

מטלה 2 באלגוריתמים כלכליים- נטע רוט

שאלה 5 סעיף א- הפרכה באמצעות דוגמה נגדית:

| עצים | נפט | פלדה | |
|------|-----|------|-----|
| 1 | 1 | 1 | עמי |
| 19 | 19 | 19 | תמי |

$$V_{Ami}(X_{Ami}) = \frac{1}{20} \cdot 1 + \frac{1}{20} \cdot 1 + \frac{1}{20} \cdot 1 = \frac{3}{20}$$

$$V_{Ami}(C) = 3$$

$$\frac{3}{19} = V_{Ami}(X_{Ami}) \neq \frac{V_{Ami}(C)}{n} = \frac{3}{2} \text{ ולכן}$$

ולכן עבור עמי זו לא חלוקה פורפוציונלית.

שאלה 5 ניתוח דוגמה:

| עצים | נפט | פלדה | |
|------|-----|------|-----|
| 80 | 19 | 1 | עמי |
| 79 | 1 | 20 | תמי |

$$V_{Ami}(X_{Ami}) = \frac{1}{21} \cdot 1 + \frac{19}{20} \cdot 19 + \frac{80}{159} \cdot 80 = 58 \frac{2591}{7420}$$

$$V_{Tami}(X_{Tami}) = \frac{20}{21} \cdot 20 + \frac{1}{20} \cdot 1 + \frac{79}{159} \cdot 79 = 58 \frac{2591}{7420}$$

שאלה 5 סעיף ב- הוכחה:

נניח בשלילה שהחלוקה שהוצעה (נקרא לה חלוקה A) אינה יעילה פארטו, לכן קיימת חלוקה B שהיא שיפור פארטו שלה.

בחלוקה B לכל השחקנים יש ערך לפחות כמו בחלוקה A ולחלק מהשחקנים יש ערך גבוה יותר בה"כ לעמי. ולכן:

$$V_{Ami}(X_{Ami}^A) < V_{Ami}(X_{Ami}^B)$$

באשר X_i^A היא הפרוסה שקיבל משתתף i בחלוקה A

ו X_i^B היא הפרוסה שקיבל משתתף i בחלוקה B

עבור חלוקה A נפרק את הפרוסה שלו X_{Ami}^A לפי המשאבים ולכן

$$V_{Ami}(X_{Ami}^A) = \sum_x \left(\frac{V_{Ami}(x)}{\sum_j V_j(x)} \cdot V_{Ami}(x) \right) = \sum_x (A_{Ami}(x) \cdot V_{Ami}(x))$$

הסבר: כדי לדעת את ערך הפרוסה שמשתתף קיבל (לדוגמה עמי) **נסכום** את כל החלקים שקיבל מכל משאב, מכל משאב הוא קיבל את **החלק הכחול לפי ההגדרה של החלוקה** בפול **הערך שהוא מייחס לאותו המשאב**. אפשר לראות את זה יותר ברור בדוגמה למעלה.

עבור חלוקה B נפרק את הפרוסה שלו X_{Ami}^B לפי המשאבים ולכן


$$V_{Ami}(X_{Ami}^B) = \sum_x (B_{Ami}(x) \cdot V_{Ami}(x))$$

כאשר $A_i(x)$ הוא הערך שהחלוקה A נתנה למשתתף i עבור המשאב x

ו $B_i(x)$ הוא הערך שהחלוקה B נתנה למשתתף i עבור המשאב x

לכן סה"כ:

$$\sum_x (A_{Ami}(x) \cdot V_{Ami}(x)) < \sum_x (B_{Ami}(x) \cdot V_{Ami}(x))$$

לכן יש משאב x (בה"כ יחיד) כלשהו שעבורו: $A_{Ami}(x) < B_{Ami}(x)$ (במילים- יש משאב בו החלוקה B נתנה יותר ממנו לעמי מאשר החלוקה A), ולכן אותו המשאב נלקח ממשותף כלשהו בה"כ נלקח מתמי.  שהערך שתמי נתנה ל x חייב להיות חיובי אחרת לא הייתה מקבלת כלל מ x בחלוקה A (ואז חלוקה B לא הייתה יכולה לקחת ממנה את המשאב).

עבור אותו משאב x נתבונן בחלוקה ש A נתנה לתמי לעומת החלוקה ש B נתנה לתמי:

$$\begin{aligned} A_{Tami}(x) &= \frac{V_{Tami}(x)}{\sum_j V_j(x)} = \frac{\sum_j V_j(x) - V_{Ami}(x) - V_{Rami}(x) - \dots}{\sum_j V_j(x)} \\ &= 1 - A_{Ami}(x) - A_{Rami}(x) - \dots \\ &> 1 - B_{Ami}(x) - A_{Rami}(x) - \dots = B_{Tami}(x) \end{aligned}$$

כלומר בחלוקה B תמי קיבלה פחות מ x מאשר שקיבלה בחלוקה A ולכן הערך הכולל של הפרוסה שלה בחלוקה B היה נמוך מהערך הכולל של הפרוסה שלה בחלוקה A בסתירה לכך ש B היא שיפור פארטו של חלוקה A .