מטלה 4 באלגוריתמים כלכליים- נטע רוט

שאלה 3- הוכחה: נסמן:

Res_{opt}- הערך המקסימלי שקיבל שחקן כלשהו בחלוקה האופטימלית (אגליטרית),

Res_{list}- הערך המקסימלי שקיבל שחקן כלשהו בחלוקה של אלגוריתם הרשימה.

יש n משתתפים ו-m משימות, ולמשימה i יש עלות של p_i כאשר $1 \leq i \leq m$.

נסמן בA את השחקן שבסוף החלוקה (של אלגוריתם הרשימה) קיבל את הערך הכי גדול.

נסמן בk את המשימה האחרונה שקיבל שחקן A.

נסמן ב-p_{max} את הערך של המטלה הכי "כבדה" שיש ולכן באופן טריוויאלי מתקיים:

$$\boxed{1}\ Res_{opt} \geq p_{max}$$

מכיוון שיהיה חייב להיות שחקן שיקבל את המטלה max שערכה p_{max} לכן הערך המקסימלי הכי קטן שחלוקה יכולה לתת מתחיל מ-p_{max} ולכן זה חסם תחתון.

נשים ❤️ בנוסף שמתקיים:

$$\boxed{2}\ Res_{opt} \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} p_i$$

הסבר: נסתכל על חלוקה דמיונית שמחלקת באופן שווה בשווה את המטלות בין כל המשתתפים, לכן בחלוקה כזו הערך המקסימלי הכי קטן של משתתף הוא סכום עלות כל המטלות לחלק למספר המשתתפים. חלוקה כזו היא חסם תחתון לכל חלוקה בפרט לחלוקה האופטימלית לכן זה החסם התחתון של Res_{opt}.

נסמן בX_A את הערך שהיה לשחקן A לפני שקיבל את המטלה k, בגלל שאלגוריתם הרשימה מחלק את המטלה הבאה לשחקן עם הערך הכי קטן ואנו יודעים שA קיבל את המטלה הk k בהכרח לשחקן A יש ערך קטן או שווה לשאר העלויות של השחקנים, לכן הערך הכי **גדול** שX_A יכול לקבל הוא אם העלויות עד כה היו זהות כלומר: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k-1} p_i$ (מצב שבו כל ה$k-1$ מטלות הקודמות חולקו באופן שווה בשווה בין יתר השחקנים) ולכן:

$$\boxed{3}\ X_A \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k-1} p_i$$

כפי שנאמר קודם, שחקן A נותר עם הערך המקסימלי בסוף החלוקה (של אלגוריתם הרשימה) ולכן הוא קובע את Res_{list}. לכן, לפי ההגדרות של X_A ומטלה k מתקיים

$$\boxed{4}\ Res_{list} = X_A + p_k$$

נשים לב ל2 עובדות טריוויאליות:

$$\boxed{5}\, p_k \le p_{max}$$

כי p_{max} הוגדר להיות המטלה עם הערך הכי גדול.

$$\boxed{6}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} p_i \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} p_i$$

כי ערך מטלה הוא חיובי.

בסה"כ:

$$Res_{list} =_{\boxed{4}} X_A + p_k \le_{\boxed{3}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k-1} p_i + p_k$$
$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} p_i - p_k\right) + p_k \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} p_i + \left(1 - \frac{1}{n}\right) p_k$$
$$\le_{\boxed{6}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} p_i + \left(1 - \frac{1}{n}\right) p_k \le_{\boxed{2}} Res_{opt} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) p_k$$
$$\le_{\boxed{5}} Res_{opt} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) p_{max} \le_{\boxed{1}} Res_{opt} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) Res_{opt}$$

סה"כ:

$$Res_{list} \le Res_{opt} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) Res_{opt} = \left(2 - \frac{1}{n}\right) Res_{opt}$$

לכן:

$$\frac{Res_{list}}{Res_{opt}} \le 2 - \frac{1}{n}$$

ונשים לב ש$\frac{Res_{list}}{Res_{opt}}$ הוא בדיוק יחס הקירוב 😊

מקור: נעזרתי בהוכחה:
https://personal.vu.nl/l.stougie/Courses/COB/col789AA.pdf