

MEC431 – Projet (1ère partie)

François ESPINET
Thomas FERREIRA DE LIMA
Sophie ROUSSELLE
Oscar FLORES ALTAMIRANO

1 Calcul de structure

1.1 Données du problème

- géométrie initiale : Cylindre de section droite circulaire, de rayon intérieur A et d'épaisseur E , délimité par 2 plans perpendiculaires à l'axe
- cinématique imposée : Origine et directrice fixes, déplacement donné par les surfaces S_0 , S_H , S_{int} , S_{ext}
- efforts imposés :
 - L'effort volumique est nul car on néglige le poids du système.
 - Sur la paroi interne $S_{int}(R = A)$: $\underline{T}_d = -p_i \underline{n}$ et $\underline{n} = -\underline{e}_r$
 - Sur la paroi externe $S_{ext}(R = A + E)$: $\underline{T}_d = -p_e \underline{n}$ et $\underline{n} = \underline{e}_r$
 - sur $S_H(Z = H)$: $\underline{T}_d = \frac{T}{S_H} \underline{n}$ et $\underline{n} = \underline{e}_z$ (en négligeant l'épaisseur devant le diamètre)
- comportement : le matériau est élastomère isotrope avec liaison interne et isochorie, donc sa loi de comportement est :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1}(I_1, I_2) \underline{\underline{B}} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2}(I_1, I_2) \underline{\underline{B}}^{-1} + q \mathbb{1}$$

où :

ρ_0 est la masse volumique ;

ψ est l'énergie libre massique fonction de la déformation de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}$ au travers de ses deux premiers invariants $I_1 = tr(\underline{\underline{B}})$ et $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{C}})$ et $\underline{\underline{C}} = {}^t \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}$ où $\underline{\underline{F}}$ est le gradient de la transformation ;

q est un champ scalaire associé à la liaison d'isochorie.

1.2 Méthode des déplacements

On suppose que la transformation $\phi : M(R, \Theta, Z) \rightarrow m(r, \theta, z)$ est de la forme :

$$r = \beta(R)R, \theta = \Theta, z = \mu Z$$

où

$\beta(R) > 1$ est une fonction de R ;

$\mu > 1$ est une constante.

Comparaison de cette transformation à la structure après transformation :

- Pour tout point $M(0, \Theta, Z)$ de l'axe (Oz) , $\phi(M) = m(0, \theta, \mu Z)$: m appartient à (Oz) donc l'axe (Oz) reste fixe.
- $\phi(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ donc l'origine $O(0, 0, 0)$ reste fixe.

- Pour tout point $M(R, \Theta, H)$, $\phi(M) = m(\beta(R)R, \Theta, \mu H)$ Ainsi le cylindre a une longueur μH après transformation.
- Pour tout point $M(A, \Theta, Z)$ de la paroi interne du cylindre, $\phi(M) = m(\beta(A)A, \theta, \mu Z)$ or la paroi interne après transformation a pour rayon λA d'où

$$\beta(A) = \lambda \quad (\text{A})$$

- Pour tout point $M(A + E, \Theta, Z)$ de la paroi externe du cylindre, $\phi(M) = m(\beta(A + E)(A + E), \Theta, \mu Z)$ or la paroi externe après transformation est de rayon $\lambda A + e$ d'où :

$$\beta(A + E)(A + E) = \lambda A + e$$

donc cette transformation convient.

Calcul du gradient de transformation :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} &= \underline{\underline{grad}}(\phi) \\ &= \left(R \frac{d\beta}{dR} + \beta(R) \right) \underline{e}_R \otimes \underline{e}_R + \beta(R) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \mu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

On peut remarquer qu'on a : $\underline{e}_R = \underline{e}_r$, $\underline{e}_\theta = \underline{e}_\theta$ et $\underline{e}_z = \underline{e}_z$ d'après la transformation choisie. Dans ce cas, l'expression du gradient se simplifie en :

$$\underline{\underline{F}} = \left(R \frac{d\beta}{dR} + \beta(R) \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \beta(R) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \mu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \quad (\text{B})$$

1.3 Condition d'isochorie

La transformation est isochore (volume constant) donc :

$$\begin{aligned} \det(\underline{\underline{F}}) &= 1 \\ \left(R \frac{d\beta(R)}{dR} + \beta(R) \right) \cdot \beta(R) \cdot \mu &= 1 \\ \frac{d(R\beta(R))}{dR} \beta(R) &= \frac{1}{\mu} \\ \frac{d(R\beta(R))}{dR} R\beta(R) &= \frac{R}{\mu} \\ R\beta(R)d(R\beta(R)) &= \frac{R}{\mu} dR \\ \frac{(R\beta(R))^2}{2} &= \frac{R^2}{2\mu} + K \end{aligned}$$

où K est une constante. Or d'après A, $\beta(A) = \lambda$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{A^2 \lambda^2}{2} &= \frac{A^2}{2\mu} + K \implies K = \frac{A^2}{2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\mu} \right) \\ \frac{R^2 \beta^2(R)}{2} &= \frac{R^2}{2\mu} + \frac{A^2}{2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\mu} \right) \\ \beta(R) &= \sqrt{\frac{1}{\mu} + \frac{A^2}{R^2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\mu} \right)} \end{aligned}$$

1.4 Développement limité au premier ordre de β

β est liée à δ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\beta^2 &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{(1+\delta)^2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\mu} \right) \\ &\approx \frac{1}{\mu} + (1-2\delta) \left(\lambda^2 - \frac{1}{\mu} \right) \\ \Rightarrow \beta &\approx \left[\frac{1}{\mu} + (1-2\delta) \left(\lambda^2 - \frac{1}{\mu} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \lambda \left[1 + \left(\frac{1}{\lambda^2 \mu} - 1 \right) \delta \right]\end{aligned}$$

Comme $\delta \ll 1$ on peut prendre $\beta = \lambda$ et on trouve (en injectant dans B)

$$\underline{\underline{F}} = \frac{1}{\lambda \mu} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_R + \lambda \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\Theta + \mu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_Z$$

En effet, $\left(R \frac{d\beta(R)}{dR} + \beta(R) \right) \cdot \beta(R) \cdot \mu = 1$ d'où :

$$\left(R \frac{d\beta(R)}{dR} + \beta(R) \right) = \frac{1}{\beta(R)\mu} = \frac{1}{\lambda \mu}$$

Ce qui donne :

$$\frac{e}{E} = \frac{1}{\lambda \mu} \Rightarrow \frac{e}{a} = \frac{1}{\lambda \mu} \cdot \frac{E}{\lambda A} = \frac{\epsilon}{\lambda^2 \mu} \quad \boxed{\frac{e}{a} = \frac{\epsilon}{\lambda^2 \mu}}$$

1.5 Les invariants de la transformation

On fait le calcul directement :

$$I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{B}}) = \text{tr}(\underline{\underline{F}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}) = \text{tr} \left(\frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \underline{e}_R \otimes \underline{e}_R + \lambda^2 \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_\Theta + \mu^2 \underline{e}_Z \otimes \underline{e}_Z \right) = \boxed{\left(\frac{1}{\lambda \mu} \right)^2 + \lambda^2 + \mu^2 = I_1}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 + \text{tr}(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}})) = \frac{1}{2} \left(I_1^2 + \text{tr} \left(\frac{1}{\lambda^4 \mu^4} \underline{e}_R \otimes \underline{e}_R + \lambda^4 \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_\Theta + \mu^4 \underline{e}_Z \otimes \underline{e}_Z \right) \right) = \boxed{\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2 \mu^2 = I_2}$$

1.6 Calcul de la contrainte de Cauchy

L'hypothèse $\sigma_{rr} \ll \sigma_{\theta\theta}$, en utilisant l'équation (1) de l'énoncé, aboutit à la relation suivante puisque $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma'}} + q \mathbb{1}$:

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma'_{\theta\theta} - \sigma'_{rr} \approx \sigma_{\theta\theta}$$

Il nous suffit de calculer les tenseurs $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{B}}^{-1}$ dans l'équation suivante :

$$\underline{\underline{\sigma'}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \underline{\underline{B}} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \underline{\underline{B}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{B}} = \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \underline{e_R} \otimes \underline{e_R} + \lambda^2 \underline{e_\Theta} \otimes \underline{e_\Theta} + \mu^2 \underline{e_Z} \otimes \underline{e_Z}$$

$$\underline{\underline{B}}^{-1} = \lambda^2 \mu^2 \underline{e_R} \otimes \underline{e_R} + \frac{1}{\lambda^2} \underline{e_\Theta} \otimes \underline{e_\Theta} + \frac{1}{\mu^2} \underline{e_Z} \otimes \underline{e_Z}$$

En prenant les approximations $\sigma_{\theta\theta} \approx \sigma'_{\theta\theta} - \sigma'_{rr}$ et $\sigma_{zz} \approx \sigma'_{zz} - \sigma'_{rr}$, on arrive à :

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial I_1} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \right) - 2\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial I_2} \left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda^2 \mu^2 \right)$$

$$\sigma_{zz} = 2\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial I_1} \left(\mu^2 - \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \right) - 2\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial I_2} \left(\frac{1}{\mu^2} - \lambda^2 \mu^2 \right)$$

1.7 Calcul explicite de la contrainte de Cauchy à l'aide du théorème d'Euler

Prenons comme sous-système le demi cylindre coupé par le plan zOy et appliquons le Théorème d'Euler sur celui-ci. Dans le système (composé de la paroi du ballon), on considère le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ constant puisqu'on néglige l'épaisseur du ballon. Donc, les efforts selon l'axe Oy sont nuls (ils se compensent par symétrie).

$$p_i \cdot 2Ha\underline{e}_y - p_e \cdot 2H(a+e)\underline{e}_y - 2He \cdot \sigma_{\theta\theta}\underline{e}_y = 0$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{a\Delta p}{e} - p_e \approx \frac{a\Delta p}{e} \quad \text{car} \quad e \ll a$$

Remarque : Le fait que σ_{rr} soit de l'ordre de p_i ou p_e et que l'on ait trouvé $\sigma_{\theta\theta} \gg p_e$ confirme notre supposition précédente, i.e. $\sigma_{rr} \ll \sigma_{\theta\theta}$.

Les conditions aux bords $z = 0$ (S_0) et $z = H$ (S_H), avec l'hypothèse $\sigma_{zz} = \text{cte}$, nous donnent directement la relation $T \approx 2\pi ae \cdot \sigma_{zz}$. Avec la contrainte $\sigma_{\theta\theta} \approx \frac{a\Delta p}{e}$, le jeu de variables indéfinies du problème (μ, λ) diminue de dimension, si on n'impose pas de valeur à T . En considérant le cercle de Mohr et les conditions limites de rupture, il est raisonnable de dire que le système admettrait une solution qui minimise l'écart entre $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} . Cela se passe quand $\mu \approx \lambda$, d'après les équations dans la question 1.6. Cela implique que l'effort d'équilibre vaudrait $T \approx \pi ae \cdot \frac{a\Delta p}{e} = \pi a^2 \Delta p$.

On note $T = T_{\Delta p} + T_a = \pi a^2 \Delta p + T_a$ et on introduit les résultats trouvés ci-dessus dans le système d'équations de la question précédente.

$$\begin{cases} 2\rho_0 \left(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} \mu^2 \right) \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \right) = \frac{\lambda^2 \mu \Delta p}{e} \\ 2\rho_0 \left(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} \lambda^2 \right) \left(\mu^2 - \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \right) = \frac{T}{2\pi ae} = \frac{\lambda^2 \mu T_a}{2\lambda^2 \pi A^2 e} + \frac{\lambda^2 \mu \Delta p}{2e} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2\rho_0}{\lambda^2 \mu} \left(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} \mu^2 \right) \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \right) = \frac{\Delta p}{e} \\ \frac{2\rho_0}{\lambda^2 \mu^3} \left[\frac{\partial\psi}{\partial I_1} (2\mu^4 \lambda^2 - \mu^2 \lambda^4 - 1) + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} (\mu^4 \lambda^4 - 2\lambda^2 + \mu^2) \right] = \frac{T_a}{\pi A^2 e} \end{cases}$$

1.8 Analyse numérique du problème

- (a) La courbe $\mu(\lambda)$ nous indique que l'allongement de la partie gonflée du ballon est à peu près proportionnel au grossissement du diamètre (pente affine). La partie constante que l'on trouve

vers $\lambda = 1$ indique que le ballon a une tendance à se gonfler par son rayon plutôt que par le gonflement d'une longueur plus grande de ballon, du moins dans la phase initiale du gonflage.

Étudier le gonflement du ballon revient donc approximativement à étudier l'élargissement d'une section du ballon.

Pour toutes les lois, on retrouve les deux premières étapes décrites dans l'introduction : d'abord la pente de $\Delta p(V/V_{ini})$ est forte, c'est-à-dire qu'il faut appliquer un fort différentiel de pression pour obtenir un faible accroissement du volume du ballon (un faible gonflage donc).

Ensuite, la pente devient négative, il faut donc appliquer de moins en moins de différentiel de pression pour obtenir un gonflement supérieur.

Enfin, les lois de Gent et la loi de Langevin confirment l'observation faite pour la dernière étape, il devient plus dur de gonfler le ballon une fois qu'on atteint un λ important. Il paraît logique d'avoir une divergence du différentiel de pression vu qu'un gonflement infini du ballon n'est pas possible (explosion), en revanche, la loi néo-hookienne ne prévoit pas ce comportement. On retrouve ces observations sur $\Delta p(\lambda)$.

- (b) En pratique, on observe bien ce comportement lors du gonflement du ballon. Il est difficile de le gonfler dans un premier temps, puis le gonflement devient plus aisé, enfin il est quasiment impossible de le gonfler démesurément.
- (c) La loi néo-hookienne paraît impossible à admettre pour des gonflements importants puisqu'elle ne prévoit pas la divergence des fonctions lorsque λ devient grand. Elle reste cependant valable pour de très petits gonflements.

Les deux autres lois sont quasi-identiques en comportement, elles diffèrent seulement dans les valeurs, les valeurs de la loi de Gent étant supérieures à celle de la loi de Langevin.

- (d) L'intérêt de tirer sur le ballon permet de changer le comportement décrit au début de l'item a. En effet, lorsqu'on tire sur le bout du ballon, il acquiert une propension à augmenter la zone "gonflée" (μ plus important) plutôt que d'augmenter son rayon : il absorbe l'air ajouté en augmentant la zone gonflée plutôt qu'en augmentant le rayon de la zone déjà gonflée.

Cette action a pour effet de garder λ proche de 1 lors du gonflement puisque l'air ajouté est réparti en longueur dans le ballon (par le biais de μ), le différentiel de pression à appliquer reste donc faible et le différentiel de pression reste petit, le ballon est donc plus facile à gonfler. On change ainsi le comportement "naturel" du ballon en tirant sur ces fibres de façon orthogonale à la force qu'applique le différentiel de pression sur la partie gonflée du ballon, et ce nouveau comportement rend le gonflement plus facile.