

MEC431 – Projet

François ESPINET
Thomas FERREIRA DE LIMA
Sophie ROUSSELLE
Oscar FLORES ALTAMIRANO

1 Calcul de structure

1.1 Données du problème

- géométrie initiale : Cylindre de section droite circulaire, de rayon intérieur A et d'épaisseur E , délimité par 2 plans perpendiculaires à l'axe
- cinématique imposée : Origine et directrice fixes, déplacement donné par les surfaces S_0 , S_H , S_{int} , S_{ext}
- efforts imposés :
 - L'effort volumique est nul car on néglige le poids du système.
 - Sur la paroi interne $S_{int}(R = A) : \underline{T}_d = -p_i \underline{n}$ et $\underline{n} = -\underline{e}_r$
 - Sur la paroi externe $S_{ext}(R = A + E) : \underline{T}_d = -p_e \underline{n}$ et $\underline{n} = \underline{e}_r$
 - sur $S_H(Z = H) : \underline{T}_d = \frac{T}{S_H} \underline{n}$ et $\underline{n} = \underline{e}_z$ (en négligeant l'épaisseur devant le diamètre)
- comportement : le matériau est élastomère isotrope avec liaison interne et isochorie, donc sa loi de comportement est :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1}(I_1, I_2) \underline{\underline{B}} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2}(I_1, I_2) \underline{\underline{B}}^{-1} + q \mathbb{1}$$

où :

ρ_0 est la masse volumique ;

ψ est l'énergie libre massique fonction de la déformation de Green-Lagrange $\underline{\underline{e}}$ au travers de ses deux premiers invariants $I_1 = tr(\underline{\underline{B}})$ et $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{C}})$ et $\underline{\underline{C}} = {}^t \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}$ où $\underline{\underline{F}}$ est le gradient de la transformation ;

q est un champ scalaire associé à la liaison d'isochorie.

1.2 Méthode des déplacements

On suppose que la transformation $\phi : M(R, \Theta, Z) \rightarrow m(r, \theta, z)$ est de la forme :

$$r = \beta(R)R, \theta = \Theta, z = \mu Z$$

où

$\beta(R) > 1$ est une fonction de R ;

$\mu > 1$ est une constante.

Comparaison de cette transformation à la structure après transformation :

- Pour tout point $M(0, \Theta, Z)$ de l'axe (Oz) , $\phi(M) = m(0, \theta, \mu Z) : m$ appartient à (Oz) donc l'axe (Oz) reste fixe.
- $\phi(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ donc l'origine $O(0, 0, 0)$ reste fixe.

- Pour tout point $M(R, \Theta, H)$, $\phi(M) = m(\beta(R)R, \Theta, \mu H)$ Ainsi le cylindre a une longueur μH après transformation.
- Pour tout point $M(A, \Theta, Z)$ de la paroi interne du cylindre, $\phi(M) = m(\beta(A)A, \theta, \mu Z)$ or la paroi interne après transformation a pour rayon λA d'où

$$\beta(A) = \lambda \quad (\text{A})$$

- Pour tout point $M(A + E, \Theta, Z)$ de la paroi externe du cylindre, $\phi(M) = m(\beta(A + E)(A + E), \Theta, \mu Z)$ or la paroi externe après transformation est de rayon $\lambda A + e$ d'où :

$$\beta(A + E)(A + E) = \lambda A + e$$

donc cette transformation convient.

Calcul du gradient de transformation :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} &= \underline{\underline{grad}}(\phi) \\ &= \left(R \frac{d\beta}{dR} + \beta(R) \right) \underline{e}_R \otimes \underline{e}_R + \beta(R) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \mu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z \end{aligned}$$

On peut remarquer qu'on a : $\underline{e}_R = \underline{e}_r$, $\underline{e}_\theta = \underline{e}_\theta$ et $\underline{e}_z = \underline{e}_z$ d'après la transformation choisie. Dans ce cas, l'expression du gradient se simplifie en :

$$\boxed{\underline{\underline{F}} = \left(R \frac{d\beta}{dR} + \beta(R) \right) \underline{e}_r \otimes \underline{e}_r + \beta(R) \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta + \mu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z} \quad (\text{B})$$

1.3 Condition d'isochorie

La transformation est isochore (volume constant) donc :

$$\begin{aligned} \det(\underline{\underline{F}}) &= 1 \\ \left(R \frac{d\beta(R)}{dR} + \beta(R) \right) \cdot \beta(R) \cdot \mu &= 1 \\ \frac{d(R\beta(R))}{dR} \beta(R) &= \frac{1}{\mu} \\ \frac{d(R\beta(R))}{dR} R\beta(R) &= \frac{R}{\mu} \\ R\beta(R)d(R\beta(R)) &= \frac{R}{\mu} dR \\ \frac{(R\beta(R))^2}{2} &= \frac{R^2}{2\mu} + K \end{aligned}$$

où K est une constante. Or d'après A, $\beta(A) = \lambda$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{A^2 \lambda^2}{2} &= \frac{A^2}{2\mu} + K \implies K = \frac{A^2}{2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\mu} \right) \\ \frac{R^2 \beta^2(R)}{2} &= \frac{R^2}{2\mu} + \frac{A^2}{2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\mu} \right) \\ \beta(R) &= \sqrt{\frac{1}{\mu} + \frac{A^2}{R^2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\mu} \right)} \end{aligned}$$

1.4 Développement limité au premier ordre de β

β est liée à δ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\beta^2 &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{(1+\delta)^2} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\mu} \right) \\ &\approx \frac{1}{\mu} + (1-2\delta) \left(\lambda^2 - \frac{1}{\mu} \right) \\ \Rightarrow \beta &\approx \left[\frac{1}{\mu} + (1-2\delta) \left(\lambda^2 - \frac{1}{\mu} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \lambda \left[1 + \left(\frac{1}{\lambda^2 \mu} - 1 \right) \delta \right]\end{aligned}$$

Comme $\delta \ll 1$ on peut prendre $\beta = \lambda$ et on trouve (en injectant dans B)

$$\underline{\underline{F}} = \frac{1}{\lambda \mu} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_R + \lambda \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\Theta + \mu \underline{e}_z \otimes \underline{e}_Z$$

En effet, $\left(R \frac{d\beta(R)}{dR} + \beta(R) \right) \cdot \beta(R) \cdot \mu = 1$ d'où :

$$\left(R \frac{d\beta(R)}{dR} + \beta(R) \right) = \frac{1}{\beta(R)\mu} = \frac{1}{\lambda \mu}$$

Ce qui donne :

$$\frac{e}{E} = \frac{1}{\lambda \mu} \Rightarrow \frac{e}{a} = \frac{1}{\lambda \mu} \cdot \frac{E}{\lambda A} = \frac{\epsilon}{\lambda^2 \mu} \quad \boxed{\frac{e}{a} = \frac{\epsilon}{\lambda^2 \mu}}$$

1.5 Les invariants de la transformation

On fait le calcul directement :

$$I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{B}}) = \text{tr}(\underline{\underline{F}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}) = \text{tr} \left(\frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \underline{e}_R \otimes \underline{e}_R + \lambda^2 \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_\Theta + \mu^2 \underline{e}_Z \otimes \underline{e}_Z \right) = \boxed{\left(\frac{1}{\lambda \mu} \right)^2 + \lambda^2 + \mu^2 = I_1}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (I_1^2 + \text{tr}(\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}})) = \frac{1}{2} \left(I_1^2 + \text{tr} \left(\frac{1}{\lambda^4 \mu^4} \underline{e}_R \otimes \underline{e}_R + \lambda^4 \underline{e}_\Theta \otimes \underline{e}_\Theta + \mu^4 \underline{e}_Z \otimes \underline{e}_Z \right) \right) = \boxed{\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2 \mu^2 = I_2}$$

1.6 Calcul de la contrainte de Cauchy

L'hypothèse $\sigma_{rr} \ll \sigma_{\theta\theta}$, en utilisant l'équation (1) de l'énoncé, aboutit à la relation suivante puisque $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}' + q \mathbb{1}$:

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} = \sigma'_{\theta\theta} - \sigma'_{rr} \approx \sigma_{\theta\theta}$$

Il nous suffit de calculer les tenseurs $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{B}}^{-1}$ dans l'équation suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}' = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \underline{\underline{B}} - 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \underline{\underline{B}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{B}} = \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \underline{e_R} \otimes \underline{e_R} + \lambda^2 \underline{e_\Theta} \otimes \underline{e_\Theta} + \mu^2 \underline{e_Z} \otimes \underline{e_Z}$$

$$\underline{\underline{B}}^{-1} = \lambda^2 \mu^2 \underline{e_R} \otimes \underline{e_R} + \frac{1}{\lambda^2} \underline{e_\Theta} \otimes \underline{e_\Theta} + \frac{1}{\mu^2} \underline{e_Z} \otimes \underline{e_Z}$$

En prenant les approximations $\sigma_{\theta\theta} \approx \sigma'_{\theta\theta} - \sigma'_{rr}$ et $\sigma_{zz} \approx \sigma'_{zz} - \sigma'_{rr}$, on arrive à :

$$\sigma_{\theta\theta} = 2\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial I_1} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \right) - 2\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial I_2} \left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda^2 \mu^2 \right)$$

$$\sigma_{zz} = 2\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial I_1} \left(\mu^2 - \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \right) - 2\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial I_2} \left(\frac{1}{\mu^2} - \lambda^2 \mu^2 \right)$$

1.7 Calcul explicite de la contrainte de Cauchy à l'aide du théorème d'Euler

Prenons comme sous-système le demi cylindre coupé par le plan zOy et appliquons le Théorème d'Euler sur celui-ci. Dans le système (composé de la paroi du ballon), on considère le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ constant puisqu'on néglige l'épaisseur du ballon. Donc, les efforts selon l'axe Oy sont nuls (ils se compensent par symétrie).

$$p_i \cdot 2Ha \underline{e_y} - p_e \cdot 2H(a+e) \underline{e_y} - 2He \cdot \sigma_{\theta\theta} \underline{e_y} = 0$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{a\Delta p}{e} - p_e \approx \frac{a\Delta p}{e} \quad \text{car} \quad e \ll a$$

Remarque : Le fait que σ_{rr} soit de l'ordre de p_i ou p_e et que l'on ait trouvé $\sigma_{\theta\theta} \gg p_e$ confirme notre supposition précédente, i.e. $\sigma_{rr} \ll \sigma_{\theta\theta}$.

Les conditions aux bords $z = 0$ (S_0) et $z = H$ (S_H), avec l'hypothèse $\sigma_{zz} = \text{cte}$, nous donnent directement la relation $T \approx 2\pi a e \cdot \sigma_{zz}$. Avec la contrainte $\sigma_{\theta\theta} \approx \frac{a\Delta p}{e}$, le jeu de variables indéfinies du problème (μ, λ) diminue de dimension, si on n'impose pas de valeur à T . En considérant le cercle de Mohr et les conditions limites de rupture, il est raisonnable de dire que le système admettrait une solution qui minimise l'écart entre $\sigma_{\theta\theta}$ et σ_{zz} . Cela se passe quand $\mu \approx \lambda$, d'après les équations dans la question 1.6. Cela implique que l'effort d'équilibre vaudrait $T \approx \pi a e \cdot \frac{a\Delta p}{e} = \pi a^2 \Delta p$.

On note $T = T_{\Delta p} + T_a = \pi a^2 \Delta p + T_a$ et on introduit les résultats trouvés ci-dessus dans le système d'équations de la question précédente.

$$\begin{cases} 2\rho_0 \left(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} \mu^2 \right) \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \right) = \frac{\lambda^2 \mu \Delta p}{\epsilon} \\ 2\rho_0 \left(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} \lambda^2 \right) \left(\mu^2 - \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \right) = \frac{T}{2\pi a e} = \frac{\lambda^2 \mu T_a}{2\lambda^2 \pi A^2 \epsilon} + \frac{\lambda^2 \mu \Delta p}{2\epsilon} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2\rho_0}{\lambda^2 \mu} \left(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} \mu^2 \right) \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \right) = \frac{\Delta p}{\epsilon} \\ \frac{2\rho_0}{\lambda^2 \mu^3} \left[\frac{\partial\psi}{\partial I_1} (2\mu^4 \lambda^2 - \mu^2 \lambda^4 - 1) + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} (\mu^4 \lambda^4 - 2\lambda^2 + \mu^2) \right] = \frac{T_a}{\pi A^2 \epsilon} \end{cases}$$

1.8 Analyse numérique du problème

- (a) La courbe $\mu(\lambda)$ nous indique que l'allongement de la partie gonflée du ballon est à peu près proportionnel au grossissement du diamètre (pente affine). La partie constante que l'on trouve

vers $\lambda = 1$ indique que le ballon a une tendance à se gonfler par son rayon plutôt que par le gonflement d'une longueur plus grande de ballon, du moins dans la phase initiale du gonflage.

Étudier le gonflement du ballon revient donc approximativement à étudier l'élargissement d'une section du ballon.

Pour toutes les lois, on retrouve les deux premières étapes décrites dans l'introduction : d'abord la pente de $\Delta p(V/V_{ini})$ est forte, c'est-à-dire qu'il faut appliquer un fort différentiel de pression pour obtenir un faible accroissement du volume du ballon (un faible gonflage donc).

Ensuite, la pente devient négative, il faut donc appliquer de moins en moins de différentiel de pression pour obtenir un gonflement supérieur.

Enfin, les lois de Gent et la loi de Langevin confirment l'observation faite pour la dernière étape, il devient plus dur de gonfler le ballon une fois qu'on atteint un λ important. Il paraît logique d'avoir une divergence du différentiel de pression vu qu'un gonflement infini du ballon n'est pas possible (explosion), en revanche, la loi néo-hookienne ne prévoit pas ce comportement. On retrouve ces observations sur $\Delta p(\lambda)$.

- (b) En pratique, on observe bien ce comportement lors du gonflement du ballon. Il est difficile de le gonfler dans un premier temps, puis le gonflement devient plus aisé, enfin il est quasiment impossible de le gonfler démesurément.
- (c) La loi néo-hookienne paraît impossible à admettre pour des gonflements importants puisqu'elle ne prévoit pas la divergence des fonctions lorsque λ devient grand. Elle reste cependant valable pour de très petits gonflements.

Les deux autres lois sont quasi-identiques en comportement, elles diffèrent seulement dans les valeurs, les valeurs de la loi de Gent étant supérieures à celle de la loi de Langevin.

- (d) L'intérêt de tirer sur le ballon permet de changer le comportement décrit au début de l'item a. En effet, lorsqu'on tire sur le bout du ballon, il acquiert une propension à augmenter la zone "gonflée" (μ plus important) plutôt que d'augmenter son rayon : il absorbe l'air ajouté en augmentant la zone gonflée plutôt qu'en augmentant le rayon de la zone déjà gonflée.

Cette action a pour effet de garder λ proche de 1 lors du gonflement puisque l'air ajouté est réparti en longueur dans le ballon (par le biais de μ), le différentiel de pression à appliquer reste donc faible et le différentiel de pression reste petit, le ballon est donc plus facile à gonfler. On change ainsi le comportement "naturel" du ballon en tirant sur ces fibres de façon orthogonale à la force qu'applique le différentiel de pression sur la partie gonflée du ballon, et ce nouveau comportement rend le gonflement plus facile.

2 Analyse des essais de Treloar

2.1 Hypothèses et loi de comportement

Il faut vérifier les conditions suivantes :

- Matériau élastique isotrope (ce qui donne une dépendance entre I_1 , I_2 , I_3 et T grâce à l'énergie libre, qui a une forme $\psi(\underline{X}, T, I_1, I_2, I_3)$)
- Matériau homogène (la loi ne dépend pas du point \underline{X})
- Isochorie ($I_3 = J^2 = 1$)
- Temperature constante

Avec ces hypothèses l'énergie libre, qui caractérise la loi de comportement d'un matériau élastique, est écrit $\psi(I_1, I_2)$

2.2 Calcul du tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$

Le matériau est incompressible donc $\det(\underline{\underline{F}}) = 1$ or $\underline{\underline{F}} = \sum_i \lambda_i \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i$ d'où $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ donc

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_1}$$

2.3 Calcul des invariants I_1 et I_2

$$\underline{\underline{C}} = {}^t \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}} = \sum_i \lambda_i^2 \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i$$

$$I_1 = \text{tr}(\underline{\underline{C}}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_2^2 \lambda_1^2} = I_1$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr}(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}})) = \frac{1}{2}(2\lambda_1^2 \lambda_2^2 + 2\lambda_2^2 \lambda_3^2 + 2\lambda_1^2 \lambda_3^2) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} = I_2$$

2.4 Calcul des tenseurs de contraintes de Piola $\underline{\underline{S}}$ et de Cauchy $\underline{\underline{\sigma}}$

- Calcul de $\underline{\underline{S}}$

$$\underline{\underline{S}} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{e}}}$$

On a

$$\frac{\partial \psi}{\partial \underline{\underline{e}}} = \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{e}}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{e}}}$$

$$I_1 = 2\text{Tr}(\underline{\underline{e}}) + 3 \Rightarrow \frac{\partial I_1}{\partial \underline{\underline{e}}} = 2\underline{\underline{1}} \quad I_2 = 3 + 4\text{Tr}(\underline{\underline{e}}) + 2\left(\text{Tr}^2(\underline{\underline{e}}) - \text{Tr}(\underline{\underline{e}}^2)\right) \Rightarrow \frac{\partial I_2}{\partial \underline{\underline{e}}} = 2I_1 \underline{\underline{1}} - 2\underline{\underline{C}}$$

Et

$$\varphi = \det(\underline{\underline{C}}) - 1 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{e}}} = 2\underline{\underline{C}}^{-1}$$

$$\text{Donc } \underline{\underline{S}} = 2\rho_0 \left[\frac{\partial \psi}{\partial I_1} \underline{\underline{1}} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} (I_1 \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{C}}) \right] + 2\eta \underline{\underline{C}}$$

- **Calcul de $\underline{\underline{\sigma}}$** D'après la formule $\underline{\underline{\sigma}} = J^{-1} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot {}^t \underline{\underline{F}}$ on trouve :

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2\rho_0 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \underline{\underline{B}} - \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{B}} \right] + 2\eta \underline{\underline{1}}$$

2.5 Equilibre et contraintes nominales

On doit satisfaire les conditions suivantes :

- $\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}} \Leftrightarrow \eta$ est une constante
- Sur la face supérieure S_1 on a par hypothèse $\underline{\underline{R}}_1 = \int_{S_1} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_1$ ce qui donne $\underline{\underline{R}}_1 = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_1 \lambda_2 L_0 \lambda_3 e_0$ et

$$\text{donc } \frac{\|\underline{\underline{R}}_1\|}{L_0 e_0} = \frac{\|\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_1\|}{\lambda_1}$$

- De la même manière sur la face latérale on trouve : $\frac{\|\underline{\underline{R}}_2\|}{H_0 e_0} = \frac{\|\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_2\|}{\lambda_2}$
- $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_3 = \underline{\underline{0}} \Leftrightarrow \eta = -\rho \left[\frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right]$

En remplaçant la valeur de η on trouve :

$$\begin{aligned} |\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_1| &= 2\rho_0 \lambda_1^2 \left[\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \left(\lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \right] - 2\rho_0 \left[\frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right] \\ &= 2\rho_0 \left[\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \lambda_2^2 \right] \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \end{aligned}$$

$$t_1 = \frac{\|\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_1\|}{\lambda_1} = 2 \frac{\rho_0}{\lambda_1} \left[\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \lambda_2^2 \right] \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right)$$

Et de la même manière :

$$t_2 = \frac{\|\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{e}}_2\|}{\lambda_2} = 2 \frac{\rho_0}{\lambda_2} \left[\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \lambda_1^2 \right] \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right)$$

2.6 Les trois essais

2.6.1 Traction simple

Nous avons $\underline{\underline{R}}_2 = \underline{\underline{0}}$, donc $t_2 = 0$ et du fait que $\frac{\partial \psi}{\partial I_1}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial I_2}$ soient positifs on obtient :

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \quad \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \quad t_1 = 2 \frac{\rho_0}{\lambda_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1} \right)$$

2.6.2 Traction plane

$$\lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1} \quad t_1 = 2 \frac{\rho_0}{\lambda_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \right) \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1} \right) \quad t_2 = 2\rho_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \lambda_1^2 \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_1^2} \right)$$

2.6.3 Traction équibiaxiale

$$\boxed{\lambda_2 = \lambda_1} \quad \boxed{\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1^2}} \quad \boxed{t_1 = t_2 = 2\frac{\rho_0}{\lambda_1} \left(\frac{\partial\psi}{\partial I_1} + \frac{\partial\psi}{\partial I_2} \lambda_1^2 \right) \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^4} \right)}$$

2.7 Graphiques

2.7.1 Traction simple

Dans ce cas, $I_1 = \lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1}$ et $I_2 = 2\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1^2}$

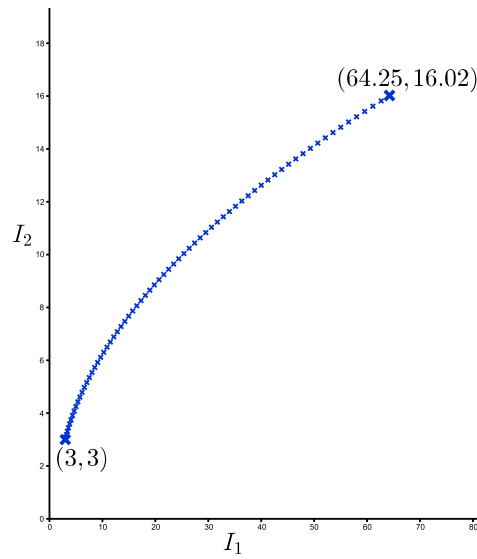


FIGURE 1 – Traction simple

2.7.2 Traction plane

$I_1 = \lambda_1^2 + 1 + \frac{1}{\lambda_1^2}$ et $I_2 = I_1$

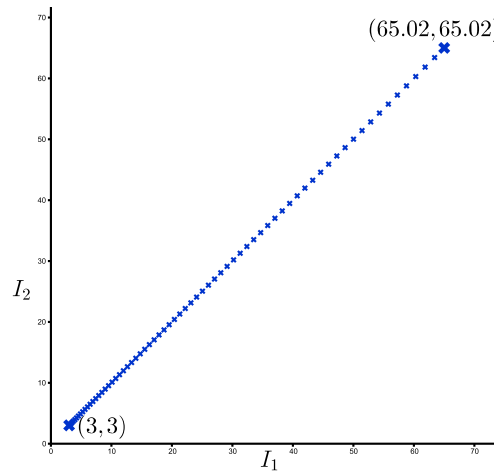


FIGURE 2 – Traction plane

2.7.3 Traction équi biaxiale

$$I_1 = 2\lambda_1^2 + \frac{1}{\lambda_1^4} \text{ et } I_2 = \lambda_1^4 + \frac{2}{\lambda_1^2}$$

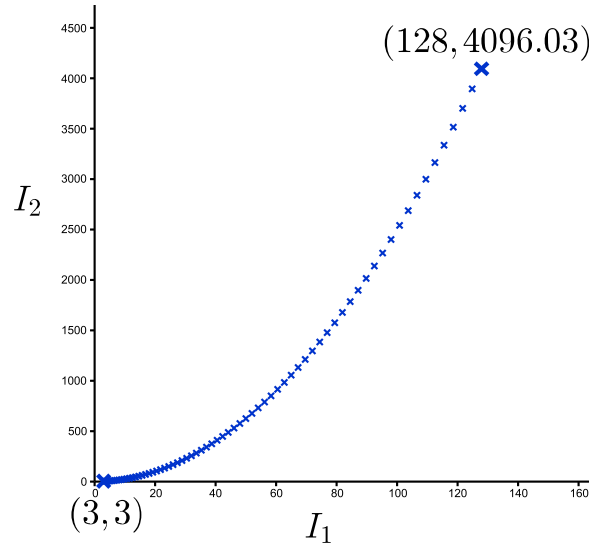


FIGURE 3 – Traction équi biaxiale

3 Identification des paramètres de lois NH et de Langevin

Dans cet exercice, on considère une loi de comportement uniquement caractérisée par le premier invariant : $\psi = \psi(I_1)$.

3.1 Discussion sur les trois essais

Dans cette condition, les trois essais nous fournissent les moyens nécessaires pour identifier la forme de la fonction $\frac{\partial \psi}{\partial I_1}(I_1)$ par la mesure des quantités t_1, t_2, λ_1 . L'essai "traction plane" nous permet de calculer $\frac{\partial \psi}{\partial I_1}$ de deux façons indépendantes, c'est-à-dire à partir de t_1 ou bien de t_2 . Toutefois, si l'on ne dispose pas de l'information sur t_2 , les trois essais sont théoriquement équivalents, étant donné que l'on peut mesurer les quantités λ_1 et t_1 avec une très bonne précision.

3.2 Traction Simple

Les équations utilisées pour calculer la quantité $\frac{\partial \psi}{\partial I_1}(I_1(\lambda_1))$ en fonction de λ_1 supposant $\psi = \psi(I_1)$ sont, d'après le dernier exercice :

$$(TS) \quad \begin{cases} 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} = \frac{t_1 \lambda_1^2}{\lambda^3 - 1} \\ I_1 = \lambda_1^2 + \frac{2}{\lambda_1} \end{cases}$$

$$(TP) \quad \begin{cases} 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} = \frac{t_1 \lambda_1^3}{\lambda^4 - 1} \\ I_1 = \lambda_1^2 + 1 + \frac{1}{\lambda_1^2} \end{cases}$$

$$(TEB) \quad \begin{cases} 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} = \frac{t_1 \lambda_1^5}{\lambda^6 - 1} \\ I_1 = 2\lambda_1^2 + \frac{1}{\lambda_1^4} \end{cases}$$

La figure 4 contient le graphe paramétrique des relations (TS).

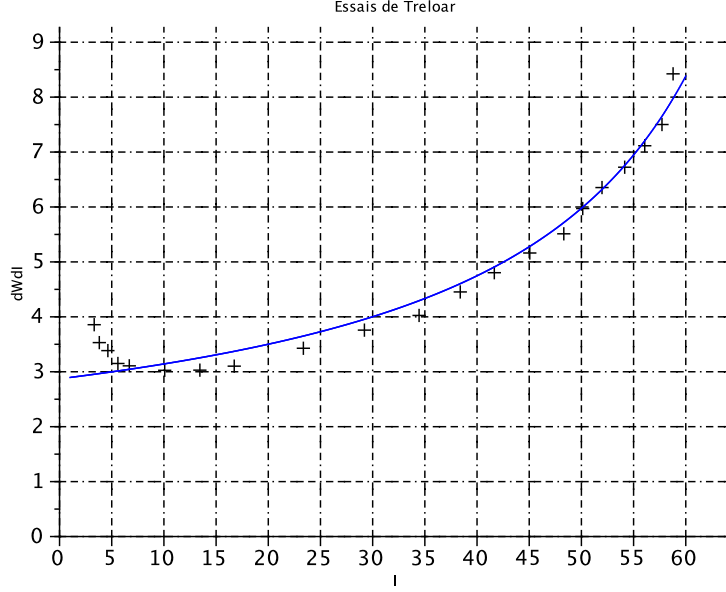


FIGURE 4 – Graphe de $2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1}$ en fonction de I_1 pour l'essai de Traction simple. La courbe bleue représente la fonction de Langevin avec les paramètres optimaux trouvés dans la question 3 : $C_L = 0.957$ et $N_L = 26.9$.

3.3 Lois NH et de Langevin

La figure 4 nous indique que les fonctions ψ ont une forte dépendance par rapport premier invariant, surtout quand il dépasse la valeur de $I_1 = 40$. SCILAB nous fournit les outils de régression linéaire et non-linéaire nécessaires pour trouver les paramètres optimaux C_{NH} , C_L et N_L dans la régression $2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} = C_{NH}$ (NH) ou $2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} = C_L \frac{9N_L - I_1}{3N_L - I_1}$ (Langevin) (code ci-joint). Les résultats trouvés sont $C_{NH} = 4.73$ et $(C_L, N_L) = (0.957, 26.9)$. Évidemment, pour les grandes valeurs de I_1 , on a intérêt à utiliser la loi de Langevin, plus appropriée qu'une constante néo-hookéenne dans le domaine d'application de grandes déformations. Pour petites valeurs de I_1 , la constante optimale devient $C_{NH} \approx 3.5$.

3.4 TP et TEB - simple dépendance en premier invariant

On voit dans la figure 5 que la loi de Langevin décrit bien les essais TS et TP. Cependant, l'essai TEB s'écarte des deux autres courbes. On observe que, dans les équations décrivant t_1 dans la question 2.6, pour les grandes valeurs de λ_1 , on néglige de plus en plus la dépendance de ψ par rapport à I_2 dans l'essai TS. Dans l'essai TP, la valeur de $\frac{\partial \psi}{\partial I_2}$ est déjà pris en compte dans le calcul de $\frac{\partial \psi}{\partial I_1}$. En plus, dans cet essai $I_1 = I_2$. Par contre, dans l'essai TEB, l'écart entre $\frac{\partial \psi}{\partial I_2}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial I_1}$ croît avec λ_1^2 , ce qui explique sa courbe dans la figure 5.

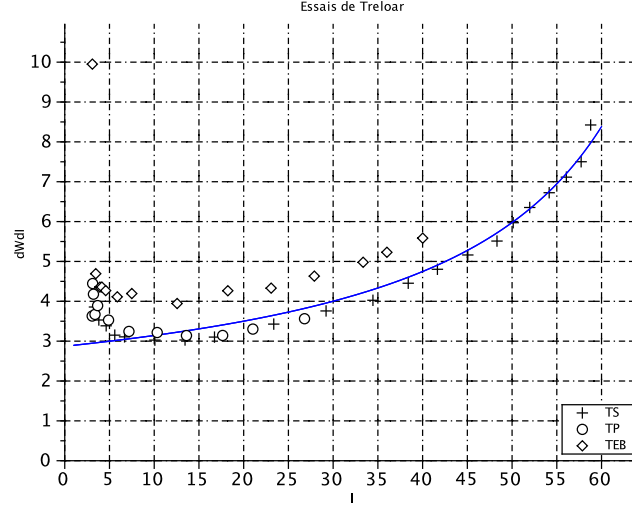


FIGURE 5 – Graphe de $2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1}$ en fonction de I_1 pour tous les essais. La courbe bleue représente la fonction de Langevin avec les paramètres optimaux trouvés dans la question 3 : $C_L = 0.957$ et $N_L = 26.9$.

4 Développement d'une loi à deux invariants

Désormais on rajoute un deuxième terme à la loi de Langevin décrite ci-dessus : $\psi(\underline{e}) = \psi_1(I_1) + \psi_2(I_2)$, avec $\frac{\partial \psi}{\partial I_1} = C_L \frac{9N_L - I_1}{3N_L - I_1}$, où les constantes sont celles de la figure 5. Il s'agit encore d'une simplification, car on néglige les termes croisés $I_1 I_2$ ou supérieurs.

4.1 Dépendence du modèle en deuxième invariant

On isole $2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2}$ dans les équations de la question 2.6 en fonction de t_1 et λ_1 . Le résultat est tracé dans les figures 6 à 8.

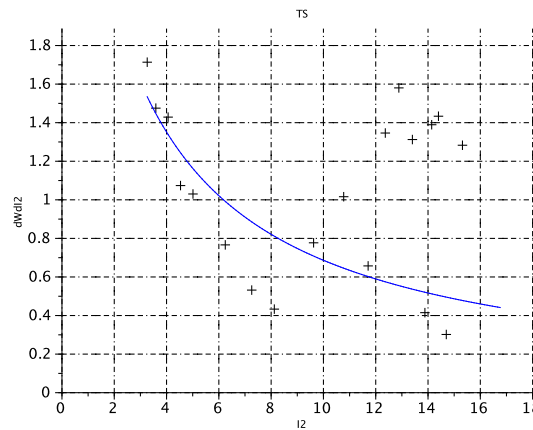


FIGURE 6 – Graphe de $2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2}$ en fonction de I_2 pour l'essai de Traction simple. La courbe bleue représente la régression non-linéaire des données par rapport à une fonction de la forme $A/(I_2 - B)$: $A = 8.37$, $B = -2.19$.

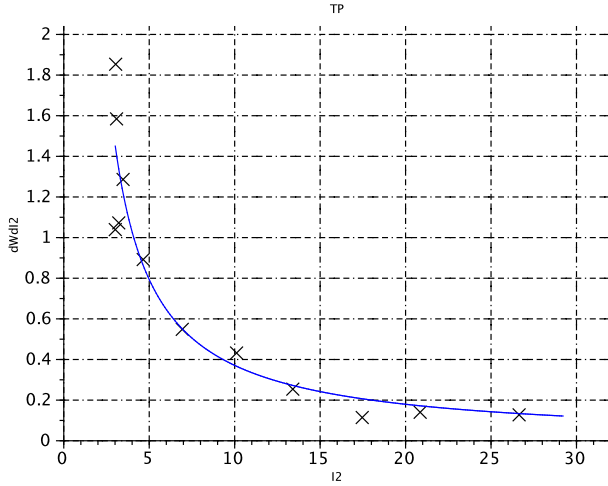


FIGURE 7 – Graphe de $2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2}$ en fonction de I_2 pour l'essai de Traction plane. La courbe bleue représente la régression non-linéaire des données par rapport à une fonction de la forme $A/(I_2 - B)$: $A = 3.48, B = -0.612$.

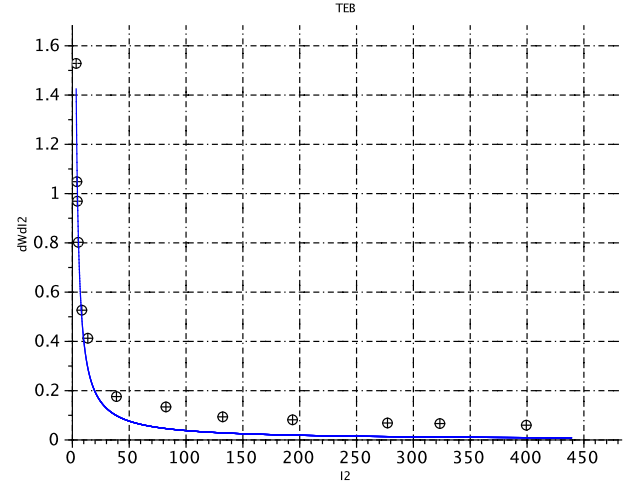


FIGURE 8 – Graphe de $2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2}$ en fonction de I_2 pour l'essai de Traction équi-biaxiale. La courbe bleue représente la régression non-linéaire des données par rapport à une fonction de la forme $A/(I_2 - B)$: $A = 3.77, B = -0.691$.

4.2 Expression du modèle en fonction du deuxième invariant

Puisqu'on observe une asymptote en $2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \rightarrow 0$ et en $I_2 \rightarrow 0$, on choisit une fonction hyperbolique pour la méthode de régression non-linéaire. Ainsi, $2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} = \frac{A}{I_2 - B}$ est une fonction candidate. Ici, on négligera la régression trouvée dans l'essai de traction simple, parce que l'ensemble de points ne suit pas une fonction déterminée. On a donc avec une fonction hyperbolique qui prévoit bien l'essai de traction plane, mais dont le comportement est moins adéquat lors de l'essai de traction équi-biaxiale pour valeurs de λ_1 importantes. Ainsi, pour la suite, on prendra comme référence la régression trouvée dans l'essai de TP, c'est-à-dire, $A = 3.48, B = -0.612$.

4.3 Prévision du modèle enrichi

Dans la figure 9, on voit que le modèle prévoit correctement les essais TS et TP. Cependant, on reste toujours avec l'écart entre le modèle et les données réelles pour l'essai TEB à cause du fait que l'on n'a pas réussi à trouver une fonction décrivant aussi bien les phénomènes en TP et TEB.

Il faut reconnaître que même avec cette simplification, on réussit à modéliser les phénomènes en petites déformations ($\lambda_1 < 2$).

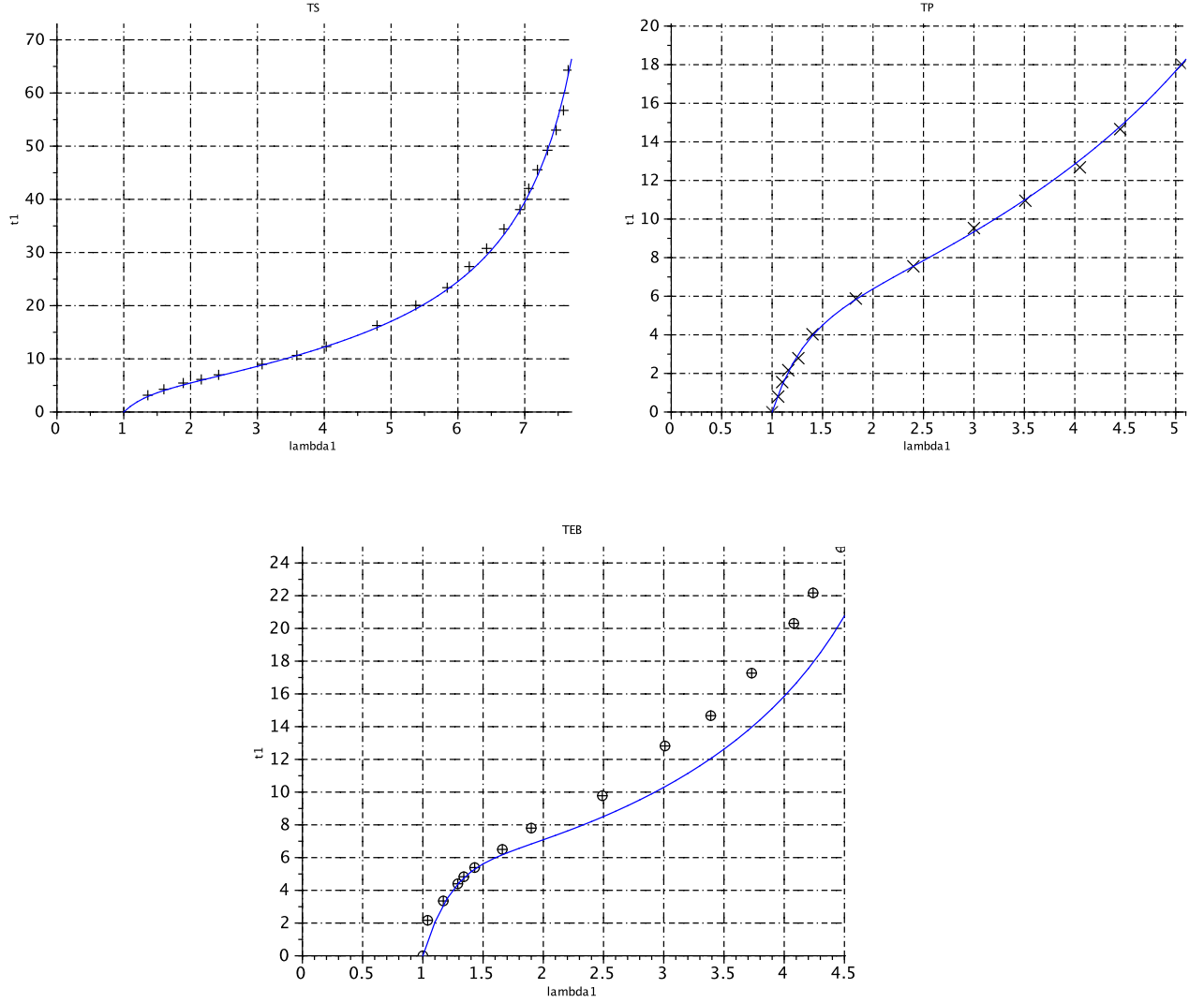


FIGURE 9 – Comparaison entre le modèle de Langevin enrichi et les données réelles pour l'essai TS, TP et TEB.

5 Discussion

5.1 Décomposition d'une transformation isochore

Pour un matériau incompressible, on a $\det(\underline{\underline{F}}) = 1$. Or on peut décomposer $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}}$ où :

$\underline{\underline{R}}$ est une rotation qui transforme $(\underline{e}'_i)_i$ en $(\underline{e}''_i)_i$; $\underline{\underline{U}} = \sum_i \lambda_i \underline{e}'_i \otimes \underline{e}'_i$

On a donc :

$$\begin{aligned} \det(\underline{\underline{F}}) &= \overbrace{\det(\underline{\underline{R}})}^{=1} \cdot \det(\underline{\underline{U}}) \\ &= \det(\underline{\underline{U}}) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \end{aligned}$$

Soit : $\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_2 \lambda_1}$ or localement, les λ_i sont des constantes donc, par bijection de la fonction $x \mapsto x^\alpha$, on peut exprimer λ_2 en fonction de $\lambda_1 = \lambda$ soit : $\lambda_2 = \lambda^\alpha$.

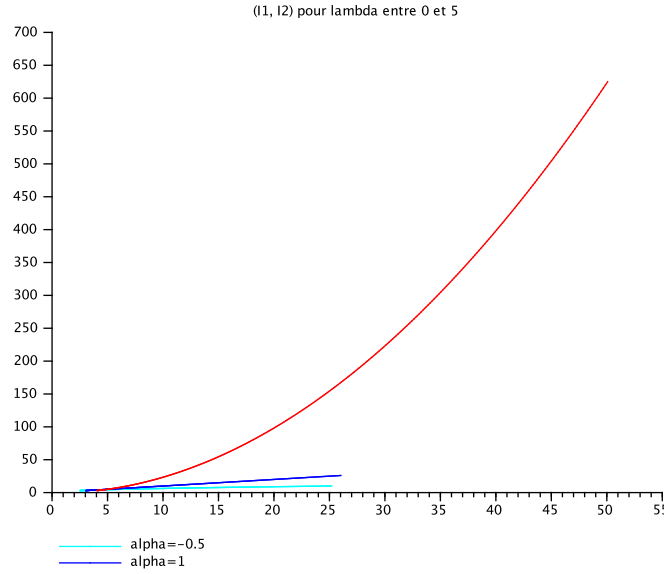
On a donc : $\underline{\underline{U}} = \lambda \underline{e'_1} \otimes \underline{e'_1} + \lambda^\alpha \underline{e'_2} \otimes \underline{e'_2} + \frac{1}{\lambda \lambda^\alpha} \underline{e'_3} \otimes \underline{e'_3}$ De plus : pourquoi $\lambda > 1$ $\underline{\underline{R}}$ étant la rotation qui transforme la base e' en e'' , on a bien :

$$\underline{\underline{F}} = \lambda \underline{e''_1} \otimes \underline{e'_1} + \lambda^\alpha \underline{e''_2} \otimes \underline{e'_2} + \lambda^{-(\alpha+1)} \underline{e''_3} \otimes \underline{e'_3} \quad (C)$$

On a : $\underline{\underline{C}} = {}^t \underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}} = {}^t \underline{\underline{U}} \underline{\underline{U}}$ car $\underline{\underline{R}}$ est une rotation. Par un calcul simple, on obtient :

$$I_1 = \lambda^2 + \lambda^{2\alpha} + \lambda^{-2(\alpha+1)}$$

$$I_2 = \lambda^{-2} + \lambda^{2(\alpha+1)} + \lambda^{-2\alpha}$$



D'après cette figure, le domaine atteignable est l'ensemble des points entre la courbe rouge et la courbe bleu ciel.

5.2 Comparaison avec la question 2.6 :

On a donc :

- Traction simple : D'après la figure 1 : $\alpha = -0.5$
- Traction plane : D'après la figure 2 : $\alpha = 0$
- Traction équi biaxiale : D'après la figure 3 : $\alpha = 1$

Par le tracé précédent, on a donc représenté tout les cas présentés dans la question 2.

On couvre donc l'ensemble des valeurs possibles. Cependant, il manque une ou deux valeurs entre $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ pour avoir le comportement dans cette zone.

5.3 Résolution pour les trois lois trouvées

En résolvant le système avec les paramètres optimisés et la loi optimisée trouvées à la partie 3 et 4 on obtient les solutions suivantes :

Points remarquables de la courbe $\Delta p(\lambda)$:

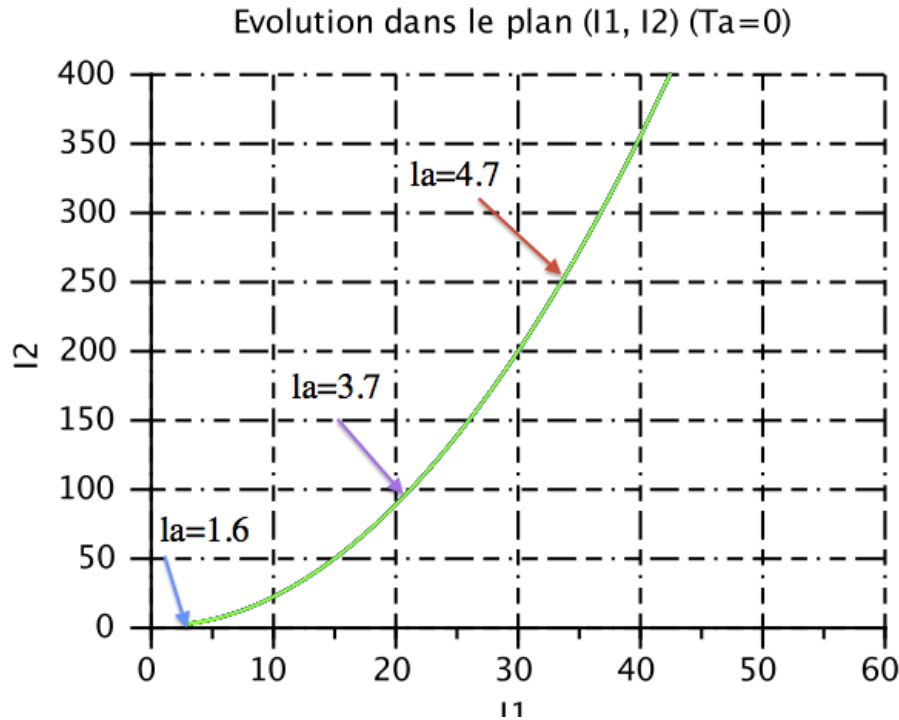
Loi NH 1. $\lambda = 1.6$ maximum local, $\Delta p = 0.118$, en bleu

Loi Langevin 1. $\lambda = 1.6$ maximum local, $\Delta p = 0.039$

2. $\lambda = 3.7$ minimum local, $\Delta p = 0.027$, en violet

Loi Langevin Enrichie 1. $\lambda = 1.6$ maximum local, $\Delta p = 0.075$

2. $\lambda = 4.7$ minimum local, $\Delta p = 0.042$, en rouge



5.4 Cas T_a non-nul

On observe un décalage des points vers la droite et vers le haut : λ et Δp plus grands.

5.5 Conclusion

Par l'utilisation des paramètres identifiés :

- Les valeurs de lambda n'ont pas changés
- La valeur de Δp pour la loi NH a augmenté alors que celle pour la loi de Langevin est restée la même
- On observe la même chose sur les courbes $\Delta p(V/V_{ini})$

Lorsque T_a est non-nul, on observe un resserrement des courbes pour la loi NH mais pas pour la loi de Langevin. Avec ces nouveaux coefficients, l'effet de la traction sur la facilité du gonflage devient moindre en considérant les lois de Langevin améliorée et la loi NH. L'absence de changements pour la loi de Langevin est due au fait que la constante choisie est proche de celle proposée à la partie 1.

Comme dans la partie 1, on voit que la loi NH ne diverge pas pour des gonflements importants. Cela pose le problème déjà évoqué dans la première partie. La loi de Langevin prévoit une divergence du différentiel de pression pour $\lambda = 6$ alors que la loi enrichie prévoit une divergence en $\lambda = 7$. Cependant, la loi enrichie permet d'expliquer la phase où le gonflage du ballon est facile puisque la courbe est fortement décroissante après $\lambda \approx 2$.

Par le même raisonnement que dans la partie 1, on déduit que la loi enrichie met en avant le fait que tirer sur le ballon facilite le gonflage. En effet, les valeurs de μ pour $\lambda = 1$ sont plus faibles, le gonflage est donc plus dur relativement aux prévisions de la loi de Langevin.

Pour le départ du gonflage : la loi NH et de Langevin enrichie prévoient bien une forte difficulté du gonflage alors que la loi de Langevin ne le prévoit pas (3 fois moins de difficulté que la loi NH par exemple). Pour la suite, où le gonflage est plus facile, la loi NH et de Langevin enrichie prévoient toutes deux la facilité observée. Enfin, lorsque le ballon commence à être très gonflé, les lois Langevin et de Langevin enrichie prévoient toutes deux la divergence du différentiel de pression ce qui correspond mieux à la réalité. En conclusion, on peut faire confiance à la loi de Langevin enrichie sur tout le domaine, au moins en terme de comportement. Puisque la courbe (I_1, I_2) du gonflage s'approche mieux à celle de l'essai TEB (figure 3), d'après la figure 9, on voit que l'on ne peut pas faire confiance aux valeurs précises de Δp à partir de $I_1 > 8$, c'est-à-dire à partir de $\lambda \approx 2.5$.

Les sollicitations pour les essais en traction simple, plane et équi-biaxiale sont respectivement de 8, 5 et 4.5 or on a représenté les courbes de gonflage pour $\lambda \in [1, 7]$. Cependant, dans l'essai de la traction simple la régression linéaire n'a pas donnée de résultat satisfaisant et donc doit être écarté. De fait, on doit se limiter à $\lambda = 5$, d'où les courbes représentées sont surement très approximatives pour des valeurs de λ supérieures à 6.

On pourrait proposer un essai de traction qui respecte la géométrie du problème. En effet, on peut imaginer un test semblable au test de traction équi-biaxiale mais en géométrie cylindrique : un anneau attaché au ballon qui changerait de diamètre.