

# Logica de primer orden

Prof. Ernesto Rodriguez

Universidad del Itsmo

*erodriguez@unis.edu.gt*

- La lógica es una de las herramientas más universales que hay para describir objetos formalmente. En nuestro caso, sistemas.
- Existen infinitas lógicas diferentes. Ejemplos:
  - Lógica de primer orden
  - Lógica de segundo orden
  - Lógica del 400<sup>avo</sup> orden
  - Lógica temporal lineal
  - Lógica de Hoare
- La lógica nos permite traducir propiedades y hechos del mundo real a un lenguaje que entienden las computadoras.

- La diferencia principal entre las lógicas es su *expresividad* (más sobre eso después).
- La *Lógica de primer orden* ofrece un buen balance entre expresividad, practicalidad y simplicidad.
- La lógica de primer orden es una herramienta muy útil en la inteligencia artificial. Sistemas expertos y bases de conocimiento como Watson y Cinc son impulsadas por alguna variante de esta lógica.

# Ejemplo:

$$\forall h. \text{Humano } h \Rightarrow \text{Mortal } h$$

$$\forall x \forall y. (\text{Entero } x \wedge \text{Entero } y \wedge (\exists n. x = n + n) \wedge (\exists m. y = m + m)) \Rightarrow \\ \exists q. x + y = q + q$$

- La logica de primer orden en realidad es una familia de logicas.
- El vocabulario de la logica de primer orden viene de varios dominios.

Ejemplo:

- Si uno intenta describir numeros naturales, simbolos como:  $+$ ,  $-$ ,  $0$ , ect.
- Si uno intenta describir un sistema experto medico: diagnostico, tratamiento, ect.

- Los simbolos que comparten *todas* las logicas de primer orden son:
  - **Variables:**  $x_1, x_2, y, z, \dots$
  - **Conectivos lógicos:**  $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
  - **Cuantificadores:**  $\forall$  y  $\exists$
  - **La igualdad:**  $=$
  - **parentesis:**  $(x)$
- Los simbolos especificos de un domino se definen as:
  - Por cada numero  $n$ , un conjunto de simbolos de predicados con aridad  $n$ . Ej.  $\text{Mortal } x$
  - Por cada numero  $n$ , un conjunto de simbolos de funciones con aridad  $n$ . Ej.  $\text{distancia } x \ y$
  - Un conjunto de simbolos constantes. Ej.  $0, 1$

- El conjunto de simbolos en una logica de primer orden puede ser infinito, incluso de cardinalidad arbitraria! Ie. todos los numeros reales podrian ser un simbolo.
- Los simbolos de la logica de primer orden se dividen en tres tipos: funciones, predicados y constantes.
- Los simbolos de la lógica de primer orden tienen una propiedad llamada *aridad*.
- Los simbolos constantes denotan objetos especificos al dominio.
- Los predicados de aridad 1 denotan propiedades de objetos.
- Los predicados de aridad mayor a 1 denotan relaciones entre objetos.

Un *Termino* en logica de primer orden se define recursivamente com:

- Un simbolo constante es un *Termino*
- Una variable es un termino.
- Si  $t_1 \dots t_n$  son terminos y  $f$  es una función de aridad  $n$ ,  $f\ t_1 \dots t_n$  es un termino.

Ejemplos, dado el conjunto de simbolos  $S := \{\text{Alice}, \text{Bob}\}$  y la funcion *padre\_de*:

- Alice
- *padre\_de* Alice
- *padre\_de padre\_de* Bob



# Sintaxis: Expresiones

Las expresiones se definen como:

- Dados los terminos  $t_0$  y  $t_1$ ,  $t_0 = t_1$  es una expression.
- Dados los terminos  $t_0 \dots t_n$  y un predicado  $P$  de aridad  $n$ ,  $P t_0 \dots t_n$  es una expression.
- Dada la expresion  $\psi$ ,  $\neg\psi$  es una expresión.
- Dadas las expresiones  $\psi_1$  y  $\psi_2$ ,  $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ ,  $(\psi_1 \vee \psi_2)$ ,  $(\psi_1 \Rightarrow \psi_2)$  y  $(\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2)$  son expresiones.
- Dada la expresión  $\psi$  y una variable  $x$ ,  $(\exists x \psi)$  y  $(\forall x \psi)$  son expresiones.

Ejemplos:

- $\exists x \text{ padre\_de Alice} = x$
- $\forall y \exists x \text{ padre\_de } y = x \wedge \neg(x = y)$
- `son_familia Alice Bob`

- Un objeto, sistema, ect. puede tener infinitas propiedades y pueden haber infinitos hechos respecto a el.
- Una lógica (sea la que sea) no puede expresar todas las propiedades de un objeto (a pesar de poder expresar infinitas propiedades y enunciados).
- La medida de la cantidad de propiedades que puede expresar una lógica se llama *expresividad*.
- La lógica de primer orden permite expresar todas las propiedades *parcialmente computables*.
- Algunas logicas, como la logica de segundo orden tienen mayor expresividad. Ejemplo, principio de inducción:  
$$\forall P ((P\ 0) \wedge (\forall n\ P\ n \Rightarrow P\ (n + 1))) \Rightarrow \forall n\ P\ n$$
- Las propiedades expresables por la lógica de segundo orden no son computables.