1. přednáška
Aritmetické vektory, matice

Aritmetické vektory

Základní pojmy

Definice 1.1

Uspořádanou n-tici reálných čísel $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, kde $n \in N$, nazýváme n-rozměrný aritmetický vektor. Reálná čísla a_i nazýváme i-tými složkami (souřadnicemi) n-rozměrného aritmetického vektoru.

Pozn.

Dále budeme pojmem vektor rozumět n-rozměrný aritmetický vektor.

Definice 1.2

Vektor $\mathbf{o} = (0, 0, ..., 0)$ nazýváme nulový vektor.

Definice 1.3

Vektor $-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2, ..., -a_n)$ nazýváme vektor opačný k vektoru $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Definice 1.4

Říkáme, že vektory $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ se rovnají, jestliže pro všechna $i = 1, 2, ..., n$ je $a_i = b_i$.

Operace s aritmetickými vektory

Definice 1.5

Součtem dvou vektorů $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ nazýváme vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$.

Definice 1.6

Nechť $k \in R$. Reálným násobkem vektoru $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ nazýváme vektor $k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, ..., ka_n)$.

Definice 1.7

Skalárním součinem vektorů $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ nazýváme číslo (skalár) $\mathbf{ab} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n$.

Příklad 1.1

Jsou dány vektory $\mathbf{a}$ = (1, 2, 3, 4, 5), $\mathbf{b}$ = (-1, -1, 8, 2, 3). Určíme

a) $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$,

b) $\mathbf{y} = -3\mathbf{b}$,

c) $s = \mathbf{ab}$.

Podle definice 1.5 máme

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (1 - 1, 2 - 1, 3 + 8, 4 + 2, 5 + 3) = (0, 1, 11, 6, 8).$$

Podle definice 1.6 je

$$\mathbf{y} = -3\mathbf{b} = (-3 \cdot (-1), -3 \cdot (-1), -3 \cdot 8, -3 \cdot 2, -3 \cdot 3) = (3, 3, -24, -6, -9).$$

Podle definice 1.7 dostáváme

$$s = \mathbf{ab} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 44.$$

Lineární kombinace vektorů

Definice 1.8

Mějme n-rozměrné aritmetické vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$, kde $r \in N$. Říkáme, že vektor $\mathbf{u}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$, jestliže existují reálná čísla $c_1, c_2, ..., c_r$ taková, že platí

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_r\mathbf{v}_r. \tag{1.1}$$

Příklad 1.2

Zjistíme, zda je vektor $\mathbf{u} = (3, 1, -1)$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, -3)$ a $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 2)$.

Podle (1.1) tedy hledáme taková reálná čísla c_1, c_2, c_3, aby platilo

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3.$$

Po dosazení do této vektorové rovnice máme

$$(3, 1, -1) = c_1(1, 2, 3) + c_2(0, -1, -3) + c_3(2, 1, 2).$$

Z definic 1.5 a 1.6 je zřejmé, že

$$(3, 1, -1) = (c_1 + 2c_3, 2c_1 - c_2 + c_3, 3c_1 - 3c_2 + 2c_3).$$

Dále z definice 1.4 vyplývá, že tato rovnost platí právě tehdy, když současně platí

$$\begin{aligned} 3 &= c_1 + 2c_3 \\ 1 &= 2c_1 - c_2 + c_3 \\ -1 &= 3c_1 - 3c_2 + 2c_3. \end{aligned}$$

Snadno určíme, že této soustavě vyhovují čísla

$$c_1 = 1,\ c_2 = 2 \text{ a } c_3 = 1.$$

Vektor $\mathbf{u}$ tedy je lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ a získáme jej jako součet vektoru $\mathbf{v}_1$, dvojnásobku vektoru $\mathbf{v}_2$ a vektoru $\mathbf{v}_3$. Tedy platí, že

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$

Příklad 1.3

Jsou dány vektory $\mathbf{a}_1 = (3, 2, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 5, -1)$ a $\mathbf{a}_3 = (2, 2, 2)$. Zjistíme, zda je vektor $\mathbf{a}_1$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

Podobně jako v předcházejícím příkladu sestavíme příslušnou soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3 &= c_1 + 2c_2 \\ 2 &= 5c_1 + 2c_2 \\ 0 &= -c_1 + 2c_2. \end{aligned}$$

Sečtením první a třetí rovnice dostaneme

$$3 = 4c_2$$

$$c_2 = \frac{3}{4},$$

dosazením do třetí (nebo první) rovnice určíme

$$c_1 = \frac{3}{2}.$$

Nakonec zjistíme, zda vypočítané hodnoty vyhovují i zbývající (tedy druhé) rovnici. Dostáváme

$$2 = 5 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{3}{4},$$

což samozřejmě neplatí.

Protože tedy neexistují reálná čísla c_1, c_2 vyhovující dané soustavě, není vektor $\mathbf{a}_1$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, tj. pomocí základních vektorových operací (viz definice 1.5 a 1.6) nelze z vektorů $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ získat vektor $\mathbf{a}_1$.

Lineární závislost vektorů

Definice 1.9

Mějme n-rozměrné aritmetické vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$, kde $r \in N$. Říkáme, že tyto vektory jsou lineárně závislé, jestliže existují reálná čísla c_1, c_2, ..., c_r, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + ... + c_r\mathbf{v}_r = \mathbf{o}. \tag{1.2}$$

V opačném případě nazýváme tyto vektory lineárně nezávislé.

Příklad 1.4

Rozhodneme, zda jsou vektory $\mathbf{a} = (2, -3, 4)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 3)$, $\mathbf{c} = (3, 5, -1)$ lineárně závislé či lineárně nezávislé.

Podle definice 1.9 je třeba k určení lineární závislosti či nezávislosti hledat řešení rovnice

$$c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} + c_3\mathbf{c} = \mathbf{o}.$$

Obdobným postupem jako v řešení příkladu 1.3.1 odtud získáme soustavu, která má v tomto případě tvar

$$\begin{aligned} 2c_1 + c_2 + 3c_3 &= 0 \\ -3c_1 - c_2 + 5c_3 &= 0 \\ 4c_1 + 3c_2 - c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme řešit například tak, že ze třetí rovnice vyjádříme c_3 a dosadíme do prvních dvou rovnic, čímž dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Postupně tedy máme

$$c_3 = 4c_1 + 3c_2$$

a

$$\begin{aligned} 2c_1 + c_2 + 3(4c_1 + 3c_2) &= 0 \\ -3c_1 - c_2 + 5(4c_1 + 3c_2) &= 0. \end{aligned}$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned} 14c_1 + 10c_2 &= 0 \\ 17c_1 + 14c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Z toho je zřejmé, že existuje pouze jediné (tzv. triviální) řešení dané soustavy, a to

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Podle definice jsou tudíž vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ lineárně nezávislé.

Při dokazování lineární závislosti dané skupiny vektorů je jednodušší použít následující větu.

Věta 1.1

Mějme *n*-rozměrné aritmetické vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$, kde $r \in N - \{1\}$. Tyto vektory jsou lineárně závislé právě tehdy, když je alespoň jeden z nich lineární kombinací ostatních.

Pozn.

Z věty 1.1 okamžitě vyplývá, že vektory **u** = (3, 1, -1), $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (0, -1, -3)$ a $\mathbf{v}_3$ = (2, 1, 2) jsou lineárně závislé, protože jsme v příkladu 1.2 ukázali, že vektor **u** je lineární kombinací vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Naopak z toho, že vektor $\mathbf{a}_1$ = (3, 2, 0) není lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}_2$ = (1, 5, -1) a $\mathbf{a}_3$ = (2, 2, 2) nelze podle této věty ještě nic tvrdit o lineární závislosti vektorů $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ a $\mathbf{a}_3$.

Příklad 1.5

Ukážeme, že skupina vektorů **a** = (-1, -2, 0), **b** = (3, 0, 1), **c** = (2, -1, 1), **d** = (1, -1, -2) je lineárně závislá.

Zkusíme vyjádřit například vektor **d** jako lineární kombinaci zbývajících vektorů. Řešíme tedy soustavu

$$\begin{aligned} 1 &= -c_1 + 3c_2 + 2c_3 \\ -1 &= -2c_1 - c_3 \\ -2 &= c_2 + c_3. \end{aligned}$$

Z první rovnice soustavy vyjádříme c_1:

$$c_1 = 3c_2 + 2c_3 - 1$$

a dosadíme do druhé rovnice. Spolu s opsanou třetí rovnicí získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} -1 &= -2(3c_2 + 2c_3 - 1) - c_3 \\ -2 &= c_2 + c_3, \end{aligned}$$

což je po úpravě

$$\begin{aligned} 3 &= 6c_2 + 5c_3 \\ -2 &= c_2 + c_3. \end{aligned}$$

Druhou rovnici vynásobíme (-5) a obě rovnice sečteme. Dostáváme, že

$$c_2 = 13.$$

Nyní už snadno dopočítáme

$$c_3 = -15, \ c_1 = 8.$$

Je tedy zřejmé, že vektor **d** je lineární kombinací vektorů **a**, **b**, **c**, a proto podle věty 1.1 jsou vektory **a**, **b**, **c**, **d** lineárně závislé.

Určení lineární závislosti skupiny vektorů podle uvedené věty je v tomto příkladu méně pracné než použití definice 1.9. To by totiž vedlo k řešení soustavy tří rovnic o čtyřech neznámých, zatímco takto jsme pracovali při stejném počtu rovnic pouze se třemi neznámými. Uvědomme si však, že věta 1.1 obecně neumožňuje rozhodnout o lineární závislosti nebo nezávislosti skupiny vektorů v případě, že vybraný vektor z dané skupiny není lineární kombinací vektorů ostatních. Např. vektory (2, -3, 1, -5), (4, 3, 2, 1) a (-6, 9, -3, 15) jsou lineárně závislé a přitom vektor (4, 3, 2, 1) není lineární kombinací ostatních dvou vektorů.

Poznamenejme závěrem, že o lineární závislosti či nezávislosti skupiny vektorů lze pohodlněji rozhodnout výpočtem hodnosti matice, jak bude zřejmé z následujícího.

Matice

Základní pojmy

Definice 1.10

Schéma mn reálných čísel a_{ij}, kde $i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n$ a $m, n \in N$, ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ . \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

se nazývá matice typu m x n. Značíme $\mathbf{A}(m, n)$, $\mathbf{A}$ nebo (a_{ij}). Čísla a_{ii} jsou prvky tzv. hlavní diagonály. V případě, že $m = n$, hovoříme o čtvercové matici n-tého stupně. Jsou-li všechny prvky matice rovny nule, tj. $a_{ij} = 0$ pro všechna $i = 1, 2, ..., m$ a $j = 1, 2, ..., n$, nazýváme matici nulová matice.

Pozn.

Na matici $\mathbf{A}(m, n)$ lze pohlížet také tak, že je složena z m n-rozměrných (řádkových) vektorů nebo z n m-rozměrných (sloupcových) vektorů. Pokud se v dalším textu budeme zmiňovat o řádcích resp. sloupcích matice, budeme tím myslet příslušné řádkové resp. sloupcové vektory.

Definice 1.11

Transponovanou maticí k matici $\mathbf{A}(m, n) = (a_{ij})$ nazýváme matici $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(n, m) = (a_{ji})$ pro všechna $i = 1, 2, ..., m$ a $j = 1, 2, ..., n$.

Definice 1.12

Čtvercovou matici $\mathbf{A}(n, n) = (a_{ij})$ nazýváme diagonální matice, jestliže pro všechna $i, j = 1, 2, ..., n$ platí, že

$$a_{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j.$$

Je-li navíc $a_{ij} = 1$ pro $i = j$, nazýváme příslušnou matici jednotková matice a značíme ji $\mathbf{I}$.

Definice 1.13

Takový tvar matice $\mathbf{A}(m, n) = (a_{ij})$, ve kterém pro všechna $i = 1, 2, ..., m$ a $j = 1, 2, ..., n$ platí, že

$$a_{ij} = 0 \text{ pro } i > j \text{ a současně } a_{ij} \neq 0 \text{ pro } i = j,$$

nazýváme lichoběžníkový tvar. Pokud je navíc $m = n$, nazýváme tento tvar trojúhelníkový tvar.

Definice 1.14

Říkáme, že matice $\mathbf{A}(m, n) = (a_{ij})$ a $\mathbf{B}(m, n) = (b_{ij})$ se rovnají, jestliže pro všechna $i = 1, 2, ..., m$ a $j = 1, 2, ..., n$ platí, že

$$a_{ij} = b_{ij}.$$

Zapisujeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Operace s maticemi

Definice 1.15

Součtem matic $\mathbf{A}(m, n) = (a_{ij})$ a $\mathbf{B}(m, n) = (b_{ij})$ nazýváme matici $\mathbf{C}(m, n) = (c_{ij})$, jestliže pro všechna $i = 1, 2, ..., m$ a $j = 1, 2, ..., n$ platí:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Zapisujeme $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Definice 1.15

Reálným násobkem matice $\mathbf{A}(m, n) = (a_{ij})$ číslem $k \in R$ nazýváme matici $\mathbf{C}(m, n) = (c_{ij})$, jestliže pro všechna $i = 1, 2, ..., m$ a $j = 1, 2, ..., n$ platí:

$$c_{ij} = ka_{ij}.$$

Zapisujeme $\mathbf{C} = k\mathbf{A}$.

Definice 1.15

Součinem matic $\mathbf{A}(m, n) = (a_{ik})$ a $\mathbf{B}(n, p) = (b_{kj})$ nazýváme matici $\mathbf{C}(m, p) = (c_{ij})$, jestliže pro všechna $i = 1, 2, ..., m$ a $j = 1, 2, ..., p$ platí:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Zapisujeme $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

Příklad 1.6

Jsou dány matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určíme matice a) $\mathbf{K} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$;
b) $\mathbf{L} = 6\mathbf{C}$;
c) $\mathbf{Q} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$.

Podle definice 1.15 sčítáme matice tak, že sčítáme jejich stejnolehlé prvky a podle definice 1.16 násobíme matici reálným číslem tak, že vynásobíme tímto číslem všechny její prvky. Tedy postupně dostáváme:

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5 & 1+2 & -2+(-2) \\ 3+3 & 2+0 & 2+4 \\ 1+1 & 0+1 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 \\ 6 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{L} = 6\mathbf{C} = 6\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\cdot 1 & 6\cdot 2 & 6\cdot 5 \\ 6\cdot 2 & 6\cdot 3 & 6\cdot 8 \\ 6\cdot 0 & 6\cdot 2 & 6\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 30 \\ 12 & 18 & 48 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Podle definice 1.17 se prvek v i-tém řádku a j-tém sloupci matice $\mathbf{C}$, která je součinem matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ v tomto pořadí, určí jako *skalární součin* i-tého řádkového vektoru matice $\mathbf{A}$ a j-tého sloupcového vektoru matice $\mathbf{B}$.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 5 + 1\cdot 3 + (-2)\cdot 1 & 2\cdot 2 + 1\cdot 0 + (-2)\cdot 1 & 2\cdot(-2) + 1\cdot 4 + (-2)\cdot 3 \\ 3\cdot 5 + 2\cdot 3 + 2\cdot 1 & 3\cdot 2 + 2\cdot 0 + 2\cdot 1 & 3\cdot(-2) + 2\cdot 4 + 2\cdot 3 \\ 1\cdot 5 + 0\cdot 3 + 2\cdot 1 & 1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot(-2) + 0\cdot 4 + 2\cdot 3 \end{pmatrix} -$$

$$
-\begin{pmatrix} 5\cdot 2+2\cdot 3+(-2)\cdot 1 & 5\cdot 1+2\cdot 2+(-2)\cdot 0 & 5\cdot(-2)+2\cdot 2+(-2)\cdot 2 \\ 3\cdot 2+0\cdot 3+4\cdot 1 & 3\cdot 1+0\cdot 3+4\cdot 0 & 3\cdot(-2)+0\cdot 2+4\cdot 2 \\ 1\cdot 2+1\cdot 3+3\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 2+3\cdot 0 & 1\cdot(-2)+1\cdot 2+3\cdot 2 \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 11 & 2 & -6 \\ 23 & 8 & 8 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & 9 & -10 \\ 10 & 3 & 2 \\ 8 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 & 4 \\ 13 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.
$$

Poslední výsledek pouze potvrzuje skutečnost zřejmou již z definice 1.17. Násobení matic není komutativní operace (tedy obecně neplatí, že **AB** = **BA),** na rozdíl od násobení reálných čísel.

Hodnost matice

Definice 1.18

Hodností matice $\mathbf{A}(m, n)$ nazýváme číslo, které se rovná maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků této matice. Označujeme $h(\mathbf{A})$.

Věta 1.2

Hodnost matice $\mathbf{A}(m, n)$ v lichoběžníkovém tvaru je rovna počtu nenulových řádků této matice.

Věta 1.3 (úpravy neměnící hodnost matice)

Hodnost matice **A** se nezmění, jestliže provedeme některou z následujících úprav:

1) Matici transponujeme.
2) Vyměníme libovolné dva řádky.
3) Libovolný řádek vynásobíme libovolným nenulovým reálným číslem.
4) K libovolnému řádku přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků.
5) Vynecháme řádek, který je lineární kombinací ostatních řádků.

Pozn.

Řádkové úpravy v bodech 2) až 5), označme je (u2) až (u5), se tedy podle bodu 1) dají dělat i se sloupci matice **A**.

Z uvedeného je okamžitě zřejmá následující věta, jejíž znalost při určování hodnosti matice může být užitečná.

Věta 1.4

Pro hodnost $h(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}(m, n)$ platí, že

$$
h(\mathbf{A}) \le \min(m, n).
$$

Z vět 1.2 a 1.3 je zřejmé, jak lze postupovat při určování hodnosti dané matice. Pomocí úprav, které nemění hodnost, získat matici v lichoběžníkovém tvaru, která má stejnou hodnost jako původní matice a ze které lze tuto hodnost pohodlně určit. Skutečnost, že dvě matice mají stejnou hodnost, budeme vyjadřovat symbolem ~.

Příklad 1.7
Určíme hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nejprve provedeme výměnu 1. a 4. řádku (u2). Dále násobíme první řádek číslem (-5) a přičteme jej ke 2. řádku. První řádek násobíme číslem (-2) a přičteme ke třetímu a znovu násobíme první řádek číslem (-2) a přičteme ke čtvrtému a konečně přičteme první řádek k pátému (u4). Vynásobíme 3. řádek číslem -1/6 (úprava u3) a současně vyměníme 2. a 3. řádek (u2). Druhý řádek násobíme postupně čísly 17, 4 a (-5) a přičítáme ke třetímu, čtvrtému a pátému řádku (u4). Vynecháme třetí a čtvrtý řádek, protože jsou násobky pátého řádku (u5). Výsledná matice má lichoběžníkový tvar a obsahuje tři nenulové řádky, tedy je její hodnost 3, a tudíž také $h(\mathbf{A}) = 3$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -17 & -3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -17 & -3 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 1.8
Pomocí hodnosti matice rozhodneme o lineární závislosti či nezávislosti vektorů $\mathbf{a} = (2,\ 0,\ 1,\ -1,\ 3)$, $\mathbf{b} = (3,\ 1,\ 0,\ -2,\ 5)$, $\mathbf{c} = (0,\ -2,\ 3,\ 2,\ 1)$.

Z definice 1.18 okamžitě vyplývá možný postup řešení. Z daných vektorů vytvoříme matici, řekněme **C**, typu 3 x 5 a určíme její hodnost. Jestliže bude $h(\mathbf{C}) = 3$, budou dané tři vektory lineárně nezávislé, jestliže ale bude $h(\mathbf{C}) < 3$, budou tyto vektory lineárně závislé. Analogicky jako při řešení předchozího příkladu postupně použitím úprav (u3) a (u4) dostáváme

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poslední matice však není lichoběžníková (nula na hlavní diagonále). Dále můžeme využít úpravu (u1) ve smyslu poznámky za větou 1.3 a vyměnit třetí a čtvrtý sloupec uvažované matice. Máme

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

To už je lichoběžníková matice a podle věty 1.2 je $h(\mathbf{C}) = 3$. Vektory **a**, **b**, **c** jsou tedy s ohledem na definici 1.18 lineárně nezávislé.