**Diskrétní struktury**

**Teorie množin**

* Množina
  + Neuspořádaný soubor přesně specifikovaných a navzájem rozlišitelných objektů – prvků
  + Je dána, umíme-li říci, které prvky v množině leží a které ne
    - Objekt *x* je prvkem množiny S
    - Objekt *y* není prvkem množiny S
  + Dvě množiny *S* a *T* jsou si rovny – píšeme *“S = T”*), právě tehdy, když prvek množiny *S* je prvkem množiny T a naopak každý prvek množiny *T* je prvkem množiny *S*
  + Zadání množin
    - Výčtem: *A = {1, 2, 3}*
    - Zadáním vlastnosti prvků: *A = {x | x má jistou vlastnost}*
      * Např. *S = {m | m = 2k, k je přirozené číslo}*
  + Nejčastější množiny čísel
    - Přirozená čísla: **N** = {0, 1, 2, 3,…}; N+ = {1, 2, 3,…}
    - Celá čísla: **Z** = {0, 1, -1, 2, -2,…}
    - Racionální čísla: **Q**
    - Reálná čísla: **R**
    - Prázdná množina (nemá žádný prvek):
  + Podmnožina
    - Mějmě dvě množiny S a T; jestliže je každý prvek množiny S take prvkem množiny T, říkáme, že S je podmnožina T
    - Pokud platí, že S je podmnožinou T a zároveň se nerovnají, pak říkáme, že S je vlastní podmnožina T
    - Každá množina může být nevlastní podmnožinou sama sebe
    - Prázdná množina je vlastní i nevlastní podmnožinou jakékoliv množiny
* Vlastnosti, pozorování, příklady
  + Prvky množiny se nesmí opakovat
  + Existuje pouze jedna prázdná množina
  + Pozor na rozlišení prvku množiny: *a* je prvkem množiny {a, b, c}, ale {a} je množina o jednom prvku *a* – {a} je podmnožinou {a, b, c}
  + Množina {a, b, c} má podmnožiny {a}, {b}, {c}, {ab}, {bc}, {ac}, {a, b, c} a prázdná množina
* Zobrazení
  + Zobrazení množiny A do množiny B je předpis *f*, který každému prvku náležícímu množině A přiřadí právě jeden prvek y náležícímu množině B, píšeme ***f: A -> B***
  + Obecně není zaručeno, že každý prvek z B má svůj vzor v A
  + Taky obecně nevadí, pokud jeden prvek z B je obrazem vice vzorů
    - **Surjektivní zobrazení (“na”)**: zobrazení “vyčerpá” všechny prvky množiny B, žádný nezůstane nepřiřazený
    - **Injektivní (prosté)**: neexistuje prvek množiny B, který by byl přiřazen vice prvkům množiny A
    - **Bijektivní (vzájemně jednoznačné)**: zobrazení, které je současně prosté a “na” (surjektivní i injektivní)
* Potenční množina
  + P(A) – množina všech podmnožin množiny
  + Např. A = {1, 2, 3}
  + P(A) = {prázdná, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}
* Universum
  + Největší (všeobjímající) množina U, s jejímiž prvky pracujeme; při zadávání nových množin tedy uvažujeme pouze prvky universa; zavedením universa se lze vyhnout některým paradoxům
* Charakteristická funkce
  + Slouží k zadání podmnožiny A nějakého universa U
  + xA: U -> {0, 1}
* Operace s množinami
  + **doplněk** množiny A (v universu U) - = {x | x U a x ∉ A}
  + **průnik** množin A a B (A průnik B = {x | x A a x B})
  + **sjednocení** množin (A sjednoceno B = {x | x A nebo x B})

**rozdíl** množin A a B (A – B = {x | x A a x B})

* + **kartézský** součin množin A a B (A x B = {(a, b) | a A a b B)}
  + **uspořádaná dvojice** (a, b) – víme, který prvek je první a který druhý. (a, b) = (c, d) jestliže a = c a zároveň b = d
  + kartézský součin jakékoli množiny s prázdnou množinou je prázdná množin
  + uspořádaná n-tice (a1, a2, …, an)
  + n-tá kartézská mocnina množiny je rovna n-násobnému kartézskému součinu této množiny sama se sebou
  + A x B = B x A tehdy, když A = B
  + C je podmnožina A, D podmnožina B, potom C x D podmnožina A x B
* Komutativita: A průnik B = B průnik A (sjednocení též)
* Asociativita: A sjednoceno (B sjednoceno C) = (A sjednoceno B) sjednoceno C
* Distributivita: A průnik (B sjednoceno C) = (A průnik B) sjednoceno (A průnik C)
* Mohutnost množin
  + Nástroj, jak rozhodnout, které množiny mají stejný počet prvků
  + Srovnávání množin dle velikosti. Mohutnost značíme |A|
  + **Konečná množina** – má konečný počet prvků
  + **Vlastnost konečných množin**
    - Je-li A konečná, pak je i každá její podmnožina B konečná a platí |B| <= |A|, je-li navíc B podmnožina vlastní, pak |B| < |A|
    - Jsou-li A, B konečné množiny, pak
      * A sjednoceno B je konečná a |A sjednoceno B| <= |A| + |B|
      * Jsou-li A, B disjunktní, pak |A sjednoceno B| = |A| + |B|
      * A x B je konečná a |A x B| = |A| \* |B|
  + Nekonečná je taková množina, která není konečná
  + U konečných množin stačí prvky pro určení mohutnosti spočítat; u dvou nekonečných je přímo spočítat nelze, lze ale určit, zda dvě množiny mají stejnou mohutnost: musíme zjistit, zda můžeme jejich prvky beze zbytku spárovat
  + Přesněji: množiny S a T mají stejnou mohutnost, |S| = |T|, jestliže existuje bijekce z množiny S na množinu T
  + Nekonečná množina je spočetná, pokud má stejnou mohutnost jako množina přirozených čísel N (čili prvky lze “očíslovat”, tj. Uspořádat do prosté nekonečné posloupnosti, v níž se neopakují prvky). Ostatní nekonečné množiny jsou nespočetné
  + Termín nejvýše spočetná množina označuje množinu, která je buď konečná, nebo spočetná
* Typické nekonečné množiny
  + Spočetné: **N, Z, Q, N x N, Z x Z**
  + Nespočetné: množina reálných čísel v intervalu (0, 1), množina **R**
* Vlastnosti nekonečných množin
  + Nekonečná podmnožina spočetné množiny je spočetná
  + Sjednocení dvou nejvýše spočetných množin je nejvýše spočetná množina
  + Kartézský součin dvou nejvýše spočetných množin je nevíce spočetná množina
  + Množina všech podmnožin množiny N je nespočetná
  + Mohutnost množiny A je menší nebo rovna mohutnosti množiny B, píšeme |A| <= |B|, jestliže existuje prosté zobrazení z A do B
  + Jestliže je A konečná množina, pak |P(A)| = 2|A|
  + Pro každou množinu A platí |A| < |P(A)|
  + Množiny X, Y se nazývají izomorfní, jestliže existuje bijekce X -> Y