Logica de primer orden: Calculo

Prof. Ernesto Rodriguez

Universidad del Itsmo

erodriguez@unis.edu.gt

Motivación

- Solamente hemos estudiado que significa que una expresión es cierta.
- No tenemos herramientas para encotrar una demostración que dicha expresión es cierta.
- Existen varias de encontrar demostraciones.
- En esta clase estudiaremos un *calculo sequencial* para ello.
- La belleza de la lógica no solamente es que podemos determinar si algo es verdad o no, sino que tambien podemos encontrar una demostración (si existe).
- El calculo que se presentara en esta clase es un *calculo completo*

Ejemplo: Demostración por contradicción.

1. Queremos demostrar que φ es verdad.
2. Assumir premisas $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ cuya consequencia es φ
3. Ahora asumir que φ es falso $\neg\varphi$
4. Encontrar una expressión ψ que pueda demostrarse cierta y falsa.

$$\frac{\begin{matrix}\varphi_1 \ldots \varphi_n \; \neg\varphi \; \psi \\ \varphi_1 \ldots \varphi_n \; \neg\varphi \; \neg\psi\end{matrix}}{\varphi_1 \ldots \varphi_n \; \varphi}$$

Abreviación

Es possible abreviar una secuencia (posiblemente vacia) de suposiciones como Γ.

$$\frac{\begin{array}{l}\Gamma\ \neg\varphi\ \psi\\ \Gamma\ \neg\varphi\ \neg\psi\end{array}}{\Gamma\ \varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\begin{array}{l}\varphi_1\ldots\varphi_n\ \neg\varphi\ \psi\\ \varphi_1\ldots\varphi_n\ \neg\varphi\ \neg\psi\end{array}}{\varphi_1\ldots\varphi_n\ \varphi}$$

Regla del Antecedente

$$\frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma' \; \varphi} \ \texttt{si} \ \ \Gamma \subset \Gamma'$$

- Dice que si asumimos más cosas, no podemos probar menos cosas

Regla de la premisa

$$\frac{}{\Gamma \ \varphi} \ \texttt{if} \ \ \varphi \in \Gamma$$

- Simplemnte dice que si asumimos φ, podemos probar φ

Separación de casos

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \psi & \varphi \\ \Gamma & \neg\psi & \varphi \\ \hline \Gamma & & \varphi \end{array}$$

- La expresión φ es consequencia de Γ existe una formula ψ tal que φ es consequencia de $\Gamma \cup \psi$ y $\Gamma \cup \neg\psi$

Contradicción

$$\frac{\begin{array}{ll}\Gamma & \psi \\ \Gamma & \neg\psi\end{array}}{\begin{array}{ll}\Gamma & \varphi\end{array}} \quad \forall\varphi$$

- El conjunto de premisas es inconsistente ya pue se puede demostrar ψ y $\neg\psi$ con el.
- A partir de un conjunto de premisas inconsistente, se puede demostrar cualquier cosa.

Introducción de $\vee$ en el antecedente

$$\frac{\begin{array}{lll}\Gamma & \varphi & \xi \\ \Gamma & \psi & \xi\end{array}}{\begin{array}{lll}\Gamma & \varphi \vee \psi & \xi\end{array}}$$

- Esta regla dice que si podemos demostrar ξ utilizando Γ y φ o utilizando Γ y ψ, tambien lo podemos demostrar utilizando Γ y $\varphi \vee \psi$

Introducción de $\vee$ en la conclusión

$$\frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad \psi \vee \varphi}$$

- Si podemos probar ψ, tambien podemos probar $\psi \vee \varphi$

Introducción de $\exists$ en la conclusión

$$\frac{\Gamma \quad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad \exists x \varphi}$$

- Dadas las premisas Γ
- Si encontramos un termino, el cula resulta cierto al substituirlo por la variable libre x en una expression φ, demostramos la existencia de dicho x.

Introducción de $\exists$ en las premisas

$$\frac{\Gamma \quad \varphi^{t}_{x} \qquad \psi}{\Gamma \quad \exists x \varphi \quad \psi}$$

- Si asumimos Γ
- La expressión ψ es verdadera al reemplazar la variable x con un ejemplo particular t en la expressión φ.
- Se puede concluir que ψ tambien es verdadero con la expressión $\exists x \varphi$

Reflexividad de $(=)$

$$\frac{}{t = t}$$

- Todo valor es igual a si mismo.

Substitución por igualdad

$$\frac{\Gamma \qquad\qquad \varphi}{\Gamma \quad x = t \quad \varphi\frac{t}{x}}$$

- Si un termino se substituye por un termino equivalente, la expresión no pierde su validez

Observaciones

- Esta es la lista completa del calculo para derivar expressiones.
- Utilizando estas reglas, se pueden derivar reglas nuevas.
- A pesar que las expressiones hablan sobre objetos reales y semantica, estas derivaciones son puramente sintacticas.
- Una computadora (con suficiente tiempo), podria aplicar estas reglas en toda permutación possible y eventualmente probar o rechazar cualquier expressión de logica de primer orden.
- A partir de la manipulación de simbolos, podemos enconrar conocimiento del mundo real.

Ejemplo

Derivación de la regla *cadena*:

$$\frac{\begin{array}{ccc}\Gamma & & \psi \\ \Gamma & \varphi & \psi\end{array}}{\begin{array}{ccc}\Gamma & & \psi\end{array}}$$

Referencias