ACM-ICPC Template Libraries

合肥工业大学宣城校区

Author: Netcan
Blog: http://www.netcan.xyz

2015 年 9 月 12 日

目录

第一章 数学

1.1 $0-20$ 的阶乘

```
const long long fac[21]={1,1,2,6,24,120,720,5040,40320,362880,
                   3628800,39916800,479001600,6227020800,
                   87178291200,1307674368000,20922789888000,
                   355687428096000,6402373705728000,121645100408832000,
                   2432902008176640000};
```

1.2 错排公式

有 n 个元素的排列，若一个排列中所有的元素都不在自己原来的位置上，错排数记为 $D(n)$，则

$$D(n) = (n-1)[D(n-1) + D(n-2)]$$

1.3 最小公倍数 $lcm(a,b)$ && 最大公约数 $gcd(a,b)$

```
inline int gcd(int a, int b) { // 如果a<b，则递归得gcd(b,a%b)即gcd(b, a)，即交换了位置，时间复杂度O(
    log max(a, b))
   return b==0?a:gcd(b,a%b)
}
inline int lcm(int a, int b) {
   return a/gcd(a,b)*b;
}
```

1.4 扩展欧几里得

求解 $ax + by = gcd(a,b)$ 这里得到的是一组 (x,y) 的可行解，$(x+kb, y-ka)$ 为解集。

```
int extgcd(int a, int b, int &x, int &y) { // x, y为解，返回gcd(a, b)
   int d = a;
   if(b!=0) {
      d = extgcd(b, a%b, y, x);
      y -= (a/b)*x;
   }
   else {
```

```
        x = 1; y = 0;
    }
    return d;
}
```

1.5 母函数

$G(x) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^N)(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^N)\ldots(1 + x^N)$ 展开后 x^N 的系数(注意溢出)

```
int c1[MAX_N], c2[MAX_N]; // c1表示每一项的的系数, c2表示每个表达式的临时系数
for(int i=0; i<=N; ++i) { // 每一项应该初始化为1,即1+x+x^2+...+x^N
    c1[i] = 1;
    c2[i] = 0;
}
for(int i=2; i<=N; ++i) { // 从第二个表达式开始
    for(int j=0; j<=N; ++j) // 表示第一个表达式的第j项
        for(int k=0;k+j<=N;k+=i) // k表示后一个表达式的第k项
            c2[j+k] += c1[j]; // 这里应该是相当于C1*x^j * x^k=C1*x^(j+k), 即c2[k+j]+=C1[j]
    for(int j=0; j<=N; ++j) {
        c1[j] = c2[j]; // 确定x^j的系数
        c2[j] = 0;
    }
}
```

1.6 动态规划

1.6.1 最长公共子序列

$$dp[i+1][j+1] = \begin{cases} dp[i][j] + 1 & s1[i] = s2[j] \\ max(dp[i+1][j], dp[i][j+1]) & s1[i] \neq s2[j] \end{cases}$$

$$op[i+1][j+1] = \begin{cases} \nwarrow & s1[i] = s2[j] \\ \uparrow & dp[i][j+1] \geq dp[i+1][j] \\ \leftarrow & dp[i][j+1] < dp[i+1][j] \end{cases}$$

1.6.2 最长上升子序列

$$dp[i] = max\{1, dp[j] + 1 | j < i \&\& a_j < a_i\}$$

$O(N^2)$ 算法

```
int a[MAX_N], dp[MAX_N]; // a为序列， dp[i]为以a[i]为结尾的最长上升子序列长度
int Maxlis = 0; // 最长上升子序列长度
int n; // a的有效长度
for(int i=0; i<n; ++i) {
   dp[i] = 1; // 记得初始化为1
   for(int j=0; j<i; ++j)
      if(a[i] > a[j])
         dp[i] = max(dp[i], dp[j] + 1);
   Maxlis = max(Maxlis, dp[i]); // 记得更新Maxlis
}
```

$O(nlog(n))$ 算法

```
#define INF 0x3f3f3f3f
int a[MAX_N], dp[MAX_N]; // a为序列, dp[i]存放长度为i+1的上升序列中末尾元素的最小值
int n; // 序列长度
memset(dp, 0x3f, sizeof(dp)); // 初始化dp[i]值都为INF
for(int i=0; i<n; ++i)
   *lower_bound(dp, dp+n, a[i]) = a[i];
// cout << lower_bound(dp, dp+n, INF) - dp << endl; // 最长上升序列的长度
```

$lower\_bound(dp, dp+n, k)$ 这个函数从已经排序好的序列 dp 中，二分搜索找出满足 $dp_i \geq k$ 的 dp_i 的最小指针。

$upper\_bound(dp, dp+n, k)$ 这个函数则从已经排序好的序列 dp 中，二分搜索找出满足 $dp_i > k$ 的 dp_i 的最小指针。

例如求有序数组 a 中的 k 的个数，可以利用下面的代码求出：

```
upper_bound(a, a+n, k) - lower_bound(a, a+n, k)
```

1.7 高精度

1.7.1 加法 && 乘法

适合大数的加法和乘法

```
struct BigInt {
   const static int nlen = 4; // 控制每个数组数字长度，默认为4，计算乘法的时候每个数组相乘也不会溢出int范围
   const static int mod = 10000; // 值为10^nlen
   short n[1000], len; // 最多存4*1000位长度，可调，short占的内存小，但是速度慢
   BigInt() {
      memset(n, 0, sizeof(n));
      len = 1;
   }
   BigInt(int num) {
      len = 0;
      while(num >0) {
      n[len++] = num%mod;
      num/=mod;
      }
   }
   BigInt(const char *s) {
      int l = strlen(s);
```

```
        len = l % nlen == 0 ? l/nlen : l/nlen+1;
        int index = 0;
        for(int i=l-1; i>=0; i -= nlen) {
        int tmp = 0;
        int j = i-nlen+1;
        if(j<0) j = 0;
        for(int k=j; k<=i; ++k)
            tmp = tmp*10+s[k]-'0';
        n[index++] = tmp;
        }
    }
    BigInt operator+(const BigInt &b) const { // 加法
        BigInt res;
        res.len = max(len, b.len);
        for(int i=0; i<res.len; ++i) {
        res.n[i] += (i<len ? n[i]:0) + (i<b.len ? b.n[i]:0);
        res.n[i+1] += res.n[i]/mod;
        res.n[i] = res.n[i]%mod;
        }
        if(res.n[res.len] > 0) ++res.len;
        return res;
    }
    BigInt operator*(const BigInt &b) const { // 乘法
        BigInt res;
        for(int i=0; i<len; ++i) { // 类似母函数，第一个数组
        int up = 0; // 进位
        for(int j=0; j<b.len; ++j) { // 第二个数组
            int tmp = n[i]*b.n[j] + up + res.n[i+j]; // 控制nlen=4是防止tmp溢出
            res.n[i+j] = tmp%mod;
            up = tmp/mod;
        }
        if(up!=0)
            res.n[i+b.len] = up;
        }
        res.len = len+b.len;
        while(res.n[res.len-1] == 0 && res.len>1 ) --res.len;
        return res;
    }
    void show() const {
        printf("%d", n[len-1]); // 先输出最高位，后面可能需要前导0
        for(int i=len-2; i>=0; --i)
        printf("%04d", n[i]); // 前导0，%04d和nlen一致
        printf("\n");
    }
};
```

1.8 素数

1.8.1 埃式筛法 $O(nloglogn)$

```
bool is_prime[MAX_N]; // 第i个素数
int prime[MAX_N+1]; // is_prime[i]为true表示i是素数

int sieve(int n) { // 返回n以内的素数个数
```

```
    int p=0;
    memset(is_prime, true, sizeof(is_prime));
    is_prime[0] = is_prime[1] = false;
    for(int i=2; i<=n; ++i) {
        if(is_prime[i]) {
            prime[p++] = i;
            for(int j=2*i; j<=n; j+=i) is_prime[j] = false;
        }
    }
    return p;
}
```

1.8.2 区间筛法

筛选出区间 $[a, b]$ 间的素数，$a \geq 1$

```
typedef long long ll;
bool is_prime[MAX_L]; // 对区间[a, b]内的整数筛选，is_prime[i-a] == true表示i是素数，MAX_L = B-A+1
bool is_prime_small[MAX_SQRT_B];

void segment_sieve(ll a, ll b) {
    memset(is_prime, true, sizeof(is_prime));
    memset(is_prime_small, true, sizeof(is_prime_small));
    if(a == 1) is_prime[0] = false; // 1不是素数

    for(int i=2; (ll)i*i <= b; ++i) {
        if(is_prime_small[i]) {
            for(int j=2*i; (ll)j*j <= b; j+=i) is_prime_small[j] = false; // 筛[2, √b]
            for(ll j = max(2LL, (a+i-1)/i)*i; j<=b; j+=i) is_prime[j-a] = false;
        }
    }
}
```

1.9 快速幂运算 $O(logn)$

```
typedef long long ll;
ll mod_pow(ll x, ll n, ll mod) {
    ll res = 1;
    while(n > 0) {
        if(n&1) res = res * x % mod; // 如果最低位为1，则乘上x^(2^i)
        x=x * x % mod; // x平方
        n >>= 1;
    }
    return res;
}
```

递归写法：

```
typedef long long ll;
ll mod_pow(ll x, ll n, ll mod) {
    if(n == 0) return 1;
    ll res = mod_pow(x * x % mod, n/2, mod);
    if(n & 1) res = res * x % mod;
```

```
    return res;
}
```

第二章　计算几何

2.1　点

第三章　组合博弈

3.1　SG 函数 && NIM 游戏

1. 可选步数为 $[1, m]$ 的连续整数，直接取模即可，$SG(x) = x\%(m+1)$；
2. 可选步数为任意步，$SG(x) = x$；

步数集合 S 需排序（升序），sg 数组记得初始化，对于确定的步数，一系列 sg(x) 值也就确定了。

最终判断各个 sg(x) 的异或和，即可判断胜负。异或和为 0 先手必败，反之必胜。

3.1.1　打表

```
int S[STEP_N], steps, sg[MAX_N]; // S集合存放走法，steps存放走法数，sg存放sg(x)的值
bool vis[MAX_N]; // 标记
void get_sg(int n) {
   memset(sg, 0, sizeof(sg)); // 初始化sg
   for(int i=1; i<=n; ++i) { // 从sg[1]开始计算
      memset(vis, 0, sizeof(vis)); // 每次计算完一个sg值需要归零
      for(int j=0; S[j] <= i && j <steps ; ++j)
         vis[sg[i-S[j]]] = true; // 标记各个后继节点的sg值
      for(int j=0; j<=n; ++j)
         if(!vis[j]) { // 找出sg补集的最小值
            sg[i] = j;
            break;
         }
   }
}
```

3.1.2　递归

```
#pragma comment(linker, "/STACK:1024000000,1024000000") // 防止爆栈
int S[STEP_N], sg[MAX_N], k; // 题目中的步数集合S, 以及sg(t)函数值sg(t), 步数集合大小k

int SG(int p) { // 求sg(t)值函数SG(t)
   bool vis[101] = {false}; // 标记各个sg(t)的值，为了方便求补集最小值(sg(t))，数组不宜开过大，爆栈就扩
      栈
   for(int i=0; i<k; ++i) {
      int t = p - S[i];
      if(t < 0) // 小于0则退出循环，求出该层的sg(t)值
```

```
            break;
        if(sg[t] == -1) // 记得memset(sg, -1, sizeof(sg));
            sg[t] = SG(t); // 递归求sg(t)
        vis[sg[t]] = true; // 标记该层的sg(t)值
    }
    for(int i=0;; ++i) // 求出该层的sg(t)值，即补集的最小值
        if(!vis[i])
            return i;
}
```

第四章　数据结构

4.1　二叉搜索树

二叉搜索树是能够高效地进行如下操作的数据结构：

- 插入一个数值
- 查询是否包含某个数值
- 删除某个数值

时间复杂度:$O(log(n))$

```
struct node { // 树节点
      int val;
      node *lch, *rch;
};

node *insert(node *p, int x) { //插入数值x
   if(p == NULL) { // 新建节点插入
      node *q = new node;
      q->val = x;
      q->lch = q->rch = NULL;
      return q;
   }
   else {
      if(x < p->val) p->lch = insert(p->lch, x); // 往左边搜索
      else p->rch = insert(p->rch, x); // 往右边搜索
      return p;
   }
}

bool find(node *p, int x) { // 查找数值x
   if(p == NULL) return false; // 找不到
   else if(p->val == x) return true; // 找到
   else if(x < p->val) return find(p->lch, x); // 往左边搜索
   else return find(p->rch, x); // 往右边搜索
}

node *remove(node *p, int x) { // 删除数值x
   if(p == NULL) return NULL; // 找不到数值
   else if(x < p->val) p->lch=remove(p->lch, x); // 往左边搜索
   else if(x > p->val) p->rch=remove(p->rch, x); // 往右边搜索
   else { // 找到
      if(p->lch == NULL) { // 如果删除的节点没有左儿子,将右儿子提上来
```

```
        node *q = p->rch;
        delete p; // 删除
        return q;
     }
     else if(p->lch->rch == NULL) { // 如果删除的节点左儿子没有右儿子,将左儿子提上来
        node *q = p->lch;
        q->rch = p->rch;
        delete p; // 删除
        return q;
     }
     else { // 否则, 将左儿子的子孙中最大的节点提上来
        node *q;
        for(q=p->lch; q->rch->rch; q=q->rch); // 往左儿子搜索最大节点
        node *r = q->rch; // r指向左儿子最大子孙节点,q指向最大儿子的父亲
        q->rch = r->lch; // 因为r为提上去的节点, 将r的左儿子(有的话,否则为NULL)挂到q的右边
        r->lch = p->lch;
        r->rch = p->rch;
        delete p; // 删除
        return r;
     }
  }
  return p;
}
/*************Usage*************/
  node *testbst=NULL; // 初始化
  testbst = insert(testbst, x); // 插入数值x
  if(find(testbst, x)) // 查找数值x
     // balabala
  else
     // balabala
  testbst = remove(testbst, x); // 删除数值x
```

4.2 并查集

并查集是一种用来管理元素分组情况的数据结构，可以高效地进行如下两种操作：

- 合并两个集合
- 查找某元素属于哪个集合

时间复杂度：$O(\alpha(n))$

```
int par[MAX_N];
// int height[MAX_N];
void init(int n) { // 初始化
  for (int i = 1; i <= n; ++i) {
     par[i] = i;
     // height[i] = 0;
  }
}
int find(int x) { // 查找根节点(集合)+路径压缩
  return x==par[x]?x:par[x]=find(par[x]);
}
void unite(int x, int y) { // 合并集合
  x = find(x);
```

```
    y = find(y);
    if(x!=y) {
    par[x] = y;
    // if(height[x] < height[y])
    // par[x] = y;
    // else
    // par[y] = x;
    // if(height[x] == height[y]) ++height[x];
    }
}
bool same(int x,int y) { // 判断两个元素是否同集合
    return find(x) == find(y);
}
```

第五章　图

5.1　邻接表

5.1.1　样例 1

```
#define MAX_V 100
vector<int> G[MAX_V];

/* 边上有属性
 * struct edge { int to, cost; };
 * vector<edge> G[MAX_V];
 */

int main()
{
   int V, E;
   cin >> V >> E;
   for(int i=0; i<E; ++i) {
      int s, t;
      cin >> s >> t;
      G[s].push_back(t); // s->t
      // G[s].push_back(edge(t, c));
      // G[t].push_back(s); // 无向图
   }
   // balabala...
}
```

5.1.2　样例 2

5.2　单源最短路

5.2.1　Bellman-Ford 算法 $O(V*E)$

```
struct Edge{ // 边
   int from, to, cost; // 顶点from指向to权值为cost
} edge[MAX_E];
int d[MAX_V];
int V, E; // 节点数量V, 边的数量E

bool bellman_ford(int s) { // 求解顶点s出发到所有节点的最短距离
   memset(d, 0x3f, sizeof(d)); // 初始化到INF
```

```
    d[s] = 0;
    for(int i=1; i<=V-1; ++i) // 图的顶点编号从1开始计算
        for(int j=1; j<=E; ++j) {
            Edge e=edge[j];
            if(d[e.to] > d[e.from] + e.cost) // 松弛计算
                d[e.to] = d[e.from] + e.cost;
        }

    int flag = true; // 判断有没有负圈
    for(int j=1; j<=E; ++j)
        if(d[edge[j].to] > d[edge[j].from] + edge[j].cost) {
            flag = false;
            break;
        }
    return flag;
}
```

5.2.2 Dijkstra 算法

$O(V^2)$

```
int cost[MAXV][MAXV]; // cost[u][v]表示e={u,v}的权值(不存在则INF)
int d[MAXV]; // 顶点s出发的最短距离
bool used[MAXV]; // 标记已经使用过的顶点
int V, E; // 顶点数V, 边数E

void dijkstra(int s) { // 源点s
    memset(d, 0x3f, sizeof(d)); // 初始化至INF
    memset(used, 0, sizeof(used)); // 初始化至INF
    d[s] = 0;

    while(true) {
        int v = -1;
        for(int u=1; u<=V; ++u) // 从未使用过的节点中选择一个距离最小的顶点, 编号从1开始
            if(!used[u] && (v==-1 || d[u] < d[v])) v = u;
        if(v == -1) break; // 已经用完所有顶点了
        used[v] = true; // 标记顶点
        for(int u=1; u<=V; ++u) // 顶点编号从1开始计算
            d[u] = min(d[u], d[v]+cost[v][u]);
    }
}
```

$O(ElogV)$

```
struct edge { // 顶点属性
    int to, val;
    edge(int t, int v): to(t), val(v){}
    bool operator<(const edge &b) const {
        return val > b.val;
    }

};
vector<edge> G[MAX_V]; // 邻接链表图
int d[MAX_V];
int V, E; // 顶点数V,  边数E
```

```
void dijkstra(int s) {
   priority_queue<edge> que;
   memset(d, 0x3f, sizeof(d));
   d[s] = 0;
   que.push(edge(s, 0)); // 源点入队

   while(!que.empty()) {
      edge p = que.top(); que.pop();
      int v = p.to;
      if(d[v] < p.val) continue; // 当前最小值不是最短距离的话，丢弃
      for(int i=0; i<G[v].size(); ++i) {
         edge e = G[v][i];
         if(d[e.to] > d[v] + e.val) {
            d[e.to] = d[v] + e.val;
            que.push(edge(e.to, d[e.to]));
         }
      }
   }
}
```

5.2.3 差分约束系统

如果一个系统由 n 个变量和 m 个约束条件组成，其中每个约束条件形如 $x_j - x_i \le b_k$ $(i, j \in [1, n], k \in [1, m])$，则称其为差分约束系统 (system of difference constraints)。亦即，差分约束系统是求解关于一组变量的特殊不等式组的方法。

求解差分约束系统，可以转化成图论的单源最短路径（或最长路径）问题。

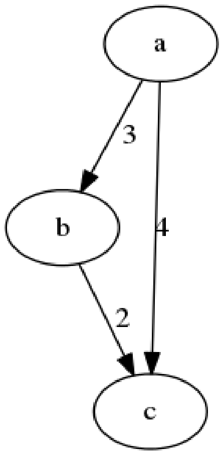
观察 $x_j - x_i \le b_k$，会发现它类似最短路中的三角不等式 $d[v] \le d[u] + w[u, v]$，即 $d[v] - d[u] \le w[u, v]$。因此，以每个变量 x_i 为结点，对于约束条件 $x_j - x_i <= b_k$，连接一条边 (i, j)，边权为 b_k。我们再增加一个源点 s，s 与所有定点相连，边权均为 0。对这个图，以 s 为源点运行 Bellman-ford 算法 (或 SPFA 算法)，最终 $d[i]$ 即为一组可行解。

例如：

$$\begin{cases} b - a \le 3 & (1) \\ c - b \le 2 & (2) \\ c - a \le 4 & (3) \end{cases}$$

求出 c-a 的最大值。

建立如下有向图



根据条件有

$$\begin{cases} c - a \leq 4 & (4) \\ c - a \leq 3 + 2 = 5 & (5) \end{cases}$$

最短路即为 c-a 的最大值，即 4。

5.3 任意两点间的最短路

Floyd $O(V^3)$

$$d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k] + d[k][j])$$

和 Bellman-Ford 算法一样可以处理负圈，只需检查 d[i][i] 是否负数的顶点即可。

```
int V, E; // 顶点数V, 边数E
int d[102][102]; // d[u][v]表示边e={u, v}的权值(不存在则设为INF, d[u][u]=0)

void floyd() {
   for(int k=0; k<V; ++k) // 顶点依次从0-V-1开始
      for(int i=0; i<V; ++i)
         for(int j=0; j<V; ++j)
            d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k]+d[k][j]); // i到j的最短距离等于i到j的距离与i到k和k到j的距
                离的最小值
   return;
}
```

5.4 最小生成树

5.4.1 Prim 算法 $O(V^2)$

```
int cost[MAX_V][MAX_V]; // cost[u][v]表示边e=(u, v)的权值(不存在则INF)
int mincost[MAX_V]; // 从集合出发的边到每个顶点的最小权值
bool used[MAX_V]; // 顶点u是否在集合中
```

```
int V; // 顶点数

int prim() {
   int res = 0;
   memset(used, 0, sizeof(used));
   memset(mincost, 0x3f, sizeof(mincost));
   mincost[0] = 0;
   while(true) {
      int v = -1;
      for(int u=0; u<V; ++u)
         if(!used[u] && ( v==-1 || mincost[u] < mincost[v])) v = u;
      if(v == -1) break;
      used[v] = true; // 标记顶点到集合中
      res += mincost[v];
      for(int u=0; u<V; ++u)
         mincost[u] = min(mincost[u], cost[v][u]);
   }
   return res;
}
```

5.4.2 Kruskal 算法 $O(Elog(V))$

```
int V, E; // 边数, 顶点数
struct edge { // 边
   int u, v, cost;
   bool operator<(const edge &b) const {
      return cost < b.cost; // 需要按照边的权值从小到大的顺序排序
   }
} es[MAX_E];

int kruskal() {
   sort(es, es+E); // 排序
   init_union_find(V); // 初始化并查集
   int res = 0;
   for(int i=0; i<E; ++i) {
      edge e = es[i];
      if(find(e.u) != find(e.v)) { // 判断是否产生圈(重边也算在内)
         unite(e.u, e.v);
         res+=e.cost;
      }
   }
   return res;
}
```