargo, en este Cuadro se puede observar que la TRM es de tipo ‘Object’, como se mencionó anteriormente. Además, se utiliza una coma (",") para separar los decimales en lugar de un punto ("."), lo cual podría causar un error ya que se esté trabajando con Python, lenguaje que interpreta los números decimales con el punto. Para el modelado, se trabajará con el tipo de tasa ‘media’, como se evidencia en el código siguiente, para así garantizar la coherencia y la precisión de los datos utilizados en el análisis.

```
1 COP_Med_Data = df.query("Cambio == 'Pesos colombianos por cada moneda'
    and Tipo_tasa == 'Media'")
```

```

2 COP_Med_Data['TRM'] = COP_Med_Data['TRM'].str.replace(',','').astype(
    float)
3 COP_Med_Data

```

Debido a la selección de la información considerada relevante, se debe crear una nueva base de datos. Esta base de datos contendrá exclusivamente la TRM (Tasa Representativa del Mercado) para cada moneda y cada fecha. Es importante asegurar que esta información esté en formato 'float' para facilitar los cálculos posteriores. Como se puede observar en el siguiente código, se crea una columna para cada moneda, y cada fila corresponderá a una fecha específica de registro. Este enfoque estructurado y organizado facilita el análisis y el modelado para cada una de las divisas.

```

1 data_original = pd.DataFrame(columns=df['Id_Moneda'].unique().tolist(),
    index=df['Fecha'].unique())
2 for i in data_original.index:
3     row = list(COP_Med_Data.query("Fecha == @i")['TRM'])
4     data_original.loc[i] = row
5 data_original = data_original.astype(float)

```

Adicionalmente, se ha decidido reajustar los índices de esta nueva base de datos, que están en formato de fecha, para facilitar su manejo en Python. Se ha optado por reiniciar los índices, para que comiencen desde 0 y continúen hasta el valor de la última fila. A continuación, se presenta la base de datos después de la limpieza respectiva. Este ajuste en los índices mejora la accesibilidad y la manipulación de los datos durante el análisis y el modelado.

Estructura de datos

Analizar la estructura de los datos es crucial para entender su comportamiento, especialmente cuando se trata de modelar cadenas de Markov y verificar la homogeneidad. Es posible que algunas divisas presenten datos atípicos o sesgos que podrían afectar el modelado. Por lo tanto, es esencial identificar y tratar estos problemas antes de proceder.

Una forma efectiva de visualizar la distribución de los datos y detectar posibles

Cuadro 5

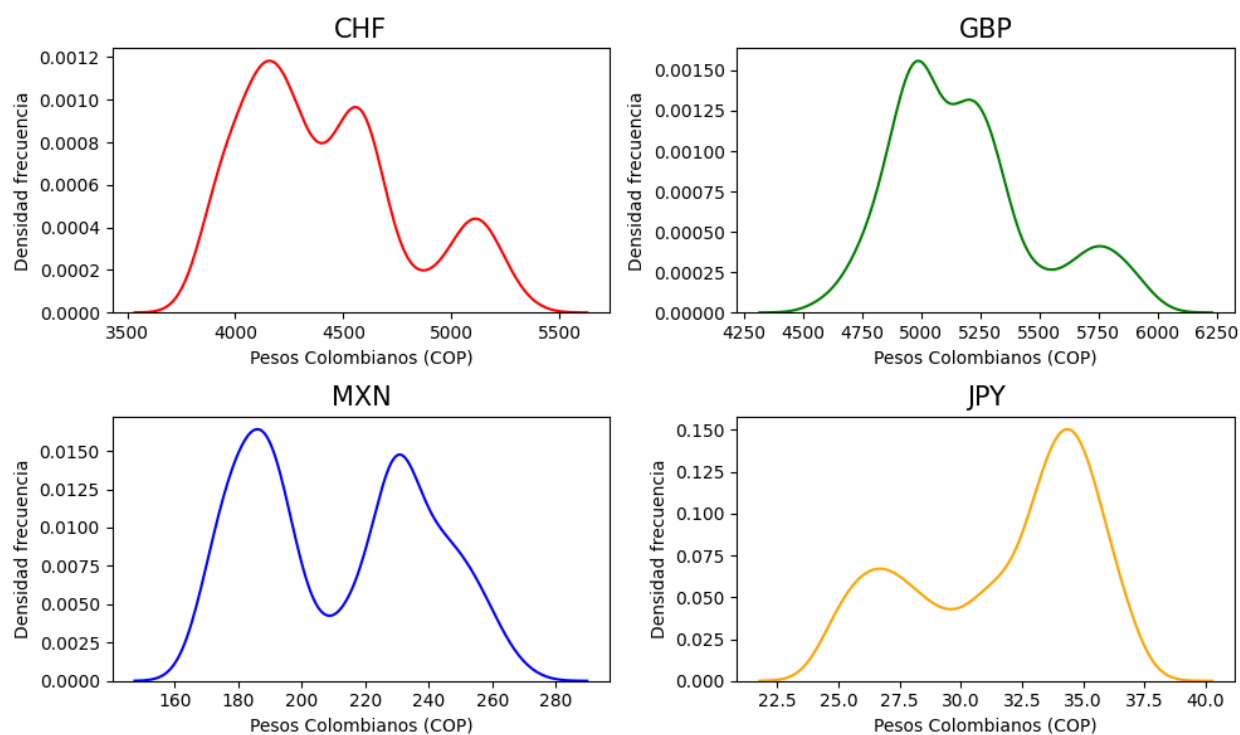
TRM

CHF	GBP	MXN	JPY
4127.855840	5036.640089	172.250270	35.335720
4044.671380	4899.867379	168.704350	34.698819
4045.031950	4890.420490	171.520819	34.823599
4045.031950	4890.420490	171.520819	34.823599
4046.358119	4879.497760	171.616219	34.838349

anomalías es a través de los histogramas. Estas gráficas nos permiten ver la frecuencia de diferentes rangos de valores, lo que puede revelar datos atípicos o sesgos en los datos.

A continuación, se muestran los gráficos de densidad de frecuencia de las diferentes divisas. Estos proporcionarán una visión clara de la distribución de los datos y ayudarán a identificar cualquier irregularidad que necesite ser abordada antes del modelado.

- **COP frente al CHF:** El histograma muestra tres picos, lo que indica que ciertos valores son más frecuentes, sugiriendo una distribución no uniforme. Esto podría afectar las cadenas de Markov, ya que no todos los estados tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Es crucial evaluar si estas frecuencias se mantienen constantes en el tiempo o si hay cambios en la ocurrencia de ciertos tipos de cambio.
- **GBP en COP:** El histograma muestra un pico alrededor de los \$5000 COP, lo que sugiere que la tasa de cambio ha sido más frecuente en este rango. Esto podría indicar que las tasas futuras consigan depender solo de la tasa actual, un principio clave de las cadenas de Markov de primer orden; lo que permite predecir futuras tasas basándose en la tasa actual.
- **MXM en COP:** El histograma muestra dos picos prominentes, lo que sugiere que hay dos valores comunes en los que la tasa de cambio se estabiliza o fluctúa. Esto

Figura 1*Gráficos de densidad de frecuencia por divisa*

indica que podría haber dos estados más prevalentes en el sistema analizado, lo que propone que en un modelo de cadena de Markov de primer orden se tengan dos estados con mayores probabilidades. Al construir una matriz de transición basada en estos datos, es importante considerar estos dos picos, ya que probablemente representan estados significativos dentro de la matriz.

- **JPY en COP:** El histograma muestra una concentración de valores alrededor de un rango específico, lo que indica que la mayoría de las tasas de cambio se encuentran en ese intervalo.

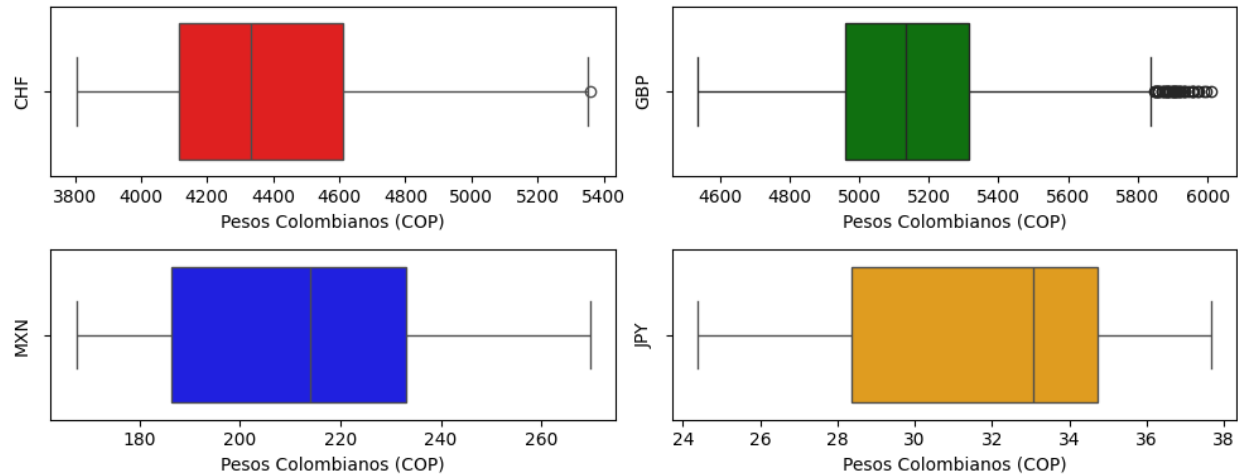
Los histogramas de las tasas de cambio muestran una variedad de distribuciones, lo que puede tener implicaciones significativas para el modelado de las cadenas de Markov. Es importante tener en cuenta estas distribuciones al construir estos modelos, ya que pueden

influir en la probabilidad de transición entre los estados.

Para evidenciar los posibles valores atípicos por medio del criterio intercuartílico, se realizó un *boxplot* (Figura 2) para cada divisa, los cuales se presentan en la siguiente figura.

Figura 2

Boxplots de precios para cada divisa



Los gráficos de *boxplot* presentados muestran la variabilidad de la Tasa Representativa del Mercado (TRM) para cuatro monedas diferentes en relación con el peso colombiano (COP). El franco suizo (CHF) muestra un rango de valores que oscila aproximadamente entre \$3800 y \$5400 COP y contiene un dato atípico. Este amplio rango sugiere una alta variabilidad en las tasas de cambio, lo que podría impactar las pruebas de homogeneidad si se consideran diferentes períodos de tiempo. Además, esta variabilidad podría causar fluctuaciones significativas en las probabilidades de transición en las cadenas de Markov. No obstante, con la finalidad de apegarse a la realidad y evitar omitir más información estos datos se tendrán en cuenta. Vale la pena aclarar que a pesar que sean datos que se alejen un poco de la tendencia normal, no significa que su comportamiento sea errático, pues algún evento puntual potencia el efecto de subida de la moneda pero en vez de sacrificar datos más normalmente distribuidos, estamos ganando información con estas

observaciones.

La libra esterlina (GBP) presenta valores que oscilan aproximadamente entre \$4.600 y \$6.000 COP y por arriba del limite superior se evidencia múltiples datos atípicos que podrían darle sesgos al modelo. Al igual que con el CHF, esta variabilidad podría afectar las suposiciones sobre las transiciones de estado en las cadenas de Markov de primer orden. Además, un gran rango en las tasas de cambio podría sugerir no homogeneidad. No obstante, para evitar remover información del modelo se tendrán en cuenta estos valores para todo el proceso.

Por otro lado, tanto el peso mexicano (MXN) como el yen japonés (JPY) muestran rangos más estrechos y no contienen datos atípicos. Esto sugiere una mayor estabilidad en estas tasas de cambio a lo largo del tiempo, lo que podría resultar en un mejor rendimiento en las cadenas de Markov y las pruebas de homogeneidad.

En conclusión, mientras que el CHF y la GBP muestran una considerable volatilidad que podría desafiar las suposiciones de homogeneidad y afectar significativamente las matrices de probabilidad de transición en las cadenas de Markov, el MXN y el JPY parecen ser más estables, ofreciendo potencialmente un mejor rendimiento tanto para las pruebas de homogeneidad como para la modelación de las cadenas de Markov.

Estructuración del modelo MDP

Un modelo de decisión Markoviano consiste en un algoritmo que busca maximizar o minimizar la ganancia o el costo de las decisiones tomadas por un agente en medio de su entorno, con el conocimiento del nivel de incertidumbre que posee cada uno de los posibles estados. Consecuentemente, se busca generar un modelo que llegue a una política de inversión óptima para maximizar la rentabilidad obtenida durante 3 días al invertir dinero entre dos divisas diferentes. Para esto se parte de la verificación de que las monedas cumplan propiedades markovianas y de homogeneidad, lo cual se puede validar con funciones markovianas realizadas.

A partir de ese punto, se construye el modelo mediante el modelamiento SATR, el

cual consiste en la formulación de los estados del sistema, las acciones posibles en cada estado y las recompensas asociadas a cada acción; adicionalmente, se debe plantear un vector de estado, estado de partida, conjunto de acciones, conjunto de eventos, ecuaciones de transición, restricciones, probabilidades de transición, contribución de la acción, contribución del evento, función de calidad, función de valor óptimo y condición de contorno. Todos estos elementos son los que se desarrollan a continuación.

Vectores de Estado

- Se define el vector de estado como $S = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6)$, donde:
 - s_1 : número de día en el cual se realiza una inversión
 - s_2 : divisa elegida para el día s_1
 - s_3 : Estado del JPY en el día s_1
 - s_4 : Estado del CHF en el día s_1
 - s_5 : Precio de JPY en el día s_1
 - s_6 : Precio de CHF en el día s_1

Estado Inicial

- El estado inicial está dado por $(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6) = (1, JPY, Sube, Sube, 100, 100)$:
 - La cuenta de los días inicia en la mañana de cada día a partir del día 1.
 - De las monedas disponibles (JPY, GBP, MXN, CHF) solo se utilizarán dos, las cuales para el efecto de estudio serán JPY y CHF .
 - En ambas monedas se inicia con un valor de 100 pesos colombianos.
 - Las dos divisas manejarán un estado inicial de subida de precio.

Restricciones del modelo

- El horizonte de tiempo es finito, y está fijado a un máximo de 3 días de inversión:

$$s_1 \leq 3 \tag{2}$$

Conjunto de Acciones

- El conjunto de acciones posibles es:

$$AS = \{\text{mantener divisa, cambiar divisa}\} \quad \forall s \in S \quad (3)$$

Conjunto de Eventos

El conjunto de eventos posibles es:

$$ES = \begin{cases} \text{Sube JPY, Sube CHF} & \forall a \in AS \\ \text{Sube JPY, Baja CHF} & \forall a \in AS \\ \text{Baja JPY, Baja CHF} & \forall a \in AS \\ \text{Baja JPY, Sube CHF} & \forall a \in AS \end{cases} \quad (4)$$

Ecuaciones de Transición

$$s_{n1} = s_1 + 1, \forall s \in S \quad (5)$$

$$s_{n2} = \begin{cases} \text{JPY,} & \text{si } (a = \text{mantener divisa} \wedge s_2 = \text{JPY}) \\ \text{JPY,} & \text{si } (a = \text{cambiar divisa} \wedge s_2 = \text{CHF}) \\ \text{CHF,} & \text{si } (a = \text{mantener divisa} \wedge s_2 = \text{CHF}) \\ \text{CHF,} & \text{si } (a = \text{cambiar divisa} \wedge s_2 = \text{JPY}) \end{cases} \quad (6)$$

$$s_{n3} = \begin{cases} \text{Sube} & \text{si } e = (\text{Sube JPY, Sube CHF}) \vee (\text{Sube JPY, Baja CHF}), \\ \text{Baja} & \text{si } e = (\text{Baja JPY, Sube CHF}) \vee (\text{Baja JPY, Baja CHF}). \end{cases} \quad (7)$$

$$s_{n4} = \begin{cases} \text{Sube} & \text{si } e = (\text{Sube JPY, Sube CHF}) \vee (\text{Baja JPY, Sube CHF}), \\ \text{Baja} & \text{si } e = (\text{Sube JPY, Baja CHF}) \vee (\text{Baja JPY, Baja CHF}). \end{cases} \quad (8)$$

$$s_{n5} = \begin{cases} s_5(1 + \sigma_i) & \text{si } e = (\text{Sube JPY, Sube CHF}) \vee (\text{Sube JPY, Baja CHF}), \\ s_5(1 - \sigma_i) & \text{si } e = (\text{Baja JPY, Sube CHF}) \vee (\text{Baja JPY, Baja CHF}). \end{cases} \quad (9)$$

$$s_{n6} = \begin{cases} s_6(1 + \sigma_i) & \text{si } e = (\text{Sube JPY, Sube CHF}) \vee (\text{Baja JPY, Sube CHF}), \\ s_6(1 - \sigma_i) & \text{si } e = (\text{Sube JPY, Baja CHF}) \vee (\text{Baja JPY, Baja CHF}). \end{cases} \quad (10)$$

Probabilidad de Transición

Para cada divisa, la probabilidad de transición se define mediante una matriz 2×2 con parejas de estados {Sube, Baja}.

$$P_{JPY} = \begin{pmatrix} 0,3941 & 0,6059 \\ 0,4538 & 0,5462 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$P_{CHF} = \begin{pmatrix} 0,3400 & 0,6600 \\ 0,4238 & 0,5762 \end{pmatrix} \quad (12)$$

A partir de las matrices individuales se realiza una única matriz que refleje la probabilidad conjunta del movimiento y fluctuación de ambas divisas en simultáneo.

$$P_{JPY,CHF} = \begin{pmatrix} 0,1340 & 0,2603 & 0,1675 & 0,2272 \\ 0,2060 & 0,4000 & 0,2567 & 0,3493 \\ 0,1543 & 0,2995 & 0,1922 & 0,2613 \\ 0,1855 & 0,3605 & 0,2313 & 0,3143 \end{pmatrix} \quad (13)$$

A partir de esta matriz, el algoritmo busca la probabilidad de transición entre tuplas de estados de ambas monedas. Esto es equivalente a la matriz de transición entre todos los posibles eventos e en el ES .

Contribución de la Acción

- Al cambiar de divisa, se aplica una comisión del 1 % sobre el precio de la divisa actual:

$$C_a(a, s) = \begin{cases} -0,01(s_5) & \text{si } a = \text{cambiar divisa} \wedge s_2 = \text{JPY}, \\ -0,01(s_6) & \text{si } a = \text{cambiar divisa} \wedge s_2 = \text{CHF}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (14)$$

Contribución del Evento

La contribución del evento depende de la variación porcentual en el precio:

$$C_e(a, s, e) = \begin{cases} +s_5(\sigma_{\text{JPY}}) & \text{si } (e = \text{Sube JPY, Sube CHF} \vee e = \text{Sube JPY, Baja CHF}) \wedge s_2 = \text{JPY}, \\ -s_5(\sigma_{\text{JPY}}) & \text{si } (e = \text{Baja JPY, Sube CHF} \vee e = \text{Baja JPY, Baja CHF}) \wedge s_2 = \text{JPY}, \\ +s_6(\sigma_{\text{CHF}}) & \text{si } (e = \text{Sube JPY, Sube CHF} \vee e = \text{Baja JPY, Sube CHF}) \wedge s_2 = \text{CHF}, \\ -s_6(\sigma_{\text{CHF}}) & \text{si } (e = \text{Sube JPY, Baja CHF} \vee e = \text{Baja JPY, Baja CHF}) \wedge s_2 = \text{CHF}. \end{cases} \quad (15)$$

Función de Calidad

$$Q_{s_a} = c_a + \sum_{i=1}^m p_i (c_{e_i} + V_{sn_i}) \quad (16)$$

La ecuación anterior representa el valor de calidad Q_{s_a} de tomar una acción a en un estado s . A continuación se explica cada uno de los términos de la ecuación:

- Q_{s_a} : Es el **valor de calidad** de tomar la acción a en el estado s . Representa el beneficio total esperado de realizar la acción a en el estado s bajo la política actual del agente.
- c_a : Es el **costo o recompensa inmediata** asociada con la acción a en el estado s . Este valor puede ser negativo (costo) o positivo (recompensa), y refleja el impacto inmediato de realizar la acción.

- p_i : Es la **probabilidad** de que ocurra el evento e_i después de tomar la acción a en el estado s . Esta probabilidad describe la incertidumbre en las transiciones de estado.
- c_{e_i} : Es el **costo o recompensa** asociado con el evento e_i , que puede ocurrir como resultado de tomar la acción a en el estado s . Representa el impacto inmediato del evento e_i en el agente.
- $V_{s_{n_i}}$: Es el **valor del estado posterior** s_{n_i} , que es el valor esperado del estado s_{n_i} que se alcanzará después de que ocurra el evento e_i . Este valor refleja las recompensas futuras esperadas si el agente llega a ese estado.
- $\sum_{i=1}^m$: Es una **suma sobre los eventos posibles** e_i . Aquí m es el número total de eventos posibles que pueden ocurrir después de tomar la acción a en el estado s . La suma acumula las recompensas y valores esperados de todos los posibles eventos, ponderados por las probabilidades de que cada uno de esos eventos ocurra.

Función de Valor

$$V^*(s) = \text{máx}(Q_{s_a}) \quad (17)$$

- $V(s)$: Es el valor del estado s . Representa la recompensa total esperada que el agente puede obtener a partir de ese estado, siguiendo la política óptima.
- Q_{s_a} : Es el valor de tomar la acción a en el estado s . Este valor incluye la recompensa inmediata de tomar la acción a en s , más las recompensas futuras derivadas de la transición al siguiente estado.
- $\text{máx}(Q_{s_a})$: el valor de un estado s es igual al valor máximo entre todas las acciones posibles a . Es decir, se toma la acción que produce la mayor recompensa total esperada descrita como $V^*(s)$.

Condiciones de Contorno

$$V_s = \begin{cases} s_5 & \text{si } (s_2 = \text{JPY} \wedge s_1 = 4) \\ s_6 & \text{si } (s_2 = \text{CHF} \wedge s_1 = 4) \end{cases} \quad (18)$$

Esta función indica que al finalizar el día 3, es decir, al iniciar el cuarto día, el valor esperado para ese estado final va a ser el precio de la última moneda que eligió el agente.

Ganancia óptima esperada

Al utilizar el algoritmo de iteración de valor con el modelo que se construyó, se encontró la ganancia óptima tras 3 días a partir del momento inicial. Para esto se tiene que generar el proceso de solución para 3 t-steps. El siguiente comando genera

```
1 v, a = modelo.Solution_Process('VAI', 3)
```

Donde la variable v almacena todos los valores máximos de la función de valor. A partir de allí se puede tomar el primer valor, que indicaría cual es el precio esperado después de 3 días si se sigue la política óptima. Tras realizar esta operación con el modelo anterior, se obtuvo un valor de 1.83 %, es decir, se espera tener \$101.5008 COP al finalizar el tercer día siguiendo la política óptima.

Análisis de Sensibilidad

El análisis de sensibilidad es una herramienta esencial en la validación de modelos financieros, ya que permite examinar cómo responden los resultados a cambios en parámetros y condiciones iniciales clave. En el contexto de este estudio, se aplica al modelo de decisión Markoviano construido para optimizar la inversión entre dos divisas, el Franco Suizo (CHF) y el Yen Japonés (JPY), con un horizonte de planificación de tres días.

Este tipo de análisis no solo verifica la estabilidad del modelo, sino que también permite identificar las variables con mayor influencia en la ganancia óptima. En particular, se busca confirmar si la ganancia del 1.5008 % obtenida con las condiciones base (iniciando con 100 unidades de ambas divisas y siguiendo la política óptima) permanece inalterada al

modificar factores como la cantidad inicial invertida. Esto asegura que el modelo es robusto y proporciona resultados consistentes, independientemente de ajustes menores en las condiciones iniciales.

Mediante esta metodología, se evidencia que la estructura y las probabilidades de transición del modelo son adecuadas para capturar las dinámicas del mercado de divisas, incluso frente a la volatilidad inherente de este entorno.

Usando las divisas GBP - MXN

Al incorporar las divisas GBP y MXN en el modelo, la ganancia óptima esperada disminuyó a 1.4702 %, lo cual representa una disminución leve respecto al caso base. Esta disminución puede atribuirse a varios factores, como que las características de estabilidad o fluctuación de las divisas afectan directamente las probabilidades de transición entre estados y, por ende, las decisiones óptimas del modelo.

Iniciando con la Divisa CHF

En este escenario, al establecer el Franco Suizo (CHF) como divisa inicial en lugar del Yen Japonés (JPY), se obtuvo una ganancia óptima del 1.7851 %, lo que representa un ligero aumento respecto al 1.5008 % alcanzado en el caso base.

Este resultado puede explicarse por la razón de que el CHF es conocido por su relativa estabilidad como moneda refugio, lo cual, si bien puede ofrecer menores riesgos, también limita la posibilidad de aprovechar grandes cambios de precio que puedan generar mayores rendimientos en periodos cortos, como los tres días considerados en el modelo.

Cambiando los Porcentajes de Comisión

El análisis de sensibilidad en las comisiones evidencia su influencia directa en la rentabilidad del modelo:

Comisión reducida (0.5 %): La disminución en los costos por cambio de divisa permite que el modelo aproveche más transiciones estratégicas entre monedas, lo cual incrementa la ganancia final. Esto destaca la importancia de minimizar costos operativos para mejorar la eficiencia de la inversión.

Comisión elevada (10 %): Un incremento significativo en la comisión limita las oportunidades de realizar cambios de divisas rentables, ya que el costo asociado a cada operación puede superar los beneficios esperados. Esto obliga al modelo a adoptar estrategias más conservadoras, disminuyendo así la ganancia esperada.

Variables s3 y s4 inician en Baja

Un estado inicial "Baja."^{en} ambas divisas afecta negativamente las decisiones del modelo al inicio, ya que reduce las probabilidades de obtener beneficios significativos en las primeras iteraciones. Esto puede llevar al modelo a optar por acciones más conservadoras, afectando la ganancia total esperada. Este análisis evidencia que los estados iniciales de las variables son determinantes para maximizar la rentabilidad del modelo. Una tendencia inicial negativa reduce las oportunidades de inversión y pone de manifiesto la importancia de optimizar las condiciones iniciales en mercados de alta volatilidad.

Variables s3 inicia en Baja y s4 inicia en Sube

Una tendencia inicial "Sube" para el CHF permite que el modelo enfoque sus decisiones en aprovechar las posibles ganancias de esta divisa. Sin embargo, la tendencia "Baja" del JPY limita las oportunidades de cambio estratégico en los primeros días. Esta combinación genera un balance entre las dos monedas, pero reduce la flexibilidad para maximizar las ganancias.

Una tendencia inicial "Sube" para el CHF permite que el modelo enfoque sus decisiones en aprovechar las posibles ganancias de esta divisa. Sin embargo, la tendencia "Baja" del JPY limita las oportunidades de cambio estratégico en los primeros días. Esta combinación genera un balance entre las dos monedas, pero reduce la flexibilidad para maximizar las ganancias.

Variables s3 inicia en Baja y s4 inicia en Baja

En el modelo base, las variables s3 y s4, que representan los estados iniciales del JPY y CHF, comienzan en un estado de Sube, logrando una ganancia óptima esperada de 1.5008 %. Sin embargo, al cambiar su estado inicial a Baja, la ganancia óptima esperada

aumenta significativamente a 1.9151 %.

Este comportamiento refleja cómo el modelo se adapta a las condiciones iniciales del mercado. Cuando las divisas inician en un estado de Baja, existe un mayor potencial de recuperación y repunte en los valores, lo que permite al modelo maximizar las ganancias a lo largo del horizonte de planificación de tres días. La política óptima ajusta las decisiones de inversión para capitalizar estas oportunidades, aprovechando la alta probabilidad de incremento en las tasas de cambio tras un estado inicial desfavorable.

Variables s3 inicia en Baja y s4 inicia en Baja

Al modificar las condiciones iniciales del modelo, con s3 (estado del JPY) iniciando en Baja y s4 (estado del CHF) en Sube, la ganancia óptima esperada aumenta a 1.8719 %, superando el 1.5008 % obtenido en el caso base.

Este resultado se explica por la capacidad del modelo para identificar oportunidades en escenarios de asimetría entre las divisas: mientras el JPY tiene un alto potencial de recuperación desde su estado inicial desfavorable, el CHF aporta estabilidad desde un estado favorable. La política óptima ajusta las decisiones de inversión para capitalizar estas condiciones, maximizando las ganancias a lo largo del horizonte de planificación de tres días.

Variable s3 inicia en Sube y s4 inicia en Baja

En el escenario donde s3 (estado del JPY) inicia en Sube y s4 (estado del CHF) en Baja, la ganancia óptima esperada es de 1.6711 %. Este resultado es menor al obtenido cuando ambas variables inician en Baja (1.9151 %), pero mayor que el del caso base (1.5008 %), donde ambas comienzan en Sube.

El comportamiento del modelo en este escenario evidencia un equilibrio entre aprovechar la fortaleza inicial del JPY y las posibles ganancias derivadas de la recuperación del CHF desde su estado inicial desfavorable. Sin embargo, la ganancia óptima es ligeramente menor que en otros escenarios debido a que la política debe gestionar tanto la estabilidad del JPY como la incertidumbre asociada a la recuperación del CHF.

Modificando la cantidad inicial

Al realizar modificaciones en la cantidad inicial invertida, ya sea disminuyéndola o aumentándola, la ganancia óptima esperada permanece constante para todos los escenarios analizados. Por ejemplo, en el caso donde s_3 inicia en Sube y s_4 en Baja, la ganancia óptima sigue siendo 1.6711 %, independientemente del monto inicial invertido.

Este comportamiento refleja la naturaleza relativa del modelo, que calcula ganancias como proporciones y no como valores absolutos. Las políticas óptimas y las probabilidades de transición determinan las decisiones de inversión, asegurando que los rendimientos no dependan de la magnitud del capital inicial.

Impacto del Ajuste de la Ventana Temporal

El ajuste de la ventana temporal utilizada para calcular la desviación estándar móvil tiene un impacto significativo en la ganancia óptima esperada, reflejando la sensibilidad del modelo a las variaciones de la volatilidad percibida:

Ventana reducida en 10 unidades: La ganancia óptima se reduce a 0.7364 %. Una ventana más corta incrementa la sensibilidad del modelo a las fluctuaciones bruscas del mercado, lo que puede llevar a decisiones menos estables. Esto ocurre porque las probabilidades de transición se actualizan con mayor frecuencia, generando mayor incertidumbre en los cálculos de las políticas óptimas.

Ventana aumentada en 10 unidades: La ganancia óptima sube a 1.6234 %. Una ventana más larga suaviza las fluctuaciones del mercado, permitiendo que el modelo tome decisiones basadas en tendencias más estables. Aunque esta estrategia es menos reactiva a los cambios repentinos, proporciona una mayor consistencia en mercados menos volátiles.

Para este caso práctico, solo se imprimió los 10 primeros valores; en ellos se puede evidenciar que para cada estado diferente esta su valores optimo $V(s)$ con su política $\pi(s)$, lo que nos indica que para ese estado S_n opta escoger la mejor acción entre "Mantener."° "Cambiar" teniendo en cuenta cual es la ganancia de cada una de las acciones, la política escoge la acción que maximice las ganancia y el valor optimo es el valor de dicha acción.

s	Divisa	Tendencia 1	Tendencia 2	Valor 1	Valor 2	V(s)	pi(s)
1	JPY	Sube	Sube	100	100	101.826	mantener divisa
2	JPY	Sube	Sube	101.24	101.04	102.3533	mantener divisa
2	JPY	Sube	Baja	101.24	98.96	101.8455	mantener divisa
2	JPY	Baja	Sube	98.76	101.04	101.8456	cambiar divisa
2	JPY	Baja	Baja	98.76	98.96	100.263	mantener divisa
2	CHF	Sube	Sube	101.24	101.04	102.4336	mantener divisa
2	CHF	Sube	Baja	101.24	98.96	101.9918	mantener divisa
2	CHF	Baja	Sube	98.76	101.04	101.8451	mantener divisa
2	CHF	Baja	Baja	98.76	98.96	100.4156	mantener divisa
3	JPY	Sube	Sube	102.4954	102.0908	102.7408	mantener divisa

Cuadro 6

Tabla de valores y decisiones

Para determinar la ganancia optima a través de tres día se utiliza la función *Solutionprocess* con un horizonte de tres días, en donde se revisa el valor de V(s) de la primera fila, dado que el programa calcula del ultima día hasta el primer día, lo que nos puede indicar que la primera fila va ser la ganancia. En este caso, la ganancia esta dada por un porcentaje, la fórmula se muestra a continuación.

$$Ganacia = \frac{V[0] - precio}{precio} * 100 \quad (19)$$

Donde:

- V[0] = El primer valor de la lista V(s)
- precio = el precio de la divisas

En este caso práctico con el modelo base, la ganancia fue de 1.5008 % iniciando con la divisa japonesa.

MDP con Seis Estados

En este caso la matriz de Markov no contiene 2 estados sino 6, los cuales son los siguientes (B1,B2,B3,S1,S2,S3), la división de estos estados estada dada por las siguientes condiciones:

- B3: $Y_n < -2\sigma_{tl}$ Representa una caída significativa en el valor de la divisa. Un cambio diario negativo mayor que dos veces la desviación estándar móvil indica una fuerte depreciación de la divisa.
- B2: $-2\sigma_{tl} \leq Y_n < -\sigma_{tl}$ Señala una depreciación moderada de la divisa. La caída está entre una y dos veces la desviación estándar móvil, lo que sugiere una pérdida de valor relevante pero no extrema.
- B1: $-\sigma_{tl} \leq Y_n < 0$ Indica una ligera depreciación de la divisa. El cambio diario es negativo pero menor que una vez la desviación estándar móvil, lo que sugiere una fluctuación menor dentro de un rango de variabilidad normal.
- S1: $0 \leq Y_n < \sigma_{tl}$ Representa una apreciación leve o nula de la divisa. El valor de la moneda se mantiene estable o con un pequeño aumento, dentro del rango de una desviación estándar móvil, lo que refleja una situación de estabilidad.
- S2: $\sigma_{tl} \leq Y_n < 2\sigma_{tl}$ Señala una apreciación moderada. El aumento en el valor de la divisa está entre una y dos veces la desviación estándar móvil, lo que sugiere una ganancia más significativa en comparación con la volatilidad reciente.
- S3: $2\sigma_{tl} \leq Y_n$ Representa una apreciación fuerte y significativa. El cambio diario positivo es mayor que dos veces la desviación estándar móvil, indicando que la moneda se ha fortalecido mucho en comparación con los movimientos recientes.

El planteamiento de aprendizaje por refuerzo es muy parecido al modelo base, sin embargo en este caso para facilitar, se decido que S3 va ser un diccionario de la

divisas que esta en el modelo y S4 va ser también un diccionario que va a contener los estados para cada una de las divisas, para la acción va ser exactamente lo mismo que el modelo base, los eventos van a ser un vector de tres estados con las diferentes combinaciones de las divisas. Tanto la ecuación de transición, la función de calidad y la condición de contorno no cambian a la de modelo base, sin embargo son más restricciones.

En este caso el modelo Bono va a contener tres divisas las cuales son las siguientes. La divisa Japonesa , la divisa libra esterlina y la divisa mexicana. Con los mismo estados iniciales que el modelo base. En conclusión al ejecutar rp4solver con esas tres divisas el resultado de los estados generados fue de (Estados Generados) , (La ganancia)

Análisis y conclusiones

A partir de todo lo realizado en este documento, se logro construir exitosamente el modelo base, el cual consiste del uso de las divisas Yen Japones y Franco Suizo, a través de lo cual se pudo determinar una política optima de inversión para un horizonte de planeación de 3 días; con lo cual, se estableció la ganancia optima esperada, la cual es de 1.5008 % de rentabilidad en este lapso de tiempo. Con base en el análisis de sensibilidad, se observó que con las divisas MXN y GBP, se puede alcanzar una rentabilidad de hasta 1.4702 %; de la misma manera, se pudo determinar que la comisión, las divisas y el estado inicial de cada moneda son los factores que tienen mayor impacto en el rendimiento del modelo. Por último, se puede observar que para el modelo MDP con estados adicionales, se pudo lograr una rentabilidad de hasta 0.7792 %, lo cual indica que se espera una mayor ganancia con el modelo base. En resumen a este documento, se utilizan modelos de deep learning, el cual funciona de manera no determinística, y por medio del modelamiento de cadenas de Markov del mercado bursátil de las diferentes divisas, se pudo establecer una política de inversión para maximizar las ganancias esperadas en un entorno volátil como lo es el mercado de acciones.

Referencias

- Aronsson, M., & Folkesson, A. (2023). Stock market analysis with a Markovian approach: Properties and prediction of OMXS30.
<https://kth.diva-portal.org/smash/get/diva2:1823899/FULLTEXT01.pdf>
- Banrep. (2024). Billetes y Monedas - Monedas Disponibles.
<https://www.banrep.gov.co/es/estadisticas/monedas-disponibles>
- Barbu1, V. S., D'Amico, G., & Blasis, R. D. (2017). Novel advancements in the Markov chain stock model: analysis and inference. *Springer Nature*, 13, 125-152.
<https://doi.org/10.1007/s10436-017-0297-9>
- Eugster, D. (2023). Esplendor y azote: la firmeza del franco suizo. <https://www.swissinfo.ch/spa/cultura/esplendor-y-azote-la-firmeza-del-franco-suizo/48517310>
- FasterCapital. (2024). Yen Explorando el papel del yen en la unidad monetaria asiatica.
<https://fastercapital.com/es/contenido/Yen--Explorando-el-papel-del-yen-en-la-unidad-monetaria-asiatica.html>
- García, K. G. (2021). *Análisis probabilístico de sequía meteorológica mediante cadenas de markov y redes bayesianas; cuenca del río tempisque, guanacaste* [Tesis de maestría, Universidad de costa rica sistema de estudios de posgrado].
- Imparcial. (2024). ¿Por qué el peso mexicano es tan importante en el mercado de divisas.
<https://imparcialoaxaca.mx/economia/519963/por-que-el-peso-mexicano-es-tan-importante-en-el-mercado-de-divisas/>
- Laipaporn, J., & Tongkumchum, P. (2021). Estimating the Natural Cubic Spline Volatilities of the ASEAN-5 Exchange Rates. *Journal of Asian Finance, Economics and Business*, 8(3), 0001-0010.
<https://doi.org/https://doi.org/10.13106/jafeb.2021.vol8.no3.0001>
- MarketScreener. (2024). La importancia de la libra esterlina en los mercados mundiales de divisas. <https://es.marketscreener.com/noticias/ultimas/La-importancia-de-la-libra-esterlina-en-los-mercados-mundiales-de-divisas-47219639/#:~:text=No%20s%C3>

%B3lo%20los%20mercados%20financieros%20utilizan%20la%20libra,del%20d%C3
%B3lar%20y%20casi%20el%2023%25%20del%20euro

- Rodríguez-González, A., García-Crespo, Á., Colomo-Palacios, R., Guldrís Iglesias, F., & Gómez-Berbís, J. M. (2011). CAST: Using neural networks to improve trading systems based on technical analysis by means of the RSI financial indicator. *Expert Systems with Applications*, 38(9), 11489-11500.
<https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.03.023>
- Svoboda, M., & Říhová, P. (2021). Stock price prediction using markov chains analysis with varying state space on data from the czech republic. *E+M Ekonomie a Management*, 24, 142-155. <https://doi.org/10.15240/tul/001/2021-4-009>
- van der Veen, M. (2020). *An Introduction to Reinforcement Learning* [Accessed: 2024-11-18]. University of Groningen.
https://www.ai.rug.nl/~mwiering/Intro_RLBOOK.pdf