Logica de primer orden

Prof. Ernesto Rodriguez

Universidad del Itsmo

erodriguez@unis.edu.gt

Motivación

- La logica es una de las herramientas más universales que hay para describir objetos formalmente. En nuestro caso, sistemas.
- Existen infinitas lógicas diferentes. Ejemplos:
    - Lógica de primer orden
    - Lógica de segundo orden
    - Lógica del 400^{avo} orden
    - Logica temporal lineal
    - Logica de Hoare
- La lógica nos permite traducir propiedades y hechos del mundo real a un lenguaje que entienden las computadoras.

Motivación

- La diferencia principal entre las logicas es su *expresividad* (más sobre eso despues).
- La *Logica de primer orden* ofrece un buen balance entre expresividad, practicalidad y simplicidad.
- La lógica de primer orden es una herramienta muy util en la inteligencia artificial. Sistemas expertos y bases de conocimiento como Watson y Cync son impulsadas por algúna variante de esta logica.

Ejemplo:

$$\forall h.\texttt{Humano}\ h \Rightarrow\ \texttt{Mortal}\ h$$

$$\forall x \forall y.(\texttt{Entero}\ x \land \texttt{Entero}\ y \land (\exists n.x = n + n) \land (\exists m.y = m + m)) \Rightarrow \exists q.x + y = q + q$$

Vocabulario

- La logica de primer orden en realidad es una familia de logicas.
- El vocabulario de la logica de primer orden viene de varios dominios. Ejemplo:
  - Si uno intenta describir numeros naturales, simbolos como: $+$, $-$, 0, ect.
  - Si uno intenta describir un sistema experto medico: `diagnostico`, `tratamiento`, ect.

Vocabulario

- Los simbolos que comparten *todas* las logicas de primer orden son:
  - **Variables:** $x_1, x_2, y, z, \ldots$
  - **Conectivos lógicos:** $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
  - **Cuantificadores:** $\forall$ y $\exists$
  - **La igualdad:** $=$
  - **parentesis:** (x)
- Los simbolos especificos de un domino se definen as:
  - Por cada numero n, un conjunto de simbolos de predicados con aridad n. Ej. `Mortal` x
  - Por cada numero n, un conjunto de simbolos de funciones con aridad n. Ej. *distancia* x y
  - Un conjunto de simbolos constantes. Ej. 0, 1

Observaciones

- El conjunto de simbolos en una logica de primer orden puede ser infinito, incluso de cardinalidad arbitraria! Ie. todos los numeros reales podrian ser un simbolo.
- Los simbolos de la logica de primer orden se dividen en tres tipos: funciones, predicados y constantes.
- Los simbolos de la lógica de primer orden tienen una propiedad llamada *aridad*.
- Los simbolos constantes denotan objetos especificos al dominio.
- Los predicados de aridad 1 denotan propiedades de objetos.
- Los predicados de aridad mayor a 1 denotan relaciones entre objetos.

Sintaxis: Terminos

Un *Termino* en logica de primer orden se define recursivamente com:

- Un simbolo constante es un *Termino*
- Una variable es un termino.
- Si $t_1 \ldots t_n$ son terminos y f es una función de aridad n, $f\ t_1 \ldots t_n$ es un termino.

Ejemplos, dado el conjunto de simbolos $S := \{\texttt{Alice}, \texttt{Bob}\}$ y la funcion *padre_de*:

- `Alice`
- *padre_de* `Alice`
- *padre_de padre_de* `Bob`

Sintaxis: Expressiones

Las expresiones de definen como:

- Dados los terminos t_0 y t_1, $t_0 = t_1$ es una expression.
- Dados los terminos $t_0 \dots t_n$ y un predicado P de aridad n, $P\ t_0 \dots t_n$ es una expression.
- Dada la expresion ψ, $\neg\psi$ es una expresión.
- Dadas las expresiones ψ_1 y ψ_2, $(\psi_1 \wedge \psi_2)$, $(\psi_1 \vee \psi_2)$, $(\psi_1 \Rightarrow \psi_2)$ y $(\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2)$ son expressiones.
- Dada la expresión ψ y una variable x, $(\exists x\ \psi)$ y $(\forall x\ \psi)$ son expresiones.

Ejempos:

- $\exists x\ \mathit{padre\_de}\ \texttt{Alice} = x$
- $\forall y\ \exists x\ \mathit{padre\_de}\ y = x \wedge \neg(x = y)$

Expresividad

- Un objeto, sistema, ect. puede tener infinitas propiedades y pueden haber infinitos hechos respecto a el.
- Una lógica (sea la que sea) no puede expresar todas las propiedades de un objeto (a pesar de poder expresar infinitas propiedades y enunciados).
- La medida de la cantidad de propiedades que puede expresar una lógica se llama *expresividad*.
- La lógica de primer orden permite expresar todas las propiedades *parcialmente computables*.
- Algunas logicas, como la logica de segundo orden tienen mayor expresividad. Ejemplo, principio de inducción:
  $\forall P \; ((P \; 0) \wedge (\forall n \; P \; n \Rightarrow P \; (n+1))) \Rightarrow \forall n \; P \; n$
- Las propiedades expresables por la lógica de segndo orden no son computables.