

IBW.

event sponsor

ACM-ICPC Template Libraries

合肥工业大学宣城校区



Author: Netcan

Blog: http://www.netcan.xyz

2015 年 9 月 17 日

目录

第一章	数学 3
1.1	. 0-20 的阶乘
1.2	2 错排公式
1.3	$oldsymbol{3}$ 最小公倍数 $lcm(a,b)$ && 最大公约数 $gcd(a,b)$
1.4	· 扩展欧几里得
1.5	5 母函数
1.6	5 动态规划
	1.6.1 最长公共子序列
	1.6.2 最长上升子序列
1.7	⁷ 高精度
	1.7.1 加法 && 乘法
1.8	3 素数
	1.8.1 埃式筛法 $O(nloglogn)$
	1.8.2 区间筛法
1.9	9 快速幂运算 $O(logn)$
第二章	计算几何
2.1	- 点
第三章	组合博弈 10
3.1	_ SG 函数 && NIM 游戏
	3.1.1 打表
	3.1.2 递归
第四章	数据结构 12
4.1	- 二叉搜索树

第一章 数学

1.1 0-20 的阶乘

1.2 错排公式

有 n 个元素的排列,若一个排列中所有的元素都不在自己原来的位置上,错排数记为 D(n),则

$$D(n) = (n-1)[D(n-1) + D(n-2)]$$

1.3 最小公倍数 lcm(a,b) && 最大公约数 gcd(a,b)

```
inline int gcd(int a, int b) { // 如果a<b, 则递归得gcd(b,a%b)即gcd(b, a), 即交换了位置, 时间复杂度O(
    log max(a, b))
    return b==0?a:gcd(b,a%b)
}
inline int lcm(int a, int b) {
    return a/gcd(a,b)*b;
}</pre>
```

1.4 扩展欧几里得

求解 ax + by = gcd(a, b) 这里得到的是一组 (x, y) 的可行解, (x + kb, y - ka) 为解集。

```
int extgcd(int a, int b, int &x, int &y) { // x, y为解, 返回gcd(a, b)
  int d = a;
  if(b!=0) {
    d = extgcd(b, a%b, y, x);
    y -= (a/b)*x;
  }
  else {
```

```
x = 1; y = 0;
}
return d;
}
```

1.5 母函数

 $G(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^N)(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^N)\dots(1 + x^N)$ 展开后 x^N 的系数(注意溢出)

```
int c1[MAX_N], c2[MAX_N]; // c1表示每一项的的系数, c2表示每个表达式的临时系数 for(int i=0; i<=N; ++i) { // 每一项应该初始化为1,即1+x+x^2+...+x^N c1[i] = 1; c2[i] = 0; } for(int i=2; i<=N; ++i) { // 从第二个表达式开始 for(int j=0; j<=N; ++j) // 表示第一个表达式的第j项 for(int k=0;k+j<=N;k+=i) // k表示后一个表达式的第k项 c2[j+k] += c1[j]; // 这里应该是相当于C1*x^j * x^k=C1*x^(j+k),即c2[k+j]+=C1[j] for(int j=0; j<=N; ++j) { c1[j] = c2[j]; // 确定x^j的系数 c2[j] = 0; } }
```

1.6 动态规划

1.6.1 最长公共子序列

$$\begin{split} dp[i+1][j+1] &= \begin{cases} dp[i][j]+1 & s1[i] = s2[j] \\ max(dp[i+1][j], dp[i][j+1]) & s1[i] \neq s2[j] \end{cases} \\ op[i+1][j+1] &= \begin{cases} \nwarrow & s1[i] = s2[j] \\ \uparrow & dp[i][j+1] \geq dp[i+1][j] \\ \leftarrow & dp[i][j+1] < dp[i+1][j] \end{cases} \end{split}$$

1.6.2 最长上升子序列

$$dp[i] = max\{1, dp[j] + 1|j < i\&a_i < a_i\}$$

 $O(N^2)$ 算法

```
int a[MAX_N], dp[MAX_N]; // a为序列, dp[i]为以a[i]为结尾的最长上升子序列长度
int Maxlis = 0; // 最长上升子序列长度
int n; // a的有效长度
for(int i=0; i<n; ++i) {
    dp[i] = 1; // 记得初始化为1
    for(int j=0; j<i; ++j)
        if(a[i] > a[j])
        dp[i] = max(dp[i], dp[j] + 1);
    Maxlis = max(Maxlis, dp[i]); // 记得更新Maxlis
}
```

O(nlog(n)) 算法

```
#define INF 0x3f3f3f3f
int a[MAX_N], dp[MAX_N]; // a为序列, dp[i]存放长度为i+1的上升序列中未尾元素的最小值
int n; // 序列长度
memset(dp, 0x3f, sizeof(dp)); // 初始化dp[i]值都为INF
for(int i=0; i<n; ++i)
    *lower_bound(dp, dp+n, a[i]) = a[i];
// cout << lower_bound(dp, dp+n, INF) - dp << endl; // 最长上升序列的长度
```

 $lower_bound(dp, dp + n, k)$ 这个函数从已经排序好的序列 dp 中,二分搜索找出满足 $dp_i \ge k$ 的 dp_i 的最小指针。

 $upper_bound(dp, dp + n, k)$ 这个函数则从已经排序好的序列 dp 中,二分搜索找出满足 $dp_i > k$ 的 dp_i 的最小指针。

例如求有序数组 a 中的 k 的个数,可以利用下面的代码求出:

```
upper_bound(a, a+n, k) - lower_bound(a, a+n, k)
```

1.7 高精度

1.7.1 加法 && 乘法

适合大数的加法和乘法

```
struct BigInt {
  const static int nlen = 4; // 控制每个数组数字长度, 默认为4, 计算乘法的时候每个数组相乘也不会溢出int范
  const static int mod = 10000; // 值为10^nlen
  short n[1000], len; // 最多存4*1000位长度, 可调, short占的内存小, 但是速度慢
  BigInt() {
     memset(n, 0, sizeof(n));
     len = 1;
  }
  BigInt(int num) {
     len = 0;
     while(num >0) {
     n[len++] = num%mod;
     num/=mod;
     }
  BigInt(const char *s) {
     int l = strlen(s);
```

```
len = 1 % nlen == 0 ? l/nlen : l/nlen+1;
      int index = 0;
      for(int i=l-1; i>=0; i -= nlen) {
      int tmp = 0;
      int j = i-nlen+1;
      if(j<0) j = 0;
      for(int k=j; k<=i; ++k)</pre>
         tmp = tmp*10+s[k]-'0';
      n[index++] = tmp;
      }
   }
   BigInt operator+(const BigInt &b) const { // 加法
      BigInt res;
      res.len = max(len, b.len);
      for(int i=0; i<res.len; ++i) {</pre>
      res.n[i] += (i < len ? n[i]:0) + (i < b.len ? b.n[i]:0);
      res.n[i+1] += res.n[i]/mod;
      res.n[i] = res.n[i]%mod;
      if(res.n[res.len] > 0) ++res.len;
      return res;
   }
   BigInt operator*(const BigInt &b) const { // 乘法
      BigInt res;
      for(int i=0; i<len; ++i) { // 类似母函数, 第一个数组
      int up = 0; // 进位
      for(int j=0; j<b.len; ++j) { // 第二个数组
         int tmp = n[i]*b.n[j] + up + res.n[i+j]; // 控制nlen=4是防止tmp溢出
         res.n[i+j] = tmp%mod;
         up = tmp/mod;
      if(up!=0)
         res.n[i+b.len] = up;
      res.len = len+b.len;
      while(res.n[res.len-1] == 0 && res.len>1 ) --res.len;
      return res;
   }
   void show() const {
      printf("%d", n[len-1]); // 先输出最高位, 后面可能需要前导0
      for(int i=len-2; i>=0; --i)
      printf("%04d", n[i]); // 前导0, %04d和nlen一致
      printf("\n");
   }
};
```

1.8 素数

1.8.1 埃式筛法 O(nloglogn)

```
bool is_prime[MAX_N]; // 第i个素数
int prime[MAX_N+1]; // is_prime[i]为true表示i是素数
int sieve(int n) { // 返回n以内的素数个数
```

```
int p=0;
memset(is_prime, true, sizeof(is_prime));
is_prime[0] = is_prime[1] = false;
for(int i=2; i<=n; ++i) {
    if(is_prime[i]) {
        prime[p++] = i;
        for(int j=2*i; j<=n; j+=i) is_prime[j] = false;
    }
}
return p;
}</pre>
```

1.8.2 区间筛法

筛选出区间 [a,b] 间的素数, $a \ge 1$

```
typedef long long ll;
bool is_prime[MAX_L]; // 对区间[a, b]内的整数筛选, is_prime[i-a] == true表示i是素数, MAX_L = B-A+1
bool is_prime_small[MAX_SQRT_B];

void segment_sieve(ll a, ll b) {
    memset(is_prime, true, sizeof(is_prime));
    memset(is_prime_small, true, sizeof(is_prime_small));
    if(a == 1) is_prime[0] = false; // 1不是素数

for(int i=2; (ll)i*i <= b; ++i) {
        if(is_prime_small[i]) {
            for(int j=2*i; (ll)j*j <= b; j+=i) is_prime_small[j] = false; // 筛[2, √b]
            for(ll j = max(2LL, (a+i-1)/i)*i; j<=b; j+=i) is_prime[j-a] = false;
    }
}
```

1.9 快速幂运算 O(logn)

```
typedef long long ll;
ll mod_pow(ll x, ll n, ll mod) {
    ll res = 1;
    while(n > 0) {
        if(n&1) res = res * x % mod; // 如果最低位为1, 则乘上x^(2^i)
        x=x * x % mod; // x平方
        n >>= 1;
    }
    return res;
}
```

递归写法:

```
typedef long long ll;
ll mod_pow(ll x, ll n, ll mod) {
   if(n == 0) return 1;
   ll res = mod_pow(x * x % mod, n/2, mod);
   if(n & 1) res = res * x % mod;
```

```
return res;
}
```

第二章 计算几何

2.1 点

第三章 组合博弈

3.1 SG 函数 && NIM 游戏

- **1.** 可选步数为 [1, m] 的连续整数, 直接取模即可, SG(x) = x%(m+1);
- 2. 可选步数为任意步, SG(x) = x;

步数集合 S 需排序(升序), SG 数组记得初始化,对于确定的步数,一系列 SG(x) 值也就确定了。

最终判断各个 sg(x) 的异或和,即可判断胜负。异或和为 Ø 先手必败,反之必胜。

3.1.1 打表

```
int S[STEP_N], steps, sg[MAX_N]; // S集合存放走法, steps存放走法数, sg存放sg(x)的值
bool vis[MAX_N]; // 标记
void get_sg(int n) {
    memset(sg, 0, sizeof(sg)); // 初始化sg
    for(int i=1; i<=n; ++i) { // 从sg[1]开始计算
        memset(vis, 0, sizeof(vis)); // 每次计算完一个sg值需要归零
    for(int j=0; S[j] <= i && j <steps; ++j)
        vis[sg[i-S[j]]] = true; // 标记各个后继节点的sg值
    for(int j=0; j<=n; ++j)
        if(!vis[j]) { // 找出sg补集的最小值
        sg[i] = j;
        break;
    }
}</pre>
```

3.1.2 递归

```
#pragma comment(linker, "/STACK:1024000000,1024000000") // 防止爆栈
int S[STEP_N], sg[MAX_N], k; // 题目中的步数集合S, 以及sg(t)函数值sg(t), 步数集合大小k

int SG(int p) { // 求sg(t)值函数SG(t)
bool vis[101] = {false}; // 标记各个sg(t)的值, 为了方便求补集最小值(sg(t)), 数组不宜开过大, 爆栈就扩

核
for(int i=0; i<k; ++i) {
   int t = p - S[i];
   if(t < 0) // 小于0则退出循环, 求出该层的sg(t)值
```

```
break;
if(sg[t] == -1) // 记得memset(sg, -1, sizeof(sg));
sg[t] = SG(t); // 递归求sg(t)
vis[sg[t]] = true; // 标记该层的sg(t)值
}
for(int i=0;; ++i) // 求出该层的sg(t)值, 即补集的最小值
if(!vis[i])
return i;
}
```

第四章 数据结构

4.1 二叉搜索树

二叉搜索树是能够高效地进行如下操作的数据结构:

- 插入一个数值
- 查询是否包含某个数值
- 删除某个数值

时间复杂度:O(log(n))

```
struct node { // 树节点
     int val;
     node *lch, *rch;
};
node *insert(node *p, int x) { //插入数值x
  if(p == NULL) { // 新建节点插入
     node *q = new node;
     q->val = x;
     q->lch = q->rch = NULL;
     return q;
  }
  else {
     if(x < p->val) p->lch = insert(p->lch, x); // 往左边搜索
     else p->rch = insert(p->rch, x); // 往右边搜索
     return p;
  }
}
bool find(node *p, int x) { // 查找数值x
  if(p == NULL) return false; // 找不到
  else if(p->val == x) return true; // 找到
  else if(x < p->val) return find(p->lch, x); // 往左边搜索
  else return find(p->rch, x); // 往右边搜索
}
node *remove(node *p, int x) { // 删除数值x
  if(p == NULL) return NULL; // 找不到数值
  else if(x < p->val) p->lch=remove(p->lch, x); // 往左边搜索
  else if(x > p->val) p->rch=remove(p->rch, x); // 往右边搜索
  else { // 找到
     if(p->lch == NULL) { // 如果删除的节点没有左儿子,将右儿子提上来
```

```
node *q = p->rch;
        delete p; // 删除
        return q;
     }
     else if(p->lch->rch == NULL) { // 如果删除的节点左儿子没有右儿子,将左儿子提上来
        node *q = p->lch;
        q \rightarrow rch = p \rightarrow rch;
        delete p; // 删除
        return q;
     else { // 否则, 将左儿子的子孙中最大的节点提上来
        node *q;
        for(q=p->lch; q->rch->rch; q=q->rch); // 往左儿子搜索最大节点
        node *r = q->rch; // r指向左儿子最大子孙节点,q指向最大儿子的父亲
        q->rch = r->lch; // 因为r为提上去的节点,将r的左儿子(有的话,否则为NULL)挂到q的右边
        r->lch = p->lch;
        r->rch = p->rch;
        delete p; // 删除
        return r;
     }
  }
  return p;
/***************Usage************/
  node *testbst=NULL; // 初始化
  testbst = insert(testbst, x); // 插入数值x
  if(find(testbst, x)) // 查找数值x
     // balabala
  else
     // balabala
  testbst = remove(testbst, x); // 删除数值x
```

4.2 并查集

并查集是一种用来管理元素分组情况的数据结构,可以高效地进行如下两种操作:

- 合并两个集合
- 查找某元素属于哪个集合

时间复杂度: $O(\alpha(n))$

```
int par[MAX_N];
// int height[MAX_N];
void init(int n) { // 初始化
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        par[i] = i;
        // height[i] = 0;
    }
}
int find(int x) { // 查找根节点(集合)+路径压缩
    return x==par[x]?x:par[x]=find(par[x]);
}
void unite(int x, int y) { // 合并集合
    x = find(x);</pre>
```

```
y = find(y);
if(x!=y) {
par[x] = y;
// if(height[x] < height[y])
// par[x] = y;
// else
// par[y] = x;
// if(height[x] == height[y]) ++height[x];
}
bool same(int x,int y) { // 判断两个元素是否同集合
return find(x) == find(y);
}
```

第五章 字符串

5.1 KMP 算法

http://www.cnblogs.com/goagent/archive/2013/05/16/3068442.html

求出模式串 P 在字符串 S 中的位置当失配前 $(P_i \neq S_i)$, 有

$$P_0 P_1 \cdots P_{k-1} = S_{i-k} S_{i-k+1} \cdots S_{i-1}$$

已有部分匹配结果,

$$P_{j-k}P_{j-k+1}\cdots P_{j-1} = S_{i-k}S_{i-k+1}\cdots S_{i-1}$$

由上两式子可得:

$$P_0 P_1 \cdots P_{k-1} = P_{j-k} P_{j-k+1} \cdots P_{j-1}$$

定义 next[j] = k, 有

$$next[j] = \begin{cases} -1 & j = 0 \\ max\{k|0 < k < j \text{ & & & & \\ & P_0P_1 \cdots P_{k-1} = P_{j-k}P_{j-k+1} \cdots P_{j-1}\} \\ 0 & Other Conditions \end{cases}$$

```
int Next[MAX_PLEN];
string s, p; // 求出模式串p在字符串S中的位置
void getNext() {
   Next[0] = -1;
   int i=0, j=-1;
   while(i!=p.length()-1) {
      if(j == -1 || p[j] == p[i]) {
         ++i;
        ++j;
         Next[i] = p[i] != p[j]?j:Next[j];
     }
      else
         j = Next[j];
  }
}
int kmp(const int sIndex = 0) // 返回模式串位置
  getNext();
   int i = sIndex, j = 0;
   while(i != s.length() && j != p.length()) {
     if (j == -1 || s[i] == p[j]) {
```

```
++i;
++j;
}
else
j = next[j];
}
return j == p.length() ? i - j: -1;
}
```

第六章 图

6.1 邻接表

6.1.1 样例 1

```
#define MAX_V 100
vector<int> G[MAX_V];
/* 边上有属性
* struct edge { int to, cost; };
* vector<edge> G[MAX_V];
int main()
  int V, E;
  cin >> V >> E;
   for(int i=0; i<E; ++i) {</pre>
     int s, t;
     cin >> s >> t;
     G[s].push_back(t); // s->t
     // G[s].push_back(edge(t, c));
     // G[t].push_back(s); // 无向图
  }
   // balabala...
```

6.1.2 样例 2

6.2 单源最短路

6.2.1 Bellman-Ford 算法 O(V*E)

```
      struct Edge{ // 边
        int from, to, cost; // 顶点from指向to权值为cost

      } edge[MAX_E];
        int d[MAX_V];
        int V, E; // 节点数量V, 边的数量E

      bool bellman_ford(int s) { // 求解顶点s出发到所有节点的最短距离
        memset(d, 0x3f, sizeof(d)); // 初始化到INF
```

```
d[s] = 0;
for(int i=1; i<=V-1; ++i) // 图的顶点编号从1开始计算
    for(int j=1; j<=E; ++j) {
        Edge e=edge[j];
        if(d[e.to] > d[e.from] + e.cost) // 松弛计算
            d[e.to] = d[e.from] + e.cost;
        }
    int flag = true; // 判断有没有负圈
    for(int j=1; j<=E; ++j)
        if(d[edge[j].to] > d[edge[j].from] + edge[j].cost) {
        flag = false;
        break;
        }
    return flag;
}
```

6.2.2 Dijkstra 算法

 $O(V^2)$

```
int cost[MAXV][MAXV]; // cost[u][v]表示e={u,v}的权值(不存在则INF)
int d[MAXV]; // 顶点S出发的最短距离
bool used[MAXV]; // 标记已经使用过的顶点
int V, E; // 顶点数V, 边数E
void dijkstra(int s) { // 源点s
  memset(d, 0x3f, sizeof(d)); // 初始化至INF
  memset(used, 0, sizeof(used)); // 初始化至INF
  d[s] = 0;
  while(true) {
     int v = -1;
     for(int u=1; u<=V; ++u) // 从未使用过的节点中选择一个距离最小的顶点, 编号从1开始
        if(!used[u] \&\& (v==-1 || d[u] < d[v])) v = u;
     if(v == -1) break; // 已经用完所有顶点了
     used[v] = true; // 标记顶点
     for(int u=1; u<=V; ++u) // 顶点编号从1开始计算
        d[u] = min(d[u], d[v]+cost[v][u]);
  }
}
```

O(ElogV)

```
struct edge { // 顶点属性
   int to, val;
   edge(int t, int v): to(t), val(v){}
   bool operator<(const edge &b) const {
      return val > b.val;
   }
};
vector<edge> G[MAX_V]; // 邻接链表图
int d[MAX_V];
int V, E; // 顶点数V, 边数E
```

```
void dijkstra(int s) {
   priority_queue<edge> que;
   memset(d, 0x3f, sizeof(d));
   d[s] = 0;
   que.push(edge(s, 0)); // 源点入队
   while(!que.empty()) {
      edge p = que.top(); que.pop();
      int v = p.to;
      if(d[v] < p.val) continue; // 当前最小值不是最短距离的话, 丢弃
      for(int i=0; i<G[v].size(); ++i) {</pre>
         edge e = G[v][i];
         if(d[e.to] > d[v] + e.val) {
            d[e.to] = d[v] + e.val;
            que.push(edge(e.to, d[e.to]));
         }
     }
  }
}
```

6.2.3 差分约束系统

如果一个系统由 n 个变量和 m 个约束条件组成,其中每个约束条件形如 $x_j - x_i \le b_k$ $(i,j \in [1,n],k \in [1,m])$, 则称其为差分约束系统 (system of difference constraints)。亦即,差分约束系统是求解关于一组变量的特殊不等式组的方法。

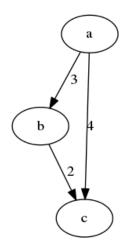
求解差分约束系统,可以转化成图论的单源最短路径(或最长路径)问题。

观察 $x_j - x_i \le b_k$,会发现它类似最短路中的三角不等式 $d[v] \le d[u] + w[u,v]$,即 $d[v] - d[u] \le w[u,v]$ 。因此,以每个变量 x_i 为结点,对于约束条件 $x_j - x_i <= b_k$,连接一条 边 (i,j),边权为 b_k 。我们再增加一个源点 S,S 与所有定点相连,边权均为 $\boldsymbol{0}$ 。对这个图,以 S 为源点运行 Bellman-ford 算法 (或 SPFA 算法),最终 d[i] 即为一组可行解。

例如:

$$\begin{cases} b - a \le 3 & (1) \\ c - b \le 2 & (2) \\ c - a \le 4 & (3) \end{cases}$$

求出 **c-a** 的最大值。 建立如下有向图



根据条件有

$$\begin{cases} c - a \le 4 & (4) \\ c - a \le 3 + 2 = 5 & (5) \end{cases}$$

最短路即为 c-a 的最大值, 即 4。

6.3 任意两点间的最短路

Floyd $O(V^3)$

d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k] + d[k][j])

和 Bellman-Ford 算法一样可以处理负圈,只需检查 d[i][i] 是否负数的顶点即可。

```
int V, E; // 项点数V, 边数E
int d[102][102]; // d[u][v]表示边e={u, v}的权值(不存在则设为INF, d[u][u]=0)

void floyd() {
    for(int k=0; k<V; ++k) // 项点依次从0-V-1开始
        for(int i=0; i<V; ++i)
            for(int j=0; j<V; ++j)
            d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k]+d[k][j]); // i到j的最短距离等于i到j的距离与i到k和k到j的距离的最小值
    return;
}
```

6.4 最小生成树

6.4.1 Prim 算法 $O(V^2)$

```
int cost[MAX_V][MAX_V]; // cost[u][v]表示边e=(u, v)的权值(不存在则INF)
int mincost[MAX_V]; // 从集合出发的边到每个顶点的最小权值
bool used[MAX_V]; // 顶点u是否在集合中
```

```
int V; // 顶点数
int prim() {
  int res = 0;
  memset(used, 0, sizeof(used));
  memset(mincost, 0x3f, sizeof(mincost));
  mincost[0] = 0;
  while(true) {
      int v = -1;
      for(int u=0; u<V; ++u)</pre>
         if(!used[u] \&\& (v==-1 || mincost[u] < mincost[v])) v = u;
      if(v == -1) break;
      used[v] = true; // 标记顶点到集合中
      res += mincost[v];
      for(int u=0; u<V; ++u)</pre>
         mincost[u] = min(mincost[u], cost[v][u]);
  }
   return res;
```

6.4.2 Kruskal 算法 O(Elog(V))

```
int V, E; // 边数, 顶点数
struct edge { // 边
  int u, v, cost;
  bool operator<(const edge &b) const {</pre>
     return cost < b.cost; // 需要按照边的权值从小到大的顺序排序
  }
} es[MAX_E];
int kruskal() {
  sort(es, es+E); // 排序
   init_union_find(V); // 初始化并查集
   int res = 0;
   for(int i=0; i<E; ++i) {</pre>
     edge e = es[i];
     if(find(e.u) != find(e.v)) { // 判断是否产生圈 (重边也算在内)
        unite(e.u, e.v);
        res+=e.cost;
     }
  }
   return res;
```