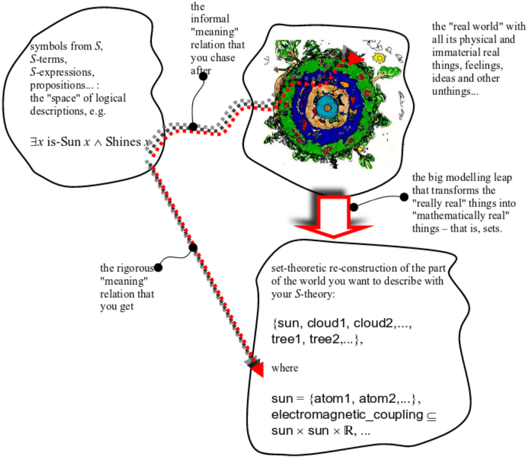
Logica de primer orden: Semantica

Prof. Ernesto Rodriguez

Universidad del Itsmo

erodriguez@unis.edu.gt

El Triangulo de la Semantica



Imagne obtenida de [1]

Semantica de la Lógica de Primer Orden

- El proposito de la lógica es responder preguntas sobre algún dominio
- Generalmente, ese dominio pertenece al mundo real, con todos sus objetos materiales, immateriales, sentimientos, ect.
- Sin embargo, la lógica esta limitada a objetos que pueden existir en un pedazo de papel
- Por eso mismo, utiliza los conjuntos como sus objetos
- Debido a que el "mundo real" no esta hecho de conjuntos (abierto a discusión filosofica), necesitamos modelar nuestro *dominio de interes* mediante conjuntos
- A este *dominio de interes* se le conoce como la *Estructura-S*

La Estructura-S

Estructura-S: Un conjunto que contiene todos los objetos con los que trabaja una lógica de primer orden. Formalemente, para un conjunto S de simbolos constantes, predicados y funciones, se define una *Estructura-S* (denotada como $\mathcal{A}$) es un conjunto A (llamado el transportador de $\mathcal{A}$) con las siguientes caracteristicas:

- Por cada simbolo constante $c \in S$, existe un elemento en $c^{\mathcal{A}} \in A$
- Por cada predicado unitario $\mathtt{P} \in S$, existe un conjunto $\mathtt{P}^{\mathcal{A}} \subset A$
- Por cada predicado binario $\mathtt{R} \in S$, existe un conjunto $\mathtt{R}^{\mathcal{A}} \in A \otimes A$
- Una funcion binaria $f \int S$ es una funcion cuyo dominio y rango pertenecen a A. Se puede definir como $f^{\mathcal{A}} := \{(x, y) | f(x) = y\}$.
- Los predicados y funciones de mayor aridad se definien de forma similar.

La Estructura-S

A menudo, los ingredientes de una *Estructura-S* $\mathcal{A}$ se colocan en una tupla. Por ejemplo:

- Si nuestro conjunto S de simbolos contiene $\{+, 0, 1\}$, podemos escribir $\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}})$
- El el conjunto S de numeros naturales ordenados $\{+, <, 0, 1\}$ se escribe $\mathcal{A} := (\mathbb{N}, +^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}})$

Observaciones

- La lógica de primer orden (y las lógica en general) obligan que uno describa su contenido antes de utilizarse.
- Si uno desea extender el dominio de una lógica, uno debe definir nueva mente la *Estructura-S*.
- En algúnos casos, se puede extneder el vocabulario definiendo nuevos simbolos mediante la lógica misma. Por ejemplo:
  $\forall x \; 2 = x \Leftrightarrow x = 1 + 1$
- Puede succeder que la lógica no sea una buena herramienta para describir procesos que ocurren a traves del tiempo. Por ejemplo, la evolución, donde nuevas especies aparecen y viejas especies de-aparecen.
- Existe la logica *lineal-temporal* que permite describir procesos que ocurren a traves del tiempo.

Interpretaciones

- Una interpretación $\mathcal{I}$ es una pareja $(\mathcal{A}, \beta)$ donde $\mathcal{A}$ es una *Estructura-S* y β es una asignación de variables.
- Una asignación de variables es un diccionario que para toda variable x,y,z, etc. define un objeto $c \in A$ al cual apunta la variable.

Re-asignación de Variables

Dada una asignación de variables β se define la re-asignación de variables $\beta\frac{a}{x}$ como una asignación que actua igual a β excepto en el caso de x, a la cual se le asigna el valor a:

$$\beta\frac{a}{x}(y) = \begin{cases} a & \text{if } y = x \\ \beta(y) & \texttt{otherwise} \end{cases}$$

Dado $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$, también se define $\mathcal{I}\frac{a}{x}$ como $(\mathcal{A}, \beta\frac{a}{x})$

S

Interpretación de Expressiones

Ahora, dada una expression y una interpretación $\mathcal{I} := (\mathcal{A}, \beta)$, podemos interpretarla de la siguiente manera:

- Para toda variable x, $\mathcal{I}(x) = \beta(x)$
- Dada una constante $\mathsf{c} \in S$, $\mathcal{I}(\mathsf{c}) = \mathsf{c}^{\mathcal{A}}$
- Dado f y las expressiones $x_1, \ldots, x_n$:
  $\mathcal{I}(f x_1, \ldots, x_n) = f^{\mathcal{A}}(\mathcal{I}(x_1), \ldots \mathcal{I}(x_n))$

Relación de Modelado

Dada una interpretación $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ y una expression φ, podemos definir la *relacion de modelado* $\mathcal{I} \models \varphi$ (dicho $\mathcal{I}$ es un modelo de φ) como:

$\mathcal{I} \models t_0 = t_1$	si	$\mathcal{I}(t_1) = \mathcal{I}(t_2)$
$\mathcal{I} \models \mathrm{R}\ t_1, \ldots, t_n$	si	$\mathcal{I}(t_1) \otimes, \ldots, \otimes \mathcal{I}(t_n) \in \mathrm{R}^{\mathcal{A}}$
$\mathcal{I} \models \neg\varphi$	si no	$\mathcal{I} \models \varphi$
$\mathcal{I} \models \varphi \wedge \psi$	si	$\mathcal{I} \models \varphi$ and $\mathcal{I} \models \psi$
$\mathcal{I} \models \varphi \vee \psi$	si	$\mathcal{I} \models \varphi$ or $\mathcal{I} \models \psi$
$\mathcal{I} \models \forall x \varphi$	si	para todo $a \in A$, $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi$
$\mathcal{I} \models \exists x \varphi$	si	existe algún $a \in A$, $\mathcal{I}\frac{a}{x} \models \varphi$

Las reglas para $(\Leftarrow)$ y $(\Leftrightarrow)$ se pueden definir de la misma forma.

Relación de Modelado

- Una expresión φ solo puede ser cierta o mentira respecto a alguna interpretación $\mathcal{I}$
- Las interpretaciónes $\mathcal{I}$ nos permiten colocar objetos matematicos dentro de formulas logicas.
- La importancia de esta relación entre formulas y objetos sera más clara cuando estudiemos un calculo que nos permite trabajar on dichas formulas.

Vinculación

Relación de Vinculación: Dada una expresión φ y un conjunto ϕ, escribimos $\phi \models \varphi$ (dicho ϕ vincula a φ) si toda interpretación que es un modelo de ϕ (es decir que es un modelo para todo $\psi \in \phi$) tambien es un modelo de φ.

- La *Relacion de Vinculación* es en essencia una "verdad matematica" ya que dice que dada una serie de suposiciones (ϕ) poemos ver que φ es cierto.
- Una *Relacion de vinculación* simpre existe o no, sin importar si alguien ya lo demostro o no.

Formalidades

- Una expresión φ es una tautologia, si la vincula el conjunto vacio ($\emptyset \models \phi$). Ej. $\forall x \neg\neg x \Leftrightarrow x$
- Una expresión φ es *invalida* o una *contradicción* si no existe un conjunto ϕ tal que $\phi \models \varphi$
- Una expresión φ es satisfacible si existe alún ϕ tal que $\phi \models \varphi$
- Dos expresiones φ y ψ son equivalentes si $\varphi \models \psi$ y $\psi \models \varphi$, tambien escrito como $\varphi \Leftrightarrow \psi$

Referencias

Herbert Jaeger.
Lecture notes: Formal languages and logic.
http://minds.jacobs-university.de/sites/default/files/uploads/teaching/lectureNotes/LN_FLL.pdf.