SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

Ing. Jozef Lasz a kolektív

FYZIKA

Návody na praktické cvičenia z fyziky

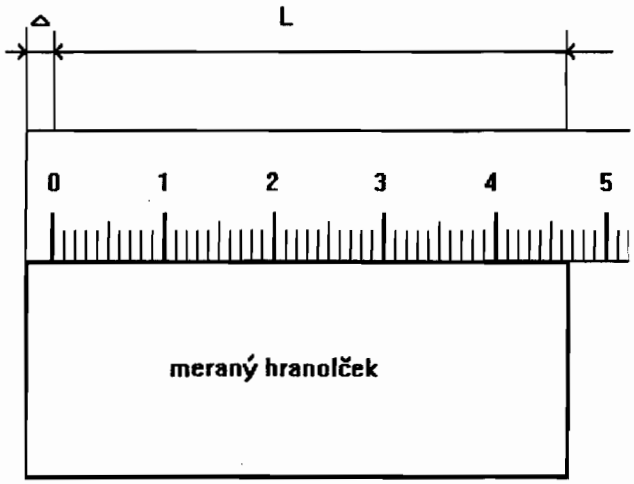
1994

Metódy spracovania experimentálnych výsledkov

Meraním zisťujeme číselnú hodnotu meranej fyzikálnej veličiny vo zvolených jednotkách. Každé meranie je zaťažené chybami, ktoré sú zapríčinené nedokonalosťou našich pozorovacích schopností, nepresnosťou prístrojov, nedokonalosťou meracej metódy, nedodržaním podmienok experimentu alebo vplyvom veľkého počtu malých neznámych porúch pochádzajúcich z okolia. Z týchto dôvodov nemožno žiadnu experimentálnu veličinu merať absolútne presne a na priblíženie sa k skutočnej hodnote používame rôzne (väčšinou štatistické) metódy. Chyby podľa ich pôvodu možno rozdeliť na tri skupiny:

1. Hrubé chyby vznikajú omylom pri meraní alebo pri odčítaní nameranej hodnoty. Pri svedomitom prístupe k experimentu sa im možno spravidla vyhnúť, alebo pri opakovanom meraní hodnoty zaťažené hrubou chybou vylúčime z meraného súboru.
2. Systematické chyby sú obvykle spôsobené nedokonalosťou metódy alebo nedodržaním podmienok pri experimente. Príkladom takejto chyby je napríklad zanedbanie vztlakovej sily pri vážení v kvapaline. Odstrániť chyby tohto druhu možno dôsledným dodržiavaním experimentálnych podmienok, alebo k výsledku pripočítavame opravy a korekcie vyplývajúce z povahy systematickej chyby.
3. Náhodné chyby vznikajú pri každom meraní a nemožno ich z merania úplne odstrániť. Prejavujú sa tým, že výsledky experimentu sa pri opakovanom meraní pri tých istých podmienkach líšia. Tento druh chyby je spôsobený veľkým množstvom náhodných vplyvov z okolia, ktorých veľkosť a pôvod nevieme

presne určiť. Pomocou teórie chýb možno však vyjadriť ich vplyv na výsledok merania.



Obr. 1 Realizácia experimentu

číslo merania	L (mm)	L+Δ (mm)
1	45	49
2	47	51
3	48	52
4	35	39
5	46	50
6	43	49
7	48	52
8	46	50
9	46	50
10	47	51

Tab. 1

Súbor experimentálnych hodnôt

Ako príklad vyskytovania sa jednotlivých typov chýb uvedieme experimentálne meranie dĺžky hranolčeka pomocou obyčajného meradla s delením po 1 mm priloženého k meranému objektu tak, ako je to znázornené na obr. 1.

Meranie sme urobili 10-krát a zapísali do tab. 1. Z obr. 1 je možné vidieť, že pri experimente sme sa dopustili systematickej chyby spôsobenej nesprávnym priložením meradla. Pri podrobnom štúdiu nameraných hodnôt vidíme, že experimentálna hodnota č. 4 sa výrazne líši od ostatných. Dá sa predpokladať, že pri tomto meraní sme sa dopustili hrubej chyby, a preto ju vylúčime zo súboru.

1 ŠTATISTICKÉ SPRACOVANIE VÝSLEDKU

Predpokladajme, že pri meraní nejakej fyzikálnej veličiny x, ktorej skutočná hodnota je x_s, dochádza len k náhodným chybám. Štatistický charakter náhodných chýb nám samozrejme neumožní nájsť skutočnú chybu merania, a tým aj skutočnú hodnotu meranej veličiny. Vďaka viacnásobnému meraniu tej istej veličiny však môžeme určiť pravdepodobnú hodnotu meranej veličiny. Predpokladajme, že počas experimentu sme získali n realizácií meranej veličiny x. Dá sa ukázať, že aritmetický priemer z takto získaného súboru možno označiť ako najpravdepodobnejšiu hodnotu meranej veličiny. Teda platí

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1)$$

Pre dostatočne veľký počet meraní ($n \longrightarrow \infty$) sa hodnota aritmetického priemeru $\bar{x}$ blíži k skutočnej hodnote x_s. Otázkou je, čo možno pri skutočnom meraní považovať za skutočne veľké n. Ukazuje sa, že pri bežnom experimente nedosiahneme podstatné zlepšenie výsledku, ak budeme zväčšovať hodnotu n nad 20 meraní, a tak možno považovať túto hranicu za dostatočnú pre opakovanie experimentu.

Pomocou najpravdepodobnejšej hodnoty experimentálnej hodnoty $\bar{x}$ možno určiť odchýlku i-teho merania

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x} \qquad (2)$$

Aritmetický priemer má dve veľmi dôležité vlastnosti:

1. súčet odchýliek sa vždy rovná nule,
2. súčet štvorcov odchýliek je minimálny.

Aby sme dokázali porovnať presnosť dvoch meraní, ktoré sa vzťahujú k jednej a tej istej experimentálnej hodnote, je potrebné zaviesť parameter presnosti merania. Vo fyzike sa na tento účel používa smerodajná odchýlka σ, ktorá súvisí so skutočnými chybami. Keďže tieto chyby nepoznáme, nahrádzame ich odchýlkami a pomocou nich počítame odhad smerodajnej odchýlky s. Odhad smerodajnej odchýlky jedného merania zo súboru n experimentálnych hodnôt je daný vzťahom

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n - 1}} \qquad (3)$$

Dá sa očakávať, že pre veľký počet meraní prejde odhad smerodajnej odchýlky s na smerodajnú odchýlku σ. V skutočnosti však nikdy nepočítame veličinu σ, ale len jej približnú hodnotu s.

Ak výsledok merania aproximujeme aritmetickým priemerom zo súboru n experimentálnych hodnôt, potom za predpokladu rovnako presných a navzájom nezávislých meraní vypočítame odhad smerodajnej odchýlky aritmetického priemeru

$$s_{\overline{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n\,(n - 1)}} \qquad (4)$$

kde s je odhad smerodajnej odchýlky jedného merania.

Pri spracovaní priamych rovnako presných meraní možno postupovať podľa nasledujúceho postupu:

1. Zo súboru n experimentálnych hodnôt vypočítame aritmetický priemer $\bar{x}$ podľa vzťahu (1).
2. Pomocou vzťahu (2) vypočítame Δx_i a ich kvadráty $(\Delta x_i)^2$ pre jednotlivé meranie zo súboru.
3. Vypočítame odhad smerodajnej odchýlky $s_{\bar{x}}$ podľa vzťahu (4).
4. Namerané a vypočítané hodnoty zapisujeme do vhodne zostavenej tabuľky. Výsledok merania zapíšeme v tvare

$$x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}}$$

a udáme tiež relatívnu chybu merania v percentách $\frac{s_{\bar{x}}}{\bar{x}} \cdot 100(\%)$.

V praxi je veľmi dôležité prísne rozlišovať používanie smerodajnej odchýlky jedného merania s a odchýlky aritmetického priemeru $s_{\bar{x}}$. V tých prípadoch, keď chceme charakterizovať presnosť použitého spôsobu merania (meraciu metódu), udávame chybu s. Ak potrebujeme ohodnotiť chybu tohto čísla, ktoré sme získali ako výsledok všetkých urobených meraní, použijeme veličinu $s_{\bar{x}}$.

Pre úplnosť ešte uvedieme výpis subrutiny v jazyku FORTRAN na výpočet potrebných štatistických veličín zo súboru n experimentálnych hodnôt.

```
      SUBROUTINE SMMNVR(DATA,N,XMEAN,DELXM,S)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION DATA(*)
      PARAMETER(ZERO=0.D0, ONE=1.D0, TWO=2.D0)
      XMEAN=ZERO
      XN=DBLE(N)
      XN1=XN-ONE
      DO 10 I=1,N
        XMEAN=XMEAN+DATA(I)
   10 CONTINUE
```

```
      XMEAN=XMEAN/XN
      IF(N.GT.1) THEN
        Q=ZERO
        DO 20 I=1,N
          Q=Q+(DATA(I)-XMEAN)**2
   20 CONTINUE
      S=SQRT(S2)
              DELXM=S/SQRT(XN)
            ELSE
              DELXM=ZERO
              S=ZERO
            END IF
            END
```

V uvedenom programe sú použité nasledujúce premenné:

DATA - vektor experimentálnych hodnôt,

N - počet experimentálnych hodnôt,

XMEAN - najpravdepodobnejšia hodnota meranej veličiny (aritmetický priemer),

DELXM - odhad smerodajnej odchýlky aritmetického priemeru,

S - odhad smerodajnej odchýlky jedného merania.

1.1 Skladanie chýb

Väčšinu fyzikálnych veličín neurčujeme priamo meraním, ale vypočítame ich pomocou niekoľkých priamo meraných veličín, ktoré dosadíme do príslušného fyzikálneho zákona, ktorý vyjadruje súvislosť veličiny hľadanej a veličín nameraných.

Predpokladajme, že hľadaná veličina Y je funkciou nezávisle od seba meraných veličín X_1, X_2,...,X_n, ktorých chyby merania s_{X_i} určíme výpočtom pri viacnásobnom meraní alebo ich odhadneme z presnosti použitých meracích prístrojov. Z počtu

pravdepodobnosti dostaneme odhad smerodajnej odchýlky veličiny $Y = F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ vzťah

$$s_Y = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} s_{X_i} \right)^2 \qquad (5)$$

kde $\frac{\partial Y}{\partial X_i}$ sú parciálne derivácie Y podľa priamo meraných veličín.

Uvedený vzťah, ktorý vlastne udáva absolútnu chybu merania veličiny Y, býva pre konkrétny výpočet dosť zložitý, a preto v ďalšom uvedieme konkrétny tvar vzťahu (5) pre niektoré typické prípady:

1. Vo vzťahu pre výpočet nepriamo meranej veličiny vystupuje súčet alebo rozdiel priamo meraných veličín

$$(s_Y)^2 = (s_{X_1})^2 + (s_{X_2})^2 + \ldots + (s_{X_n})^2 \qquad (6)$$

2. Vo vzťahu pre výpočet nepriamo meranej veličiny vystupuje súčin alebo podiel priamo meraných veličín

$$\left(\frac{s_Y}{Y}\right)^2 = \left(\frac{s_{X_1}}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{s_{X_2}}{X_2}\right)^2 \qquad (7)$$

3. Vo vzťahu pre výpočet nepriamo meranej veličiny vystupuje m-tá mocnina priamo meranej veličiny

$$\frac{s_Y}{Y} = m \frac{s_{X_1}}{X_1} \qquad (8)$$

Predchádzajúce odhady pre zložené chyby môžeme použiť aj pre skladanie náhodnej a systematickej chyby jednotlivých veličín X_i. Systematická chyba, ktorú nevieme vylúčiť, je z hľadiska experimentátora tiež náhodnou chybou (závisí napr. od náhodného výberu prístroja zo skupiny prístrojov s rovnakou triedou presnosti).

Výsledná chyba veličiny X_i je daná súčtom

$$\Delta X_i = \Delta X_i' + \Delta X_i''$$

kde $\Delta X_i'$ je náhodná časť chyby a $\Delta X_i''$ je systematická časť chyby.

Odhad strednej chyby podľa vzťahu (5) má tvar

$$s_{X_i} = \sqrt{s^2_{X_i'} + s^2_{X_i''}}$$

kde $s_{X_i'} \equiv s_{\overline{X}_i}$ je odhad smerodajnej odchýlky aritmetického priemru a $s_{X_i''}$ je odhad systematickej chyby.

Štatistické vyhodnotenie súboru meraní stráca zmysel, ak $s_{X_i''} \gg s_{\overline{X}}$, čo znamená, že systematická chyba (spôsobená napr. meracím prístrojom) je väčšia ako štatistická chyba merania.

2 GRAFICKÉ SPRACOVANIE EXPERIMENTÁLNYCH HODNÔT

Pri spracovaní nameraných hodnôt je často dôležité určiť empirickú funkciu, ktorá by bola vyjadrená analytickým výrazom a ktorá vhodne vystihuje závislosť určenú tabuľkou experimentálnych hodnôt. V takomto prípade možno s úspechom použiť metódu, ktorá sa nazýva metódou najmenších štvorcov, presnejšie povedané, metóda najmenšieho súčtu druhých mocnín absolútnych chýb.

Uvažujme fyzikálny experiment, v ktorom sme získali n dvojíc hodnôt. To znamená, že ku každej veličine x_i sme namerali príslušnú veličinu y_i a namerané hodnoty zapíšeme do tabuľky.

Grafická reprezentácia experimentálnych hodnôt sú body v rovine so súradnicami (x_i, y_i).

Väčšina závislostí medzi fyzikálnymi veličinami x a y sa dá vyjadiť niektorou z týchto funkcií

$$y = a + bx,$$

$$y = bx,$$

$$y = a + \frac{b}{x}$$

(čo po substitúcii $\frac{1}{x} = t$ vedie na lineárnu závislosť $y = a + bt$) alebo

$$y = a + bx + cx^2.$$

Exponenciálna závislosť typu

$$y = y_0 e^{kx}$$

sa po zlogaritmovaní zmení na lineárnu závislosť

$$\ln y = \ln y_0 + kx$$

medzi veličinami $Y = \ln y$ a x, ktorá umožní určiť charakteristické hodnoty y_0 a k exponenciály.

2.1 Funkčná závislosť typu y = a + bx

Uvažujme lineárnu závislosť typu

$$y = a + bx,$$

kde a, b sú hľadané konštanty. Konštanty a, b sa budeme snažiť určiť tak, aby súčet druhých mocnín odchýlok rozdielov nameraných a vypočítaných hodnôt veličiny y bol minimálny. Zaveďme preto funkciu

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a + bx_i)\right]^2 \qquad (9)$$

ktorá má minimum, ak jej prvé derivácie podľa a a podľa b sa budú rovnať nule, t.j.

$$\frac{\partial S}{\partial a} \equiv 2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} \equiv 2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)(-x_i) = 0 \qquad (10)$$

Úpravou týchto rovníc dostaneme nasledujúce dve rovnice pre dva neznáme parametre a, b

$$na + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (11)$$

Riešením poslednej sústavy rovníc dostaneme vzťahy pre priamy výpočet hľadaných parametrov a, b

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i - b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (12)$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2} \qquad (13)$$

Súčet S(a,b) predstavuje vlastne súčet štvorcov vzdialeností nameraných bodov od zostrojenej priamky. Ak tento súčet bude minimálny, bude aj zostrojená priamka najlepšie vystihovať nameranú závislosť.

Na výpočet parametrov a, b sme použili súbor experimentálne nameraných bodov, ktoré sú zaťažené náhodnými chybami merania. Preto aj hodnoty parametrov a, b budú ovplyvnené týmito chybami. Z teórie chýb pre rozptyl parametrov a, b vyplývajú vzťahy

$$s_a^2 = s_y^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} \tag{14}$$

$$s_b^2 = s_y^2 \frac{n}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2} \tag{15}$$

kde s_y^2 je rozptyl odklonu bodov od priamky daný vzťahom

$$s_y^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - a \sum_{i=1}^{n} y_i - b \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{16}$$

Informáciu o tom, ako dobre ležia experimentálne body na nami určenej priamke, poskytuje koeficient lineárnej korelácie r. Tento koeficient možno určiť podľa vzťahu

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{17}$$

Takto určené číslo je z intervalu $\langle -1,1 \rangle$. Ak sa jeho hodnota blíži k hodnote +1, tak experimentálne body ležia blízko určenej priamky, t.j. experiment spĺňa predpoklad lineárnej

závislosti. Ak hodnota koeficientu r sa blíži k nule, tak experimentálna závislosť nie je lineárna a je potrebné hľadať iné vyjadrenie funkčnej závislosti.

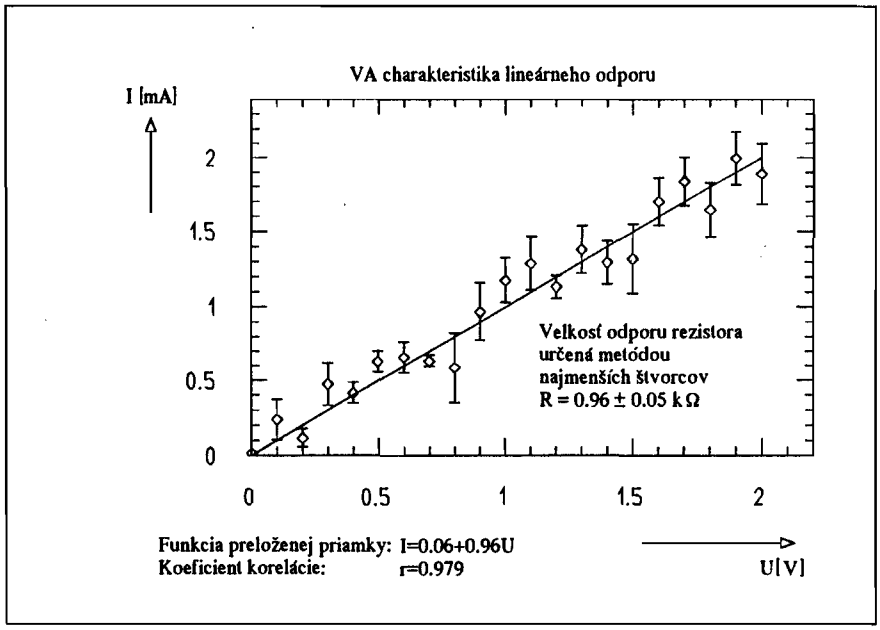
Na objasnenie uvedenej metódy uveďme jeden príklad možného experimentu. Našou úlohou bude určiť odpor rezistoru pomocou VA charakteristiky. Budeme teda nastavovať napätie s určitým krokom, ku každému nastavenému napätiu odmeriame 10-krát prúd tečúci rezistorom a následne vypočítame najpravdepodobnejšiu hodnotu prúdu $\overline{I}$ (aritmetický priemer). Získané údaje zapíšeme do tab. 2 spolu so smerodajnou odchýlkou σ (v skutočnosti ide o odhad smerodajnej odchýlky s jedného merania).

č.m.	U (V)	I (mA)	$_I$ (mA)	č.m.	U (V)	I (mA)	σ_I (mA)
1	0,00	0,00	0,00	12	1,10	1,29	0,18
2	0,10	0,24	0,13	13	1,20	1,14	0,08
3	0,20	0,12	0,06	14	1,30	1,38	0,16
4	0,30	0,47	0,14	15	1,40	1,30	0,14
5	0,40	0,41	0,07	16	1,50	1,32	0,23
6	0,50	0,63	0,07	17	1,60	1,70	0,16
7	0,60	0,66	0,10	18	1,70	1,84	0,17
8	0,70	0,63	0,04	19	1,80	1,64	0,18
9	0,80	0,59	0,24	20	1,90	2,00	0,18
10	0,90	0,97	0,19	21	2,00	1,89	0,21
11	1,00	1,18	0,15				

Tab. 3 Súbor experimentálnych hodnôt

Cez tieto body v ďalšom preložíme priamku I = a + bU, čo znamená, že podľa vzťahov (8) a (9) určíme parametre a, b. Rozptyl parametrov s_a a s_b určíme zo vzťahov (10) a (11).

Pomocou takto získaných údajov zostrojíme VA charakteristiku (obr. 2) a určíme hodnotu odporu rezistora $R = b \pm s_b$.



Obr. 2 Grafické spracovanie experimentálneho určenia hodnoty odporu rezistora z VA charakteristiky

2.2 Funkčná závislosť typu y = bx

Pri zostrojovaní funkčnej závislosti poznáme v mnohých prípadoch hodnotu niektorého bodu priamo z podstaty sledovaného fyzikálneho javu. Napríklad pri meraní VA charakteristiky vieme, že pri nulovom napätí tečie obvodom nulový prúd. Ďalším príkladom je závislosť

$$h_2 = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} h_1$$

v úlohe č. 10.

V takýchto prípadoch preložíme cez súbor nameraných bodov priamku y = bx a metódou najmenších štvorcov určíme hodnotu smernice b pomocou vzťahu

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{18}$$

2.3 Funkčná závislosť typu $y = a + bx + cx^2$

Z podmienky najmenších štvorcov vyplývajú nasledujúce vzťahy pre odhad parametrov a, b, c:

$$a = \frac{(S_2S_4-S_3^2)\sum_{i=1}^{n} y_i + (S_2S_3-S_1S_4)\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + (S_1S_3-S_2^2)\sum_{i=1}^{n} x_i^2y_i}{\Delta} \tag{19}$$

$$b = \frac{(S_2S_3-S_1S_4)\sum_{i=1}^{n} y_i + (nS_4-S_2^2)\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + (S_1S_2-nS_3)\sum_{i=1}^{n} x_i^2y_i}{\Delta} \tag{20}$$

$$c = \frac{(S_1S_3-S_2^2)\sum_{i=1}^{n} y_i + (S_1S_2-nS_3)\sum_{i=1}^{n} x_iy_i + (nS_2-S_1^2)\sum_{i=1}^{n} x_i^2y_i}{\Delta} \tag{21}$$

kde

$$S_m = \sum_{i=1}^{N} x_i^m$$

a

$$\Delta = n(S_2S_4-S_3^2) + S_1(S_2S_3-S_1S_4) + S_2(S_1S_3-S_2^2)$$

(18)

2.4 Zhodnotenie práce a výsledkov merania

Účelom laboratórnej práce je nielen kvantitatívne vyšetrovanie fyzikálnych javov, čo umožňuje zistiť číselné hodnoty fyzikálnych veličín a overiť platnosť zákonov vyšetrovaných javov, ale vedieť aj podľa výsledkov merania a ich príslušných chýb celkovo posúdiť zvolenú metódu a laboratórnu prácu a na základe získaných skúseností pojednať o vhodnosti metódy a o možných zlepšeniach. Ak chyba výsledku merania vyjde veľmi veľká, je potrebné vedieť, čo bolo príčinou takej veľkej chyby. Či veľká nepresnosť výsledku merania nebola spôsobená napríklad nepresnosťou pri meraní niektorej fyzikálnej veličiny, zlými podmienkami pri meraní, nevhodnou voľbou metódy merania, nevhodnými prístrojmi alebo pomôckami, vlastnou nepozornosťou alebo nedbalosťou počas merania alebo inými objektívnymi či subjektívnymi ťažkosťami.

Úprava protokolu

Namerané hodnoty sa zaznamenajú a spracujú vo forme protokolu o laboratórnom cvičení. Protokol sa píše čitateľne a úhľadne, perom do samotného zošita formátu A4. Schémy, nákresy a obrysy tabuliek sa rysujú ceruzou a hodnoty do tabuliek sa vpisujú perom. Grafy sa kreslia zásadne na milimetrový papier, ktorý sa napokon vlepí do protokolu.

Protokol sa skladá zo štyroch častí:

metóda a postup merania,

tabuľky nameraných hodnôt meraných veličín,

spracovanie nameraných veličín,

zhodnotenie výsledkov a diskusia.

Protokol k úlohe č. 14 uvedený v Dodatku III. považujeme za vzorový.

2.5 Zásady práce vo fyzikálnom laboratóriu

Ako už bolo zdôraznené, prvým predpokladom úspešnej práce vo fyzikálnom laboratóriu je dôkladná teoretická príprava doma. Jej svedectvom je prvá časť protokolu, ktorá musí byť vypracovaná prehľadne a vecne tak, aby každý, aj keď len všeobecne oboznámený s fyzikálnou problematikou, po prečítaní vedel, aká veličina má byť meraná a akou metódou.

V záujme bezpečnosti práce v laboratóriu treba dodržiavať tieto pokyny:

- na praktických cvičeniach v laboratóriu treba zásadne dodržiavať príkazy vedúceho cvičenia,
- elektrické meracie prístroje sa môžu pripojiť na zdroj (sieť alebo batériu) len po priamom súhlase prítomného učiteľa,
- počas merania nedotýkať sa voľných (neizolovaných) častí meracieho zariadenia,
- po skončení merania s elektrickými aparatúrami tieto najprv odpojiť od zdroja (vypínačom alebo vytiahnutím zo zásuvky) a až potom ich medzi sebou odpájať,

- nerobiť samovoľne opravy alebo zmeny na elektrických inštaláciách a prístrojoch; v prípade poruchy treba ihneď upozorniť učiteľa,

- v prípade nebezpečenstva všetky elektrické zariadenia treba okamžite odpojiť hlavným vypínačom, ktorý je umiestnený v laboratóriu,

- po ukončení laboratórneho cvičenia treba vždy vypnúť elektrické spotrebiče, starostlivo uzavrieť vodovodné a plynové kohútiky,

- pri práci so sklom chrániť sa pred poranením,

- v laboratóriu treba zachovávať úplný pokoj a disciplínu,

- nepoškodzovať prístroje a ostatné zariadenia laboratória (stoly, stoličky a pod.),

- v laboratóriu je treba udržiavať čistotu a poriadok,

-v laboratóriu je zakázané jesť a na pitie používať laboratórne sklo,

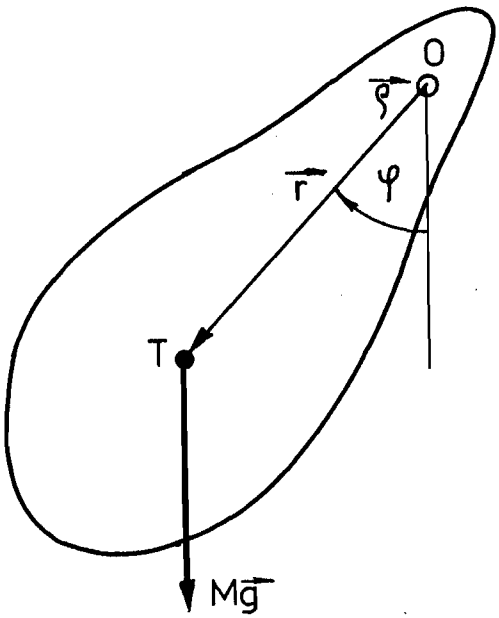
- v prípade práce v rádioizotopovom laboratóriu oboznámiť sa so špeciálnymi predpismi pre prácu v tomto laboratóriu a riadiť sa nimi; špeciálne predpisy platia aj pre prácu s lasermi.

1. Určenie tiažového zrýchlenia reverzným kyvadlom

V mieste fyzikálneho laboratória experimentálne určte veľkosť tiažového zrýchlenia g.

TEORETICKÝ ÚVOD

Každé teleso upevnené tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej jeho ťažiskom, sa nazýva fyzikálne kyvadlo. Kyvadlo je v rovnovážnej polohe, ak jeho ťažisko T (obr. 1.1) je v najnižšej polohe, t.j. ak leží na zvislej priamke pretínajúcej os v bode O.



Obr. 1.1 Fyzikálne kyvadlo

Po vychýlení kyvadla z rovnovážnej polohy koná kyvadlo pôsobením tiažovej sily , ktorá naň pôsobí, otáčavý pohyb,

pre ktorý, ako pre každé teleso uložené na pevnej osi, platí pohybová rovnica

$$\vec{M} = I\,\vec{\varepsilon} \tag{1.1}$$

kde $\vec{M}$ je moment vonkajšej sily vzhľadom na os O, I je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os O, $\vec{\varepsilon}$ je uhlové zrýchlenie pohybu.

Zvoľme si v smere osi otáčania jednotkový vektor $\vec{\rho}$ orientovaný pred rovinu nákresu. Vektor uhlovej výchylky kyvadla z rovnovážnej polohy je potom

$$\vec{\varphi} = \varphi\,\vec{\rho}$$

a vektor uhlového zrýchlenia

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\,\vec{\rho} \tag{1.2}$$

Účinok tiažovej sily Zeme na pohybový stav telesa je taký, ako keby všetky sily pôsobili v ťažisku. Pre stav znázornený na obr. 1.1 vyvolá výslednica tiažových síl otáčavý moment vzhľadom na os otáčania daný vzťahom

$$\vec{M} = \left[(\vec{r} \times m\vec{g}).\vec{\rho}\right]\vec{\rho} \tag{1.3}$$

kde m je hmotnosť telesa, $\vec{r}$ polohový vektor ťažiska vzhľadom na bod O. Úpravou a použitím vzťahov (1.1) a (1.2) dostaneme

$$-\,mgr\sin\varphi = I\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{1.4}$$

Pre malé výchylky platí $\sin\varphi \doteq \varphi$ a po substitúcii

$$\frac{mgr}{I} = \omega^2 \tag{1.5}$$

nadobudne pohybová rovnica fyzikálneho kyvadla pre malé výchylky tvar

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0 \tag{1.6}$$

Rovnica (1.6) je diferenciálna rovnica netlmeného harmonického pohybu. Všeobecné riešenie tejto rovnice je

$$\varphi(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{1.7}$$

Ak v čase $t = 0$ má kyvadlo maximálnu výchylku $\varphi(0) = \varphi_0$, riešenie rovnice (1.7) sa redukuje na tvar

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega t) \tag{1.8}$$

Kyvadlo teda kmitá okolo rovnovážnej polohy s uhlovou frekvenciou ω danou vzťahom (1.5), ktorej zodpovedá perioda pohybu - doba kmitu fyzikálneho kyvadla

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}} \tag{1.9}$$

METÓDA MERANIA

Reverzné kyvadlo pozostáva z kovovej tyče opatrenej dvoma navzájom rovnobežnými britmi, ktoré vytvárajú dve osi otáčania O_1 a O_2 tak, aby ťažisko ležalo nesúmerne na úsečke O_1O_2, ako je to znázornené na obr. 1.2. Na jeden koniec tyče je nasunutý

valec - závažie Z, ktorým možno posúvať a meniť tak polohu ťažiska T.

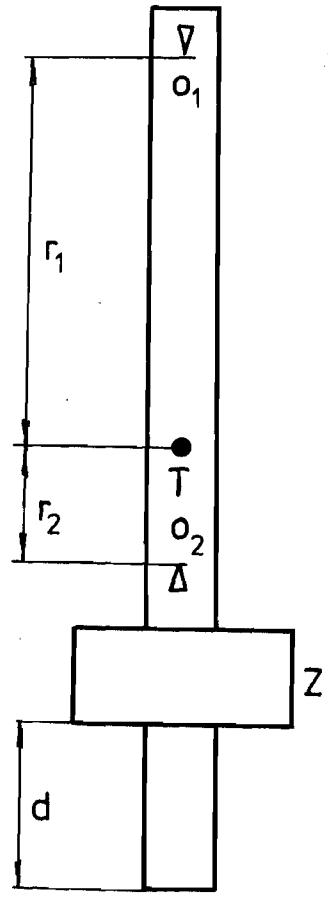
Ak kyvadlo kmitá okolo osi O_1, platí pre uhlovú frekvenciu vzťah

$$\omega_1^2 = \frac{mgr_1}{I_1} \qquad (1.10)$$

kde $I_1 = I_0 + mr_1^2$;
ak kmitá okolo osi O_2, platí vzťah

$$\omega_2^2 = \frac{mgr_2}{I_2} \qquad (1.11)$$

kde $I_2 = I_0 + mr_2^2$, I_0 je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os rovnobežnú s osami O_1 a O_2, ale prechádzajúcej ťažiskom T.



Obr. 1.2 Reverzné kyvadlo

Posúvaním závažia Z možno kyvadlo nastaviť tak, aby kmitalo s rovnakou dobou kmitu okolo obidvoch osí. Potom platí

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \qquad (1.12)$$

Použitím vzťahov (1.10), (1.11), (1.12) a vylúčením veličiny I_0 (ktorej veľkosť nemusíme vôbec poznať), plynie

$$\omega^2 = \frac{g}{r_1 + r_2} = \frac{g}{\ell} \qquad (1.13)$$

kde ℓ je vzájomná vzdialenosť osí O_1 a O_2.

Pre dobu kmitu vychádza

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (1.14)$$

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) Prístroje a pomôcky: reverzné kyvadlo, skrutkovač, dĺžkové meradlo, stopky

b) Postup práce:

Zmeriame závislosť doby kmitu T kyvadla okolo osi O_1 a O_2 pri rôznych polohách závažia Z. Polohu závažia meníme s krokom 1 cm. Presnosť merania zvýšime tým, že meriame 10 T alebo 20 T. Pri danom nastavení závažia určíme T_1 aj T_2. Meranie opakujeme 3-krát. Údaje zapíšeme do tab. 1.1. Je potrebné dbať na to, aby pri každom meraní bola výchylka kyvadla z rovnovážnej polohy rovnaká (značka na zariadení). Z nameraných hodnôt zostrojíme závislosti dôb kmitu T_1 a T_2 od polohy d závažia Z. Z grafu odčítame hodnotu T, pre ktorú platí

$$T = T_1 = T_2$$

Použitím vzťahu (1.14) vypočítame hodnotu tiažového zrýchlenia g a porovnáme ju s presnou hodnotou g_B pre Bratislavu (g_B = 9,806 m.s^{-2}).

Tab. 1.1

$\ell =$

d (cm)	O_1				O_2			
	1.	2.	3.	$\overline{T}_1$(s)	1.	2.	3.	$\overline{T}_2$(s)
	$10\ T_1$	$10\ T_1$	$10\ T_1$		$10\ T_2$	$10\ T_2$	$10\ T_2$	

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Aká musí byť dĺžka matematického kyvadla, aby kmitalo s rovnakou periodou ako fyzikálne kyvadlo?
2. V čom spočíva metóda merania tiažového zrýchlenia pomocou reverzného kyvadla?
3. Aký je vzťah medzi vzdialenosťou osí reverzného kyvadla a dĺžkou matematického kyvadla kmitajúceho s tou istou periodou ako reverzné kyvadlo?

2. Maxwellovo kyvadlo

Z nameraných charakteristických hodnôt Maxwellovho kyvadla a jeho pohybu určte moment zotrvačnosti zotrvačníka tohto kyvadla voči jeho rotačnej osi.

TEORETICKÝ ÚVOD

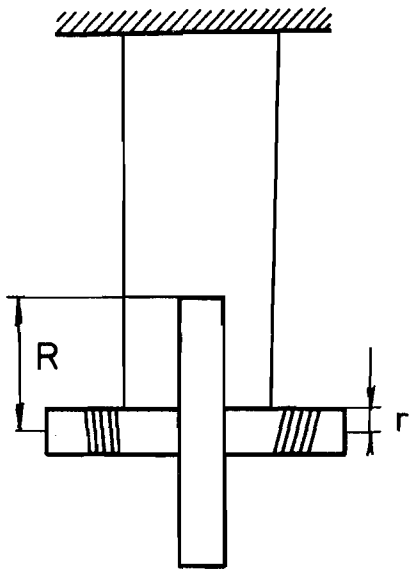
Ak tuhé teleso za účinku vonkajšej sily rotuje okolo okamžitej osi rotácie o, platí preň pohybová rovnica

$$\vec{M}_0 = I\vec{\varepsilon} \qquad (2.1)$$

kde I je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os rotácie o, $\vec{\varepsilon}$ je uhlové zrýchlenie telesa, $\vec{M}_0$ je moment vonkajších síl vzhľadom na os o.

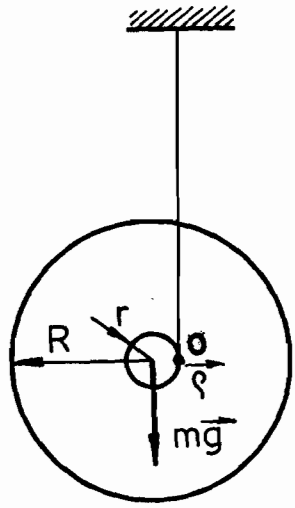
Nech teleso má tvar homogénnej kruhovej dosky s polomerom R a je zavesené na dvoch rovnobežných vláknach navinutých na súosej valcovej tyčinke s polomerom r (obr.2.1). Hmotnosť tohto telesa (doska + tyčinka) je m.

V tiažovom poli Zeme sa vlákna odvíjajú a teleso klesá zvisle nadol. Okamžitý pohyb telesa je jeho rotačný pohyb okolo osi o, ktorá je vodorovnou povrchovou priamkou



Obr. 2.1
Maxwellovo kyvadlo

valcovej tyčinky, na ktorej sú vlákna navinuté (obr. 2.2). Vonkajšou silou pôsobiacou na teleso je jeho tiaž mg, a tiež reakcie na sily, ktorými sú napínané závesné vlákna. Tieto reakcie však v pohybovej rovnici nemusíme uvažovať, pretože majú svoje pôsobiská na okamžitej osi rotácie telesa a v dôsledku toho sú ich momenty vzhľadom na túto os rovné nule.



Obr. 2.2.
Bočný pohľad na kyvadl

Pri pohybe v prostredí, ktoré kladie pohybu odpor, musíme medzi vonkajšie sily uvažovať aj odporové sily.

Maxwellovo kyvadlo je vlastne zotrvačník opísaný vyššie a realizovaný v laboratóriu tak, že os zotrvačníka sa môže pohybovať vo zvislom vedení - drážke.

Po uvoľnení zotrvačníka z jeho zvýšenej polohy h_0 zotrvačník klesá, závesné nite sa odvíjajú a jeho polohová energia sa postupne mení na kinetickú. Pri prechode spodnou úvraťou nastáva okamžitá zmena smeru translačného pohybu zotrvačníka - nite sa odvinuli a v dôsledku rotačného pohybu zotrvačníka sa začnú na tyčinku navíjať. Zotrvačník však teraz nevystúpi do pôvodnej výšky h_0, pretože počas jeho pohybu dochádza k energetickým stratám najmä trením a pri deformácii navíjajúcich, resp. odvíjajúcich sa nití. V prvom priblížení môžeme predpokladať, že energetické straty sú úmerné dráhe, ktorú zotrvačník prešiel.

Uvažujme, že zotrvačník po uvoľnení klesne o výšku h. Jeho polohová energia sa zmenšila o mgh, zväčšila sa kinetická energia zotrvačníka a energetické straty.

Platí:

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + Fh = mgh \qquad (2.2)$$

kde v a ω sú okamžité hodnoty rýchlosti ťažiska a uhlovej rýchlosti, I_0 je moment zotrvačnosti zotrvačníka vzhľadom na os rovnobežnú s okamžitou osou otáčania a prechádzajúcou ťažiskom, F je celková odporová sila pôsobiaca na pohybujúci sa zotrvačník.

Pri určovaní charakteristických veličín pohyb zotrvačníka (v, a, s,...) môžeme vychádzať z rovnice (2.1) alebo (2.2). Rozhodli sme sa, že použijeme rovnicu (2.2). Jej úpravou dostaneme

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = (mg - F)h$$

Platí

$$\omega = \frac{v}{r}$$

a teda

$$\left(m + \frac{I_0}{r^2}\right) v^2 = 2(mg - F)h$$

Derivovaním poslednej rovnice podľa času dostaneme

$$\left(m + \frac{I_0}{r^2}\right) 2v \frac{dv}{dt} = 2(mg - F) \frac{dh}{dt}$$

Ak dosadíme

$$\frac{dh}{dt} = v \qquad \text{a} \qquad \frac{dv}{dt} = a_k$$

kde a_k je zrýchlenie ťažiska pri klesaní, dostaneme

$$\left(m + \frac{I_0}{r^2}\right) a_k = mg - F$$

odkiaľ

$$a_k = \frac{r^2(mg - F)}{I_0 + mr^2} \tag{2.3}$$

Rovnaký výsledok dostaneme, ak vychádzame z pohybovej rovnice (2.1). Pri určení momentu vonkajších síl $\vec{M}_0$ musíme pochopiteľne, okrem momentu tiažovej sily vzhľadom na os o, počítať aj s momentom, ktorý vyvolá sila F. Vychádza

$$I\vec{\varepsilon} = rmg\vec{\varrho} - Fr\vec{\varrho} = r(mg - F)\vec{\varrho}$$

kde $\vec{\varrho}$ je jednotkový vektor určujúci kladný smer rotačnej osi orientovaný pred nákresnú rovinu (obr. 2.2). Ďalší výpočet prenecháme čitateľovi.

Zo vzťahu (2.3) vyplýva, že zrýchlenie ťažiska za predpokladu nemennosti sily F je konštantné a za čas t_k zotrvačník prejde pri klesaní dráhu

$$s = \frac{a_k t_k^2}{2} = \frac{mg - F}{2(I_0 + mr^2)} t_k^2$$

odkiaľ

$$I_0 = \frac{(mg - F)r^2}{2} \frac{t_k^2}{s} - mr^2 \tag{2.4a}$$

Vyšetrovaním pohybu zotrvačníka pri jeho stúpaní by sme analogickým spôsobom našli vzťah

$$I_0 = \frac{(mg + F)r^2}{2} \frac{t_v^2}{s} - mr^2 \tag{2.4b}$$

kde t_v je čas potrebný na výstup zotrvačníka po dráhe s.

Po odmeraní všetkých potrebných hodnôt môžeme moment zotrvačnosti vypočítať zo vzťahov (2.4a) a (2.4b).

METÓDA MERANIA

Ak Maxwellovo kyvadlo spustíme z výšky h_0, začne klesať smerom nadol, dosiahne najnižšiu polohu h_z a znovu začne vystupovať nahor. V dôsledku energetických strát vystúpi postupne do výšok h_1, h_2,...,h_i. V prvom priblížení môžeme predpokladať, že energetické straty sú úmerné celkovej dráhe, ktorú zotrvačník prešiel. Ak sa zotrvačník pri svojom prvom stúpaní zastaví vo výške h_1, platí

$$mg(h_0 - h_1) = F(s_0 + s_1) \qquad (2.5)$$

kde

$$s_0 = h_0 - h_z \quad , \qquad s_1 = h_1 - h_z$$

a všeobecne

$$s_i = h_i - h_z$$

V zásade moment zotrvačnosti I_0 a silu F môžeme určiť zo vzťahov (2.4) a (2.5) pomocou nameraných charakteristických hodnôt prislúchajúcich jedinému cyklu klesanie - výstup.

Presnosť výsledku môžeme zvýšiť, ak zmeriame charakteristické hodnoty viacerých cyklov, napr. 10-tich. Pre každý pokles a výstup môžeme napísať rovnicu

$$mg(h_i - h_{i+1}) = F(s_i + s_{i+1})$$

teda celkom 10 rovníc.

Ich sčítaním a úpravou dostaneme

$$F = \frac{mg(h_0 - h_{10})}{s_0 + s_{10} + 2\sum_{i=1}^{9} s_i} \qquad (2.6)$$

Podobne, vychádzajúc zo vzťahov (2.4a) a (2.4b) pre moment zotrvačnosti, dostaneme

$$I_0 = \frac{(mg - F)r^2}{2} \sum_{i=1}^{9} \frac{t_{ki}^2}{s_i} - mr^2 \qquad (2.7a)$$

pre klesanie zotrvačníka a

$$I_0 = \frac{(mg + F)r^2}{2} \sum_{i=1}^{9} \frac{t_{vi}^2}{s_i} - mr^2 \qquad (2.7b)$$

pre výstup zotrvačníka.

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

Meranie robíme na Maxwellovom kyvadle zhotovenom podľa obr.2.1. Hmotnosť m zotrvačníka určíme vážením, priemer 2r tyčinky odmeriame mikrometrom 10-krát na rôznych miestach po oboch stranách zotrvačníka. Na zvislom dĺžkovom meradle určíme najnižšiu polohu (spodnú úvrať) h_z zotrvačníka. Navíjaním nití na osku zdvihneme zotrvačník do základnej výšky h_0 (pozor na vodorovnú polohu osky!). Po uvoľnení zotrvačník striedavo klesá k dolnej a stúpa k horným úvratiam. Na dĺžkovom meradle odčítame postupne výšky h_1, h_2,..., h_{10} desiatich horných úvratí (pozor na paralaxnú chybu pri odčítaní!).

Zotrvačník potom znovu zdvihneme do výšky h_0 a počas jeho pohybu meriame stopkami medzičasy t_{h_1}, t_{h_2},...,$t_{h_{10}}$ pri prechode zotrvačníka hornými úvraťami. Analogicky potom meriame medzičasy t_{z_0}, t_{z_1},..., t_{z_9} pri prechode zotrvačníka spodnou úvraťou. Každé z týchto meraní opakujeme 3-krát, do výpočtov dosadíme aritmetické priemery nameraných hodnôt. Namerané hodnoty zapisujeme do tab. 2.1.

Z nameraných hodnôt určíme dráhy s_0, s_1,..., s_{10} medzi hornými a dolnými úvraťami zotrvačníka a časy t_{k_0}, t_{k_1},...,t_{k_9}, resp. t_{v_1}, t_{v_2},..., $t_{v_{10}}$ potrebné na klesnutie, resp. výstup zotrvačníka po týchto dráhach a zapíšeme do tab. 2.2.

Moment zotrvačnosti zotrvačníka vypočítame zo vzťahov (2.7a) a (2.7b), konštantu F zo vzťahu (2.6).

Tab. 2.1

h_z =

i	h_i (cm)				t_{hi} (s)				t_{zi} (s)			
				AP				AP				AP
0					0	0	0	0				
1												
2												
⋮												
10												

Tab. 2.2

i	0	1	2	...	10
s_i(cm)					
t_{ki}(s)					
t_{vi}(s)					

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Odvoďte dôsledne vzťah (2.4b)!
2. Vyjadrite teoreticky pomer $s_i : s_{i+1}$! Overte na experimentálnych výsledkoch!
3. Aké podmienky by museli byť splnené, aby pohyb kyvadla bol periodický?
4. Ukážte, že dráha s_n je exponenciálnou funkciou poradového čísla n !
5. V percentách celkovej kinetickej energie zotrvačníka W_k vyjadrite jej časti pripadajúce na translačný pohyb a rotačný pohyb zotrvačníka okolo ťažiskovej osi (W_{k_t}, W_{k_r}) !

3. Určenie momentov zotrvačnosti tuhých telies pomocou kyvadla na trifilárnom závese

Určte moment zotrvačnosti vybraných telies.

TEORETICKÝ ÚVOD A METÓDA MERANIA

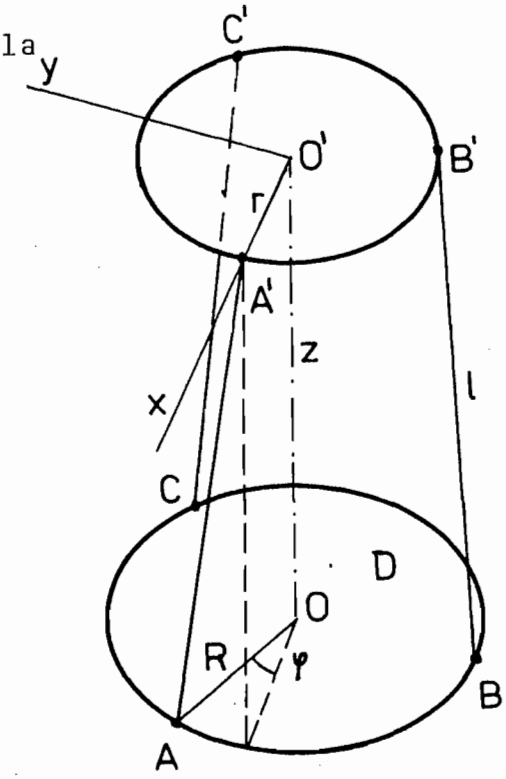
Moment zotrvačnosti I tuhého telesa vzhľadom na nejakú os je definovaný

$$I = \int r^2 \, dm \qquad (3.1)$$

kde r je kolmá vzdialenosť hmotného elementu dm od osi.

V prípade jednoduchých telies možno integrál vo vzťahu (3.1) vypočítať, zatiaľ čo pri zložitých telesách sa moment zotrvačnosti určuje meraním. Jednou z metód merania momentu zotrvačnosti je metóda pomocou kyvadla na trifilárnom závese (obr. 3.1).

Homogénna kruhová doska D je symetricky zavesená na troch rovnako dlhých nitiach AA´, BB´, CC´ tak, že body A, B, C a A´, B´, C´ tvoria vrcholy rovnostranných trojuholníkov s ťažiskami O a O´ nad sebou, ktorými prechádza aj zvislá os otáčania spodnej dosky. Trojuholník A´B´C´ je vo vodorovnej rovine pri kývaní kyvadla nepohyblivý. Vychýlením spodnej



Obr. 3.1 Kyvadlo na trifilárnom závese

dosky D z rovnovážnej polohy o uhol φ vznikne moment síl, ktorý má snahu vrátiť dosku späť do rovnovážnej polohy a po pustení začne kruhová doska vykonávať kmity okolo zvislej osi. Je nutné vypočítať periodu T malých kmitov dosky.

Pri odvodzovaní zanedbáme trenie a deformačnú prácu na skrútenie závesných nití. Ide o pohyb v homogénnom tiažovom poli Zeme, pričom systém je konzervatívny, t.j. zachováva sa jeho celková energia E.

Potenciálnu energiu kladieme nulovú v rovnovážnej polohe. Potom

$$\frac{1}{2} I\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + Mg(z_0 - z) = E \qquad (3.2)$$

kde I je moment zotrvačnosti kruhovej dosky D, M je jej hmotnosť, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ je uhlová rýchlosť otáčania dosky okolo osi OO´, z_0 je vzdialenosť bodov O a O´ v rovnovážnej polohe (pri $\varphi = 0$), $z = z(\varphi) = z\left[\varphi(t)\right]$ je vzdialenosť OO´ ako funkcia φ (resp. času t), E je celková energia systému.

Vypočítajme $z = z(\varphi)$. Kartézsky súradnicový systém zvolíme tak, aby jeho začiatok ležal v bode O´, z-ová os prechádzala od O´ k O. Voľba smeru x-ovej osi je ľubovoľná (v rovine A´B´C´), uhol φ meriame od x-ovej osi. Súradnice bodov A a A´ sú potom $(R\cos\varphi, R\sin\varphi, z)$ a $(r, 0, 0)$, pričom význam symbolov R a r je zrejmý z obr. 3.1. Vzdialenosť AA´, čo je dĺžka nití ℓ, je

$$\ell^2 = (R\cos\varphi - r)^2 + R^2\sin^2\varphi + z^2 \qquad (3.3)$$

odtiaľ

$$z^2 = \ell^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\varphi \qquad (3.4)$$

Z výrazu pre z_0

$$z_0^2 = \ell^2 - R^2 - r^2 + 2Rr$$

(vtedy je $\cos\varphi = 1$) dostaneme

$$z^2 = z_0^2 - 2Rr(1 - \cos\varphi) \tag{3.5}$$

V ďalšom budeme predpokladať, že uhol φ je "malý", takže $\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, a tiež, že

$$\frac{Rr\varphi^2}{z_0^2} \ll 1$$

Pre z dostaneme

$$z = \sqrt{z_0^2 - Rr\varphi^2} = z_0\sqrt{1 - \frac{Rr\varphi^2}{z_0^2}} \doteq$$

$$\doteq z_0\left(1 - \frac{Rr\varphi^2}{2z_0^2}\right) = z_0 - \frac{Rr\varphi^2}{2z_0} \tag{3.6}$$

Po dosadení do (3.2) za z zo vzťahu (3.6) máme rovnicu

$$\frac{1}{2} I \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + Mg\frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E \tag{3.7}$$

Derivovaním rovnice (3.7) podľa času dostaneme pohybovú rovnicu pre malé kmity dosky

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + Mg\frac{Rr}{z_0}\varphi = 0 \tag{3.8}$$

Riešenie rovnice (3.8) možno napísať v tvare (presvedčte sa dosadením)

$$\varphi = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{MgRr}{Iz_0}}\, t + \alpha\right) \tag{3.9}$$

kde amplitúda kmitov φ_0 a uhol α sú dané začiatočnými podmienkami. Pre periodu kmitov T vyplýva z rovnosti (3.9) výraz

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{MgRr}} \qquad (3.10)$$

z ktorého pre moment zotrvačnosti I máme formulu

$$I = kMT^2 \qquad (3.11)$$

kde

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \qquad (3.12)$$

je konštanta prístroja (daná jeho konštrukciou).

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

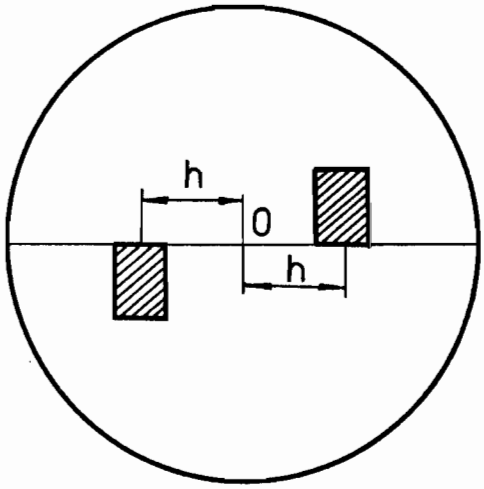
a) Prístroje a pomôcky: kyvadlo na trifilárnom závese, telesá s neznámym momentom zotrvačnosti, stopky (prístroj na meranie času), dĺžkové meradlo, posuvné meradlo, váhy

Vrchný záves kyvadla je prispôsobený na rozkývanie kyvadla pomocou dvoch medzikruhov, ktorých vzájomné pootočenie možno merať v dielikoch (1 dielik = 4^0). Pri meraní používajte výchylku maximálne 1,5 dielika.

b) Postup práce:

1. Odmerajte z_0 R a r a vypočítajte konštantu prístroja k. Nájdite veľkosť chyby s_k.
2. Určte moment zotrvačnosti I_0 základnej kruhovej dosky z odmeranej doby kmitu kyvadla a porovnajte ho s vypočítanou hodnotou ak viete, že doska s polomerom R_0 je homogénna a jej hmotnosť M_0 je udaná na prístroji. Počet kmitov potrebných na určenie T určí vedúci cvičenia (tab. 3.1).

3. Z definície vyplýva, že moment zotrvačnosti je aditívna veličina, t.j. moment zotrvačnosti dvoch navzájom pevne spojených telies je súčtom ich momentov zotrvačnosti vzhľadom na tú istú os otáčania. Na základe tejto vlastnosti určte moment zotrvačnosti I_1 kruhovej dosky s otvormi (tab. 3.2).
4. Umiestnite na základnú dosku do stredu dva olovené kvádre nastojato a proti sebe, ktoré budete postupne posúvať k okrajom dosky symetricky voči stredu tak, aby ste mohli zmerať závislosť $T = f(h)$, kde h je vzdialenosť stredov spodných hrán kvádrov od stredu dosky (obr. 3.2).



Obr. 3.2 Pohľad zhora na základnú dosku s posunutými hranolmi

Na meranie h používajte kružnice na základnej doske, ktorých vzdialenosť je 1 cm.

Použitím Steinerovej vety odvodíme pre štvorec doby kmitu T základnej dosky s kvádrami vzťah

$$T^2 = a + bh^2 \qquad (2.13)$$

kde

$$b = \frac{M_{kv}}{k(M_0 + M_{kv})} \qquad (3.14)$$

Zo vzťahu (3.14) možno vypočítať hmotnosť obidvoch kvádrov M_{kv} zo známej smernice b

$$M_{kv} = \frac{bk}{1 - bk} M_0 \qquad (3.15)$$

a túto porovnať s jej nameranou hodnotou. Určte M_{kv} zo vzťahu (3.15) a zistite, o koľko percent sa líši od jej hodnoty určenej vážením. Na výpočet veličiny b použite vzťah (13) z kapitoly "Metódy spracovania...". Kvôli kontrole vyneste na milimetrový papier závislosť medzi T^2 a h^2 a porovnajte vypočítanú hodnotu smernice b s odčítanou z tohto grafu (tab. 3.3).

Tab. 3.1

M_0 =

i					
50 T_0 (s)					

Tab. 3.2

M_1 =

i					
50 T_1 (s)					

Tab. 3.3

i	

OTÁZKY A

1. Pri a
2. Možno
   teles
   ky D
3. Rozho
   doby
   (vted
   poloh
4. Ktor
   musím
5. Čo t

Tab. 3.3

i	h (cm)	50 T (s)	h^2 (cm^2)	T^2 (s^2)

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Pri akých zjednodušeniach bola odvodená formula (3.11) pre I?
2. Možno uvedenú metódu použiť na určenie momentu zotrvačnosti telesa, ktorého ťažisko neleží na osi otáčania základnej dosky D?
3. Rozhodnite, v ktorom z nasledujúcich prípadov bude meranie doby kmitu presnejšie: čas odčítame pri maximálnej amplitúde (vtedy $\frac{d\varphi}{dt} = 0$), alebo pri prechode kyvadla cez rovnovážnu polohu ($\frac{d\varphi}{dt}$ je maximálna)!
4. Ktorú z potrebných veličín na určenie momentu zotrvačnosti musíme merať čo najpresnejšie?
5. Čo tvrdí Steinerova veta?

4. Matematické kyvadlo

Vyšetrite závislosť doby kmitu matematického kyvadla od výchylky. Z nameranej závislosti určte dobu kmitu T(0 ^{o}) a hodnotu tiažového zrýchlenia g v laboratóriu.

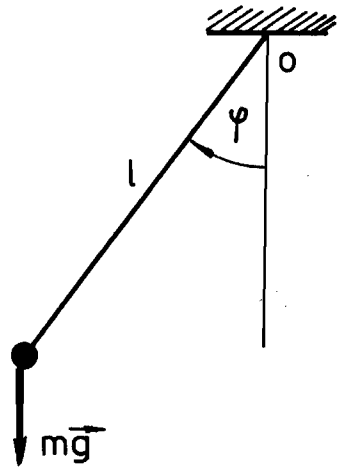
TEORETICKÝ ÚVOD

Matematické kyvadlo je idealizovaný mechanický oscilátor, pozostávajúci z bodu s hmotnosťou m zavesenom na nehmotnej niti s dĺžkou ℓ (obr. 4.1).

Pohybová rovnica fyzikálneho i matematického kyvadla je totožná s rovnicou opisujúcou pohyb telesa okolo osi, ktorá neprechádza ťažiskom

$$\vec{M} = I\,\vec{\varepsilon} \qquad (4.1)$$

kde I je moment zotrvačnosti pohybujúceho sa telesa vzhľadom na os O. Pre kyvadlo na obr. 4.1 bude mať rovnica (4.1) tvar



Obr. 4.1
Matematické kyvadlo

$$I\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\,\ell\,\sin\varphi \qquad (4.2)$$

kde ℓ je dĺžka závesu matematického kyvadla.

Kyvadlo bude vykonávať harmonický pohyb len pri malých výchylkách z rovnovážnej polohy, keď sila udržiavajúca kyvadlo

v pohybe je úmerná okamžitej výchylke z rovnovážnej polohy a smeruje proti nej. Vtedy $\sin\varphi \doteq \varphi$ a rovnica (4.2) sa zjednoduší a bude mať tvar

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\ell \qquad (4.3)$$

Riešením rovnice (4.3) je harmonická funkcia

$$\varphi(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t) \qquad (4.4)$$

kde

$$\omega_0^2 = \frac{mg\ell}{I} = \frac{mg\ell}{m\ell^2} = \frac{g}{\ell}$$

Ak začiatok počítania času zvolíme v okamihu maximálnej výchylky φ_0 kyvadla, môžeme pohyb kyvadla opísať funkciou

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega_0 t)$$

Doba kmitu T_0 pre malé uhly φ_0 (do 5^0) je potom daná vzťahom

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \qquad (4.5)$$

a nezávisí od výchylky φ_0.

METÓDA MERANIA

Pohyb v laboratóriu realizovaného "matematického kyvadla" nie je netlmený harmonický pohyb, ale uplatňuje sa tlmenie kyvadla brzdením v prostredí pohybu a pri väčších výchylkách kyvadla z rovnovážnej polohy pohyb kyvadla už nie je prísne harmonický a jeho pohybový stav opisuje rovnica (4.2). Jej riešením dostaneme pre dobu kmitu kyvadla vzťah

$$T(\varphi_0) = T_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right] \quad (4.6)$$

kde T_0 je doba kmitu pri výchylkách $\varphi_0 \longrightarrow 0^0$.

Pre praktické meranie postačuje uvažovať prvé dva členy v zátvorke na pravej strane vzťahu (4.6), takže doba kmitu $T(\varphi_0)$ bude daná vzťahom

$$T(\varphi_0) = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right) \quad (4.7)$$

Vplyv tlmenia sa prejaví v zmenšovaní sa výchylky s časom i zmenou uhlovej frekvencie podľa vzťahov

$$\varphi(t) = \varphi_0 \, e^{-bt} \cos(\omega t)$$
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \quad (4.8)$$

kde b je koeficient útlmu, pre ktorý platia vzťahy

$$\ln \frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T)} = bT$$

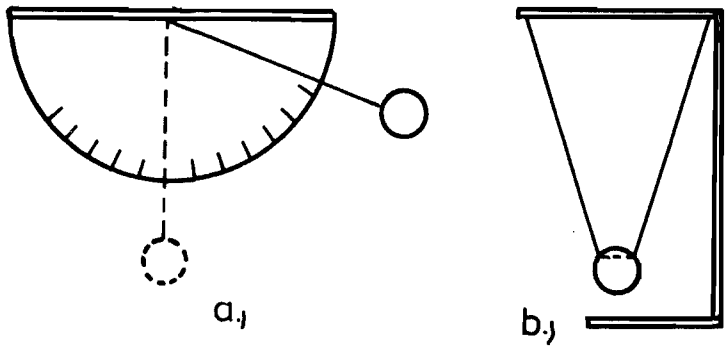
alebo

$$b = \frac{\ln \dfrac{\varphi(t_1)}{\varphi(t_2)}}{t_2 - t_1}$$

kde T je doba kmitu tlmených kmitov, $\varphi(t_1)$ a $\varphi(t_2)$ sú amplitúdy kmitov odmerané v časoch t_1 a t_2.

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) Prístroje a pomôcky: matematické kyvadlo - realizované guľôčkou zavesenou na dvojitom vlákne, čím zabezpečíme, že kyvadlo kmitá v rovine rovnobežnej s rovinou uhlomeru (obr. 4.2), presné stopky, dĺžkové meradlo



Obr. 4.2 Model matematického kyvadla

b) Postup práce:

1. Odmerajte dobu kmitu T_0 pre malé výchylky kyvadla ($\varphi_0 \sim 5^0$). Merajte dobu 50-tich kmitov niekoľkokrát (Tab. 4.1) a vypočítajte aritmetický priemer. Odmerajte vzdialenosť ℓ.
2. Pre uhly 10^0 - 50^0 odmerajte závislosť $T(\varphi_0)$ (tab. 4.2) a porovnajte ju s teoretickou závislosťou podľa vzťahu (4.7).
3. Pre amplitúdu $\varphi_0 = 50^0$ odmerajte výchylku po 50-tich kmitoch a vypočítajte koeficient útlmu b; odmerajte aj dobu kmitu T tlmených kmitov.

Vyhodnotenie:

Na základe merania č. 1 vypočítajte hodnotu tiažového zrýchlenia g použitím vzťahu (4.5).

Extrapoláciou závislosti $T(\varphi_0)$ alebo lineárnej závislosti $T(\sin^2\frac{\varphi_0}{2})$ určte $T(0^o)$ a pomocou nej vypočítajte hodnotu tiažového zrýchlenia g. Porovnajte tento výsledok s hodnotou určenou z merania č. 1 a v obidvoch prípadoch určte relatívnu chybu merania použijúc hodnotu $g_B = 9{,}806\ m.s^{-2}$ pre Bratislavu.

Tab. 4.1

$\ell =$

i	1	2	3	
50 T_0 (s)				

Tab. 4.2

φ_0	2 T (s)										T (s)	$\frac{\varphi_0}{2}$	$\sin^2\frac{\varphi_0}{2}$
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			

OTÁZKY a PROBLÉMY

1. Ktorá poloha - krajná alebo rovnovážna - je výhodnejšia na meranie doby kmitov a prečo?
2. Aký tvar tlmiacej sily prepokladáme v prípade, ktorý vedie k vzťahu (4.8)?

5. Skladanie kolmých kmitov

Pomocou akustického interferometra určte rýchlosť šírenia zvuku vo vzduchu pri izbovej teplote.

TEORETICKÝ ÚVOD

Keď na horizontálnu a vertikálnu vychyľovaciu sústavu osciloskopu privedieme striedavé napätie napríklad sínusového priebehu, na obrazovke môžeme pozorovať obrazce skladania na seba kolmých kmitov. Ak uhlové frekvencie kmitov ω_1 a ω_2($f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$, $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$ sú frekvencie striedavých napätí) sú rovnaké, rovnice kmitov budú mať tvar

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$y = y_0 \sin(\omega t + \varphi_2) \qquad (5.1)$$

kde x_0 a y_0 sú amplitúdy kmitov a φ_1 a φ_2 fázové konštanty. Tvar obrazca na obrazovke závisí od rozdielu fáz $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Ak $\Delta\varphi = k\pi$, kde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, rovnice kmitov budú mať tvar

$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$y = y_0 \sin(\omega t + \varphi_1 - k\pi) = \pm y_0 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

Z podielu rovníc dostaneme rovnicu priamky

$$y = \pm \frac{y_0}{x_0} x \qquad (5.2)$$

Obrazec na obrazovke bude mať teda tvar sklonenej úsečky, ktorej smernica má hodnotu $\pm \frac{y_0}{x_0}$

Ak $\Delta\varphi = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, kde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, potom

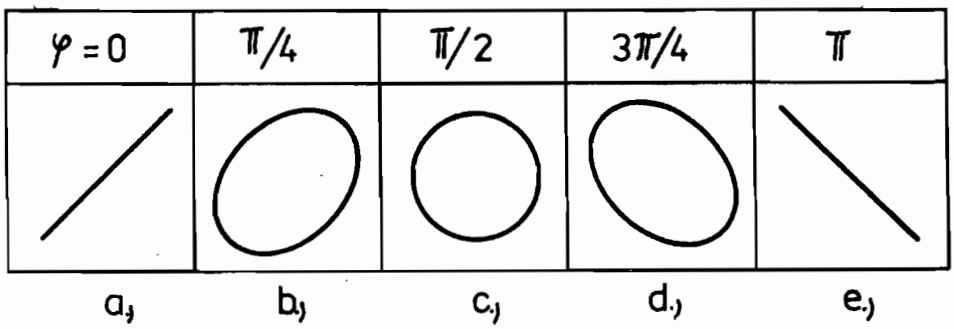
$$x = x_0 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = y_0 \sin\left[\omega t + \varphi_1 - (2k + 1)\frac{\pi}{2}\right] = \pm y_0 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

Umocnením a sčítaním týchto rovníc dostaneme

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1 \qquad (5.3)$$

čo je rovnica elipsy s osami v smeroch súradnicových osí. Pre iné fázové rozdiely budú mať obrazce tvar elipsy s osami sklonenými. Niektoré špeciálne prípady pre rovnaké amplitúdy $x_0 = y_0$ sú na obr. 5.1.



Obr. 5.1 Obrazce, ktoré vznikli skladaním na seba kolmých kmitov s rovnakými amplitúdami pre niektoré fázové rozdiely

METÓDA MERANIA

V tesnej blízkosti reproduktora, použitého v tejto úlohe vo funkcii zdroja zvuku, možno kmitanie vzduchu vyjadriť rovnicou

$$u = u_0 \sin(\omega t)$$

formálne totožnou s rovnicou striedavého napätia z napájacieho zdroja reproduktora. Akustické kmity registrujeme mikrofónom, ktorý ich mení na kmity elektrické (predpokladáme, že fázové posunutia sa následkom elektrickej transformácie nemenia). Ak privedieme napájacie napätie reproduktora napríklad na horizontálnu os osciloskopu a výstup mikrofónu na os vertikálnu, pozorujeme na obrazovke interferenčné obrazce zodpovedajúce fázovému rozdielu obidvoch kmitov. Možno nájsť takú vzdialenosť polôh mikrofónu od reproduktora d_1, pri ktorej pozorujeme napríklad sklonenú úsečku (obr. 5.1a). Pri postupnom vzďaľovaní mikrofónu od reproduktora pozorujeme postupne obrazce podobné ako na obr. 5.1b, 5.1c, 5.1d, atď. až vo vzdialenosti d_2 sa objaví opäť úsečka sklonená vľavo. Fáza výstupu z mikrofónu sa zmenila o $\Delta\varphi = 2\pi$, a teda rozdiel $d_2 - d_1$ sa rovná vlnovej dĺžke λ, t.j.

$$d_2 - d_1 = \lambda$$

Zo vzťahu

$$v = f\lambda$$

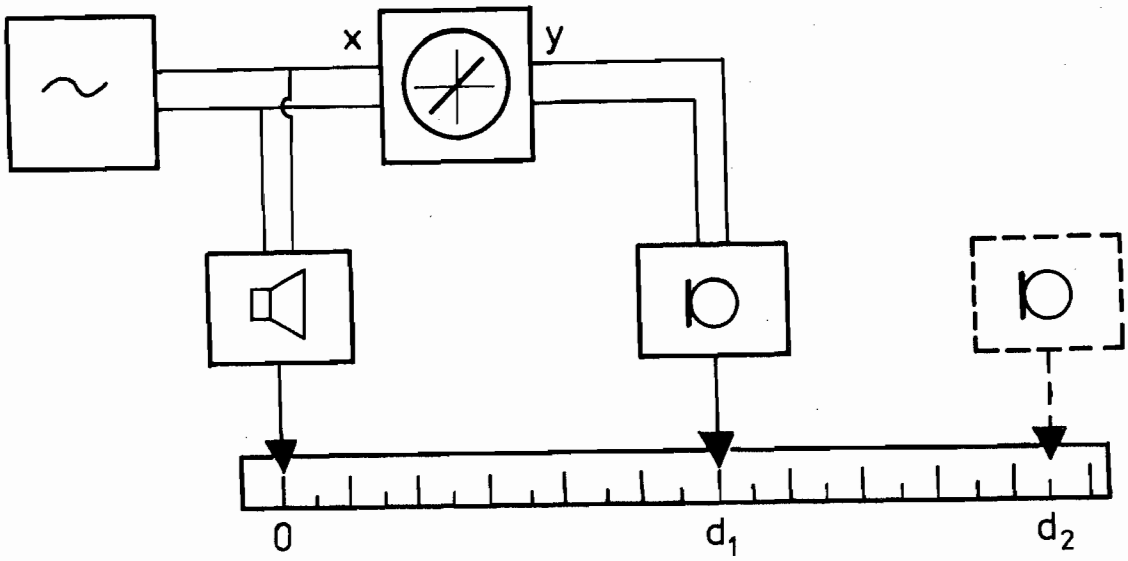
kde f je frekvencia zvukovej vlny, možno z nameranej hodnoty $d_2 - d_1$ vypočítať hodnotu rýchlosti šírenia zvuku v danom prostredí.

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) Prístroje a pomôcky:

Akustický interferometer je principiálne zobrazený na obr. 5.2. Skladá sa z tónového generátora, osciloskopu, reproduktora, mikrofónu a lavice, po ktorej sa tento môže pohybovať. Reproduktor

napájaný z laditeľného zdroja sínusového napätia akustických frekvencií je zdrojom zvukových vĺn, ktoré sa registrujú mikrofónom, transformujú sa ním na elektrické kmity a privádzajú sa na vertikálnu vychyľovaciu sústavu osciloskopu. Na horizontálnu sústavu sa privádza priamo striedavé napätie z tónového generátora.



Obr. 5.2 Schéma akustického interferometra

b) Postup merania:

Praktické meranie spočíva v nájdení najbližších polôh mikrofónu, v ktorých sú obrazce na obrazovke rovnaké (napríklad vľavo sklonená úsečka). Ak chceme vlnovú dĺžku určiť čo najpresnejšie, je potrebné mikrofón posunúť o viac vlnových dĺžok a merať pri väčších vzdialenostiach od zdroja vlnenia. Meriame pri rôznych frekvenciách v rozsahu 10 - 15 kHz. Namerané hodnoty zaznamenávame do tab. 5.1 a zo získaných hodnôt rýchlosti zvuku pri jednotlivých frekvenciách urobíme aritmetický priemer.

Výsledok porovnáme s tabuľkovou hodnotou rýchlosti zvuku vo vzduchu pri danej teplote vzduchu v laboratóriu

$$v = 331\sqrt{\frac{T}{T_0}} \quad m.s^{-1}$$

kde T_0 = 273,16 K a T je absolútna teplota v laboratóriu.

Tab. 5.1

f (kHz)	d_1 (cm)	d_2 (cm)	$\frac{\Delta\varphi}{2\pi}$	$d_2 - d_1$ (cm)	λ (cm)	v ($m.s^{-1}$)

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Opíšte javy vznikajúce pri skladaní kolmých kmitov s rôznymi kruhovými frekvenciami!
2. Vysvetlite, prečo sa sklon úsečiek v polohách líšiacich sa fázovo o 2π pri postupnom vzďaľovaní mikrofónu od reproduktora mení!
3. Ako by bolo možné demonštrovať skladanie kolmých kmitov pomocou dvoch kyvadiel?

6. Meranie rýchlosti zvuku

Metódou rezonancie odmerajte rýchlosť zvuku vo vzduchu.

TEORETICKÝ ÚVOD

Zvukom nazývame každé vlnenie hmotného prostredia, o ktorom sa môžeme presvedčiť sluchom. Najčastejšie máme na mysli šírenie zvuku v plynoch. V nich sa zvuk šíri ako postupné pozdĺžne vlnenie. Rýchlosť šírenia zvuku závisí od fyzikálnych vlastností hmotného prostredia, v ktorom sa zvuk šíri. V homogénnom prostredí je rýchlosť zvuku konštantná. Kvôli jednoduchosti sa budeme zaoberať harmonickým vlnením.

Ak harmonické vlnenie, ktoré sa šíri pozdĺž priamky, dopadá na pevnú stenu, odrazí sa od nej s opačnou fázou - vzniká odrazené vlnenie, ktoré sa šíri proti vlneniu dopadajúcemu. Za predpokladu, že sa amplitúda vlnenia v danom prostredí ani po odraze nezmení, môžeme pre výchylku dopadajúceho vlnenia u_1 a pre výchylku odrazeného vlnenia u_2 v mieste x a v čase t písať

$$u_1 = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c}\right)$$
$$u_2 = A \sin \omega \left(t + \frac{x}{c}\right) \qquad (6.1)$$

kde c je rýchlosť šírenia vlnenia.

Interferenciou dopadajúceho a odrazeného vlnenia vznikne vlnenie, ktorého výchylka je daná, podľa princípu superpozície, súčtom výchyliek skladaných vlnení, teda

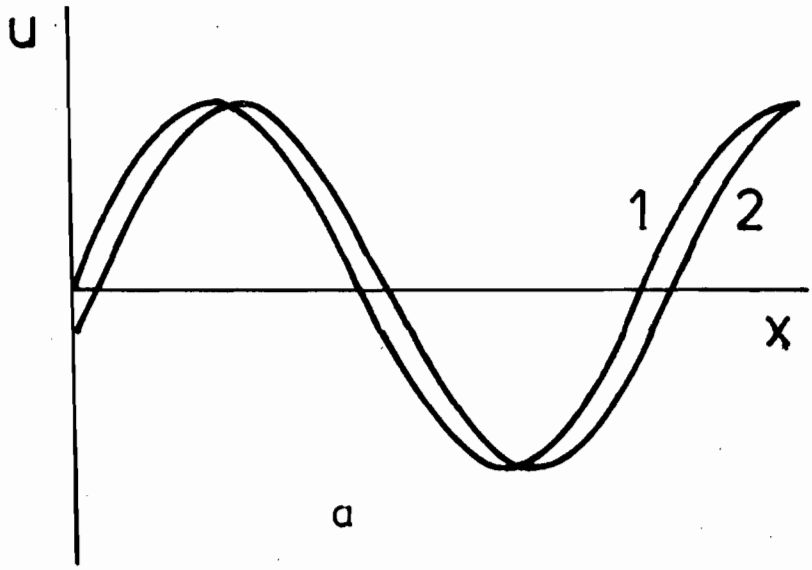
$$u = u_1 + u_2 = 2A \cos\left(\omega \frac{x}{c}\right) \sin(\omega t) \qquad (6.2)$$

Výsledné vlnenie nazývame stojatým vlnením. Od postupného vlnenia sa stojaté vlnenie líši tým, že:

a) pri postupnom vlnení je amplitúda konštantná, t.j. všetky elementy prostredia kmitajú s rovnakou amplitúdou, kým pri stojatom vlnení je amplitúda funkciou x, t.j. elementy kmitajú s rôznymi amplitúdami,

b) pri postupnom vlnení je fáza funkciou x a t, t.j. rôzne elementy majú v tom istom čase rôznu fázu, pri vlnení stojatom je fáza len funkciou času t, t.j. všetky elementy majú v tom istom čase rovnakú fázu.

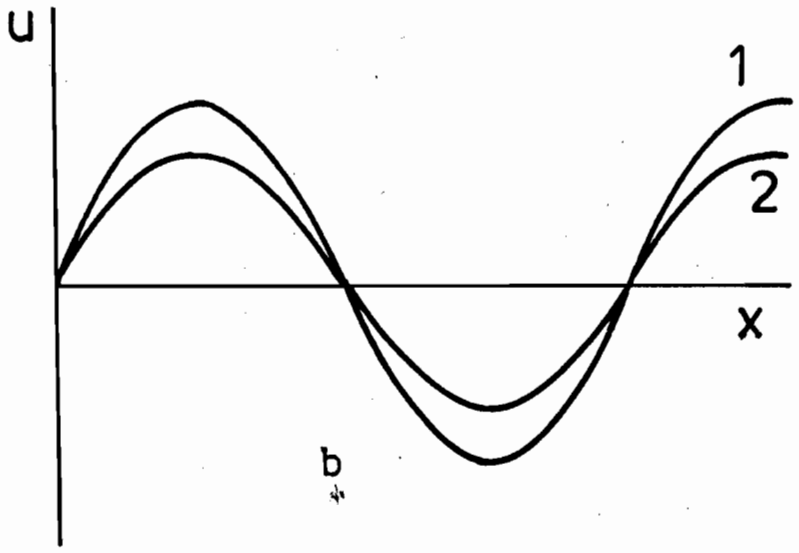
Na obr. 6.1b je znázornená grafická závislosť výchylky stojatého vlnenia od súradnice x v dvoch okamihoch: krivka 1 platí pre čas $t = t_1$ a krivka 2 pre čas $t = t_2$. (Porovnaj s grafom pre postupné vlnenie na obr 6.1a).)



Obr. 6.1a Postupné vlnenie

Miesta, v
málnymi am
nulové, sú
dialenosť
pričom λ j
ciou vznik
stojaté vl
Rozhranie
vždy uzol
Z toho vyp
ohraničeno
ku ℓ pros
platiť

z čoho



Obr. 6.1b Stojaté vlnenie

Miesta, v ktorých pri stojatom vlnení kmitajú elementy s maximálnymi amplitúdami, sú kmitne; miesta, v ktorých sú amplitúdy nulové, sú uzly. Vzdialenosť dvoch susedných uzlov je $\frac{\lambda}{2}$ a vzdialenosť po sebe idúcich uzla a kmitne, alebo naopak, je $\frac{\lambda}{4}$, pričom λ je vlnová dĺžka postupných vlnení, ktorých interferenciou vzniklo stojaté vlnenie. Hmotné prostredie, v ktorom vzniká stojaté vlnenie, býva najčastejšie ohraničené z obidvoch strán. Rozhranie môže byť pevné alebo voľné. Na pevnom rozhraní vzniká vždy uzol stojatého vlnenia, na voľnom rozhraní vzniká kmitňa. Z toho vyplýva, že ak sa má vytvoriť stojaté vlnenie v prostredí ohraničenom z obidvoch strán pevným rozhraním, musí na celú dĺžku ℓ prostredia pripadať celočíselný počet polvĺn, teda musí platiť

$$\ell = \frac{\lambda}{2}$$

z čoho

$$\lambda = \frac{2\ell}{n} \qquad (6.3)$$

Ak sa má stojaté vlnenie vytvoriť v prostredí ohraničenom jedným pevným a jedným voľným rozhraním, musí na celú dĺžku prostredia pripadať nepárny počet štvrťvĺn, a teda musí platiť

$$\ell = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}$$

z čoho

$$\lambda = \frac{4\ell}{2n + 1} \qquad (6.4)$$

Každej vlnovej dĺžke λ, ktorá vyhovuje podmienke (6.3), resp. (6.4), prislúcha podľa vzťahu

$$c = \lambda f \qquad (6.5)$$

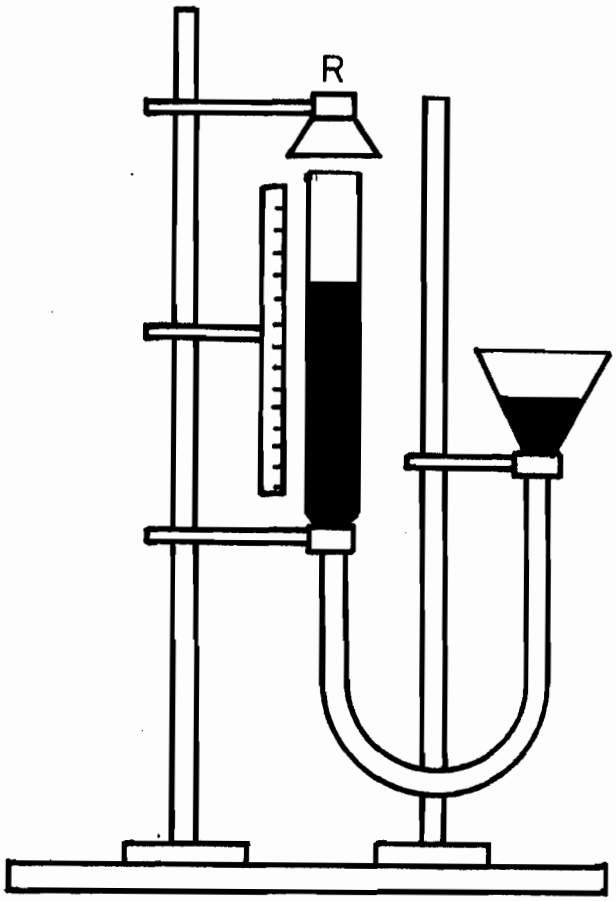
istá frekvencia. Pretože tieto frekvencie sú závislé od fyzikálnych vlastností prostredia (rýchlosť c vystupujúca vo vzťahu (6.5) je funkciou týchto vlastností), nazývame ich vlastnými frekvenciami daného prostredia a príslušné kmity elementov vlastnými kmitmi.

Špeciálnym prípadom ohraničených prostredí sú vzduchové stĺpce v trubiciach uzavretých na jednom alebo obidvoch koncoch - tzv. rezonátoroch. Ak dáme do blízkosti rezonátora tónový zdroj, šíri sa zvuk aj vzduchovým stĺpcom rezonátora, pričom v ňom vznikajú vynútené harmonické kmity, ktoré sa šíria prostredím. Frekvencia vynútených kmitov, tzv. vynútená frekvencia, sa rovná frekvencii tónového zdroja. Amplitúda vynútených kmitov závisí od toho, v akom pomere je vynútená frekvencia k niektorej z vlastných frekvencií rezonátora. Ak sa vynútená frekvencia rovná niektorej z vlastných frekvencií rezonátora, je amplitúda vynútených kmitov maximálna - nastáva rezonancia. Podmienka

vzniku rezonancie je však súčasne aj podmienkou toho, aby v rezonátore vzniklo stojaté vlnenie. Pri rezonancii má teda vynútené vlnenie tvar harmonického stojatého vlnenia s vlastnosťami uvedenými v predchádzajúcom.

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

Metóda rezonancie pre meranie rýchlosti šírenia zvuku je metóda nepriama, založená na meraní vlnovej dĺžky a frekvencie šíriaceho sa tónu. Rýchlosť zvuku určíme zo vzťahu (6.5). Vlnovú dĺžku zvoleného tónu meriame v rezonátore (obr. 6.2). Horná časť otvorenej sklenenej trubice je naplnená vzduchom, dolná časť je naplnená vodou a spojená hadicou s vodnou nádržkou, ktorú možno posúvať v zvislom smere. Tak možno meniť výšku vodnej hladiny v trubici, a teda aj dĺžku vzduchového stĺpca nad ňou. Zdrojom zvuku je reproduktor R pripojený k tónovému generátoru, ktorým možno nastavovať tóny známej frekvencie. Pri danej frekvencii zdroja môže nastať rezonancia vzdušného stĺpca pri tých



Obr. 6.2 Rezonátor

jeho dĺžkach, ktoré vyhovujú podmienke (6.4), pretože vzduchový stĺpec predstavuje hmotné prostredie ohraničené jedným pevným rozhraním (hladina kvapaliny) a jedným voľným rozhraním (okolitý vzduch na konci trubice). Rezonancia sa prejaví výrazným zosilnením zvuku vysielaného reproduktorom. Ak sa na tónovom generátore nastaví konštantná frekvencia, je splnená podmienka (6.4) pri viacerých polohách vodnej hladiny. Pretože sa pritom vytvorí na pevnom rozhraní na hladine vody vždy uzol stojatého vlnenia, vzdialenosť dvoch susedných polôh hladiny, pri ktorých nastala rezonancia, sa rovná dĺžke polvlny šíriaceho sa zvukového vlnenia.

a) Prístroje a pomôcky: zariadenie podľa obr. 6.2, tónový generátor

b) Postup práce:

Na tónovom generátore nastavíme tón s istou frekvenciou, ktorej hodnotu zapíšeme do tab. 6.1. Posúvaním vodnej nádržky zistíme, pri koľkých polohách vodnej hladiny nastane maximálne zosilnenie vysielaného tónu, t.j. rezonancia vzduchového stĺpca. Prvú a poslednú polohu hladiny pri rezonancii odčítame na bočnom meradle. Počet rezonancií a krajné polohy hladiny zapisujeme do tab. 6.1. Meriame pre niekoľko frekvencií v intervale 800 - 1 500 Hz.

Tab. 6.1

f (Hz)	Krajné polohy pri rezonancii		Rozdiel $h=h_2-h_1$	Počet rezonancií	λ (cm)	c ($m.s^{-1}$)
	h_1	h_2				

c) **Vyhodnotenie:**

Ak je počet pozorovaných rezonancií n a vzdialenosť krajných polôh h, pripadá na túto dĺžku n-1 polvĺn, teda platí

$$h = (n - 1)\frac{\lambda}{2}$$

odkiaľ

$$\lambda = \frac{2h}{n - 1}$$

Pre každú frekvenciu vypočítajte vlnovú dĺžku λ podľa predchádzajúcej rovnice a rýchlosť zvuku c podľa vzťahu (6.5). Z takto vypočítaných hodnôt vypočítajte aritmetický priemer.

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Aká podmienka musí byť splnená, ak sa má vytvoriť stojaté vlnenie v prostredí ohraničenom dvomi pevnými rozhraniami?
2. Od čoho závisí rýchlosť šírenia zvuku vo vzduchu?
3. Odhadnite dĺžku trubice, ktorú by sme potrebovali, ak by sme horeuvedenou metódou chceli merať pri frekvencii $\sim$ 300 Hz! (Predpokladajte, že rýchlosť zvuku je $\sim$ 300 $m.s^{-1}$.)

7. Meranie teploty

Pomocou platinového odporového teplomeru odmerajte závislosť odporu termistorového teplomera a závislosť termoelektromotorického napätia termočlánku od teploty.

TEORETICKÝ ÚVOD

Meranie teploty je snáď najrozšírenejším fyzikálnym meraním. Je potrebné prakticky vo všetkých oblastiach ľudskej činnosti.

Najvšeobecnejšie definovaná termodynamická teplotná stupnica je zavedená pomocou účinnosti vratného Carnotovho cyklu (viď: Krempaský J.: Fyzika). Nezávisí od druhu pracovnej látky tepelného stroja a jej začiatok je tzv. absolútna nula teploty. Pretože sa vratný proces nedá dostatočne presne realizovať, pre praktické potreby je nutné využiť iný proces, ktorý sa riadi termodynamickou teplotou. Pre normálové meranie bol medzinárodne dohodnutý tzv. plynový teplomer. Umožňuje veľmi presné meranie, ale jeho prevádzka je veľmi náročná. Pre merania teploty v laboratórnych a prevádzkových podmienkach, ktoré nevyžadujú extrémnu presnosť, bola medzinárodne dohodnutá sústava sekundárnych teplotných bodov, t.j. istý sled teplotných stavov, ktorým boli priradené číselné hodnoty. Neúplný výber bodov medzinárodnej praktickej teplotnej stupnice je v nasledujúcej tabuľke (údaje sú vzťahované na normálny tlak 1,013 25.10^5 Pa).

Bod varu vodíka	- 252,87 ^oC	20,28 K
Bod varu neónu	- 246,048 ^oC	27,102 K

Trojný bod kyslíka	- 218,789 °C	54,361 K
Bod varu kyslíka	- 182,962 °C	90,188 K
Trojný bod vody	0,010 °C	273,160 K
Bod varu vody	100,000 °C	373,150 K
Bod tuhnutia zinku	419,580 °C	692,730 K
Bod tuhnutia striebra	961,930 °C	1 235,080 K
Bod tuhnutia zlata	1 064,480 °C	1 337,580 K

Medzinárodnou dohodou je tiež predpísaný spôsob merania v jednotlivých teplotných intervaloch. Pre meranie do bodu tuhnutia Sb (903,89 K) je predpísaný platinový odporový teplomer, medzi bodom tuhnutia Sb a bodom tuhnutia Au (1 337,58 K) termočlánok so zložením Pt-PtRh a nad bodom tuhnutia Au sú to pyrometre.

Pri meraní teploty využívame závislosť elektrického odporu od teploty (odporové teplomery), závislosť termoelektromotorického napätia od teploty (termočlánky), zákony žiarenia absolútne čierneho telesa (pyrometre). Veľmi často sa používajú teplomery založené na rozťažnosti kvapalných a tuhých látok a napokon teplomery založené na iných princípoch.

1. Odporové teplomery

Zakladajú sa na skutočnosti, že elektrický odpor rôznych materiálov závisí od teploty. Možno použiť kovy alebo polovodiče. Pre závislosť elektrického odporu od teploty pre kovy platí približne vzťah

$$R = R_0(1 + at + bt^2) \qquad (7.1)$$

kde R_0 je hodnota odporu pri 0 ^oC, a, b sú konštanty, ktoré možno určiť normálovým meraním. Zo všetkých kovov je najvhodnejšia platina, pretože je dostupná v čistej forme, je ľahko spracovateľná a jej vlastnosti nezávisia od vonkajších podmienok. Závislosť jej elektrického odporu od teploty je stála a reprodukovateľná. Platinový odporový teplomer pre normálové merania má teplotnú závislosť stanovenú medzinárodnou normou (tabuľka tejto závislosti je priložená k laboratórnej úlohe). Ďalšie používané odporové materiály sú Fe, Ni, Cu, Co, Ag, Au, W, Mo. Výhodou týchto odporových teplomerov je ich veľká stabilita a možnosť diaľkového prenosu údajov o teplote, čo je dôležité napríklad pri automatizovaní rôznych technologických procesov. Horná hranica presnosti je až 10^{-4} stupňa.

Druhú skupinu odporových teplomerov predstavujú termistory. Sú vyrábané z polovodičových materiálov, ktorých odpor silne závisí od teploty

$$R = R_0 \exp\left(\frac{\Delta W}{kT}\right) \tag{7.2}$$

kde R_0 je predexponenciálny faktor, ΔW je aktivačná energia elektrickej vodivosti G ($G = \frac{1}{R}$), k je Boltzmannova konštanta, T je vnútorná teplota termistora v kelvinoch. Odpor termistora s rastúcou teplotou exponenciálne klesá. V termistoroch sa používajú oxidy alebo sulfidy Mn, Ni, Co, Ti, Cu, Zn atď. Vynikajú citlivosťou, ktorá je 10-krát väčšia než u odporových teplomerov. Na druhej strane majú ale menšiu stabilitu a reprodukovateľnosť. Ich menšia presnosť je naviac zhoršovaná možnosťou skreslenia údajov samoohrevom od Jouleových strát (RI^2).

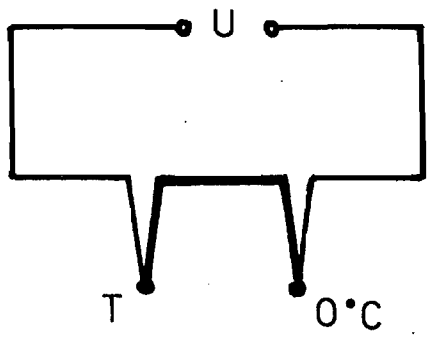
Termistory sa najčastejšie používajú v teplotnom rozsahu od - 100 ^{o}C do 300 ^{o}C. Boli vyrobené i zvláštne termistory pracujúce pri extrémne nízkych teplotách (4,2 K) a pri teplotách nad 1 600 ^{o}C.

2. Termočlánky

Meranie teploty pomocou termočlánkov je založené na objave starom takmer 170 rokov. V roku 1821 nemecký vedec Seebeck objavil, že keď sú dva spoje dvoch rôznych kovových drôtov umiestnené do prostredí s rôznou teplotou, generuje sa termoelektromotorické napätie, ktoré závisí od teplotného rozdielu spojov (obr. 7.1). Ak je jeden spoj umiestnený do termostatu, v ktorom sa udržuje teplota 0 ^{o}C (referenčný spoj), možno závislosť termoelektromotorického napätia od teploty druhého spoja vyjadriť ako

$$U = a + bt + ct^2 \qquad (7.3)$$

kde konštanty a, b, c sa pre daný termočlánok určia meraním.



Obr. 7.1 Termočlánok

Z používaných termočlánkov je najdôležitejší platinovo - ródiový termočlánok. Merací spoj tvorí drôt z čistej platiny a drôt

je zo zliatiny 90 % Pt a 10 % Rh. Pt - PtRh termočlánok je pre svoju vysokú presnosť a reprodukovateľnosť kalibračnej krivky predpísaný pre normálové merania. Jeho nevýhodou je pomerne malá citlivosť ($\sim 10\ \mu V.K^{-1}$). Z citlivejších termočlánkov spomenieme železo - konštantánový termočlánok a meď - konštantánový termočlánok, ktoré sa široko uplatňujú v laboratórnej praxi a v priemyselných prevádzkach.

3. Pyrometre

Pre meranie veľmi vysokých teplôt sa používajú optické pyrometre. Ich činnosť je založená na tom, že telesá zahriate na vysokú teplotu vyžarujú energiu nezávisle od druhu materiálu a že dve takéto telesá pôsobia rovnakým farebným dojmom na ľudské oko, ak majú rovnakú teplotu. S pyrometrom sa bližšie zoznámite v úlohe č. 22.

4. Ortuťové a liehové teplomery

V každodennom živote najpoužívanejšími teplomermi sú teplomery ortuťové a liehové, ktoré využívajú objemovú rozťažnosť kvapalných látok. Na rozťažnosti sú založené aj kovové teplomery bimetalické.

Na špeciálne účely sa používajú teplomery na iných princípoch, napríklad na zmene farby teplocitlivých náterov a kvapalných kryštálov.

METÓDA MERANIA

Meranie teplotnej závislosti odporového termistorového teplomera alebo meranie teplotnej závislosti termoelektromotorického napätia termočlánku predstavuje vlastne ciachovanie (kalibrovanie), teda experimentálne stanovenie kalibračnej krivky. Ako normál slúži platinový odporový teplomer, ktorý spolu s ciachovaným teplomerom umiestnime do termostatu. V termostate je požadovaná teplota udržiavaná automatickou reguláciou. Po ustálení zvolenej hodnoty teploty odmeriame odpor platinového odporového termočlánku a zároveň odpor termistora a termoelektromotorické napätie termočlánku. Zo známej závislosti odporu normálu od teploty presne určíme teplotu, ktorej priradíme namerané údaje obidvoch ciachovaných teplomerov.

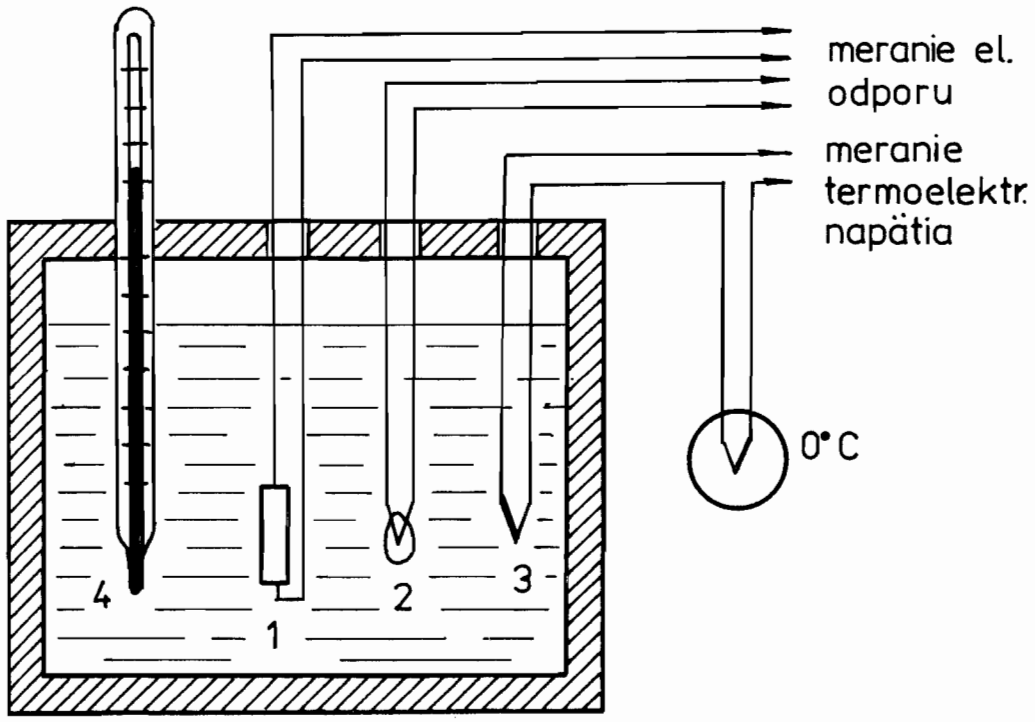
OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) Prístroje a pomôcky: termostat, ortuťový teplomer, merač odporu, merač termoelektromotorického napätia, platinový odporový normál, termočlánok, termistor, termoska pre referenčný spoj termočlánku

b) Postup práce:

Teplomery umiestnime do termostatu a pripojíme na meracie prístroje (obr. 7.2). Odmeriame odpor normálu - 1 a z kalibračnej krivky odčítame teplotu. Na regulačnom teplomeri termostatu postupne nastavujeme teploty v rozsahu do 100 ^{o}C a po ich

ustálení odmeriame odpor normálu, odpor termistora - 2 a hodnotu termoelektromotorického napätia termočlánku - 3. Hodnoty zapisujeme do tab. 7.1.



Obr. 7.2 Schéma kalibrácie rôznych typov teplomerov

Tab. 7.1

Orientačná teplota t_0 (°C)	Odpor platinového normálu R_{Pt} (Ω)	Skutočná teplota t (°C)	Odpor termistora R_t (Ω)	Termoelmot. napätie U (mV)

Výsledky spracujeme graficky. Metódou najmenších štvorcov určíme hodnoty konštánt a, b, c v závislosti (7.3) použitím vzťahov (19) - (21) z kapitoly "Metódy spracovania...".

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Vysvetlite definíciu termodynamickej stupnice teploty!
2. Vysvetlite princíp činnosti plynového teplomera!
3. Prečo elektrický odpor kovov s rastúcou teplotou rastie a odpor polovodičov (termistorov) naopak, klesá?
4. Vysvetlite princíp činnosti termočlánku!

8. Verifi

9. Koefi

TEORETI

Ic
v počia
1660 Rc
pri stá
mu V, t

Neskôr
dostatc
vzdiale
ne. Pr
nov po
C
plyny
podľa
P
teplot

a záv
jeme V

8. Verifikácia Boylovho zákona

9. Koeficient teplotnej rozpínavosti vzduchu

TEORETICKÝ ÚVOD

Ideálny plyn ,ako najjednoduchší termodynamický systém, bol v počiatkoch náuky o teple vďačným objektom skúmania. Už v roku 1660 Robert Boyle pokusmi zistil, že pri zmenách objemu plynu pri stálej teplote je tlak plynu p nepriamo úmerný jeho objemu V, teda

$$pV = \text{const.} \tag{8.1}$$

Neskôr sa ukázalo, že táto závislosť platí dostatočne presne pre dostatočne nízke tlaky a dosť vysoké teploty (keď je stav plynu vzdialený od fázového prechodu). Hovoríme vtedy o ideálnom plyne. Pri izbovej teplote a atmosferickom tlaku možno väčšinu plynov považovať za ideálne.

Charles (1787), Gay-Lussac (1802) a iní zistili, že všetky plyny sa rozťahujú približne rovnako, aj keď nie rovnomerne, podľa ortuťovej teploty.

Pre Celsiovu plynovú teplotu má závislosť objemu V plynu od teploty t pri konštantnom tlaku p_0 tvar

$$V = V_0(1 + \gamma t) \qquad (p = p_0) \tag{8.2}$$

a závislosť tlaku plynu p od jeho teploty t pri konštantnom objeme V_0 má tvar

$$p = p_0(1 + \gamma' t) \qquad (V = V_0) \tag{8.3}$$

kde γ je koeficient objemovej teplotnej rozťažnosti a γ' koeficient teplotnej rozpínavosti plynu. Z podmienok ku vzťahom (8.2) a (8.3) vidieť, že pri teplote t = 0 v obidvoch prípadoch sa daný plyn vyznačuje rovnakým objemom a tlakom. S použitím Boyleovho zákona dostávame rovnicu

$$p_0 V = p V_0 \qquad \text{pri teplote } t$$

ktorá po dosadení za V a p z rovníc (8.2) a (8.3) vedie k rovnosti

$$\gamma = \gamma' \tag{8.4}$$

Gay-Lussacov zákon hovorí, že pre všetky plyny v oblasti platnosti Boyleovho zákona sú koeficienty γ a γ' prakticky rovnaké. Meraním pre dostatočne zriedené plyny bola získaná hodnota

$$\gamma = \gamma' = \frac{1}{273{,}15\ ^{\circ}C}$$

8. Overte platnosť Boyleovho zákona pri izbovej teplote s použitím Meldeho trubice.

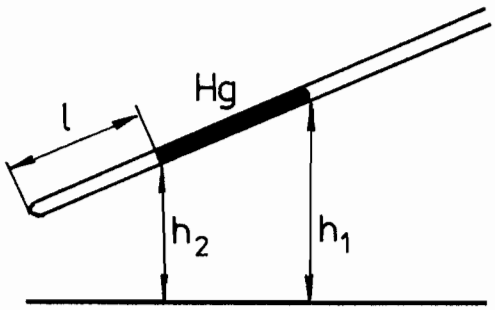
METÓDA MERANIA

Meldeho trubica je hrubostenná kapilára s rovnakým vnútorným prierezom q vo všetkých miestach kapiláry, na jednom konci zatavená. Sčasti je naplnená ortuťou, ktorá uzatvára plyn pri zatavenom konci. Objem V takto uzavretého plynu je určený polohou ortute v trubici. Jeho tlak p je súčtom atmosferického tlaku b

a hydrostatického tlaku ortute. Súčin tlaku a objemu plynu v trubici možno potom napísať v tvare

$$pV = \left[b + (h_1 - h_2)sg\right] q\ell \qquad (8.5)$$

kde s je hustota ortute pri danej teplote, g je zrýchlenie voľne padajúceho telesa a význam h_1, h_2 a ℓ je zrejmý z obr. 8.1.



Obr. 8.1 Meldeho trubica

Pretože prierez q je podľa predpokladu po celej dĺžke kapiláry rovnaký, zo vzťahu (8.5) vyplýva, že pri konštantnej teplote platí

$$\left[b + (h_1 - h_2)sg\right]\ell = \text{const} \qquad (8.6)$$

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) **Prístroje a pomôcky:** Meldeho trubica, dĺžkové meradlo, barometer

b) **Postup práce:**

Pri rôznych polohách trubice, ktoré nastavujeme otáčaním trubice na stojane, odmeriame dĺžku vzduchového stĺpca ℓ a výšky hladín h_1 a h_2 od vodorovnej základne (obr. 8.1). Pred začiatkom

a na konci merania zistíme atmosferický tlak a pri vyhodnocovaní merania použijeme aritmetický priemer obidvoch tlakov (tab. 8.1). Meranie vyhodnotíme použitím vzťahu (8.6).

Poznámka:

Pri meraní dbáme na to, aby boli dodržané podmienky platnosti Boyleovho zákona, preto po každej zmene polohy trubice počkáme, kým sa teplota plynu v trubici nevyrovná s teplotou okolia.

Tab. 8.1

b =

i	h_1 (cm)	h_2 (cm)	ℓ (cm)	h_1-h_2 (cm)	K

9. Určte hodnotu koeficientu teplotnej rozpínavosti vzduchu pri izbovej teplote a atmosferickom tlaku.

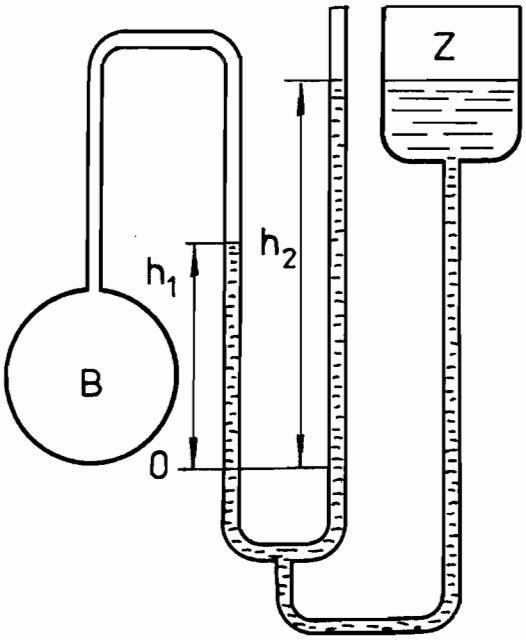
METÓDA MERANIA

Teplotný koeficient rozpínavosti vzduchu určíme priamym meraním teplotnej závislosti tlaku vzduchu pri stálom objeme.

Toto umožňuje zariadenie schematicky znázornené na obr. 9.1. V banke B je uzavretý vzduch, ktorý je predmetom nášho merania. Banka B je spojená rúrkou s otvoreným ortuťovým manometrom. Výška hladiny ortute h_1 v ľavom ramene manometra určuje objem uzavretého vzduchu, preto musí byť počas celého merania stála.

Dosiahneme to tak, že pri zmenách tlaku v banke budeme zmenou výšky zásobníka ortute Z meniť výšku hladiny ortute h_2 v pravom ramene manometra. Tlak vzduchu p v banke je súčtom barometrického tlaku b a hydrostatického tlaku ortuťového stĺpca v manometri $(h_2-h_1)sg$, t.j.

$$p = b + (h_2 - h_1)sg \qquad (9.1)$$



Obr. 9.1 Zariadenie na meranie teplotného koeficientu rozpínavosti vzduchu

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) **Prístroje a pômocky:** zariadenie na meranie rozpínavosti vzduchu (obr. 9.1), vodný kúpeľ, varič, teplomer, barometer

B) **Postup práce:**

Na začiatku merania určíme barometrický tlak. Zapneme varič a pri rôznych teplotách kúpeľa, v ktorom je ponorená banka B,

odmeriame výšku ortuťového stĺpca h_2. Výšku hladiny h_1 udržujeme konštantnú. Po skončení merania opäť určíme barometrický tlak, podobne ako v úlohe č. 8. Údaje zapíšeme do tab. 9.1. Takto nameraná závislosť tlaku vzduchu p od teploty t pri stálom objeme by mala byť podľa vzťahu (8.3) lineárna. Preto nameranými bodmi (p_i, t_i) preložíme priamku a z jej smernice a priesečníka s osou p určíme hľadaný teplotný koeficient rozpínavosti vzduchu γ.

Poznámka:

Teplomerom meriame teplotu kúpeľa, preto treba pri meraní postupovať tak, aby sa teplota vzduchu v banke stačila vyrovnať s teplotou kúpeľa.

Tab. 9.1

b = h_1 =

i	t (°C)	h_2 (cm)	p (Pa)

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Ako možno použiť Meldeho trubicu na meranie atmosferického tlaku?
2. Ako treba voliť dĺžky ortuťového a vzduchového stĺpca, aby bolo meranie Meldeho trubicou najpresnejšie?
3. Dá sa zariadenie na meranie koeficientu teplotnej rozpínavosti využiť na meranie koeficientu objemovej teplotnej rozťažnosti plynov?
4. Ako možno určiť molárny objem plynu v banke B (obr. 9.1)?

10. Pomer špecifických tepiel plynu

Určte Clémentovou - Desormesovou metódou pomer špecifických tepiel pri stálom objeme a tlaku pri izbovej teplote pre vzduch.

TEORETICKÝ ÚVOD

Experimentálnym štúdiom chovania plynov bolo zistené, že ich termodynamické vlastnosti sú pre väčšinu plynov veľmi podobné. Preto bol zavedený reprezentatívny modelový plyn, tzv. ideálny plyn, ktorý má tieto vlastnosti:

1. súčin tlaku a objemu ideálneho plynu závisí len od teploty,
2. vnútorná energia ideálneho plynu závisí tiež len od jeho teploty.

Prvú vlastnosť možno vyjadriť stavovou rovnicou

$$pV = nRT \tag{10.1}$$

kde T je absolútna teplota, n látkové množstvo v móloch a R je tzv. plynová konštanta.

Z druhej vlastnosti vyplýva tzv. Mayerov vzťah pre molárne tepelné kapacity pri stálom tlaku C_p a stálom objeme C_V

$$C_p - C_V = R \tag{10.2}$$

Rovnica (10.1) opisuje, ako spolu súvisia tlak a objem pri stálej teplote - izotermický dej, tlak a teplota pri stálom objeme - izochorický dej, objem a teplota pri stálom tlaku - izobarický dej.

Chovanie ideálneho plynu pri adiabatickom procese možno predpovedať s uvážením 1. termodynamického zákona a vzťahov (10.1) a (10.2). Súvis medzi objemom a tlakom má v tomto prípade tvar tzv. Poissonovej rovnice

$$pV^{\varkappa} = \text{const.} \tag{10.3}$$

kde $\varkappa$ sa nazýva Poissonova konštanta a je definovaná vzťahom

$$\varkappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} \tag{10.4}$$

kde c_p a c_V sú príslušné špecifické teplá. Z kinetickej teórie plynov vieme, že molárna tepelná kapacita ideálneho plynu pri stálom objeme je

$$C_V = i\,\frac{R}{2} \tag{10.5}$$

kde i je počet stupňov voľnosti molekuly, t.j. počet nezávislých údajov (súradníc) potrebných na určenie polohy molekuly v priestore. Pre jednoatómovú molekulu i = 3, pre dvojatómovú i = 5 a pre viacatómové molekuly i = 6.

Dosadením vzťahov (10.2) a (10.5) do vzťahu (10.4) dostávame pre pomer špecifických tepiel vzťah

$$\varkappa = \frac{i + 2}{i}$$

z ktorého možno vyjadriť počet stupňov voľnosti

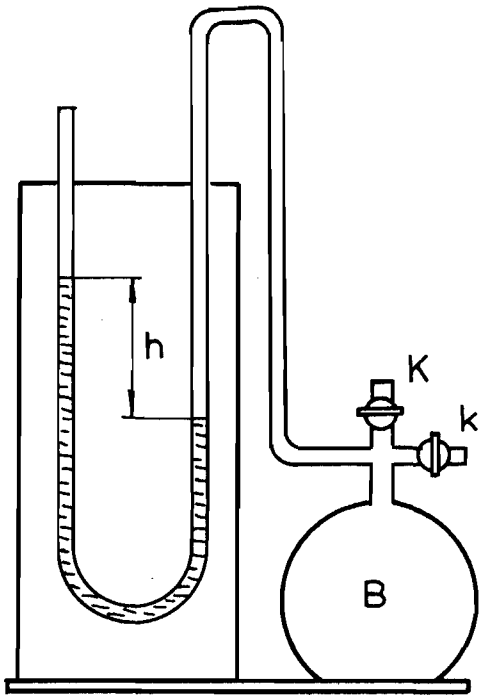
$$i = \frac{2}{\varkappa - 1} \tag{10.6}$$

Posledný vzťah nám umožňuje z hodnoty Poissonovej konštanty usúdiť na štruktúru molekúl plynu.

METÓDA MERANIA

Hodnotu konštanty $\varkappa$ nemožno určiť priamo vydelením hodnoty c_p hodnotou c_V, pretože prakticky nemožno odmerať kalorimetricky s dostatočnou presnoťou hodnotu c_V. Na meranie sa preto používajú rôzne nepriame metódy. V jednej z nich sa na to používajú adiabatické deje, ktoré prebiehajú v plyne pri šírení zvuku. Tým sa prevádza meranie $\varkappa$ na meranie rýchlosti zvuku v plynoch. Pri iných metódach sa meria $\varkappa$ pozorovaním adiabatických zmien, ktoré v plyne umelo vyvolávame.

Jednoduchú metódu založenú na adiabatickej expanzii plynu navrhli Clément a Desormes (1819). Ich zariadenie sa skladá z väčšieho skleneného balóna B, ku ktorému je pripojený manometer M naplnený zafarbenou vodou (obr. 10.1).



Obr. 10.1 Clémentovo - Desormesovo zariadenie

Kohútikom k možno do balóna privádzať skúmaný plyn, kohútom K so širokým otvorom možno vnútro balóna spojiť s vonkajším vzduchom. Cez kohútik k nahustíme do balóna B meraný plyn, takže manometer M ukáže rozdiel výšok hladín h_1, a teda pretlak nad tlakom barometrickým b. Začiatočný tlak plynu v balóne je

$$p_1 = b + p_1' \tag{10.7}$$

kde $p_1' = sgh_1$ je hydrostatický tlak vodného stĺpca s výškou h_1 pri hustote vody s.

Ak nakrátko otvoríme široký kohút K a hneď ho zase zavrieme, tlak plynu sa rýchlo vyrovná s vonkajším atmosferickým tlakom b. Toto rozopnutie prebieha veľmi rýchlo, takže ho môžeme pokladať za adiabatické. Tá časť plynu, ktorá zostala v balóne, má v okamihu uzavretia kohúta K tlak b a objem V_2. Na začiatku expanzie mala tlak p_1 a neznámy objem V_1. Podľa Poissonovej rovnice musí platiť

$$p_1 V_1^{\varkappa} = b V_2^{\varkappa} \tag{10.8}$$

Keďže pri adiabatickej expanzii sa plyn ochladil, postupom času začne jeho teplota stúpať, až pri rovnováhe s okolím dosiahne teplotu okolia. Pretože pri tomto ohrievaní sa objem plynu nemení, bude rásť jeho tlak na hodnotu

$$p_2 = b + p_2' = b + sgh_2 \tag{10.9}$$

kde h_2 je rozdiel hladín vodného stĺpca v obidvoch ramenách manometra.

Pretože uvažované množstvo plynu má tú istú teplotu ako na začiatku adiabatickej expanzie, možno z Boyleovho zákona pre oba stavy písať

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \tag{10.10}$$

a určiť neznámy objem V_1. Dosadením za V_1 z rovnice (10.10) do vzťahu (10.8) dostaneme po úprave pre Poissonovu konštantu vzťah

$$\varkappa = \frac{\ln \dfrac{p_1}{b}}{\ln \dfrac{p_1}{p_2}} \tag{10.11}$$

Pri praktickom meraní býva pretlak p_1' a potom aj p_2' oveľa menší ako atmosferický tlak b, čo nám umožňuje podstatne zjednodušiť vzťah (10.11).

Dosadíme do vzťahu (10.10) za tlaky p_1 a p_2 vzťahy (10.7) a (10.9). Dostaneme Poissonovu konštantu v tvare

$$\varkappa = \frac{\ln \left(1 + \dfrac{p_1'}{b}\right)}{\ln \left(1 + \dfrac{p_1'}{b}\right) - \ln \left(1 + \dfrac{p_2'}{b}\right)} \tag{10.12}$$

Pretože $\dfrac{p_1'}{b} \ll 1$ aj $\dfrac{p_2'}{b} \ll 1$, možno logaritmy vystupujúce vo vzťahu (10.12) rozvinúť do Taylorovho radu podľa týchto malých parametrov a uvážiť len prvý nenulový člen radu. Dostávame tak približný vzťah

$$\varkappa \simeq \frac{\dfrac{p_1'}{b}}{\dfrac{p_1'}{b} - \dfrac{p_2'}{b}} = \frac{sgh_1}{sgh_1 - sgh_2} = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \tag{10.13}$$

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) **Prístroje a pomôcky:** zariadenie podľa obr. 10.1, barometer

b) Postup práce:

Na začiatku aj na konci merania odčítame na laboratórnom barometri atmosferický tlak. Ak sa počas merania vyskytla zmena, počítame s priemernou hodnotou.

Hustilkou pripojenou ku kohútiku k nahustíme do balóna B vzduch, aby manometer ukázal pretlak 25 až 30 cm vodného stĺpca a počkáme, kým sa hladiny kvapalného stĺpca v manometri ustália. Po ustálení odčítame rozdiel hladín h_1 vodného stĺpca v obidvoch ramenách manometra. Potom nakrátko otvoríme široký kohút K a hneď ho zasa zavrieme. Po vyrovnaní teploty vzduchu v balóne s teplotou okolia, čo poznáme z ustálenia kvapalinového stĺpca v manometri M, odčítame zasa rozdiel hladín h_2. Meranie opakujeme 10-krát pri rôznych začiatočných hodnotách h_1 a rôznych rýchlostiach otáčania kohúta K. Namerané hodnoty zapisujeme do tab. 10.1.

Tab. 10.1

b =

i	h_1 (cm)	h_2 (cm)	p_1 (Pa)	p_2 (Pa)	$\varkappa$

Z približného vzťahu (10.13) vyplýva, že medzi veličinami h_1 a h_2 je lineárny vzťah

$$h_2 = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} h_1 \qquad (10.14)$$

Meranie opakujeme a namerané body (h_1, h_2) vynesieme na milimetrový papier a preložíme nimi priamku. Zo smernice tejto priamky

určíme hodnotu $\varkappa$. Pre jeden bod priamky určíme systematickú chybu v určení $\varkappa$, spôsobenú použitím približného vzťahu (10.13), resp. (10.14).

Upozornenie:

Pri nahusťovaní vzduchu musíme dávať pozor, aby klesajúca hladina vodného stĺpca v manometri neklesla príliš blízko k dolnému ohybu U trubice manometra. Inak kvapalina z manometra vystrekne.

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Čomu sa rovná rozdiel špecifických tepiel pri stálom tlaku a objeme ideálneho plynu?
2. Odvoďte vzťah (10.11) pre Poissonovu konštantu!
3. Vytipujte, ktoré sú možné zdroje chýb tejto meracej metódy!
4. Odhadnite hodnotu Poissonovej konštanty vzduchu, keď vieme, že je zložený väčšinou z dvojatómových molekúl (N_2, O_2)!

11. Meranie koeficientu dĺžkovej teplotnej rozťažnosti

Určte koeficient dĺžkovej teplotnej rozťažnosti Edelmanovým dilatometrom.

TEORETICKÝ ÚVOD

Podobne ako plyny menia svoj objem s teplotou pri stálom tlaku, aj tuhé telesá menia s teplotou svoj objem, resp. dĺžkové rozmery. Aký charakter má takáto teplotná závislosť je určené voľbou teplotnej stupnice, v ktorej objem ideálneho plynu pri konštantnom tlaku sa mení lineárne. Experimenty ukazujú, že aj dĺžkové rozmery tuhých látok závisia od teploty v dosť širokom intervale teplôt prakticky lineárne. Preto je výhodné na charakterizovanie dĺžkovej rozťažnosti tuhých látok zaviesť tzv. koeficient dĺžkovej teplotnej rozťažnosti α tak, aby sme mohli teplotnú závislosť dĺžky telesa ℓ vyjadriť lineárnym vzťahom

$$\ell = \ell_0 \left[1 + \alpha (T - T_0)\right] \tag{11.1}$$

kde T je teplota telesa a ℓ_0 je zrejme dĺžka telesa pri istej vzťažnej teplote T_0. Obvykle sa za teplotu T_0 volí teplota topenia ľadu za normálneho tlaku. Potom $T - T_0 = t$ je teplota v Celziovej stupnici (plynovej). Koeficient α možno definovať vzťahom

$$\alpha = \frac{1}{\ell_0} \frac{d\ell}{dt} \tag{11.2}$$

Pri väčších rozdieloch teplôt však zisťujeme, že dĺžkové rozmery telies závisia od teploty zložitejším spôsobom. Potom sa

experimentálnymi závislosťami prekladajú polynómy vyšších stupňov ako prvého. Napríklad

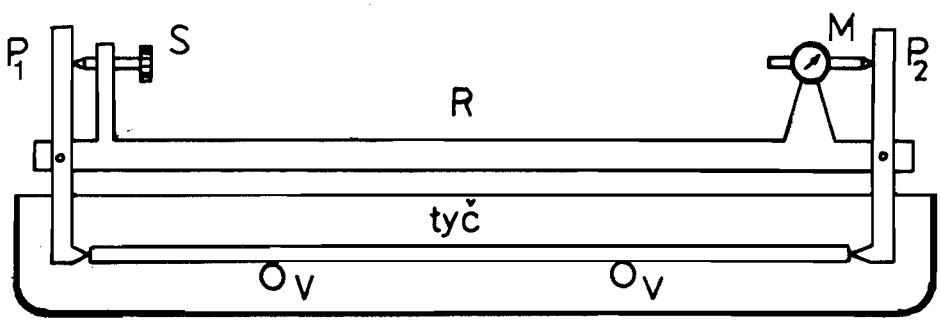
$$\ell = \ell_0 \, (1 + a_1 t + a_2 t^2)$$

Koeficient dĺžkovej teplotnej rozťažnosti v tomto prípade závisí od teploty

$$\alpha = \frac{1}{\ell_0} \frac{d\ell}{dt} = a_1 + 2a_2 t$$

METÓDA MERANIA

Na meranie dĺžkovej teplotnej rozťažnosti tuhých látok sa používa Edelmanov dilatometer. Schéma takéhoto zariadenia je na obr. 11.1.



Obr. 11.1 Edelmanov dilatometer

Meraná tyč je umiestnená na dvoch valčekoch V v olejovom kúpeli. O konce tyče sa opierajú dve rovnoramenné páky P_1 a P_2, ktorých osi sú upevnené na rovnom ráme R. Polohu páky P_1 (jedného konca tyče) nastavíme skrutkou S. Poloha páky P_2 (druhého konca tyče) sa prenáša na dotykový mikrometer M. Na mikrometri M odčítame priamo zmenu dĺžky tyče (za predpokladu, že len tyč mení svoje rozmery).

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) **Prístroje a pomôcky:** Edelmanov dilatometer, meraná tyč, dva ortuťové teplomery, prívod s vypínačom na pripojenie vyhrievacej špirály dilatometra na elektrickú sieť

b) **Postup práce:**

Na teplomeroch, ktoré sú ponorené v olejovom kúpeli dilatometra, odčítame začiatočné teploty pri oboch koncoch meranej tyče. Potom pripojíme ohrievacie zariadenie na sieť a teplotu kúpeľa postupne zvyšujeme. Aby sa teplota kúpeľa meraná teplomermi zhodovala s teplotou tyče v daných miestach, vždy, keď sa teplota zvýši o 3 - 4 stupne, vypneme prívod elektrického prúdu a po ustálení (asi po 1 minúte) odčítame údaje teplôt na teplomeroch. Súčasne odčítame aj predĺženie tyče na mikrometri. Za teplotu tyče berieme aritmetický priemer obidvoch údajov na teplomeroch. Údaje zapisujeme do Tab. 11.1.

Tab. 11.1

$\ell_0 =$

i	t_1 (°C)	t_2 (°C)	$t = \frac{t_1+t_2}{2}$ (°C)	$\Delta\ell$ (mm)

Namerané hodnoty vynesieme do tzv. diagramu rozťažnosti, čo je závislosť predĺženia od teploty. Vynesenými bodmi preložíme priamku a z jej smernice určíme koeficient α.

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Za akých predpokladov možno v diagrame rozťažnosti namiesto teploty vynášať aritmetický priemer teplôt na koncoch meranej tyče?
2. Ako možno zaistiť, aby sa na mikrometri M (obr. 11.1) odčítalo priamo predĺženie tyče?
3. Od čoho závisí čas ustálenia teploty v olejovom kúpeli?

12. Meranie špecifickej elektrickej vodivosti kvapaliny

Odmerajte špecifickú elektrickú vodivosť vody a overte platnosť Ohmovho zákona.

TEORETICKÝ ÚVOD

Pri vyšetrovaní vedenia elektrického prúdu v izotropných a homogénnych prostrediach je špec. el. vodivosť γ konštantná, od smeru a miesta nezávislá veličina. Na základe Ohmovho zákona umožňuje vypočítať vektor prúdovej hustoty $\vec{j}$, ak poznáme vlastnosti elektrického poľa v prostredí opísané napríklad vektorom intenzity elektrického poľa $\vec{E}$. Potom

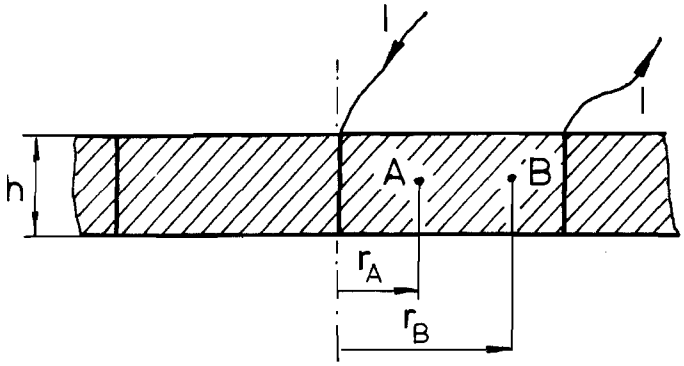
$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \tag{12.1}$$

čo je vyjadrením Ohmovho zákona v tzv. diferenciálnej forme a je zrejmé, že odmeraním absolútnych hodnôt j a E môžeme špecifickú vodivosť γ určiť zo vzťahu

$$\gamma = \frac{j}{E} \tag{12.2}$$

METÓDA MERANIA

Vyšetrujme prípad, keď elektrické pole vo vodivom prostredí je rotačne symetrické, realizované jednou valcovitou vodivou elektródou, v osi ktorej je druhá elektróda v tvare tenkého valcového vodiča s malým polomerom (obr. 12.1). Ak hrúbka uvažovaného



Obr. 12.1 Rez systémom elektród v meranom prostredí

vodivého prostredia je h a strednou elektródou prechádza elektrický prúd I, potom v ľubovoľnom mieste r od strednej elektródy (osi) sa dá prúdová hustota vyjadriť podľa vzťahu

$$j(r) = \frac{I}{2\pi rh}$$

Veličinu E v tomto mieste nemôžeme bezprostredne odmerať a na jej určenie použijeme vzťah (12.2). Platí

$$E(r) = \frac{j(r)}{\gamma} = \frac{I}{2\pi rh\gamma} \qquad (12.3)$$

Ak poznáme rozloženie elektrického poľa v prostredí (vzťah (12.3)), môžeme vypočítať rozdiel potenciálov v ľubovoľných dvoch bodoch A, B, ktorých vzdialenosť od stredu je r_A, r_B. Platí

$$|\varphi_{AB}| = \int_{r_A}^{r_B} E(r)\,dr = \int_{r_A}^{r_B} \frac{I}{2\pi h\gamma}\,\frac{dr}{r} = \frac{I}{2\pi h\gamma}\ln\frac{r_B}{r_A} \qquad (12.4)$$

Zo vzťahu (12.4) vidieť, že rozdiel potenciálov $|\varphi_{AB}|$ je priamoúmerný prechádzajúcemi prúdu

$$|\varphi_{AB}| = KI \qquad (12.5)$$

kde K je smernica tejto závislosti. Pomocou nej určíme špecifickú vodivosť γ. Platí

$$\gamma = \frac{\ln \frac{r_B}{r_A}}{2\pi hK} \qquad (12.6)$$

Potvrdením platnosti Ohmovho zákona je teda to, že pri konštantnej hrúbke vzorky h bude pomer $\frac{I}{|\varphi_{AB}|}$ konštantný.

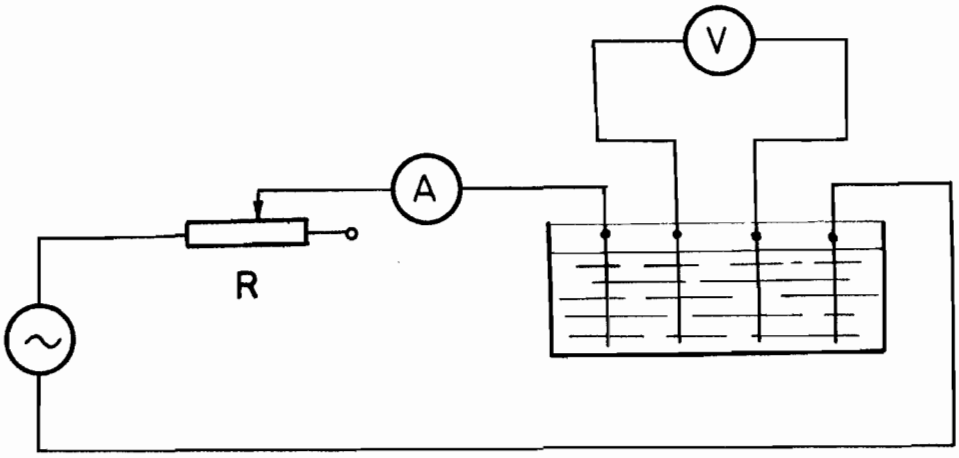
Rozdiel potenciálov v mieste A vzhľadom na miesto B určujeme pomocou napäťových elektród realizovaných v tvare tenkých vodičov ponorených do meraného prostredia. Táto metóda merania špec. el. vodivosti pomocou dvoch prúdových a dvoch napäťových elektród (sond) sa nazýva štvorsondová metóda.

OPIS APARATÚRY A POSTUP MERANIA

a) **Prístroje a pomôcky:** zariadenie so systémom symetricky rozložených valcových elektród, ampérmeter, odporová dekáda, voltmeter, zdroj prúdu, vodivé prostredie - voda

b) **Postup práce:**

Zariadenie na meranie špecifickej vodivosti vodivej kvapaliny je skonštruované tak, že dovoľuje merať veličinu γ pri rôznych hodnotách r_A a r_B. Veličinu h možno meniť rôznou hĺbkou ponoru elektród. Aby nedochádzalo k disociácii meranej vody, použijeme zdroj striedavého prúdu. Štvorsondovú sústavu zapojíme do elektrického obvodu podľa schémy zapojenia na obr. 12.2.



Obr. 12.2 Schéma zapojenia

Veľkosť prúdu I meníme regulovateľným odporom R, rozdiel potenciálov medzi napäťovými elektródami A a B meriame voltmetrom s veľkým vstupným odporom (napríklad digitálnym).

Pre rôzne konfigurácie prúdových a napäťových elektród (mení sa pomer $r_B:r_A$) odmerajte závislosť rozdielu potenciálov od prechádzajúceho prúdu I (v rozsahu 0 - 10 mA). Namerané hodnoty zapisujte do tab. 12.1. Z priamky preloženej cez namerané body určte smernicu K a dosadením do vzťahu (12.6) vypočítajte hodnotu špec. el. vodivosti γ pre každé meranie. Určte maximálnu chybu veličiny γ na základe presnosti merania ostatných veličín.

Tab. 12.1

i	I (mA)	$\frac{r_B}{r_A}$ =	$\frac{r_B}{r_A}$ =	$\frac{r_B}{r_A}$ =	$\frac{r_B}{r_A}$ =	$\frac{r_B}{r_A}$ =
		$\lvert\varphi_{AB}\rvert$ (V)	$\lvert\varphi_{AB}\rvert$ (V)	$\lvert\varphi_{AB}\rvert$ (V)	$\lvert\varphi_{AB}\rvert$ (V)	$\lvert\varphi_{AB}\rvert$ (V)

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Aký tvar majú ekvipotenciálne plochy v uvedenom meracom zariadení?
2. Musia byť napäťové elektródy ponorené do vody úplne?
3. Musia napäťové elektródy ležať na priamke prechádzajúcej stredom? Ak áno, prečo? Ak nie, prečo?

13. Magnetická indukcia v okolí dlhého priameho vodiča a v cievke

Overte teoretickú závislosť veľkosti magnetickej indukcie v okolí dlhého priameho vodiča a na osi cievky.

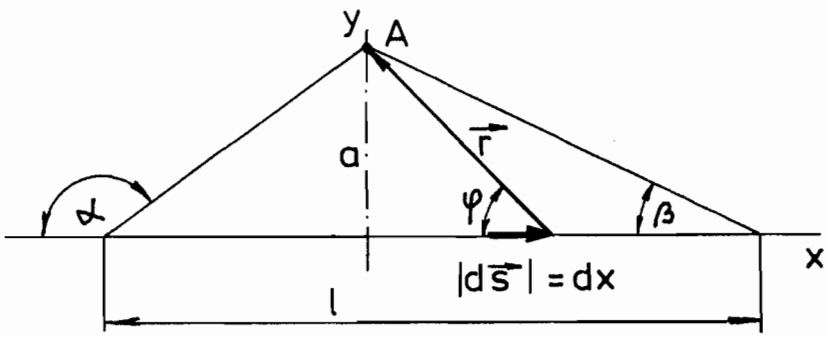
TEORETICKÝ ÚVOD

Vektor indukcie magnetického poľa v okolí vodiča, ktorým prechádza elektrický prúd, je určený vzťahom (Biotov - Savartov zákon)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \qquad (13.1)$$

kde I je elektrický prúd, ktorý prechádza vodičom, μ_0 je permeabilita vákua, $d\vec{s}$ je element dĺžky vodiča (orientovaný v smere toku prúdu), $\vec{r}$ je polohový vektor miesta, v ktorom určujeme indukciu magnetického poľa vzhľadom na element $d\vec{s}$.

Vypočítajme indukciu magnetického poľa v okolí dlhého (jeho priečne rozmery sú zanedbateľne malé v porovnaní s jeho dĺžkou) priameho vodiča. Rozmery a poloha vodiča voči súradnicovým osiam sú zrejmé z obr. 13.1.



Obr. 13.1 Poloha vodiča voči súradnicovým osiam a voľba dĺžkového elementu

Z obr. 13.1 vyplýva, že

$$d\vec{s} \times \vec{r} = dx\ r \sin(\pi - \varphi)\ \vec{k}$$

kde $\vec{k}$ je jednotkový vektor v smere osi z. Je vidieť, že príspevky $d\vec{B}$ od všetkých elementov dx sú v bode A súhlasne orientované. Vektor $\vec{B}$ bude mať teda v bode A smer rovnobežný s kladným smerom oxi z a stačí vypočítať jeho absolútnu hodnotu. Ak vezmeme do úvahy, že

$$r = \frac{a}{\sin\varphi} \qquad\qquad x = a \operatorname{cotg}\varphi$$

odkiaľ derivovaním dostaneme

$$dx = -\frac{a}{\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

potom

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\beta - \cos\alpha) \tag{13.2}$$

Pre nekonečne dlhý vodič je $\alpha = \pi$, $\beta = 0$ a pre indukciu magnetického poľa bude mať vzťah (13.2) tvar

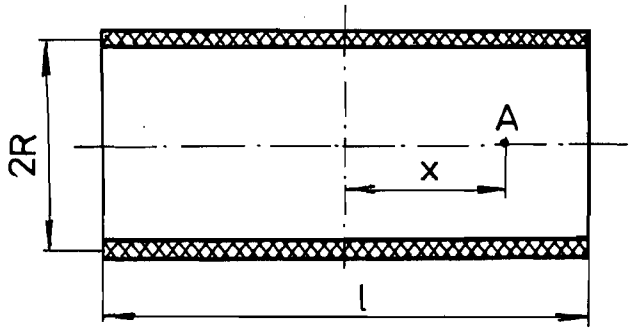
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \tag{13.3}$$

Indukčné čiary budú mať tvar sústredných kružníc v rovinách kolmých na vodič so stredmi na vodiči.

Veľkosť indukcie magnetického poľa na osi cievky (solenoidu) je určená vzťahom (odvodenie pozri napr. Hajko a kol.: Fyzika v príkladoch)

$$B = \frac{\mu_0 I z}{2\ell}\left[\frac{\frac{\ell}{2} - x}{\sqrt{R^2 + (-\frac{\ell}{2} + x)^2}} + \frac{\frac{\ell}{2} + x}{\sqrt{R^2 + (\frac{\ell}{2} + x)^2}}\right] \tag{13.4}$$

Použité označenie veličín je zrejmé z obr. 13.2. Pri odvádzaní vzťahu (13.4) sa predpokladá, že priečne rozmery vodičov sú malé v porovnaní s rozmermi cievky, z je počet závitov cievky.



Obr. 13.2 Geometria cievky

(ℓ - dĺžka cievky, R - polomer cievky, x - vzdialenosť bodu, v ktorom určujeme veľkosť indukcie magnetického poľa, od stredu cievky)

METÓDA MERANIA A OPIS APARATÚRY

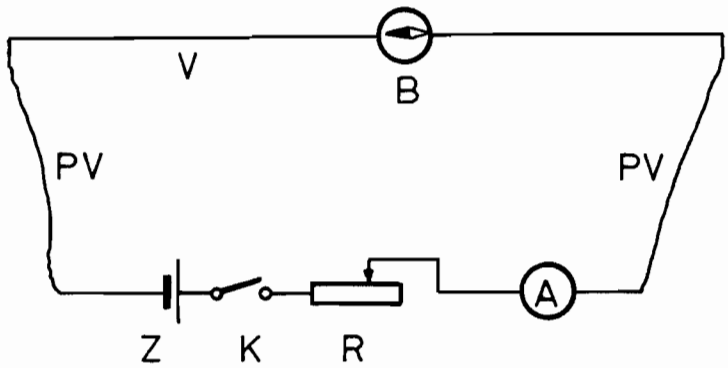
Absolútne meranie indukcie magnetického poľa vodičov je pomerne zložité, pretože všetky merania prebiehajú v magnetickom poli Zeme. Na druhej strane nám to umožňuje určiť relatívnu veľkosť indukcie magnetického poľa vzhľadom na indukciu magnetického poľa Zeme (presnejšie: vzhľadom na horizontálnu zložku indukcie magnetického poľa Zeme).

V prvej časti úlohy overíme platnosť vzťahu (13.3). Na meranie použijeme zariadenie, ktorého schematické zapojenie je na obr. 13.3. Ak je zariadenie nastavené tak, aby magnetické pole Zeme a magnetické pole vodiča V boli na seba kolmé, potom platí

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{B}{B_H} \qquad (13.5)$$

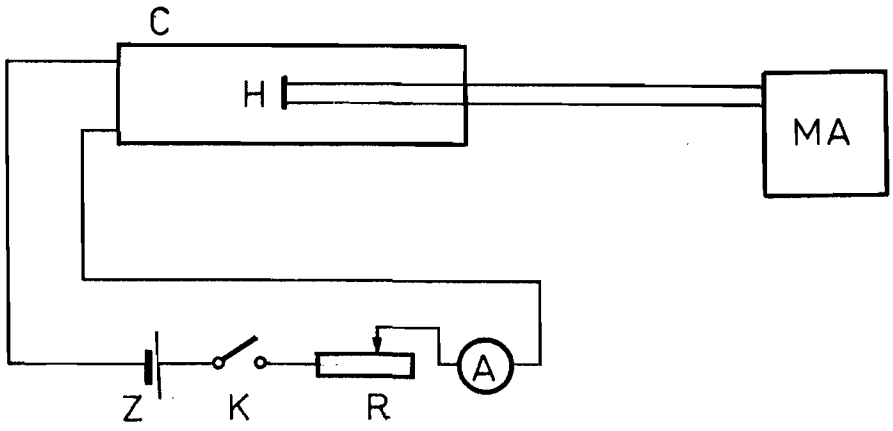
kde γ je uhol výchylky magnetky, B je indukcia magnetického poľa vodiča, B_H je horizontálna zložka indukcie magnetického poľa Zeme. Zo vzťahu (13.5) po dosadení vzťahu (13.6) dostaneme

$$\frac{1}{a} = \frac{2\pi B_H}{\mu_0 I} \operatorname{tg} \gamma \qquad (13.6)$$



Obr. 13.3 Schematické zapojenie zariadenia na meranie indukcie magnetického poľa v okolí dlhého priameho vodiča (V - vodič vytvárajúci magnetické pole, A - ampérmeter, Z - zdroj prúdu, R - regulačný reostat, K - vypínač, PV - prívodné vodiče (je potrebné ich uložiť tak, aby neovplyvňovali magnetické pole vodiča V)

Meranie indukcie magnetického poľa na osi solenoidu budeme robiť pomocou Hallovej sondy. Na meranie indukcie magnetického poľa sa tu využíva jav zakrivenia dráh nabitých častíc pohybujúcich sa v magnetickom poli. V dôsledku tohto efektu vzniká na sonde napätie úmerné indukcii magnetického poľa v mieste sondy. Schéma zapojenia je na obr. 13.4.



Obr. 13.4 Schematické zapojenie zariadenia na meranie indukcie magnetického poľa na osi solenoidu (C - cievka, Z - zdroj prúdu, K - vypínač, R - reostat, A - ampérmeter, H - Hallova sonda, MA - meracia aparatúra k sonde)

POSTUP PRÁCE

Zariadenie nastavíme na meranie indukcie magnetického poľa v okolí vodiča tak, aby v prípade I = 0 bola magnetka rovnobežná s vodičom. Pri konštantnej hodnote intenzity prúdu meňte vzdialenosť medzi meracou buzolou a vodičom. Hodnoty výchylky magnetky a im zodpovedajúce vzdialenosti zapíšte do tab. 13.1. Tento postup zopakujte pre niekoľko hodnôt prúdu I. Zostrojte graf závislosti $\frac{1}{a} = f(\mathrm{tg}\,\gamma)$ pre každú hodnotu prúdu.
Overte, či platí vzťah (13.6), t.j. či ste získali priamkovú závislosť.

Tab. 13.1

$I_1 =$	a	
	γ	
$I_2 =$	a	
	γ	

Zostavte zariadenie na meranie indukcie magnetického poľa v solenoide. Nastavte ho tak, aby napätie na Hallovej sonde bolo nulové, keď prúd prechádzajúci solenoidom je nulový. Pre konštantnú hodnotu intenzity prúdu posúvaním Hallovou sondou nájdite stred solenoidu (je totožný s miestom maximálneho napätia na sonde). V strede solenoidu odmerajte závislosť veľkosti indukcie magnetického poľa od veľkosti intenzity prúdu v solenoide. Hodnoty zapisujte do tab. 13.2 Potom pre jednu hodnotu intenzity prúdu odmerajte závislosť indukcie magnetického poľa na osi solenoidu od polohy sondy. Hodnoty zapisujte do tab. 13.3. Zostrojte graf závislosti B = f(I) a B = g(x) a porovnajte ich s priebehom teoretických kriviek udaných vzťahmi (13.3) a (13.4).

Tab. 13.2

I	
B	

Tab. 13.3

I =

x	
B	

OTÁZKY A

1. Aká m
magne
vzťah
2. V čor
3. Aké m
tálny

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Aká môže byť maximálna vzdialenosť, v ktorej meriame indukciu magnetického poľa vodiča s konečnou dĺžkou, aby sme zámenou vzťahu (13.3) za (13.2) neurobili chybu väčšiu ako 1 %?
2. V čom spočíva podstata postupu pri odvodení vzťahu (13.4)?
3. Aké môžu byť príčiny rozdielu medzi teoretickými a experimentálnymi výsledkami?

14. Meranie horizontálnej zložky intenzity magnetického poľa Zeme tangentovou buzolou

V mieste fyzikálneho laboratória experimentálne určte veľkosť horizontálnej zložky intenzity magnetického poľa Zeme.

TEORETICKÝ ÚVOD

Voľne otáčavá magnetka podopretá alebo zavesená v jej ťažisku sa na rôznych miestach povrchu Zeme ustáli v smere severo - južnom. Toto správanie sa magnetky, dávno známe a využité prvýkrát snáď už starými Číňanmi v kompase, je svedectvom existencie magnetického poľa Zeme. Naša Zem sa javí ako magnet so severným a južným pólom, ktoré nie sú totožné s pólmi zemepisnými. Magnetická os je od rotačnej osi Zeme odklonená a neprechádza stredom Zeme.

V určitom mieste na povrchu Zeme magnetické pole opisujeme zvyčajne troma parametrami. Sú to deklinácia ϑ , inklinácia i a horizontálna zložka intenzity magnetického poľa $\vec{H}_0$. Deklinácia predstavuje uhol ϑ medzi magnetickým poludníkom, ktorý má smer ustálenej magnetky, a zemským poludníkom. Inklinácia i je uhol, ktorý v danom mieste zviera magnetický poludník s vodorovnou rovinou. Miesta, kde je tento uhol nulový, sa nachádzajú na tzv. magnetickom rovníku. Horizontálna zložka intenzity magnetického poľa $\vec{H}_0$ leží vo vodorovnej rovine v smere severo - južnom a jej absolútna hodnota je $H_0 = H \cos i$, kde H je absolútna hodnota intenzity magnetického poľa Zeme v danom mieste.

Magnetické pole Zeme (deklinácia, inklinácia a horizontálna zložka intenzity magnetického poľa) závisí od času a miesta na povrchu Zeme. Charakteristické hodnoty v Bratislave v roku 1993 boli tieto:

Deklinácia	$+ 1{,}51^{o}$ (východná)
Inklinácia	$63{,}99^{o}$
Horizontálna zložka	$16{,}70\ A.m^{-1}$

Horizontálnu zložku intenzity magnetického poľa Zeme možno merať využitím prídavných známych magnetických polí vytvorených permanentným magnetom alebo cievkou, ktorou prechádza elektrický prúd. Tento prípad predstavuje meranie pomocou tangentovej buzoly.

METÓDA MERANIA

Tangentová buzola sa skladá z cievky s polomerom R s horizontálnou osou, vo všeobecnosti s N závitmi, v strede ktorej je v horizontálnej rovine uložená buzola. Ak cievkou neprechádza elektrický prúd, magnetka buzoly sa ustáli v smere magnetického poludníka Zeme. Pred meraním natočíme cievku tak, aby jej os bola kolmá na tento smer (obr. 14.1a). Ak cievkou prechádza elektrický prúd I, magnetka sa od pôvodného smeru odkloní o uhol φ, lebo okrem magnetického poľa Zeme na ňu pôsobí aj magnetické pole vytvorené cievkou. Vektor intenzity tohto poľa v strede cievky má smer jej osi a pri vhodnej konštrukcii cievky je jeho veľkosť

$$H_s = \frac{NI}{2R} \qquad (14.1)$$

Výsledné pole je superpozíciou obidvoch polí a má intenzitu

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_s + \vec{H}_0 \qquad (14.2)$$

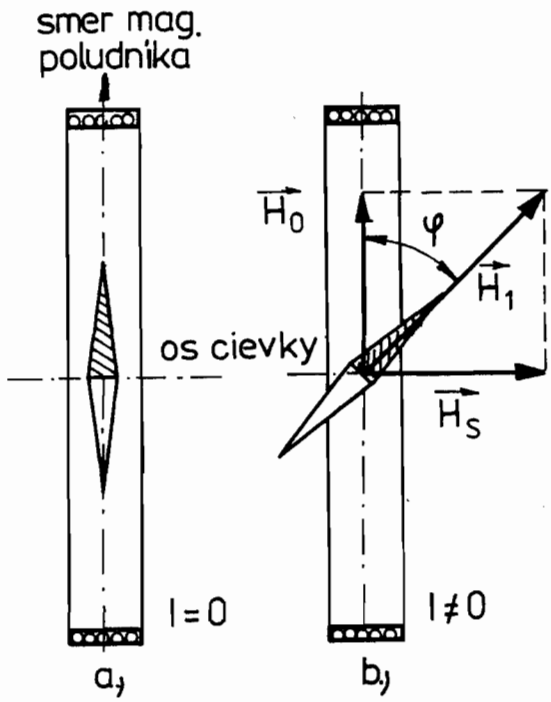
Magnetka sa ustáli v smere $\vec{H}_1$.

Ako je zrejmé z obr. 14.1b

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{H_s}{H_0} \qquad (14.3)$$

Po dosadení H_s zo vzťahu (14.1) dostaneme lineárnu závislosť

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{NI}{2RH_0} \qquad (14.4)$$



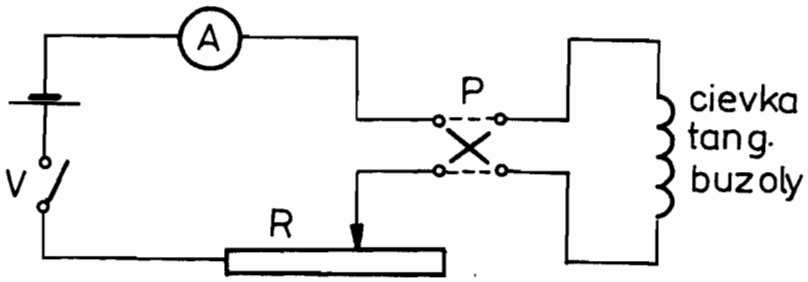
Obr. 14.1 Tangentová buzola

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) **Prístroje a pomôcky:** tangentová buzola, ampérmeter, zdroj prúdu, komutačný prepínač, vypínač, reostat

b) Postup práce:

Prístroje zapojíme podľa schémy na obr. 14.2.



Obr. 14.2 Schéma zapojenia (V - vypínač, A - ampérmeter, R - reostat, P - prepínač)

Odmeriame odchýlky magnetky φ (obr. 14.1) v závislosti od elektrického prúdu prechádzajúceho cievkou pre obidva smery prúdu. Jednotlivé hodnoty zapisujeme do tab. 14.1. Doporučujeme uskutočniť meranie pre 10 rôznych hodnôt $|\varphi| < 60^{0}$.

Tab. 14.1

R = N =

i	I (mA)	φ_-	φ_+	$\varphi = \frac{\varphi_- + \varphi_+}{2}$	tg φ

Meranie vyhodnotíme s použitím vzťahu (14.4), ktorý dáva priamkovú závislosť hodnoty tg φ od prúdu I. Namerané body (tg φ , I) vynesieme na milimetrový papier a preložíme nimi priamku. Smernica tejto priamky určuje hľadanú hodnotu H_0 (N a R sú určené konštrukciou cievky).

Poznámka:

Pri meraní dbáme na to, aby nebolo ovplyvnené rušivými magnetickými poliami (napríklad od permanentných magnetov v ampérmetroch) alebo trením magnetky o podperu.

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Určte intenzitu magnetického poľa na osi kruhového závitu!
2. Čo musí platiť o rozmeroch cievky, aby bolo možné použiť vzťah (14.1)?
3. Prečo nie je výhodné merať závislosť tg φ od I pre väčšie hodnoty φ ?

15. Meranie magnetického momentu permanentného magnetu

Odmerať magnetický moment tyčového permanentného magnetu pomocou merania v I. Gaussovej polohe a merania doby kmitu magnetického kyvadla.

TEORETICKÝ ÚVOD

O existencii magnetického poľa v okolí vodičov, ktorými prechádza elektrický prúd, ako aj v okolí permanentných magnetov, sa môžeme presvedčiť pomocou magnetky. Permanentný magnet možno charakterizovať jeho celkovým magnetickým momentom

$$\vec{m} = \int \vec{M}\, d\tau$$

kde $d\tau$ je objemový element a $\vec{M}$ je vektor magnetizácie, ktorý má význam magnetického dipólového momentu objemovej jednotky. Magnetické pole v okolí permanentného magnetu je pomocou siločiar znázornené na obr. 15.1.

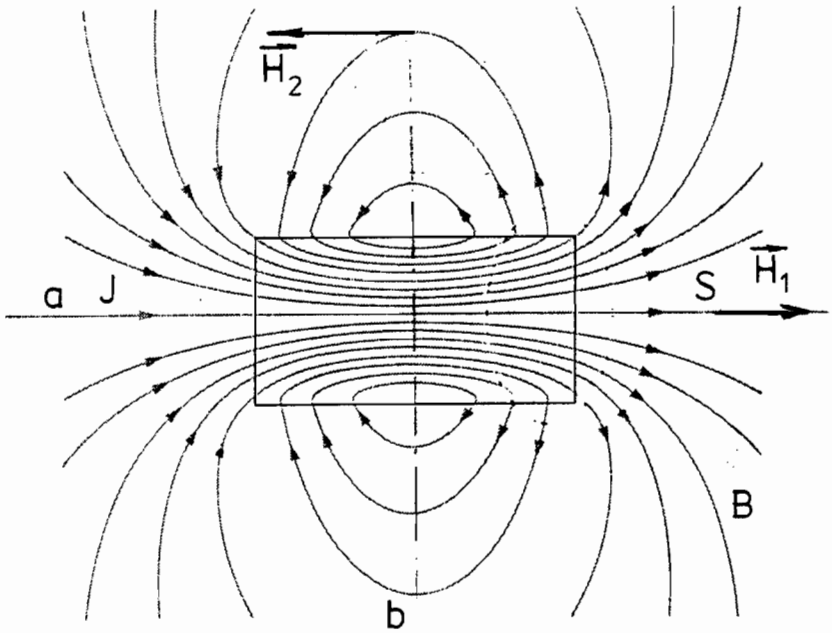
Ak sa magnetka nachádza na osiach a a b, hovoríme o tzv. Gaussových polohách magnetky. V nich sa ustáli rovnobežne s pozdĺžnou osou magnetu. Pre intenzitu magnetického poľa v I.Gaussovej polohe (na osi a) možno odvodiť vzťah

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{m}}{2\pi\mu_0 \ell^3} \qquad (15.1)$$

a v II. Gaussovej polohe (na osi b) vzťah

$$\vec{H}_2 = -\frac{\vec{m}}{4\pi\mu_0 \ell^3} \tag{15.2}$$

Vzťahy (15.1) a (15.2) sú dobre splnené vtedy, keď vzdialenosť od magnetu ℓ je oveľa väčšia ako dĺžka magnetu.



Obr. 15.1 Magnetické pole v okolí permanentného magnetu

V homogénnom magnetickom poli účinkuje na permanentný magnet dvojica síl s momentom

$$\vec{D} = \vec{m} \times \vec{H} \tag{15.3}$$

(V tejto súvislosti je vhodné poukázať na známy vzťah pre moment pôsobiaci na uzavretý prúdovodič, ktorým prechádza prúd I_e

$$\vec{D} = I_e(\vec{S} \times \vec{B}) = \mu_0 I_e \vec{S} \times \vec{H}$$

kde S je plocha uzavretá vodičom.)

Táto dvojica síl sa snaží pootočiť magnet tak, aby jeho magnetická os (spojnica jeho magnetických pólov) bola súhlasne rovnobežná so siločiarami poľa.

Keď je magnet upevnený tak, že sa môže otáčať v horizontálnej rovine okolo osi kolmej na magnetickú os, ktorá prechádza ťažiskom (napríklad visí na lanku - magnetické kyvadlo), jeho pohyb opisuje pohybová rovnica

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = D = - mH_0 \sin\varphi \doteq - mH_0 \varphi \qquad (15.4)$$

Ide teda o harmonický pohyb s uhlovou frekvenciou

$$\omega = \sqrt{\frac{mH_0}{I}}$$

a dobou kmitu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mH_0}} \qquad (15.5)$$

Písmenom I sme označili moment zotrvačnosti vzhľadom na zvislú os otáčania.

METÓDA MERANIA

Jednoduchý vzťah (15.1) pre intenzitu magnetického poľa nám dáva návod na experimentálne stanovenie hodnoty podielu $\frac{m}{H_0}$, kde H_0 je veľkosť horizontálnej zložky zemského magnetického poľa (pozri úlohu č. 14).

Permanentný magnet orientujeme tak, aby jeho magnetická os bola kolmá na smer horizontálnej zložky H_0 (obr. 15.2). V mieste A vo vzdialenosti ℓ od permanentného magnetu sa magnetka ustáli v smere výsledného vektora intenzity magnetického poľa

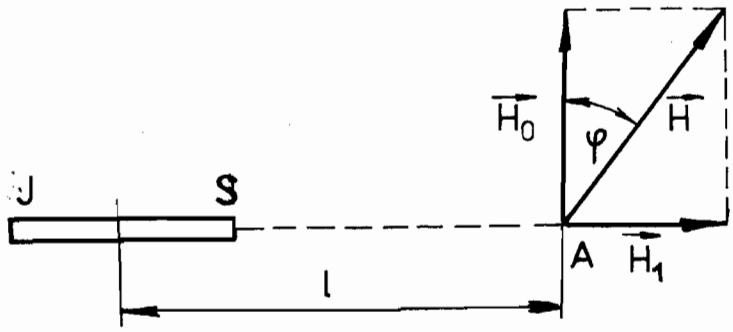
$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1$$

Od magnetického poludníka (t.j. od smeru H_0) sa odkláňa o uhol φ, pre ktorý platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H_1}{H_0} = \frac{m}{2\pi\mu_0 H_0 \ell^3}$$

Pre hodnotu podielu $\frac{m}{H_0}$ dostávame

$$\frac{m}{H_0} = 2\pi\mu_0 \ell^3 \operatorname{tg} \varphi \qquad (15.6)$$



Obr. 15.2 Meranie magnetického momentu v I. Gaussovej polohe

Ďalšie potrebné údaje získame použitím magnetického kyvadla. Zo vzťahu (15.5) možno vyjadriť súčin

$$mH_0 = \frac{4\pi^2 I}{T^2} \qquad (15.7)$$

Sledovaním pohybu magnetického kyvadla v magnetickom poli Zeme, meraním doby kmitu permanentného magnetu v magnetickom poli Zeme možno teda odmerať hodnotu súčinu mH_0, čo spolu s meraním podielu $\frac{m}{H_0}$ v I. Gaussovej polohe dáva možnosť určiť obidve veličiny: magnetický moment permanentného magnetu m a horizontálnu zložku magnetického poľa Zeme H_0.

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) **Prístroje a pomôcky:** permanentný tyčový magnet, magnetka, základná meracia doska so závesným zariadením pre magnetické kyvadlo

b) **Postup práce:**

Magnetku položíme na miesto A vyznačené na základnej doske. Dosku orientujeme tak, aby magnetkou indikovaný smer H_0 bol kolmý na ryhu pre uloženie magnetu. Potom položíme do ryhy permanentný magnet, ktorého vzdialenosť od stredu magnetky bude ℓ. Odmeriame uhol φ, o ktorý sa magnetka vychýli vplyvom magnetického poľa permanentného magnetu. Meriame pri rôznych vzdialenostiach ℓ. Hodnoty zapíšeme do tab. 15.1.

Tab. 15.1

i	ℓ(m)	φ_1	φ_2	$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$	$\frac{1}{\ell^3}$ (m^{-3})	tg φ

Ako vyplýva zo vzťahu (15.6), závislosť tg φ od hodnoty $x = \frac{1}{\ell^3}$ je lineárna. Výsledky preto spracujeme graficky; neznámu hodnotu $\frac{m}{H_0}$ určíme zo smernice priamky tg φ = konšt.$\frac{1}{\ell^3}$. Priamku preložíme experimentálnymi bodmi metódou najmenších štvorcov.

Permanentný magnet umiestnime do skľučovadla visiaceho na vlákne, pričom dbáme, aby os určená napnutým vláknom prechádzala ťažiskom magnetu. Periodu kyvadlového pohybu T určíme tak, ako v úlohe č. 1.

Moment zotrvačnosti homogénneho valca s hmotnosťou m, polomerom r a dĺžkou d vzhľadom na os kolmú na os symetrie a prechádzajúcu ťažiskom magnetu vypočítame podľa vzťahu

$$I = \frac{1}{4} mr^2 + \frac{1}{12} md^2$$

Využijúc vzťah (15.7) vypočítame súčin mH_0. Z hodnôt podielu a súčinu vypočítame hodnotu magnetického momentu m.

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Permanentný magnet tvaru tyče s prierezom S má magnetický moment m. Akú hodnotu má mať ekvivalentný prúd prechádzajúci povrchom tyče kolmo na jej os?
2. Z nameraných výsledkov určte hodnotu horizontálnej zložky magnetického poľa Zeme H_0 a porovnajte ju s výsledkom z úlohy č. 14. Rozdiskutujte príčinu rozdielnosti získaných hodnôt!
3. Zvážte možnosť merania v II. Gaussovej polohe!

16. Špecifický náboj elektrónu

S použitím magnetrónu odmerajte špecifický náboj elektrónu.

TEORETICKÝ ÚVOD

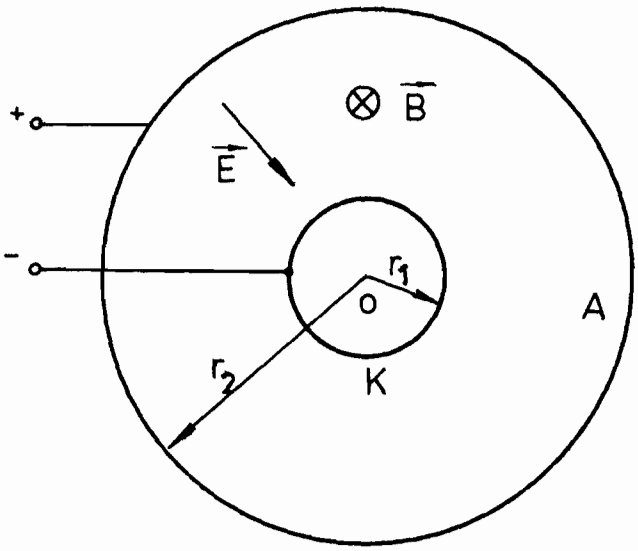
Pohyb nabitej častice v kombinovanom elektrickom a magnetickom poli závisí od pomeru jej náboja a hmotnosti. Je to zrejmé, ak napíšeme pohybovú rovnicu nabitej častice za pôsobenia Lorentzovej sily

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \qquad (16.1)$$

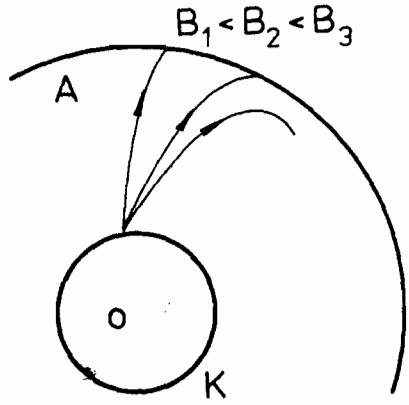
kde $\vec{r}$ je polohový vektor častice, q je jej náboj, $\vec{E}$ je intenzita elektrického poľa a $\vec{B}$ je indukcia magnetického poľa. Z rovnice (16.1) vyplýva, že sledovaním pohybu nabitej častice v takomto poli nedokážeme zvlášť určiť jej náboj q a hmotnosť m, ale len pomer $\frac{q}{m}$, tzv. špecifický náboj častice.

Vhodným experimentálnym zariadením na určenie špecifického náboja elektrónu je napríklad vákuová dióda so súosími valcovými elektródami umiestnená v homogénnom magnetickom poli s indukciou v smere osi elektród o (obr. 16.1). Intenzita elektrického poľa $\vec{E}$ medzi katódou a anódou A má smer kolmý na os o, a teda aj na smer magnetickej indukcie $\vec{B}$. Elektrické pole bude potom elektróny vyletujúce z katódy urýchľovať smerom k anóde, magnetické pole bude zakrivovať dráhy elektrónov v smere kolmom na smer okamžitej rýchlosti. Pre rôzne hodnoty veľkosti indukcie

budú mať potom dráhy elektrónov rôzne zakrivenia (obr. 16.2). Ak indukcia magnetického poľa dosiahne istú kritickú hodnotu B_{kr}, zakrivenie dráhy elektrónu bude také, že sa už nedostane na anódu. Ak meriame prúd vo vonkajšom obvode diódy,pri tejto hodnote indukcie magnetického poľa spozorujeme výrazný pokles. Z hodnoty B_{kr} možno potom usúdiť na veľkosť špecifického náboja $\left|\frac{q}{m}\right|$. Aby sme našli túto závislosť aj kvantitatívne, všimnime si bližšie rovnicu (16.1).



Obr. 16.1 Schéma magnetrónu



Obr. 16.2
Ilustrácia vplyvu magnetického poľa na tvar dráhy elektrónu

Budeme predpokladať, že začiatočná rýchlosť elektrónov vyletujúcich z katódy je nulová, t.j. $\frac{d\vec{r}(0)}{dt} = \vec{0}$. V dôsledku toho, že Lorentzova sila $q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ je kolmá na os o, bude aj dráha elektrónu ležať v rovine kolmej na elektródy. V ďalšom budeme preto riešiť rovnicu (16.1) v rovine kolmej na os elektród prechádzajúcej začiatočným bodom $\vec{r}(0)$. Za začiatok súradníc si zvolíme priesečník tejto roviny s osou o.

Vynásobime rovnicu (16.1) skalárne vektorom $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Po malých úpravách dostaneme zákon zachovania energie v tvare

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 + q\,V(\vec{r})\right] = 0 \qquad (16.2)$$

kde $V(\vec{r}) = -\,\vec{r}.\vec{E}$ je potenciál elektrického poľa.

Podobne vynásobením rovnice (16.1) vektorovo zľava polohovým vektorom $\vec{r}$ dostaneme zákon zachovania momentu hybnosti v tvare

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\,\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{q}{2}\,r^2\vec{B}\right) = 0 \qquad (16.3)$$

Z kinematiky vieme, že vektor rýchlosti možno rozložiť na radiálnu a priečnu zložku, t.j.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\frac{\vec{r}}{r} + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (16.4)$$

kde $\vec{\omega}$ je vektor uhlovej rýchlosti, ktorý má zrejme smer kolmý na rovinu opisovaného pohybu. Pre úplný opis pohybu určeného rovnicami (16.2) a (16.3) je potrebné zadať ešte začiatočné podmienky:

$$\begin{aligned} r(0) &= r \\ \frac{dr(0)}{dt} &= 0 \\ \omega(0) &= 0 \end{aligned} \qquad (16.5)$$

Riešenie rovníc (16.2) a (16.3) dostaneme ich preintegrovaním podľa času. Keď ešte dosadíme rýchlosť zo vzťahu (16.4), dostávame dve nové rovnice

$$\frac{1}{2}\,m\left[\omega^2 r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] + q\,V(r) = \text{const.} \qquad (16.6a)$$

$$mr^2\omega + \frac{qBr^2}{2} = \text{const.} \qquad (16.6b)$$

Integračné konštanty v týchto rovniciach určíme zo začiatočných podmienok (16.5). Systém rovníc (16.6a, b) bude mať potom tvar

$$\frac{1}{2}\, m \left[\omega^2 r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \right] + q\, V(r) = q\, V(r_1)$$

$$mr^2\omega + \frac{qBr^2}{2} = \frac{qBr_1^2}{2} \qquad (16.7)$$

Zo systému rovníc (16.7) možno vylúčiť $\omega(t)$ a určiť hodnotu $B = B_{kr}$, pri ktorej sa elektróny práve nedostanú na anódu. Znamená to, že ak

$$B = B_{kr} \qquad \text{a} \qquad r = r_2$$

potom

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

Z rovníc (16.7) tak dostaneme hľadaný vzťah

$$B_{kr}^2 = \frac{8\,U}{\left|\frac{q}{m}\right| r_2^2 \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]^2} \qquad (16.8)$$

kde U je rozdiel potenciálov medzi anódou a katódou

$$U = V(r_2) - V(r_1)$$

METÓDA MERANIA

Zariadenie, ktorého podstata je rozobraná v teoretickej časti, sa zhotovuje ako elektrónka s dvoma valcovými elektródami

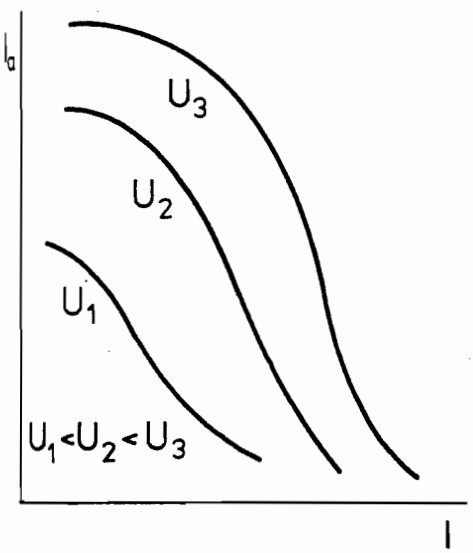
(dióda) a nazýva sa magnetrón. Táto elektrónka je vložená do dutiny solenoidu, ktorým sa vytvára potrebné magnetické pole. Os solenoidu je totožná s osou valcových elektród. Pokiaľ nevyžadujeme veľkú presnosť, môžeme sa pri určení indukcie magnetického poľa B v magnetróne uspokojiť s približným vzťahom pre indukciu magnetického poľa v strede tenkej dlhej cievky

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\ell} \tag{16.9}$$

kde N je počet závitov, ℓ je dĺžka cievky, I je prúd prechádzajúci cievkou. Spojením rovnice (16.8) a vzťahu (16.9) dostaneme pre špecifický náboj elektrónu vzťah

$$\left|\frac{q}{m}\right| = 8\,U \left\{ \frac{\ell}{N\, I_{kr}\, \mu_0\, r_2 \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]} \right\}^2 \tag{16.10}$$

V ideálnom prípade, ktorý sme modelovali, I_{kr} by mal byť prúd prechádzajúci solenoidom, pri ktorom skokom poklesne anódový prúd v magnetróne na nulovú hodnotu.



Obr. 16.3
Charakteristiky magnetrónu

V skutočnosti ideálne podmienky modelu nie sú zaručené a závislosť anódového prúdu I_a od prúdu I prechádzajúceho solenoidom, tzv. charakteristika magnetrónu je menej výrazná (obr. 16.3). Dôvodom sú napríklad nerovnaké začiatočné rýchlosti elektrónov, okrajové efekty deformujúce elektrické pole pri koncoch elektród, nehomogénnosť

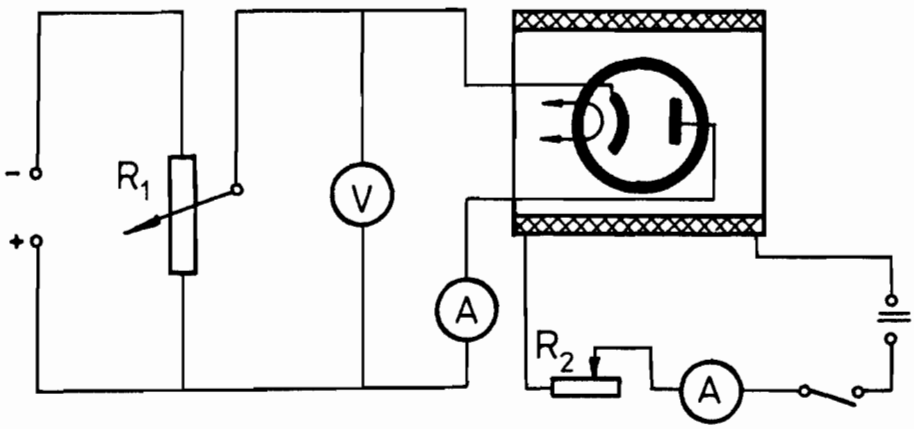
magnetického poľa. Za kritický prúd budeme preto považovať prúd I najstrmšieho poklesu anódového prúdu, t.j. prúd v inflexnom bode závislosti $I_a = I_a(I)$.

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) Prístroje a pomôcky: dva zdroje jednosmerného prúdu, zdroj žeravenia diódy, voltmeter, dva ampérmetre, dva regulačné odpory, solenoid, dióda

Postup práce:

Charakteristiku magnetrónu meriame v zapojení podľa schémy na obr. 16.4.



Obr. 16.4 Schéma elektrického zapojenia magnetrónu

Pre päť anódových napätí v rozsahu 40 - 60 V odmeriame charakteristiky magnetrónu v takom intervale prúdov cievky, aby bolo možné určiť kritický prúd. Z nameraných charakteristík odčítame

hodnoty kritických prúdov I_{kr}, odpovedajúce rôznym anódovým napätiam U. Zo vzťahu (16.10) vidieť, že závislosť napätia U od I_{kr}^2 by mala byť lineárna, preto nameranými bodmi (U, I_{kr}^2) preložíme priamku. Smernica tejto priamky, spolu s geometrickými údajmi o dióde a solenoide, určuje hľadanú hodnotu špecifického náboja elektrónu $\left|\frac{q}{m}\right|$. Presnosť takto vypočítanej hodnoty $\left|\frac{q}{m}\right|$ ohodnotíme relatívnou chybou (porovnaním s tabuľkovou hodnotou $\left|\frac{q}{m}\right|_{tab} = 1{,}7587.10^{11}\ C.kg^{-1}$). Všetky namerané veličiny zapisujeme do tab. 16.1

Tab. 16.1

U_1 = (V)		U_2 = (V)		U_3 = (V)	
I (A)	I_a(mA)	I (A)	I_a(mA)	I (A)	I_a(mA)

Poznámka:

Pri meraní charakteristiky magnetrónu sa zmenou prúdu cez solenoid bude meniť anódový prúd. Zmenou anódového prúdu sa bude meniť aj úbytok napätia na anódovom potenciometri, teda aj hodnota anódového napätia. Preto potenciometrom R_1 udržujeme anódové napätie na stálej hodnote.

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Ako sa zmení vzťah (16.8) pre B_{kr}^2, ak začiatočná rýchlosť elektrónu bude v_0?

2. Určte veľkosť indukcie magnetického poľa v strede tenkej cievky s dĺžkou ℓ , polomerom R a počtom závitov N! Zo získaného výsledku odhadnite, aký má byť pomer $\frac{R}{\ell}$, aby systematická chyba v dôsledku použitia vzťahu (16.5) nepresahovala 2 %!
3. Prečo magnetrón použitý na meranie špecifického náboja nemá mať feromagnetické časti?

nkej
ska-
ema-
vala

nemá

17. Elektrická vodivosť kovov a polovodičov

Na predložených vzorkách vyšetrite závislosť odporu vodiča a polovodiča od teploty a porovnajte ich vhodnosť na meranie teploty.

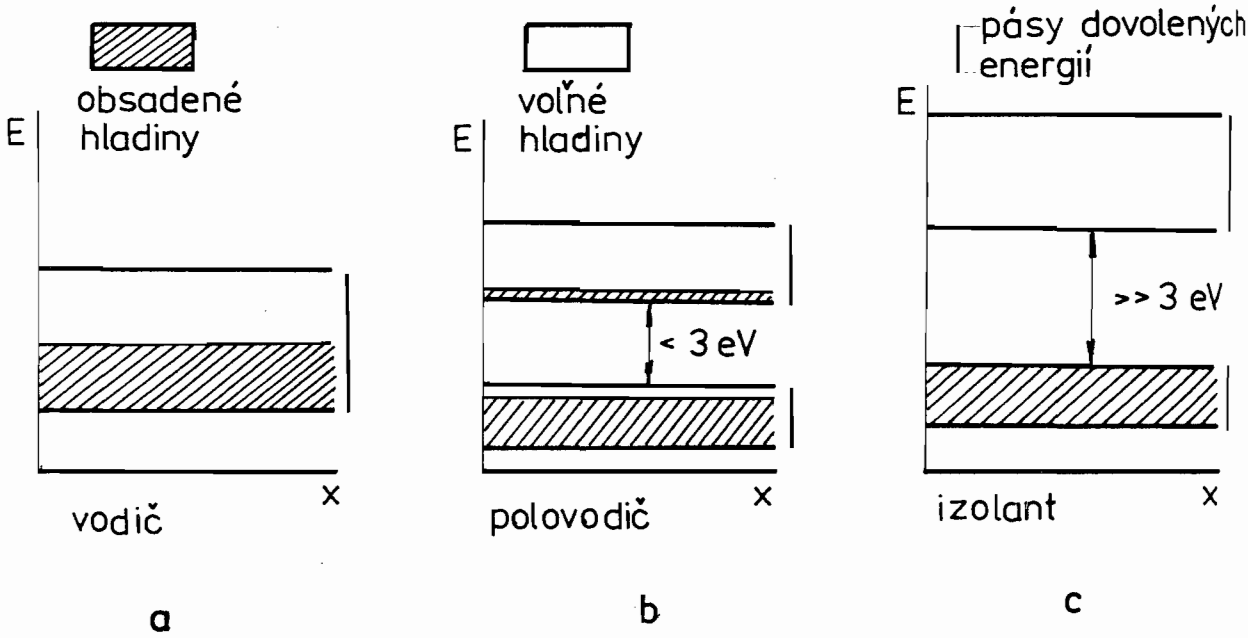
TEORETICKÝ ÚVOD

Pri vytváraní kryštalickej mriežky sa izolované energetické hladiny atómov rozštiepia - vytvoria energetické pásy a elektróny kryštálu obsadia stavy s najnižšími energiami, pričom v súlade s Pauliho vylučovacím princípom na každej hladine môžu byť najviac dva elektróny s opačne orientovanými spinmi.

Kovy sú charakteristické tým, že majú dostatok nezaplnených hladín v zakázanom páse, ktorý sa tak stáva aj vodivostným pásom (obr. 17.1a). V ideálnom dielektriku sú všetky hladiny základného pása obsadené a hladiny vyššieho - vodivostného pása - sú voľné - neobsadené (obr. 17.1c). Energetická vzdialenosť týchto pásov býva niekoľko eV, a preto pri aplikovaní elektrického poľa sa elektróny nemôžu dostať do usporiadaného pohybu, lebo energia získaná od elektrického poľa nie je dostatočná na ich prechod do vyššieho pása a obsadenosť základného pása vylučuje pohyb elektrónov. Ak by napríklad jeden z elektrónov zmenil smer svojho pohybu na opačný, značilo by to, že prešiel do iného energetického stavu. Keďže všetky energetické hladiny sú obsadené, je to možné len vtedy, ak elektrón obsadzujúci túto druhú

energetickú hladinu prejde do stavu, ktorý pôvodne obsadzoval prvý elektrón, takže v konečnom dôsledku k žiadnej zmene nedošlo.

V látkach s menšou energetickou vzdialenosťou medzi pásmi elektróny obsadzujú aj stavy vo vyššom páse. Taká je situácia v polovodičoch, kde vzdialenosť medzi najvyššími pásmi je menšia ako 3 eV (obr. 17.1c). Napríklad v Ge pri T = 300 K je $\Delta E_z = 0{,}66$ eV.



Obr. 17.1 Pásová štruktúra látok

Elektrická vodivosť kovov

Elektrická vodivosť kovov je sprostredkovaná pohybom voľných elektrónov. Sú to elektróny, ktoré by v izolovanom atóme obsadzovali najvyššie hladiny energie. Pri spájaní atómov do kryštalickej mriežky sa každý takýto elektrón stáva spoločným

"vlastníctvom" všetkých zúčastnených atómov, a ako sme už spomenuli, diskrétne energetické hladiny sa rozštiepia a vytvoria energetické pásy.

Kvantovomechanický rozbor úlohy ukazuje, že pokiaľ sú atómy kovu uložené periodicky, t.j. tvoria dokonalú kryštalickú mriežku, je pohyb elektrónov taký ako pohyb voľnej častice, avšak s inou hmotnosťou než akú mal jednotlivý elektrón. Vplyv periodického rozloženia atómov sa prejaví iba pozmenením hmotnosti elektrónov. Takúto hmotnosť nazývame efektívna hmotnosť a označujeme ju m^*. Tepelné kmity mriežky narušujú periodičnosť rozloženia iónov, podobne aj cudzie prímesové atómy, poruchy mriežky, a spôsobujú, že sa na nich elektróny rozptyľujú. Pohyb elektrónu je teda voľným pohybom v priemere len po dobu τ , ktorú nazývame strednou dobou voľného pohybu.

Elektróny, ktoré by sa ináč pohybovali v danom elektrickom poli rovnomerne zrýchlene (čo by znamenalo neobmedzený vzrast prúdu), sa pri každej zrážke rozptýlia a v strednej hodnote ich rýchlosť poklesne na nulu. Výsledný efekt je ten, že elektróny majú určitú strednú rýchlosť

$$v = \mu E$$

kde μ je tzv. pohyblivosť elektrónu a je možné ju vyjadriť pomocou už zavedených veličín vzťahom

$$\mu = \frac{e\tau}{m}$$

Prúdová hustota pri danej intenzite elektrického poľa E je

$$j = \varrho v = en\mu E = \gamma E$$

kde ϱ je objemová hustota náboja.

kde

$$\gamma = en\mu$$

je špecifická elektrická vodivosť.

Zmenou teploty sa mení aj stredná doba voľného pohybu, a tým aj pohyblivosť, zatiaľ čo koncentrácia voľných elektrónov n v kove je konštantná.

Rozptyl závisí od toho, na čom sa pohybujúce sa elektróny rozptyľujú (atómy, ióny, prímesi, atď.). Ak je rozptyl spôsobený prevažne kmitmi mriežky, tak so zvyšujúcou sa teplotou vzrastá pravdepodobnosť rozptylu a doba τ klesá podľa vzťahu

$$\tau \sim \frac{1}{T}$$

čo sa prejaví poklesom vodivosti s narastaním teploty.

Táto skutočnosť sa premieta aj do známej lineárnej závislosti odporu väčšiny kovov od teploty v určitom teplotnom intervale

$$R = R_0 \left[1 + \alpha(T - T_0)\right]$$

kde R_0 je odpor kovu pri teplote T_0, α je teplotný koeficient odporu a vo všeobecnosti je funkciou teploty $\alpha = \alpha(T)$. Zvyčajne sa za teplotu T_0 berie 0 ^oC alebo 20 ^oC.

Závislosť odporu kovov od teploty sa v širokom intervale teplôt používa na meranie teploty pomocou platinového odporového teplomera.

Elektrická vodivosť polovodičov

Pri teplote absolútnej nuly sa polovodiče správajú ako dielektriká. Ich vodivosť však vzrastá s rastúcou teplotou a prítomnosťou prímesí iných prvkov, ktoré sú zdrojom tzv. akceptorových

a donorových hladín, ktoré ležia medzi pásmi dovolených energií. Ak sú energie týchto lokalizovaných hladín dostatočne blízko k okrajom pásov, môže dôjsť k ionizácii v dôsledku tepelnej energie mriežky a objavením sa voľných nosičov náboja i vtedy, keď bezprostredné vybudenie (prechod) elektrónov zo základného pása do vodivostného je málo pravdepodobné.

Pravdepodobnosť, že dôjde k prechodu je

$$W \sim \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right) \qquad (17.1)$$

kde ΔE je vzdialenosť energetickej hladiny prímesi od energetického pása, alebo v prípade tzv. vlastného polovodiča, znamená šírku zakázaného pása, k je Boltzmannova konštanta ($k = 1{,}38.10^{-23}\ J.K^{-1}$). Pri tepelnej excitácii elektrónov zo základného pása do vodivostného hovoríme o vlastných polovodičoch a vlastnej vodivosti. Ak dochádza k vybudeniu nosičov elektrického náboja z prímesových hladín, hovoríme o prímesovej vodivosti.

Elektróny, ktoré sa dostali do vodivostného pása, môžu v plnej miere viesť elektrický prúd. Elektróny, ktoré opustili základný pás, zanechali po sebe prázdne miesta, tzv. diery, ktoré sú príčinou možnosti vytvorenia prúdu pohybom elektrónov v samom základnom páse. Na pohyb elektrónov v tomto základnom páse možno pozerať ako na pohyb dier opačným smerom, t.j. správajú sa ako kladne nabité voľné častice s efektívnou hmotnosťou m_p^*.

Elektróny s koncentráciou n vo vodivostnom páse, s efektívnou hmotnosťou m_n^* a pohyblivosťou μ_n a diery s koncentráciou p v základnom, tzv. valenčnom, páse s efektívnou hmotnosťou m_p^*

a pohyblivosťou μ_p spôsobujú, že polovodič sa vyznačuje špecifickou vodivosťou γ , ktorú môžeme vyjadriť pomocou vzťahu

$$\gamma = en\mu_n + ep\mu_p \tag{17.2}$$

Ak v polovodiči prevláda donorová elektrická vodivosť, bude

$$\gamma = en\mu_n \tag{17.3}$$

Koncentrácia voľných elektrónov je pri teplote T, v súlade so vzťahom (17.1), daná vzťahom

$$n = A \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right) \tag{17.4}$$

Závislosť špecifickej vodivosti γ od teploty bude vyjadrená vzťahom

$$\gamma(T) = e\mu(T)A \exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right) \tag{17.5}$$

Odpor reálneho polovodičového rezistora - termistora sa potom dá vyjadriť pomocou vzťahu

$$R_p(T) = R_p(T_0) \exp\left[-\frac{\Delta E}{2kT}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right] \tag{17.6}$$

kde v $R_p(T_0)$ je obsiahnutý predexponenciálny faktor zo vzťahu (17.5) a geometrické rozmery termistora a predstavuje odpor termistora pri teplote T_0.

Logaritmovaním závislosti (17.6) dostaneme

$$\ln R_p(T) = C + \frac{\Delta E}{2kT} \tag{17.7}$$

čo predstavuje lineárnu závislosť medzi $\ln R_p$ a veličinou $\frac{1}{T}$. Zo smernice b tejto závislosti môžeme určiť aktivačnú energiu ΔE prímesí polovodiča. Platí

$$\Delta E = 2kb \tag{17.8}$$

METÓDA MERANIA

Meranie špecifickej vodivosti sa obyčajne transformuje na meranie špecifického odporu alebo celkového odporu (pri známej geometrii).

Z teoretického úvodu vyplýva, že ako odpor vodiča, tak aj odpor polovodiča sa s rastúcou teplotou menia (lineárny vzrast, resp. exponenciálny pokles). Ak kontakty vzorky neovplyvňujú celkový odpor, použijeme na meranie dvojkontaktnú (dvojsondovú) metódu. Odpor meriame buď priamo alebo v mostíkovom zapojení. Teplotu vzoriek regulujeme a stabilizujeme kontaktným teplomerom v termostate.

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

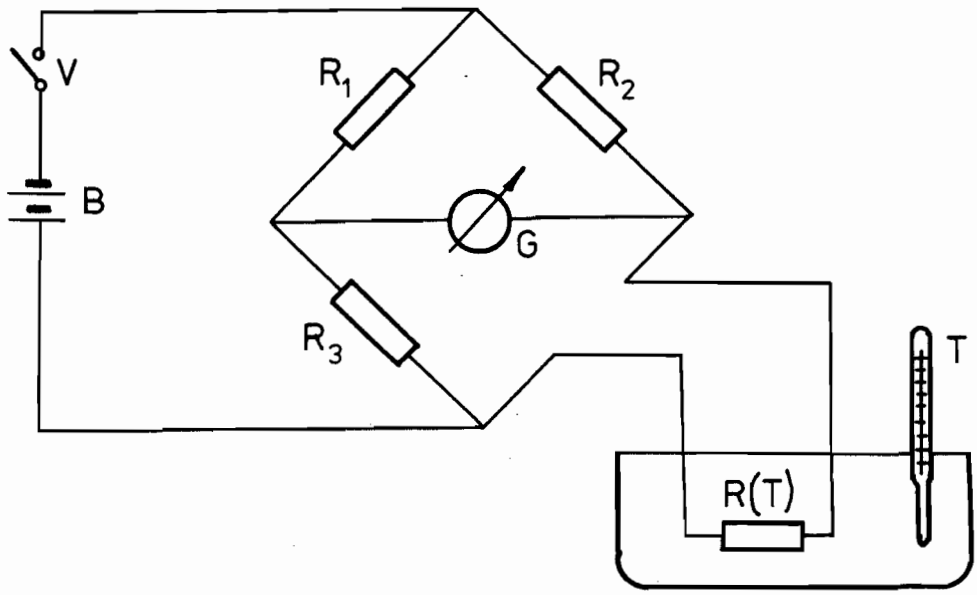
a) **Prístroje a pomôcky:** vzorka platinového odporu, vzorka polovodičového odporu - termistor, termostat, Wheatstonov mostík

b) **Postup práce:**

1. Meranie závislosti odporu vodiča alebo polovodiča, reprezentovaného termistorom, od teploty robíme metódou meraní dvojíc hodnôt T a R. Namerané hodnoty zapisujeme do tab. 17.1. Teplotu v termostate postupne zvyšujeme z 20 ^{o}C na 70 ^{o}C v intervaloch po 5 ^{o}C. Po každom zvýšení teploty počkáme, kým sa teplota v termostate ustáli. Po ustálení teploty odmeriame odpor obidvoch vzoriek podľa zapojenia na obr. 17.2.

Tab. 17.1

i	t (^{o}C)	R_k (Ω)	R_p (Ω)	T (K)	$\frac{1}{T}$ (K^{-1})	ln R



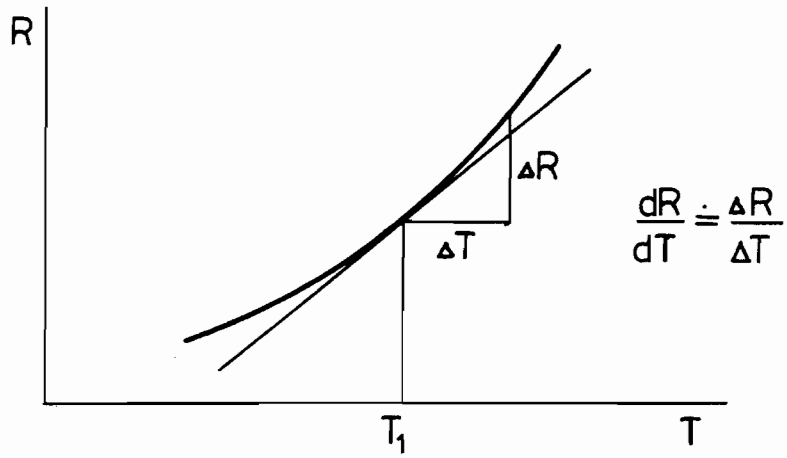
Obr. 17.2 Schéma zapojenia na meranie teplotnej závislosti odporu

2. Z nameraných hodnôt zostrojíme grafické závislosti odporu od teploty pre obidve vzorky; pre polovodič aj závislosť ln R_p = = $f(\frac{1}{T})$. Z uvedených závislostí určíme α pre kov a ΔE pre polovodič.
3. Na základe vzťahu

$$\frac{dR}{dT} \doteq \frac{\Delta R}{\Delta T}$$

ktorý je zrejmý z obr. 17.3, určíme presnosť (citlivosť) merania teploty pomocou odporového alebo polovodičového

teplomera pre jednu konkrétnu hodnotu teploty T_1. Na určenie tejto veličiny potrebujeme poznať presnosť merania odporu ΔR a smernicu teplotnej závislosti odporu pri konkrétnej teplote T_1.



Obr. 17.3 Ilustračná závislosť R(T) k vysvetleniu presnosti merania teploty odporovým teplomerom

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Aká je stredná rýchlosť elektrónov v polovodičoch bez pripojeného elektrického poľa?
2. Ako zistíme presnosť merania odporu ΔR?
3. Vysvetlite teplotnú závisloť elektrickej vodivosti v kovoch a polovodičoch!

18. Meranie polomeru krivosti šošovky a vlnovej dĺžky svetla

Určte pomocou Newtonových krúžkov polomer krivosti šošovky a vlnovú dĺžku svetelného zdroja.

TEORETICKÝ ÚVOD

Keď do toho istého miesta v priestore prichádzajú vlnenia z dvoch (alebo viacerých) zdrojov, tak sa tieto vlnenia budú vzájomne skladať - interferovať. Ak sú jednotlivé vlnenia opísané výchylkami $\vec{u}_1(\vec{r},t)$, $\vec{u}_2(\vec{r},t)$, $\vec{u}_3(\vec{r},t)$,..., potom výsledné vlnenie bude superpozíciou - vektorovým súčtom výchyliek $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \ldots$. Pre prípad rovinných vĺn s rovnakou frekvenciou šíriacich sa pozdĺž osi x

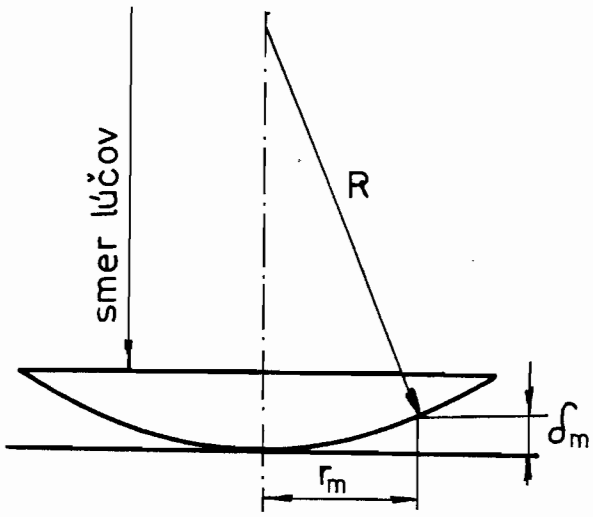
$$u_1(x,t) = A_1 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x_1}{v}\right)\right]$$

$$u_2(x,t) = A_2 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x_2}{v}\right)\right]$$

vznikne interferenciou opäť harmonické vlnenie rovnakej frekvencie. Amplitúda výsledného vlnenia bude však závisieť od rozdielu $x_2 - x_1$, ktorý nazývame dráhový rozdiel. Ak dráhový rozdiel $d = k\lambda$ (kde k je celé číslo), potom výsledná amplitúda bude rovná súčtu amplitúd pôvodných vlnení ($A = A_1 + A_2$ - maximálne zosilnenie). Ak $d = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, tak výsledná amplitúda sa bude

rovnať rozdielu pôvodných amplitúd ($A = A_1 - A_2$ - maximálne zoslabenie; v prípade $A_1 = A_2$ bude $A = 0$). Aby bolo možné pozorovať jav interferencie, musí byť splnená navyše podmienka koherencie vlnení. Koherencia znamená, že rozdiel fáz vlnení sa s časom nemení. Podmienky vzniku interferencie pre svetlo sú rovnaké ako pre ľubovoľné iné vlnenie. Požiadavku koherencie však pre dva nezávislé zdroje svetla nie je možné splniť. Ak teda chceme pozorovať interferenciu svetla, musíme svetlo z jedného zdroja rozdeliť a nechať prebehnúť obidve časti rôznu dráhu. Pri opätovnom stretnutí v dôsledku dráhového rozdielu vznikne interferenčný obraz.

Jedným príkladom interferencie je interferencia svetla na šošovke (obr. 18.1).



Obr. 18.1 Chod lúčov pri interferencii na šošovke

Rovinná elektromagnetická vlna dopadá na ploskovypuklú šošovku. Po prechode šošovkou sa časť svetla odrazí naspäť a časť prejde do vzduchovej medzery medzi šošovku a podložku. Vzduchovú medzeru

prebehne svetlo dvakrát, lebo na podložke sa odrazí. Pretože obidve časti svetla sú koherentné, na rozhraní šošovka - vzduch dochádza k interferencii. Výsledok interferencie bude závisieť od veľkosti vzduchovej medzery. Keď ešte vezmeme do úvahy, že pri odraze od opticky hustejšieho prostredia sa fáza vlnenia zmení o π (čomu zodpovedá v dráhovom vyjadrení $\frac{\lambda}{2}$), potom dráhový rozdiel obidvoch častí svetla bude

$$\Delta = 2\,\delta_m + \frac{\lambda}{2} \qquad (18.1)$$

Všetky tieto úvahy platia pre prípad, že polomer šošovky je veľký a svetelné lúče pri lome a odraze sa prakticky neodchyľujú od pôvodného smeru. Miesta na kružniciach s polomerom r_m a stredom v mieste dotyku šošovky s podložkou budú mať rovnakú vzduchovú medzeru - rovnaký rozdiel dráh. Obraz, ktorý budeme pozorovať pri pohľade v smere šírenia sa rovinnej vlny, budú tvoriť svetlé a tmavé krúžky, ktoré vzniknú v miestach maximálneho zosilnenia a maximálneho zoslabenia vlnenia. Tento interferenčný obraz sa nazýva Newtonove krúžky. (Ak dopadajúce svetlo nie je monochromatické, potom výsledný obraz je zložitejší. Budú ho tvoriť tiež krúžky, ale rôzne zafarbené.)

Z obr. 18.1 je vidieť, že veľkosť vzduchovej medzery závisí od polomeru šošovky a to nám dáva možnosť určiť polomer šošovky odmeraním polomerov Newtonových krúžkov. Podľa obr. 18.1 môžeme písať

$$R^2 = r_m^2 + (R - \delta_m)^2 \qquad (18.2)$$

a po úprave a zanedbaní δ_m^2 oproti R^2 (pretože $\delta_m \ll R$) dostaneme

$$r_m^2 = 2R\,\delta_m$$

alebo

$$\delta_m = \frac{r_m^2}{2R} \tag{18.3}$$

V odrazenom svetle bude splnená podmienka minima, ak

$$\Delta = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$$

Po dosadení vzťahov (18.1) a (18.3) dostaneme polomery tmavých krúžkov

$$r_m = \sqrt{kR\lambda} \tag{18.4}$$

a podobne z podmienky maxima

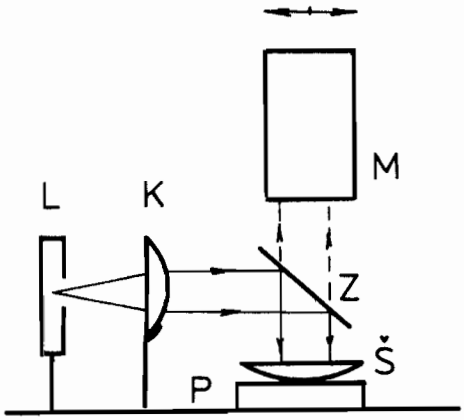
$$\Delta = k\lambda$$

pre polomery svetlých krúžkov

$$r_m = \sqrt{(2k - 1)\frac{\lambda}{2}R} \tag{18.5}$$

METÓDA MERANIA A OPIS APARATÚRY

Polomery r_m (r_m') Newtonových krúžkov možno priamo merať, a preto vzťahy (18.4) a (18.5) je možné využiť na určenie polomeru krivosti šošovky pri známej vlnovej dĺžke svetla alebo naopak. Schematické rozloženie zariadenia je uvedené na obr. 18.2. Svetlo z lampy L prechádza cez kondenzor K a dopadá na polopriepustné zrkadlo Z. Odráža sa na šošovku Š, kde dochádza k interferencii a potom prichádza do odčítacieho mikroskopu M.



Obr. 18.2 Schematické zobrazenie zariadenia na meranie "Newtonových krúžkov"

POSTUP PRÁCE

V prvej časti úlohy určíme polomer krivosti šošovky pre známu vlnovú dĺžku svetla (napríklad pre sodíkovú výbojku λ = 589 nm). Nástavnou skrutkou mikroskopu nastavíme obraz krúžkov tak, aby priamka posuvu mikroskopu prechádzala cez ich stred. Meranie polomerov začíname z krúžkov aspoň piateho rádu, pretože krúžky nižších rádov sú dosť široké, čo spôsobuje veľkú chybu pri meraní. Najprv odmeriame polohu piateho krúžku na jednej strane od stredu a potom na strane druhej. Polovičný rozdiel týchto hodnôt bude polomer piateho krúžku. Pokračujeme v meraní polôh ďalších krúžkov tak, aby sme mikroskopom posúvali stále v tom istom smere. Namerané hodnoty zapisujeme do tab. 18.1. Z nameraných hodnôt zostrojíme graf závislosti $\sqrt{r_m} = f(k)$ a $\sqrt{r_m'} = f'(2k-1)$. Zo smernice grafu určíme pre známu hodnotu vlnovej dĺžky veľkosť polomeru krivosti šošovky R.

Tab. 18.1

Rád krúžku k	Poloha mikrometra M_k	$\Delta r_{k+1} = M_{k+1} - M_k$	Polomer krúžku $r_{k+1} = r_k + \Delta r_k$
5			
6			
7			
⋮			

V druhej časti úlohy použijeme ako zdroj svetla lampu s neznámou vlnovou dĺžkou a podobne ako v predchádzajúcom prípade určíme s pomocou už známeho polomeru krivosti šošovky vlnovú dĺžku svetla lampy.

OTÁZKY A PROBLÉMY

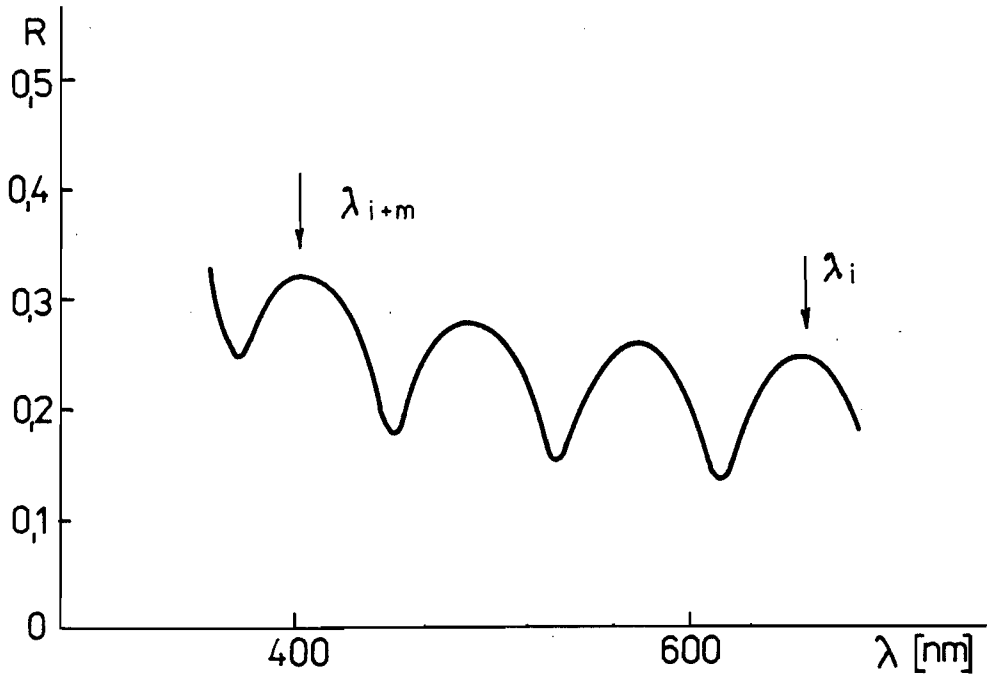
1. Čo je to interferencia?
2. Aké podmienky musia byť splnené, aby nastala interferencia svetla?
3. Čo je príčinou vzniku Newtonových krúžkov?
4. Pre akú šošovku platia vzťahy (18.4) a (18.5)?

19. Meranie hrúbky tenkej dielektrickej vrstvy

Určte hrúbku tenkej dielektrickej vrstvy odmeraním spektrálnej závislosti šikmej odrazivosti.

TEORETICKÝ ÚVOD

Pri spektrofotometrickej metóde merania hrúbky dielektrickej vrstvy sa zisťuje spektrálna závislosť odrazivosti. Táto závislosť má periodický charakter (obr. 19.1) v dôsledku interferencie svetla odrazeného od vrchnej strany vrstvy so svetlom odrazeným od podložky.

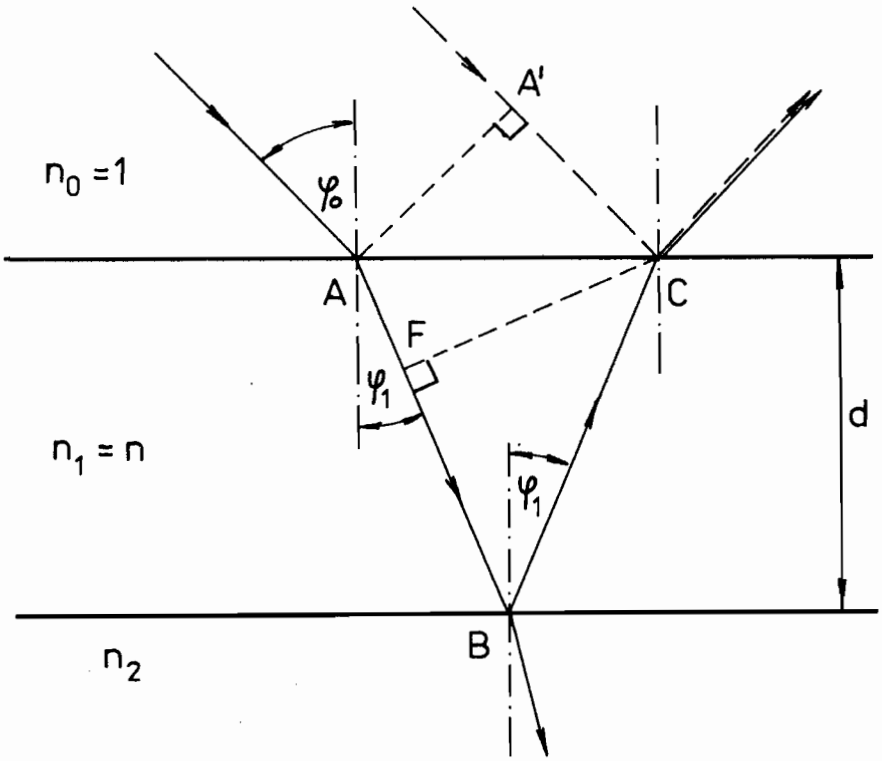


Obr. 19.1 Spektrálna závislosť odrazivosti vrstvy (R - odrazivosť, λ - vlnová dĺžka, i - rád interferencie, m - zväčšenie rádu interferencie)

Ak svetlo dopadá pod uhlom φ_0 na rozhranie neabsorbujúcej vrstvy a okolitého prostredia (vákua, resp. vzduchu), tak časť sa odrazí pod uhlom, ktorý sa rovná uhlu dopadu φ_0 a zostávajúca časť bude postupovať vo vrstve pod uhlom φ_1 (obr. 19.2) určeným Snellovým zákonom

$$n \sin \varphi_1 = \sin \varphi_0 \qquad (19.1)$$

kde n je index lomu vrstvy. Na rozhraní vrstvy a podložky, ktorá má index lomu n_2 odlišný od n, sa istá časť svetla odrazí a zvyšujúca časť vstúpi do podložky. Intenzita odrazeného svetla (v porovnaní s intenzitou dopadajúceho svetla) a jeho fáza sú určené Fresnelovými vzťahmi.



Obr. 19.2 Určenie rozdielu optických dráh dvoch navzájom interferujúcich lúčov (d - hrúbka vrstvy)

Svetlo odrazené od vrstvy bude interferovať so svetlom, ktoré sa odrazilo od podložky, prešlo cez vrstvu a vystúpilo znovu do okolitého prostredia. Pre niektoré vlnové dĺžky svetla nastane jeho zosilnenie, pre iné zoslabenie.

Nech index lomu okolitého prostredia je $n_0 = 1$, index lomu vrstvy $n_1 = n$ a index lomu podložky n_2. Nech platí

$$n_0 < n_1 < n_2$$

Potom rozdiel optickej dráhy lúča odrazeného od podložky a lúča odrazeného od vrstvy bude (obr. 19.2)

$$\Delta x = n\,\overline{ABC} - \overline{A'C} = n\,\overline{AF} + n\,\overline{FBC} - \overline{A'C}$$

pritom

$$\overline{AF} = \overline{AC}\sin\varphi_1$$

$$\overline{A'C} = \overline{AC}\cos(\pi - \varphi_0) = \overline{AC}\sin\varphi_0 = \frac{\overline{AF}}{\sin\varphi_1}\sin\varphi_0 = n\,\overline{AF}$$

teda

$$n\,\overline{AF} - \overline{A'C} = 0$$

preto

$$\Delta x = n\,\overline{FBC} = n\,\overline{ABC} - n\,\overline{AF} = \frac{2nd}{\cos\varphi_1} - n\,\overline{AC}\sin\varphi_1 =$$

$$= \frac{2nd}{\cos\varphi_1} - 2nd\,\mathrm{tg}\,\varphi_1\sin\varphi_1 =$$

$$= 2nd\left(\frac{1}{\cos\varphi_1} - \frac{\sin^2\varphi_1}{\cos\varphi_1}\right) = 2nd\cos\varphi_1 \qquad (19.2)$$

kde d je hrúbka vrstvy.

Zosilnenie svetla interferenciou nastane, ak sa bude rozdiel optických dráh rovnať párnemu násobku polvĺn. Nech je to v jednom prípade 2i-tý násobok polvlny $\frac{\lambda_i}{2}$ (kde i je rád

interferencie), v druhom prípade 2(i+m)-tý násobok polvlny $\frac{\lambda_{i+m}}{2}$. Ak predpokladáme, že index lomu vrstvy n nezávisí od vlnovej dĺžky, tak bude platiť

$$2nd \cos \varphi_1 = 2i \frac{\lambda_i}{2} \tag{19.3}$$

$$2nd \cos \varphi_1 = 2(i + m) \frac{\lambda_{i+m}}{2} \tag{19.4}$$

Z toho dostaneme

$$d = \frac{m}{2n \cos \varphi_1} \frac{\lambda_i \lambda_{i+m}}{\lambda_i - \lambda_{i+m}} \tag{19.5}$$

Využitím vzťahu (19.1) a (19.5) a úpravou dostaneme vzťah pre hrúbku vrstvy

$$d = \frac{m}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi_0}} \frac{\lambda_i \lambda_{i+m}}{\lambda_i - \lambda_{i+m}} \tag{19.6}$$

kde φ_0 je uhol dopadu, n je index lomu vrstvy, λ_i je vlnová dĺžka (vo vákuu, resp. vo vzduchu) svetla odrazeného s maximálnou intenzitou pre i-tý rad, λ_{i+m} je vlnová dĺžka (vo vákuu, resp. vo vzduchu) svetla odrazeného s maximálnou intenzitou pre (i+m)-tý rád, m je zväčšenie rádu interferencie.

Vidíme, že nie je potrebné poznať rády interferencie i a (i+m), ale len ich rozdiel m.

Ak sa využívajú maximá odrazivosti, tak sa m rovná počtu miním ležiacich medzi týmito maximami (obr. 19.1).

Podobné úvahy možno urobiť aj pre zoslabenie interferujúceho svetla. Vtedy sa dráhový rozdiel 2nd cos φ_1 musí rovnať nepárnemu násobku polvĺn. V jednom prípade to je $(2i-1)\frac{\lambda_i}{2}$,

v druhom $\left[2(i+m)-1\right]\frac{\lambda_{i+m}}{2}$, kde λ_i a λ_{i+m} sú vlnové dĺžky miním odrazivosti. Aj to vedie k vzťahu (19.6). Zväčšenie rádu interferencie m sa vtedy rovná počtu maxím, ležiacich medzi uvažovanými minimami.

Ak v meranom spektrálnom rozsahu sa nezískajú aspoň dve maximá alebo minimá, tak treba vziať vlnovú dĺžku maxima a susedného minima a za zväčšenie rádu interferencie položiť $m = \frac{1}{2}$.

METÓDA MERANIA

Na určenie hrúbky d tenkej dielektrickej vrstvy vytvorenej na rovinnej podložke s odlišným indexom lomu treba poznať index lomu vrstvy a odmerať spektrálnu závislosť šikmej odrazivosti R_{φ_0}. Hrúbka vrstvy d sa vypočíta pomocou vzťahu (19.6). Pri uhle dopadu svetla φ_0 sa určí odrazivosť R_{φ_0} ako podiel intenzity (výkonu) odrazeného svetla I_{odr} k intenzite (výkonu) dopadajúceho svetla I_{dop}

$$R_{\varphi_0} = \frac{I_{odr}}{I_{dop}} \tag{19.7}$$

Ak sa používa normál (štandard) odrazivosti, ktorého šikmá odrazivosť je $R_{\varphi_0 \check{s}t}$, tak šikmá odrazivosť meranej vzorky R_{φ_0} bude

$$R_{\varphi_0} = R_{\varphi_0 \check{s}t} \frac{I_{vz}}{I_{\check{s}t}} \tag{19.8}$$

kde I_{vz} je intenzita svetla odrazeného od vzorky, $I_{\check{s}t}$ je intenzita svetla odrazeného od štandardu. (normálu).

Pri meraní hrúbky tenkej vrstvy spektrofotometrickou metódou netreba poznať presnú hodnotu odrazivosti, ale len jej spektrálny priebeh. Preto netreba poznať hodnotu odrazivosti

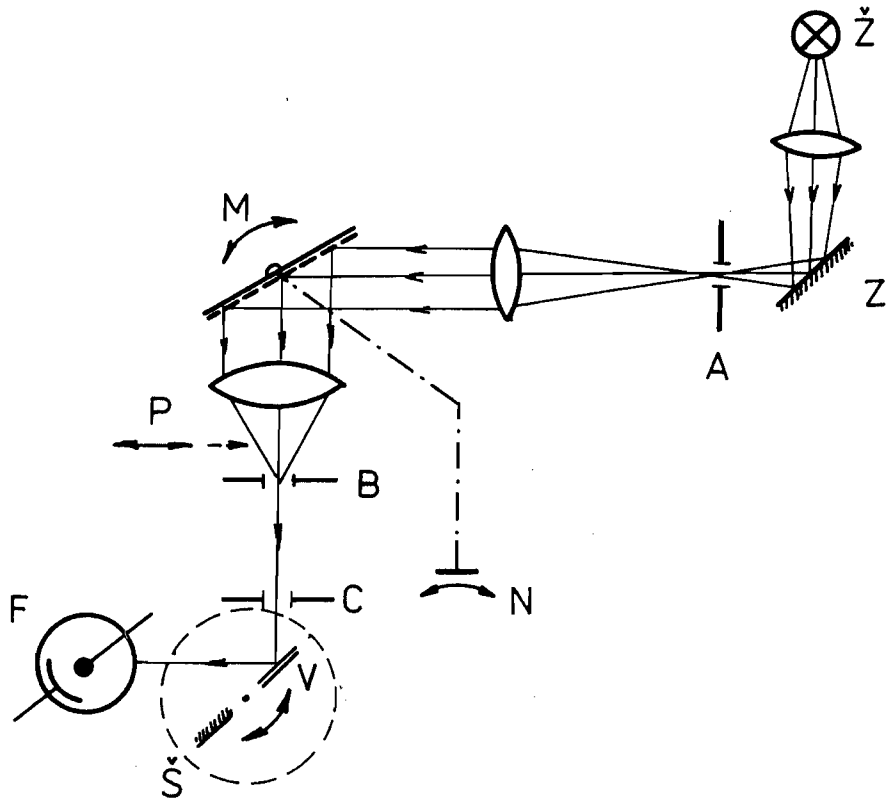
štandardu, ale treba použiť taký štandard, ktorého odrazivosť sa v používanom spektrálnom rozsahu prakticky nemení.

Meranie spektrálnej závislosti odrazivosti možno realizovať viacerými spôsobmi, napríklad:

1. meria sa intenzita dopadajúceho svetla a intenzita odrazeného svetla. Pri automatizovaných spektrofotometroch sa priamo zakresľuje vypočítaný podiel $\frac{I_{odr}}{I_{dop}}$ ako funkcia vlnovej dĺžky svetla λ.
2. Raz sa meria bod po bode spektrálna závislosť intenzity svetla odrazeného od vzorky s tenkou vrstvou, druhý raz sa meria pri tých istých vlnových dĺžkach spektrálna závislosť intenzity svetla odrazeného od normálu.
3. Odmeria sa pri jednej vlnovej dĺžke intenzita svetla odrazeného od štandardu $I_{št}$ (je vhodné upraviť intenzitu dopadajúceho svetla a zosilnenie zosilňovača meracieho zariadenia tak, aby merací prístroj ukazoval $I_{št}$ = 100 relatívnych jednotiek alebo $I_{št} = R_{\varphi_0}.100$ relatívnych jednotiek). Potom sa štandard nahradí meranou vzorkou a pri nezmenených podmienkach sa meria I_{vz}. Z toho sa podľa vzťahu (19.8) určí R_{φ_0}. Ďalej sa tieto dvojice meraní opakujú postupne pri iných vlnových dĺžkach.

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

Na meranie spektrálnej závislosti šikmej odrazivosti budeme používať kolorimeter s upraveným doplnkovým zariadením. Principiálna schéma meracieho zariadenia je na obr. 19.3. Biele svetlo volfrámovej žiarovky dopadá na vstupnú štrbinu monochromátora A

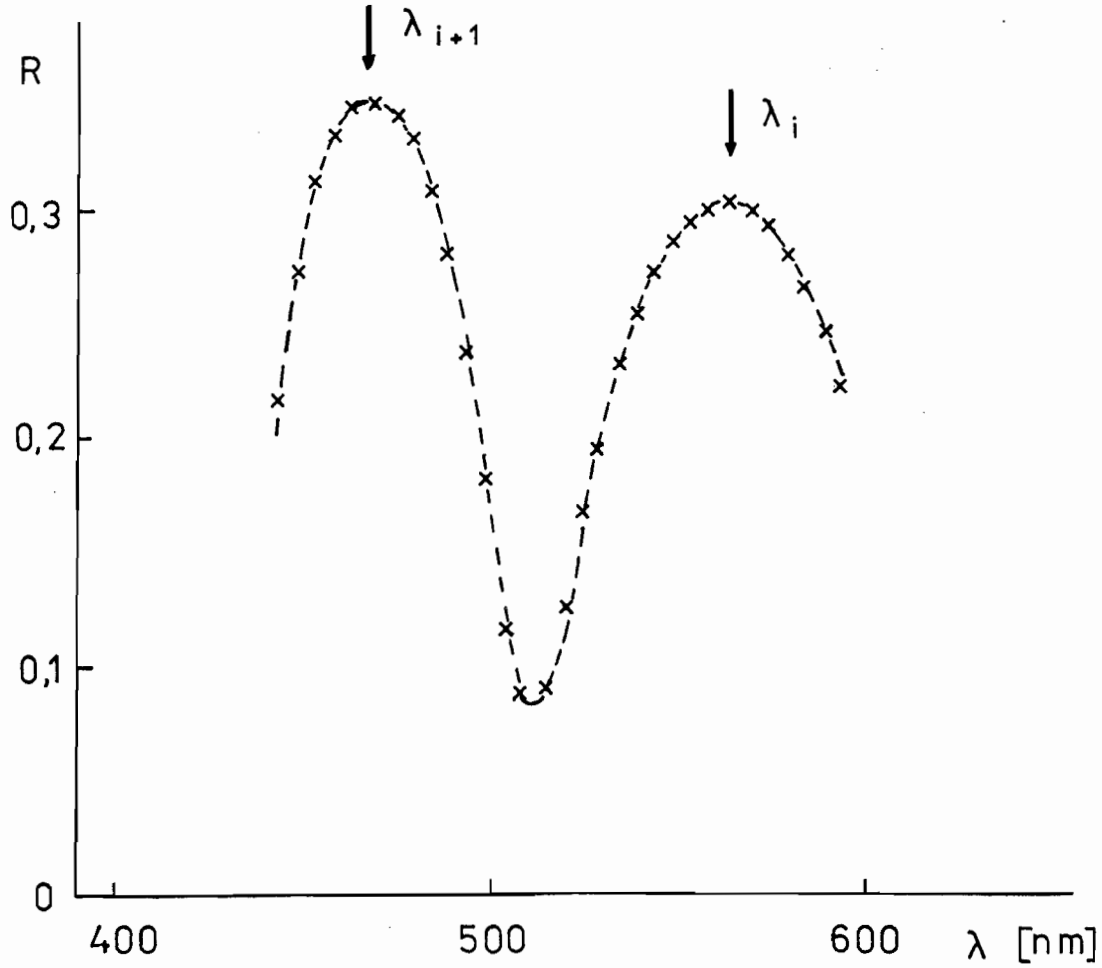


Obr. 19.3 Principiálna optická schéma merania hrúbky vrstvy (Ž - žiarovka, Z - zrkadlo, A, B, C - štrbiny, M - difrakčná odrazová mriežka, N - nastavovací bubienok mriežky, P - prepínač intenzity svetla, V - vzorka s tenkou vrstvou, Š - štandard odrazivosti, F - fotónka)

kolorimetra a ďalej na difrakčnú odrazovú mriežku M. Podľa jej natočenia dopadá monochromatické svetlo príslušnej vlnovej dĺžky na výstupnú štrbinu monochromátora B kolorimetra. Vlnovú dĺžku svetla možno odčítať na nastavovacom bubienku N, ktorý natáča difrakčnú mriežku. Intenzitu svetla možno skokom meniť pomocou páčky prepínača intenzity P v troch rozsahoch: nulová, malá, veľká. Z výstupnej štrbiny dopadá monochromatické svetlo pod uhlom $\varphi_0 = 45^0$ buď na vzorku s tenkou vrstvou alebo na štandard. Tieto sú pomocou držiakov upevnené na výsuvno - otočnom kruhu.

Ako štandard použijeme hliníkové zrkadlo. Vzorkou je kremíková doštička s tenkou vrstvou termicky vytvoreného SiO_2. Svetlo odrazené od vzorky alebo od štandardu dopadá na fotónku F. Pri meraní je signál z fotónky privedený cez zabudovaný zosilňovač na zabudovaný merací prístroj.

Druhým zo spomínaných spôsobov odmeriame spektrálnu závislosť šikmej odrazivosti vzorky s tenkou vrstvou a vynesieme ju do grafu (obr. 19.4). Namerané hodnoty zapisujeme do tab. 19.1.



Obr. 19.4 Nameraná spektrálna závislosť šikmej odrazivosti vrstvy s vyznačenými vlnovými dĺžkami dvoch susedných maxím odrazivosti.

Z grafu odčítame λ_i a λ_{i+m} buď pre maximá alebo minimá odrazivosti a podľa vzťahu (19.6) vypočítame hrúbku vrstvy d. Predpokladáme, že index lomu vrstvy v našom rozsahu meraní nezávisí od vlnovej dĺžky a jeho hodnota pre termicky vytvorenú vrstvu SiO_2 je n = 1,46. Tiež predpokladáme, že odrazivosť štandardu (zrkadla) sa v tomto spektrálnom rozsahu prakticky nemení a rovná sa 1.

Tab. 19.1

φ_0 =

λ(nm)	$I_{št}$ (d)	I_{vz} (d)	R

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Aké sú zdroje chýb merania?
2. Možno merať hrúbku vrstvy touto metódou, ak platí $n_0 = 1$, $n_0 < n_1$, $n_1 > n_2$?
3. Ako by sme vypočítali hrúbku vrstvy, keby index lomu vrstvy závisel od vlnovej dĺžky a my by sme poznali túto závislosť (teda poznali by sme hodnotu n_i pre λ_i a n_{i+m} pre λ_{i+m})?

20. Ohyb a polarizácia svetla

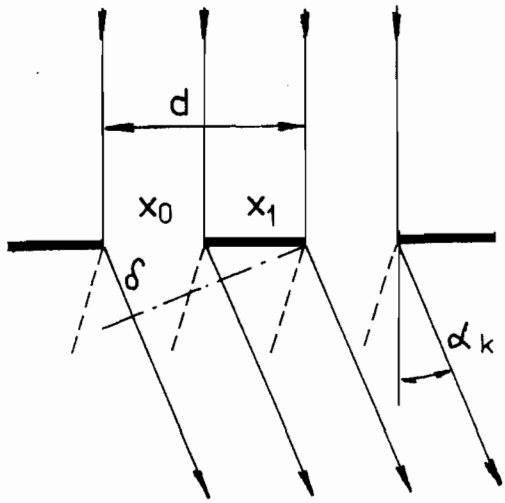
Vypočítajte mriežkovú konštantu ohybovej mriežky pomocou He-Ne lasera.

TEORETICKÝ ÚVOD

Jedným z najvýznamnejších pokrokov vedy a techniky v posledných desaťročiach je objavenie a konštrukcia lasera. Oproti tradičným zdrojom elektromagnetického žiarenia má laser rad výrazných výhod: laserové svetlo je prísne monochromatické, koherentné a polarizované. Je neobyčajne intenzívne, pričom žiarivá energia je sústredená do úzkeho zväzku so zanedbateľne malou rozbiehavosťou.

Vďaka svojim vlastnostiam môže laser poslúžiť na jednoduché a pritom presné určenie mriežkovej konštanty ohybovej mriežky.

Optická mriežka pre prechádzajúce svetlo je sklená doska, do ktorej je vyrytá jemným hrotom sústava čiar so šírkou x_1 - - vrypov vzájomne rovnobežných (obr. 20.1). Optickú mriežku možno získať aj optickou cestou na filme s citlivou jemnozrnou emulziou.



Obr. 20.1
Ohyb svetla na mriežke

Keď na optickú mriežku kolmo dopadá rovnobežný zväzok monochromatického svetla, prechádzajú ňou len lúče, ktoré dopadajú na miesta, kde je sklo vrypmi neporušené alebo na miesta, kde je emulzia nezčernená. Na štrbinách mriežky, ktorých šírka je x_0 nastáva ohyb svetla. Laserové lúče sa po prechode mriežkou šíria na všetky strany, pričom dochádza medzi nimi k interferencii.

Dva lúče, ktoré vychádzajú zo zodpovedajúcich si bodov susedných štrbín a šíria sa v smere zvierajúcom s normálou na mriežku uhol α, majú dráhový rozdiel

$$\delta = (x_1 + x_0) \sin\alpha_k = d \sin\alpha_k \qquad (20.1)$$

kde d je vzdialenosť stredov dvoch susedných štrbín, tzv. mriežková konštanta. Jej prevrátená hodnota je $n = \frac{1}{d}$ udáva počet vrypov na jednotku dĺžky a nazýva sa tiež hustota mriežky.

Uvedené lúče sa zosilnia v prípadoch, keď sa ich dráhový rozdiel δ rovná celočíselnému násobku vlnovej dĺžky λ svetla, t.j.

$$\delta = k\lambda \qquad (20.2)$$

kde k = 0, 1, 2,.... Z rovníc (20.1) a (20.2) dostávame

$$k\lambda = d \sin\alpha_k$$

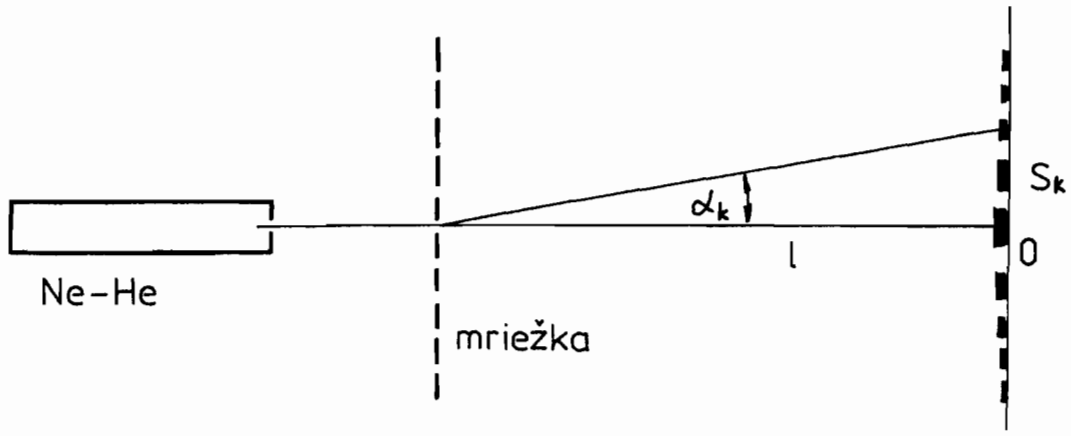
Z poslednej rovnice dostaneme pre hľadanú mriežkovú konštantu d

$$d = \frac{k\lambda}{\sin\alpha_k} \qquad (20.3)$$

Číslo k udáva tzv. rád maxima. Maximum nultého rádu vzniká v smere dopadajúceho lúča. Maximá prvého rádu sú prvé svetelné stopy po obidvoch stranách stopy maxima nultého rádu, ak sa rozdiel príslušných optických dráh interferujúcich vĺn rovná práve vlnovej dĺžke λ.

METÓDA MERANIA

Vzhľadom na to, že laser poskytuje úzky rovnobežný zväzok monochromatického žiarenia, k meraniu nepotrebujeme prakticky žiadne optické systémy. Ak v istej vzdialenosti ℓ za optickou mriežkou umiestnime tienidlo, môžeme na ňom pozorovať ostro ohraničené stopy interferenčných maxím (obr. 20.2).



Obr. 20.2 Meranie mriežkovej konštanty - schematicky

Pre malé uhly α_k platí

$$\sin\alpha_k \approx \operatorname{tg}\alpha_k = \frac{s_k}{\ell}$$

Dosadením do vzťahu (20.3) dostaneme

$$d = \frac{k\,\ell\,\lambda}{s_k} \qquad (20.4)$$

Zo vzťahu (20.4) vyplýva jednoduchá metóda zisťovania mriežkovej konštanty optickej mriežky, ktorú vypočítame na základe merania vzdialenosti maxím k-teho rádu. Vlnová dĺžka použitého lasera je presne známa (je daná jeho konštrukciou). Ak je známa mriežková konštanta optickej mriežky, možno uvedenou metódou určiť neznámu vlnovú dĺžku zdroja monochromatického žiarenia.

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) Prístroje a pomôcky: Ne-He laser, (λ = 632,8 nm), optická lavica s príslušenstvom, optické mriežky, tienidlo s horizontálnou dĺžkovou stupnicou, rôzne typy prekážok (štrbina, kruhový otvor, polarizačný filter, atď.)

b) Postup práce:

Laser, optickú lavicu a tienidlo zostavíme tak, aby lúč dopadal do začiatku dĺžkovej stupnice na tienidle. Stojanček s mriežkou umiestnime vo zvolenej vzdialenosti ℓ a na tienidle odčítame polohy jednotlivých maxím. Vzhľadom na to, že vzťah (20.4) predstavuje lineárnu závislosť

$$s_k = \frac{\ell \lambda}{d} k$$

výsledky možno spracovať graficky a neznámu hodnotu d určiť zo smernice priamky $s_k = f(k)$. Experimentálnymi bodmi (tab. 20.1) preložíme priamku metódou najmenších štvorcov.

Tab. 20.1

λ =

ℓ (m)	s_1 (m)	s_2 (m)	s_3 (m)	s_4 (m)	s_5 (m)	d (m)

Meranie opakujeme pri niekoľkých vzdialenostiach ℓ . Konečný výsledok pre hodnotu d je aritmetický priemer meraní v jednotlivých polohách.

V závere úlohy zostavíme pokusy demonštrujúce ohyb svetla na prekážkach, ktoré sú k dispozícii. Otáčaním polarizačného filtra (v rovine kolmej na smer lúča) demonštrujeme zhášanie stopy laserového lúča. Javy kvalitatívne interpretujeme.

Upozornenie:

Pri práci s laserom a s jeho VN zdrojom prísne dodržiavame príslušné predpisy bezpečnosti pri práci. Zvlášť starostlivo dbáme na to, aby sme vylúčili akýkoľvek náhodný odraz laserového lúča na sietnicu oka.

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Diskutujte použiteľnosť vzťahu (20.4) s ohľadom na hustotu optickej mriežky $n = \frac{1}{d}$!
2. V čom spočíva rozdiel medzi geometrickou a fyzikálnou optikou?
3. Vysvetlite kvalitatívne činnosť lasera!
4. Ako možno overiť, či laserový lúč dopadá kolmo na optickú mriežku?

21. Planckova konštanta

Vypočítajte Planckovu konštantu pomocou meraní voltampérových charakteristík vákuovej fotónky pri osvetlení svetlom s rôznymi vlnovými dĺžkami.

TEORETICKÝ ÚVOD

Pri vonkajšom fotoelektrickom jave nastáva uvoľňovanie elektrónov z povrchu látky v dôsledku absorpcie svetla touto látkou. Boli pritom pozorované tieto zákonitosti:

- počet elektrónov emitovaných za jednotku času je priamo úmerný intenzite dopadajúceho svetla (ak ide o svetlo rôznej intenzity, ale rovnakej frekvencie),
- maximálna rýchlosť elektrónov vyletujúcich z látky závisí od frekvencie dopadajúceho svetla,
- rýchlosť elektrónov vyletujúcich z látky nezávisí od intenzity dopadajúceho svetla,
- vonkajší fotoelektrický jav nastane len vtedy,ak je frekvencia dopadajúceho svetla väčšia ako istá hraničná frekvencia f_0 táto frekvencia je pre rôzne látky rôzna.

Tieto zákonitosti môžu byť vysvetlené na základe kvantovej predstavy o povahe svetla.

Pre energiu fotónu platí

$$E = hf \tag{21.1}$$

kde f je frekvencia dopadajúceho svetla, h je Planckova konštanta.

Pri vonkajšom fotoelektrickom jave v kovoch sa časť tejto energie spotrebuje na prekonanie výstupnej práce A, zvyšok bude kinetickou energiou uvoľneného elektrónu. Platí teda

$$hf = A + \frac{1}{2} mv^2 \qquad (21.2)$$

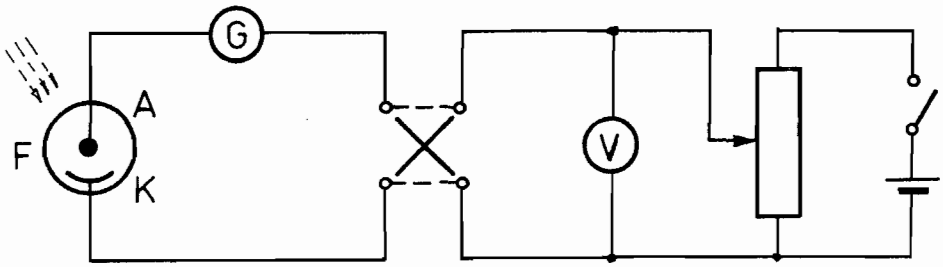
kde v je rýchlosť vyletujúceho elektrónu, m je hmotnosť elektrónu a A je výstupná práca.

Ak $A > hf$, tak $v = 0$ a vonkajší fotoelektrický jav nenastane. Pre hraničnú frekvenciu platí

$$hf_0 = A \qquad (21.3)$$

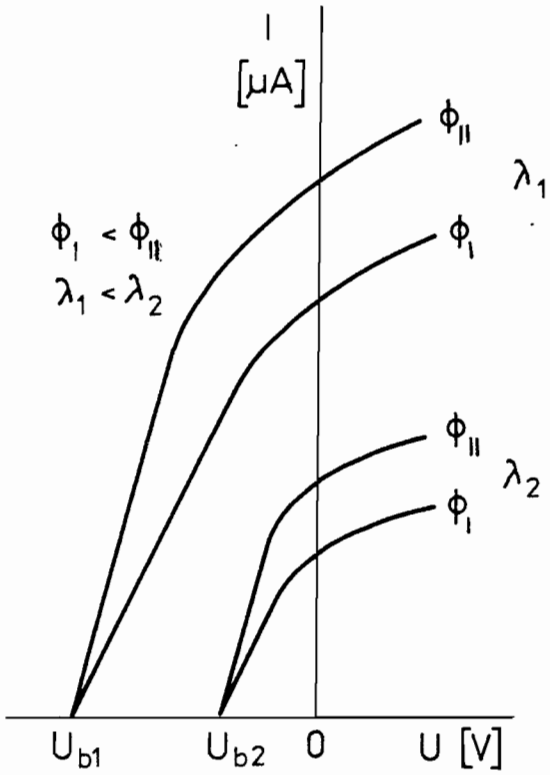
METÓDA MERANIA

Určenie Planckovej konštanty pomocou vonkajšieho fotoelektrického javu sa realizuje meraním voltampérových charakteristík vákuovej fotónky pri jej postupnom osvetlení svetlom viacerých vlnových dĺžok. Z týchto charakteristík sa postupne určí pre každú vlnovú dĺžku brzdné napätie U_b, t.j. také napätie, pri ktorom je prúd prechádzajúci fotónkou práve nulový. Principiálna schéma merania je na obr. 21.1.



Obr. 21.1 Principiálna schéma merania

Jeden možný prípad zidealizovaných priebehov voltampérových charakteristík vákuovej fotónky pre svetlo dvoch vlnových dĺžok λ_1 a λ_2 a dvoch svetelných tokov Φ_I a Φ_{II} je na obr. 21.2.



Obr. 21.2 Zidealizované priebehy voltampérových charakteristík vákuovej fotónky

Fotoelektrón vyletujúci z katódy je brzdený elektrostatickým poľom (keď anódové napätie U má zápornú hodnotu). Tým sa jeho kinetická energia pri dopade na anódu zmenší o hodnotu eU (e je náboj elektrónu). Ak je veľkosť anódového napätia $U = U_b$ práve taká, že elektrón nedoletí na anódu, bude práca eU_b nepatrne väčšia (v krajnom prípade rovnaká) ako kinetická energia vyletujúceho fotoelektrónu. Platí

$$eU_b \geqslant E_k = hf - A \qquad (21.4)$$

Pre krajný prípad bude

$$U_b = \frac{h\,f}{e} - \frac{A}{e} \tag{21.5}$$

Keďže

$$f = \frac{c}{\lambda} \tag{21.6}$$

kde c je rýchlosť svetla, λ je vlnová dĺžka svetla, tak

$$U_b = \frac{h\,c}{e\,\lambda} - \frac{A}{e} \tag{21.7}$$

Z určených brzdných napätí pri dvoch rozdielnych vlnových dĺžkach svetla možno vypočítať Planckovu konštantu, ak poznáme hodnotu náboja elektrónu e a rýchlosť šírenia sa svetla c.

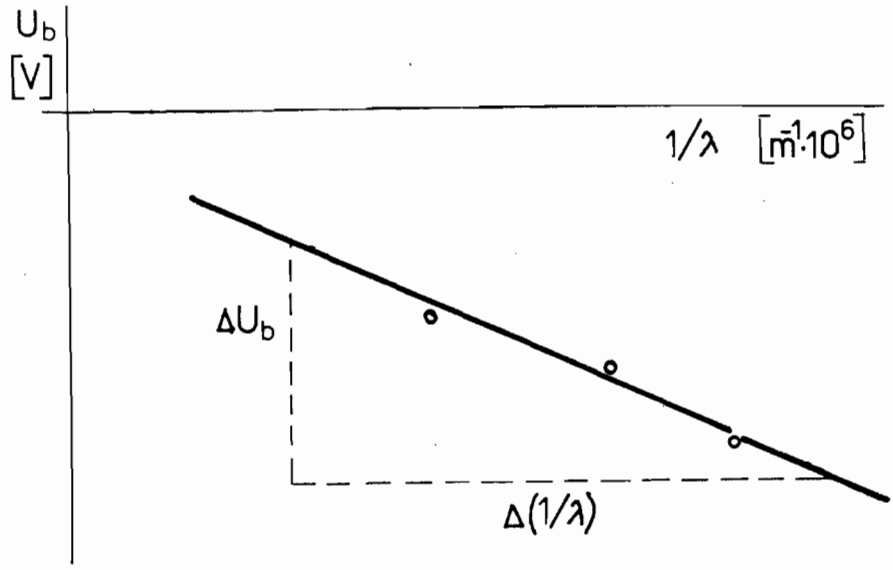
Aby sme zvýšili presnosť určenia Planckovej konštanty, uskutočníme merania voltampérových charakteristík pri viacerých vlnových dĺžkach dopadajúceho svetla. Do grafu vynesieme závislosti brzdných napätí od prevrátených hodnôt príslušných vlnových dĺžok (obr. 21.3). Táto závislosť je lineárna. Platí

$$\Delta U_b = \frac{h}{e}\,\Delta f \tag{21.8}$$

kde ΔU_b je rozdiel brzdných napätí (U_{b2}-U_{b1}) pripadajúci na príslušný rozdiel frekvencií $\Delta f = f_2 - f_1$. Z toho

$$h = e\,\frac{\Delta U_b}{\Delta f} = \frac{e}{c}\,\frac{\Delta U_b}{\Delta(\frac{1}{\lambda})} \tag{21.9}$$

Planckovu konštantu vypočítame pomocou vzťahu (21.9) a známych hodnôt náboja elektrónu ($e = -1{,}602.10^{-19}$ C) a rýchlosti svetla vo vákuu ($c = 2{,}9979.10^{8}$ m.s^{-1}).

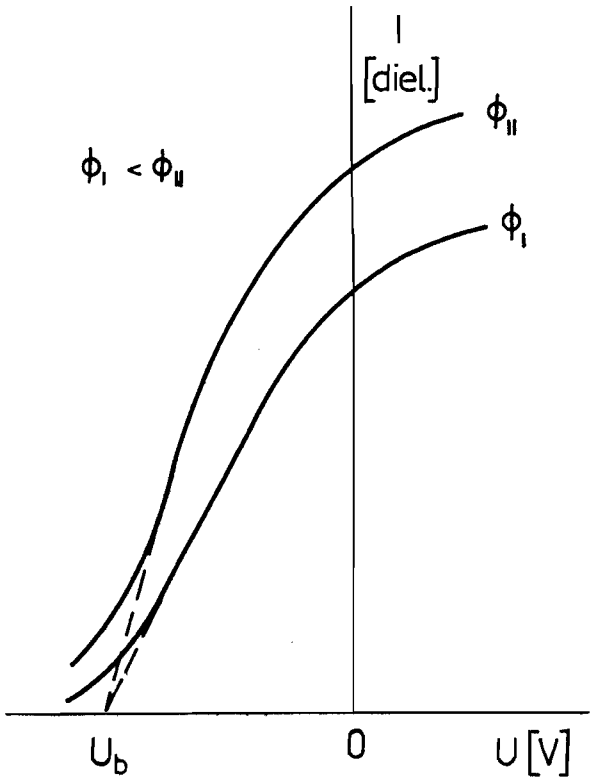


Obr. 21.3 Závislosť brzdných napätí U_b od prevrátených hodnôt vlnových dĺžok $1/\lambda$

Skutočná závislosť prúdu prechádzajúceho cez fotónku pri jej osvetlení svetlom sa od zidealizovanej čiastočne líši, a to najmä v tom, že prúd pri hodnote brzdného napätia nie je nulový. Je to dôsledok existencie zvodového prúdu, iónového prúdu a fotoemisie z anódy (na ktorej sa môžu nachádzať čiastočky kovu katódy). Skutočné voltampérové charakteristiky vákuovej fotónky pri osvetlení svetlom jednej vlnovej dĺžky a dvoma svetelnými tokmi Φ_I a Φ_{II} sú na obr. 21.4. Hodnotu brzdného napätia U_b určíme extrapoláciou lineárnych častí voltampérových charakteristík v závernom smere (na obr. 21.4 vyznačené čiarkovane). Pri obidvoch svetelných tokoch máme pre jednu vlnovú dĺžku dostať tú istú hodnotu U_b.

Úvaha o brzdnom napätí je čiastočne zjednodušená, lebo sme neuvažovali rozdiel kontaktných potenciálov anódy a katódy, ktorý sa prejaví pri meraní napätia. Výsledný tvar rovnice (21.5) a význam veličín, ktoré v nej vystupujú, ostáva rovnaký ako pri

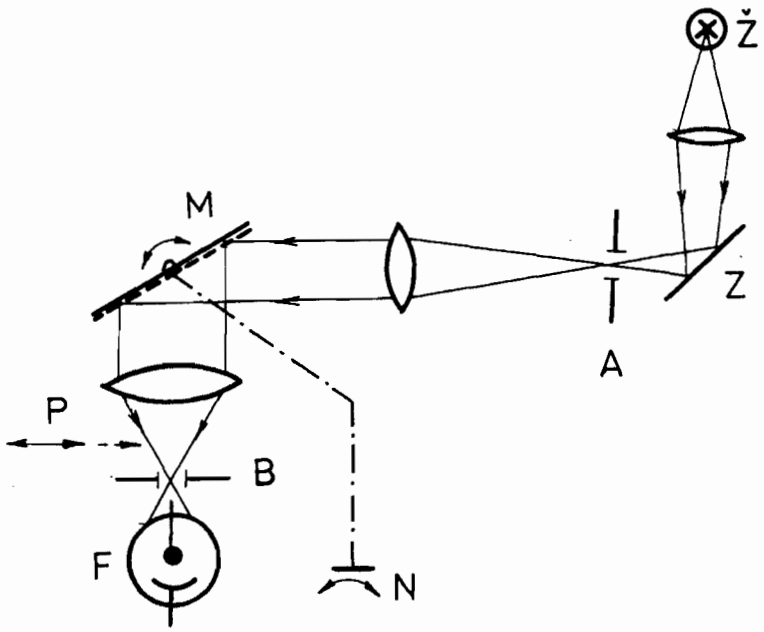
predchádzajúcich úvahách s výnimkou veličiny A, ktorá v tomto prípade nepredstavuje iba výstupnú prácu.



Obr. 21.4 Skutočná voltampérová charakteristika vákuovej fotónky pre jednu vlnovú dĺžku a dva svetelné toky; určenie brzdného napätia U_b extrapoláciou

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

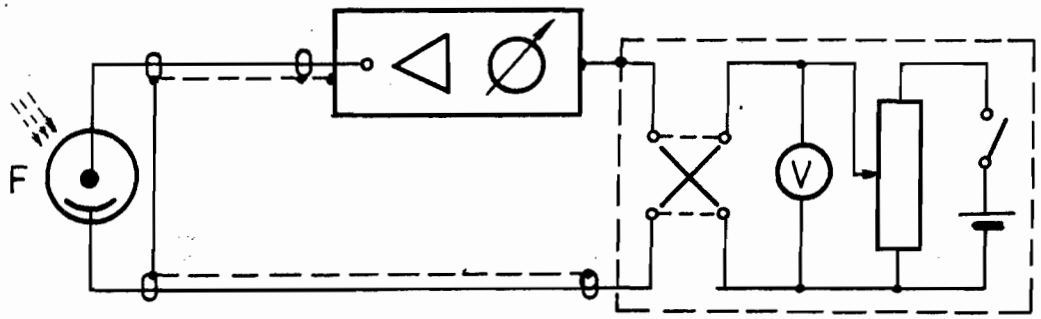
Na určenie Planckovej konštanty využijeme vákuovú fotónku. Zdrojom monochromatického svetla je kolorimeter. Jeho optická schéma je na obr. 21.5. Na meranie prúdu využijeme prúdový zosilňovač a merací prístroj použitého kolorimetra. Prúd fotokatódy za temna je kompenzovaný na nulu vhodným nastavením nulovacieho potenciometra a primerané zosilnenie je nastavené



Obr. 21.5 Optická schéma kolorimetra s vákuovou fotónkou (Ž - žiarovka, Z - zrkadlo, A, B - štrbiny, M - difrakčná odrazová mriežka, N - nastavovací bubienok mriežky, P - prepínač intenzity svetla, F - vákuová fotónka)

potenciometrom zosilnenia. Skutočnú hodnotu prúdu nepotrebujeme poznať (stačí poznať len relatívnu hodnotu), keďže cieľom je určenie napätia pri nulovej hodnote prúdu. Nepotrebujeme teda poznať ani zosilnenie zosilňovača a prúd odčítame v dielikoch meracieho prístroja.

Skutočná schéma elektrického zapojenia je na obr. 21.6.



Obr. 21.6 Skutočná schéma elektrického zapojenia

Pred vlastným meraním skontrolujeme činnosť optickej časti kolorimetra. Pri rozpojenom okruhu fotónky F (vytiahnutom banániku) odnímeme od výstupnej štrbiny púzdro s fotónkou. Na priloženej matnici vizuálne zistíme farbu svetla, ktorá závisí od nastavenia bubienka N. Tiež zistíme zmenu intenzity svetla (svetelného toku) prepnutím páčky prepínača intenzity P. Ten má tri polohy, a to: intenzita svetla - nulová, malá, veľká. Potom pripevníme púzdro s fotónkou k výstupnej štrbine B kolorimetra a spojíme okruh fotónky. Pri nastavenej vlnovej dĺžke svetla odmeriame voltampérovú charakteristiku fotónky pri malej intenzite svetla a potom pri veľkej. Namerané veličiny zapisujeme do tab. 21.1. Rozsah meracieho prístroja meníme prepínačom.

Tab. 21.1

λ_1 = (nm)				λ_2 = (nm)				λ_3 = (nm)			
Φ_I		Φ_{II}		Φ_I		Φ_{II}		Φ_I		Φ_{II}	
U(V)	I(d)	U(V)	I(d)	U(V)	I(d)	U(V)	I(d)	U(V)	I(d)	U(V)	I(d)

V oblasti kladných napätí (anódy voči katóde) stačí odmerať dva alebo tri body charakteristiky, v oblasti záporných napätí treba odmerať viac bodov. Celé meranie opakujeme pre ďalšie vlnové dĺžky. Z dvojice voltampérových charakteristík (pre jednu vlnovú dĺžku a dva svetelné toky) určíme brzdné napätie pre každú vlnovú dĺžku. Urobíme lineárnu závislosť brzdných napätí od prevrátených hodnôt vlnových dĺžok a z jej smernice určíme pomocou

vzťahu (21.7) Planckovu konštantu. Určíme ralatívnu chybu merania podľa vzťahu

$$\frac{\delta h}{h} = \frac{h_{vyp} - h_{tab}}{h_{tab}} .100 \ (\%)$$

kde $h_{tab} = 6{,}6256.10^{-34}$ J.s.

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Prečo treba počítať h zo vzťahu $h = \frac{e}{c} \frac{\Delta U_b}{\Delta(1/\lambda)}$ a nie $h = \frac{e}{c} \frac{U_b}{1/\lambda}$?
2. Čo je brzdné npätie a ako ho určujeme?
3. Prečo v skutočnosti prechádza fotónkou nenulový prúd aj pri pripojenom brzdnom napätí?

22. Tepelné žiarenie

Z nameranej závislosti vyžarovania molybdénového pásika od teploty určte hodnotu Stefanovej - Boltzmannovej konštanty.

TEORETICKÝ ÚVOD

Nabité častice, ktoré sa pohybujú premennou rýchlosťou, vyžarujú do svojho okolia elektromagnetické žiarenie. Preto aj látka, ktorej častice vplyvom tepelného pohybu predstavujú takéto zdroje elektromagnetického žiarenia, vyžaruje. Toto žiarenie, vyžarované látkou a závisiace od jej teploty, nazývame tepelné žiarenie. Jeho spektrum je spojité (na rozdiel od čiarového a pásového spektra látok súvisiaceho s prechodom elektrónov z vyššieho do nižšieho energetického stavu). Pri teplotách okolo 300 K tepelné žiarenie nevnímame (avšak moderné citlivé detektory infračerveného žiarenia ho dokážu registrovať), pri vyšších teplotách ho vnímame ako sálanie a pri teplotách vyšších ako 800 K ho začíname vnímať ako viditeľné žiarenie (vlnové dĺžky viditeľného žiarenia spadajú do oblasti približne od 350 nm do 750 nm).

Všetky telesá, ktoré sú vystavené žiareniu okolitých telies, časť dopadajúcej energie pohltia, časť odrazia a časť prepustia. Pohltením získava teleso energiu. V termodynamickej rovnováhe sa ustáli taká teplota telesa, pri ktorej ono vyžaruje toľko energie, koľko jej prijíma.

Kvantitatívny opis žiarenia telies možno charakterizovať pomocou týchto veličín:

Žiarivý tok ϕ je výkon prenášaný žiarením cez danú plochu.

Vyžarovanie H (niekedy nazývané intenzita vyžarovania) je veličina určená podielom žiarivého toku vyžiareného do polpriestoru z plošného prvku žiariča a veľkosti tejto plochy

$$H = \frac{d\phi}{dS} \tag{22.1}$$

Jednotkou vyžarovania je $W.m^{-2}$.

Spektrálna hustota vyžarovania H_λ je vyžarovanie pripadajúce na jednotku vlnovej dĺžky

$$H_\lambda = \frac{dH}{d\lambda} \tag{22.2}$$

Je to teda tok žiarenia s vlnovými dĺžkami z intervalu $\langle \lambda, \lambda + d\lambda \rangle$ vyžarovaný malou plochou dS a vydelený veľkosťou tejto plochy a šírkou intervalu $d\lambda$.

Odraz a pohltenie žiarenia na povrchu charakterizujú veličiny:

Odrazivosť R je určená podielom odrazeného a dopadajúceho žiarivého toku.

Pohltivosť A je určená podielom pohlteného a dopadajúceho žiarivého toku.

Pre dostatočne hrubú absorbujúcu vrstvu, v ktorej sa všetko žiarenie pohltí a neprestupuje von (priepustnosť je nulová), platí

$$R + A = 1 \tag{22.3}$$

Uvedené materiálové konštanty závisia od spektrálneho zloženia dopadajúceho žiarenia, a preto definujeme spektrálnu

pohltivosť A_λ a spektrálnu odrazivosť R_λ, ktoré sú určené horespomenutými príslušnými podielmi, avšak v tomto prípade monochromatického žiarenia s danou vlnovou dĺžkou λ. Zavádza sa aj efektívna pohltivosť telesa A_T (teleso má teplotu T), v ktorej je zohľadnený priebeh spektrálnej hustoty vyžarovania telesa majúceho teplotu T a aj priebeh spektrálnej pohltivosti tohto telesa.

Z termodynamiky vyplýva, že pohltivosť je rovnako veľká ako emisivita (schopnosť vyžarovania), čo platí aj pre spektrálnu pohltivosť (rovnajúcu sa spektrálnej emisivite) a efektívnu pohltivosť (rovnajúcu sa efektívnej emisivite). Teda schopnosť vyžarovania telesa je charakterizovaná pohltivosťou.

Absolútne čierne teleso je také teleso, ktoré absorbuje všetko naň dopadajúce žiarenie, teda také, pre ktoré platí

$$A = A_\lambda = 1 \tag{22.4}$$

Absolútne čierne teleso je fikcia, najvernejšie ho možno realizovať dutinou s veľkým objemom a malým otvorom.

Spektrálna hustota vyžarovania absolútne čierneho telesa je daná Planckovým vyžarovacím zákonom

$$H_{0\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1} \tag{22.5}$$

kde

$$C_1 = 2\pi hc^2 \qquad C_2 = \frac{hc}{k}$$

pričom c je rýchlosť svetla vo vákuu, h je Planckova konštanta, k je Boltzmannova konštanta.

Pre celkové vyžarovanie absolútne čierneho telesa platí Stefanov - Boltzmannov zákon

$$H_0 = \int_0^\infty H_\lambda \, d\lambda = \frac{2\pi^4 k^4}{15\, c^2 h^3} T^4 = \sigma T^4 \qquad (22.6)$$

Konštanta σ sa nazýva Stefanova - Boltzmannova.

Pre vyžarovanie telesa, ktoré nie je absolútne čierne, ale má spektrálnu pohltivosť A_λ, efektívnu pohltivosť A_T a má teplotu T, platí

$$H_\lambda = A_\lambda H_{0\lambda} \qquad (22.7)$$

a

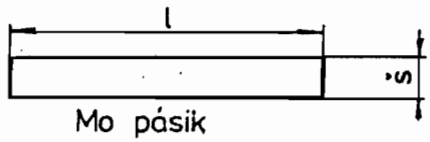
$$H = A_T H_0 = A_T \sigma T^4 \qquad (22.8)$$

METÓDA MERANIA

Metóda je založená na využití vyžarovania telesa majúceho dosť vysokú absolútnu teplotu T do okolia majúceho teplotu T_0, ktorá je podstatne nižšia ako T. T_0 je teplota v laboratóriu a T je v rozmedzí 1 200 K až 1 700 K. Dodávaný výkon potrebný na udržanie rovnovážneho stavu je realizovaný elektrickým nahrievaním telesa - v našom prípade tenkého molybdénového pásika (obr. 22.1) nachádzajúceho sa v sklenej evakuovanej banke. Dodávaný výkon P_E je

$$P_E = UI \qquad (22.9)$$

kde I je prúd prechádzajúci pásikom a U je napätie na pásiku.



Obr. 22.1 Tvar a rozmery Mo pásika

Výkon odvádzaný do okolia žiarením P_z je

$$P_z = A_T S \sigma T^4 \tag{22.10}$$

kde T je absolútna teplota pásika, A_T je efektívna pohltivosť pásika pri tejto teplote, σ je Stefanova - Boltzmannova konštanta a S je plocha pásika majúceho šírku š a dĺžku ℓ . Platí

$$S = 2 \ell š \tag{22.11}$$

pričom hrúbku pásika zanedbávame.

Výkon dodávaný spätne do pásika žiarením okolia a stien banky zanedbáme voči P_z, lebo je úmerný štvrtej mocnine absolútnej teploty okolia, ktorá je podstatne nižšia ako absolútna teplota pásika. Taktiež zanedbáme tepelný výkon odvedený z pásika prívodnými elektrickými kontaktami.

V ustálenom stave platí

$$P_E = P_z \tag{22.12}$$

teda

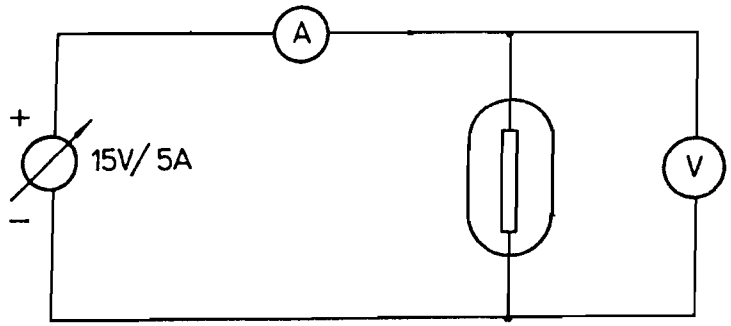
$$UI = A_T S \sigma T^4 \tag{22.13}$$

Zo vzťahu (22.13) dostaneme pre Stefanovu - Boltzmannovu konštantu

$$\sigma = \frac{UI}{A_T S T^4} \tag{22.14}$$

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

Schéma zapojenia je na obr. 22.2.



Obr. 22.2 Schéma zapojenia pre meranie závislosti teploty od príkonu

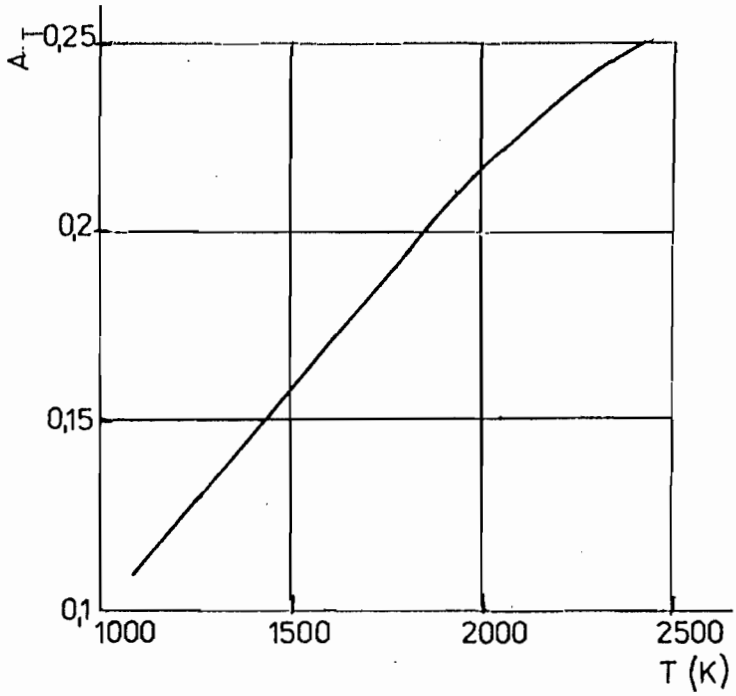
Regulovateľným zdrojom nastavíme postupne také hodnoty elektrického príkonu, aby teplota molybdénového pásika umiestneného v evakuovanej sklenej banke dosiahla postupne hodnoty v rozmedzí od 1 200 K do 1 700 K. Po nastavení príkonu odčítame hodnoty prúdu I a napätia U. Teplotu pásika odmeriame optickým pyrometrom. Po zaostrení pyrometra a zasunutí filtra meníme regulovateľným kotúčom žeravenie meracieho vlákna tak, až sa nám stratia obrysy vlákna na pozadí meraného pásika. Na stupnici odčítame teplotu t'. Z korekčnej krivky odčítame (pre A_λ pásika) korekčnú teplotu Δt. Skutočná teplota pásika je

$$t = t' + \Delta t$$

Absolútna teplota T (zaokrúhlená) v kelvinoch je

$$T = 273 + t$$

Z grafu na obr. 22.3 udávajúceho závislosť A_T od teploty T pre molybdén odčítame A_T pre príslušnú absolútnu teplotu. Všetky získané údaje zapíšeme do tab. 22.1. Potom postupne zvyšujeme dodávaný výkon a meranie opakujeme pri vyšších teplotách.



Obr. 22.3 Závislosť efektívnej pohltivosti A_T od teploty T pre Mo

Tab. 22.1

U(V)	I(A)	t´(°C)	Δt(°C)	t(°C)	T(K)	σ(.10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4})	δ_σ (%)

Pre každú teplotu vypočítame hodnotu Stefanovej - Boltzmannovej konštanty aj jej relatívnu chybu δ_σ , vyjadrenú v %, pre

ktorú platí

$$\delta_\sigma = \frac{\sigma_{vyp} - \sigma_{tab}}{\sigma_{tab}} .100\ \%$$

kde σ_{vyp} je hodnota Stefanovej - Boltzmannovej konštanty vypočítaná z príslušného merania a σ_{tab} je hodnota uvedená v tabuľkách (σ_{tab} = 5,67.10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}). Výsledky zapíšeme do tab. 22.1. Všimnime si, či je súvis medzi veľkosťou chyby a teplotou významný.

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Meranie ktorej veličiny (pri použitých prístrojoch) najviac ovplyvňuje nepresnosť výsledku?
2. Ako možno voľbou materiálu povrchu umelej družice (vzhľadom na spektrálny priebeh jeho A_λ) ovplyvniť výslednú teplotu družice?

23. Tepelná emisia elektrónov v kovoch

Vypočítajte výstupnú prácu volfrámu z merania voltampérových charakteristík vákuovej diódy.

TEORETICKÝ ÚVOD

Elektrón v kove sa nachádza v poli všetkých jadier a ostatných elektrónov. Potenciálna energia takéhoto elektrónu má periodický priebeh s periodou mriežky kovu. V modeli kovu s voľnými elektrónmi (Sommerfeldov model) sa predpokladá, že voľné elektróny, t.j. elektróny spôsobujúce vodivosť kovu, sa nachádzajú v potenciálovom poli, ktoré má vo vnútri kovu konštantný potenciál. Avšak potenciál na povrchu kovu má iný priebeh. Je to spôsobené tým, že v blízkosti povrchu existujú sily pôsobiace na elektróny a smerujúce dovnútra kovu. Tieto sily vznikajú vzájomným pôsobením medzi elektrónmi a kladnými iónmi mriežky. Výsledkom tohto vzájomného pôsobenia je vznik elektrického poľa v povrchovej vrstve kovu a s ním spojené vytvorenie potenciálovej bariéry na povrchu kovu.

Aby mohli elektróny opustiť kryštalickú mriežku kovu, musia mať dostatočnú energiu na prekonanie potenciálovej bariéry na jeho povrchu. Pri izbovej teplote existuje len malé percento elektrónov, ktoré majú dostatočnú energiu na uvoľnenie z kovu. Energiu potrebnú na uvoľnenie z kovu môžu elektróny získať rôznym spôsobom a potom časť elektrónov opúšťa kov. Tento jav nazývame elektrónová emisia. Ak elektróny získajú energiu na účet

tepelnej energie látky pri zvyšovaní jej teploty, hovoríme o tepelnej emisii elektrónov. Ak majú byť elektróny z kovu uvoľnené, je potrebné vykonať prácu proti príťažlivým silám, ktoré zabraňujú ich uvoľneniu; táto práca sa nazýva výstupná práca. Výstupná práca sa udáva v elektrónvoltoch (1 eV = $1{,}6.10^{-19}$ J) a je potrebné ju vykonať, nech je elektrón uvoľnený z povrchu kovu akýmkoľvek spôsobom. Pri emisii elektrónov z kovu sa kov nabíja kladne a v dôsledku toho sa medzi kovom a emitovanými elektrónmi vytvára elektrické pole, ktorého intenzita má smer od povrchu kovu k emitovaným elektrónom, čo má za následok, že niektoré elektróny sa vracajú späť na povrch kovu. Po určitej dobe, pokiaľ tam nepôsobí iné elektrické pole, nastane dynamická rovnováha medzi elektrónmi opúšťajúcimi povrch kovu a tými elektrónmi, ktoré sa k povrchu kovu vracajú. Okolo povrchu kovu sa vytvorí elektrónový mrak s určitou objemovou hustotou záporného náboja.

Na tepelnú emisiu elektrónov možno pozerať ako na "vyparovanie" elektrónov z kovu. Uvažujme kov zahriaty na vysokú teplotu, ktorý sa nachádza vo vákuu. Z povrchu kovu sa budú "vyparovať" elektróny a naopak, časť elektrónov nachádzajúcich sa mimo kovu, v dôsledku tepelného pohybu, sa dostane na povrch kovu a tam "skondenzuje". V stave termodynamickej rovnováhy sa bude nad kovom nachádzať elektrónový plyn podobný nasýtenej pare nad kvapalinou.

Za použitia zákonov kvantovej štatistiky možno nájsť rovnovážnu koncentráciu elektrónov nad povrchom kovu. Počet elektrónov v kove, ktoré sú schopné prekonať potenciálovú bariéru na povrchu kovu a vstúpiť do vákua, so zvyšovaním teploty kovu

rýchlo rastie. Preto aj hustota nasýteného emisného prúdu j silne závisí od teploty kovu. Túto závislosť vyjadruje Richardsonova - Dushmanova rovnica

$$j = BT^2 \exp\left(-\frac{w}{kT}\right) \tag{23.1}$$

kde B je materiálová konštanta pre daný kov, T je teplota, k je Boltzmannova konštanta, w je výstupná práca.

Podrobné odvodenie vzťahu (23.1) je v doporučenej literatúre pre predmety Fyzika I, II, III.

Veľkosť konštanty B podstatne závisí od fyzikálneho stavu povrchu kovu a od jeho čistoty. Podobne to platí aj o výstupnej práci w.

Úpravou vzťahu (23.1), ak zavedieme veličinu b

$$b = \frac{w}{k} \log e \tag{23.2}$$

dostaneme

$$j = BT^2 . 10^{-\frac{w}{kT} \log e} = BT^2 .10^{-\frac{b}{T}} \tag{23.3}$$

Ak je plocha emitujúceho kovu S, potom vzťah (23.3) môžeme prepísať do tvaru

$$I = SBT^2.10^{-\frac{b}{T}} \tag{23.4}$$

kde I je emisný prúd.

Po úprave vzťahu (23.4) dostávame rovnicu

$$\log \frac{I}{T^2} = \log(SB) - \frac{b}{T} \tag{23.5}$$

Grafickým znázornením závislosti

$$\log \frac{I}{T^2} = f\left(\frac{1}{T}\right)$$

je priamka určená smernicou

$$b = \frac{\log \frac{I_1}{T_1^2} - \log \frac{I_2}{T_2^2}}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} = \frac{w}{k} \log e \qquad (23.6)$$

Z rovnice (23.6) pre výstupnú prácu w dostávame vzťah

$$w = \frac{k}{\log e} \frac{\log \frac{I_1}{T_1^2} - \log \frac{I_2}{T_2^2}}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} \qquad (23.7)$$

Poznámka:

V grafickom znázornení podobných funkcií sa obvykle používa nezávislá premenná v tvare $\frac{10^3}{T}$, lebo pre bežné hodnoty T je výraz $\frac{10^3}{T}$ rádovo v jednotkách až desatinách.

METÓDA MERANIA

Pretože nie sme schopní priamo merať emisný prúd I, použijeme na meranie vákuovú diódu s priamo žeravenou volfrámovou katódou. Prúd elektrónov dopadajúcich na anódu sme už schopní merať, a preto musíme nájsť vzťah medzi emisným a anódovým prúdom I_a. Pri stálej teplote katódy vzrastá anódový prúd pre nízke

hodnoty anódového napätia U_a, kde sa prejavuje vplyv priestorového náboja okolo katódy, podľa Langmuirovho zákona

$$I_a = CU_a^{3/2} \tag{23.8}$$

kde C je koeficient závislý od tvaru a polohy elektród v dióde.

Akonáhle je elektrické pole medzi anódou a katódou také, že všetky emitované elektróny dopadnú na anódu (prestane existovať záporný priestorový náboj medzi anódou a katódou), anódový prúd dosiahne stav nasýtenia. Ďalším zvyšovaním vonkajšieho elektrického poľa pri stálej teplote katódy sa veľkosť anódového prúdu takmer nemení alebo vzrastá nepatrne. V predchádzajúcom postupe bola hranica kov - vákuum charakterizovaná nespojitosťou potenciálu. V skutočnosti sa potenciál mení pozvoľne, čo je dôsledkom existencie tzv. zrkadlového potenciálu a pôsobenia vonkajšieho elektrického poľa. Existencia zrkadlového potenciálu vedie k zmenšeniu výstupnej práce nameranej vo vonkajšom elektrickom poli o hodnotu

$$\Delta w = w - w' = \sqrt{\frac{q^3 E}{4 \pi \varepsilon_0}} \tag{23.9}$$

kde w je výstupná práca neovplyvnená zrkadlovou silou, ani vonkajším elektrickým poľom, w´ je výstupná práca nameraná vo vonkajšom elektrickom poli, E je intenzita vonkajšieho elektrického poľa, q je náboj elektrónu.

Odvodenie vzťahu (23.9) je v doporučenej literatúre pre predmet Fyzika I, II, III.

Vzťah (23.9) nám vlastne udáva veľkosť zníženia potenciálovej bariéry na povrchu kovu za pôsobenia vonkajšieho elektrického poľa s intenzitou E. Výstupná práca elektrónov z kovu má teda

pre prípad nasýteného anódového prúdu hodnotu

$$w' = w - \sqrt{\frac{q^3 E}{4 \pi \varepsilon_0}} \tag{23.10}$$

Dosadením do vzťahu (23.2) dostaneme

$$\frac{kb'}{\log e} = \frac{kb}{\log e} - \sqrt{\frac{q^3 E}{4 \pi \varepsilon_0}} \tag{23.11}$$

odkiaľ

$$b' = b - \frac{\log e}{k} \sqrt{\frac{q^3}{4 \pi \varepsilon_0}} \sqrt{E} \tag{23.12}$$

Pretože intenzita elektrického poľa E v oblasti nasýteného prúdu je priamo úmerná anódovému napätiu U_a, t.j.

$$E = KU_a \tag{23.13}$$

kde K je konštanta charakterizujúca usporiadanie systému katóda - anóda.

Využitím vzťahu (23.13) môžeme vzťah (23.12) ďalej upraviť

$$b' = b - \frac{\sqrt{K} \log e}{k} \sqrt{\frac{q^3}{4 \pi \varepsilon_0}} \sqrt{U_a} \tag{23.14}$$

Zavedením konštanty A, ktorá tiež charakterizuje usporiadanie systému

$$A = \sqrt{\frac{q^3 K}{4 \pi \varepsilon_0}} \cdot \frac{\log e}{k} \tag{23.15}$$

dostaneme

$$b' = b - A\sqrt{U_a} \tag{23.16}$$

Pre hodnotu nasýteného prúdu I_a možno s ohľadom na vzťah (23.4) písať

$$I_a = SBT^2 \cdot 10^{-\frac{b'}{T}} = SBT^2 \cdot 10^{-\frac{b}{T}} \cdot 10^{\frac{A}{T}\sqrt{U_a}}$$

a teda

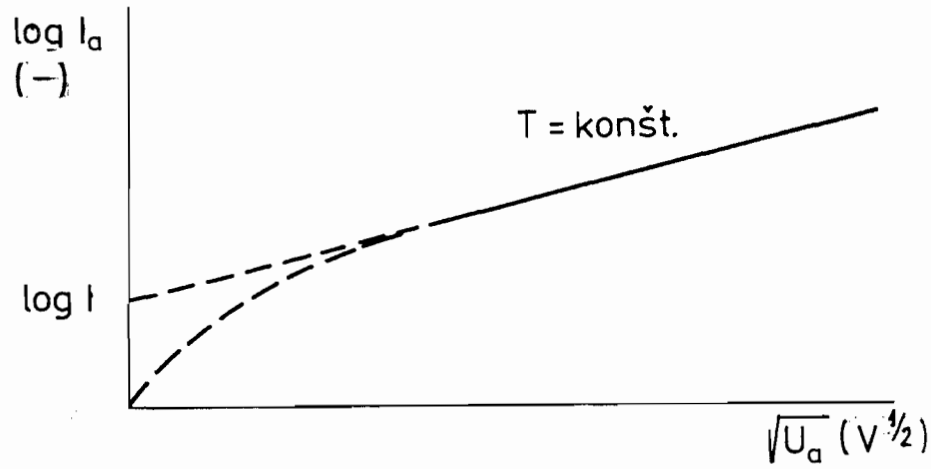
$$I_a = I \cdot 10^{\frac{A}{T}\sqrt{U_a}} \qquad (23.17)$$

Vzťah (23.17) možno upraviť do tvaru

$$\log I_a = \log I + \frac{A}{T}\sqrt{U_a} \qquad (23.18)$$

Grafickým vyjadrením závislosti (23.18) je priamka.

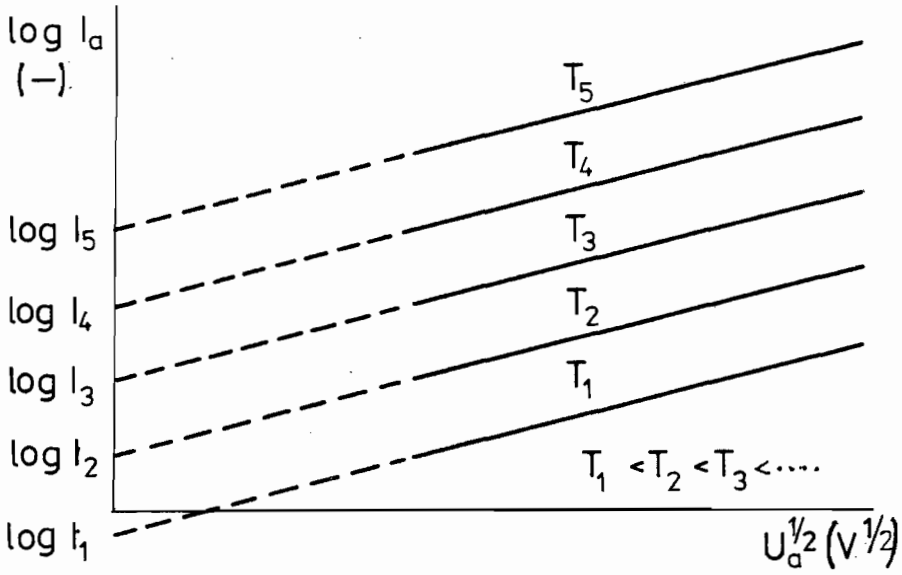
Hodnotu nasýteného emisného prúdu I získame extrapoláciou priamkovej časti charakteristiky $\log I_a = f(\sqrt{U_a})$ pre $U_a = 0$ (obr. 23.1).



Obr. 23.1 Extrapolácia priamkovej časti charakteristiky

Pre každú hodnotu teploty T katódy získame extrapoláciou príslušnú hodnotu log I, a teda aj I.

Ak chceme zistiť výstupnú prácu zo smerníc závislosti (23.6), musíme do grafu vyniesť závislosť $\log I_a = f(\sqrt{U_a})$ pre rôzne hodnoty T = const. (obr. 23.2).



Obr. 23.2 Súbor nameraných a extrapolovaných charakteristík pre rôzne teploty

Extrapolované hodnoty log I použijeme v závislosti (23.6) v tvare

$$\log \frac{I}{T^2} = f\left(\frac{10^3}{T}\right)$$

Zo smernice b v tomto grafe vypočítame výstupnú prácu podľa vzťahu (23.6).

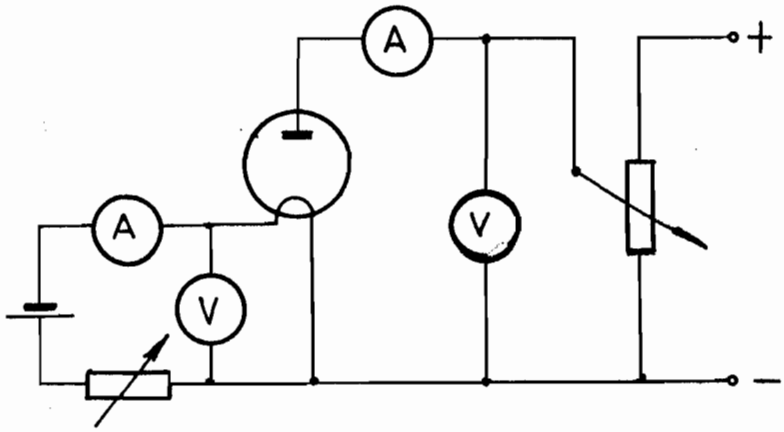
OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) Prístroje a pomôcky: zdroj jednosmerného prúdu, zdroj žeravenia diódy, dva ampérmetre, dva voltmetre, dva regulačné odpory, dióda

b) Postup práce:

1. Voltampérovú charakteristiku diódy $I_a = f(U_a)$ meriame pre rôzne hodnoty teploty katódy (T ako parameter) v zapojení podľa schémy na obr. 23.3. Rôzne teploty katódy dosahujeme

zmenou žeraviaceho prúdu. Teplotu katódy T určíme z veľkosti jej odporu pri danej teplote R_T . Odpor R_T určíme z nameraných hodnôt žeraviaceho napätia U_f a prúdu I_f. Teplotu katódy vyhľadáme v priloženej tabuľke závislosti $R_T = R(T)$.



Obr. 23.3 Schéma zapojenia na meranie charakteristík diódy

Namerané hodnoty veličín zapisujeme do tab. 23.1.

2. Graficky znázorníme závislosti

$$\log I_a = f(\sqrt{U_a}) \quad \text{pri } T = \text{const.}$$

$$\log \frac{I}{T^2} = f\left(\frac{10^3}{T}\right)$$

3. Zo smernice závislosti $\log \frac{I}{T^2} = f\left(\frac{10^3}{T}\right)$ vypočítame výstupnú prácu.

Upozornenie pre meranie:

Pri vlastnom meraní je potrebné dbať na to, aby sme v žiadnom prípade neprekročili maximálne hodnoty napätí a prúdov, ktoré sú vyznačené na každej dióde!

Tab. 23.1

$R_{293} = R_0 =$		$I_f =$ $U_f =$ $\frac{R_T}{R_0} =$ $T =$		$I_f =$ $U_f =$ $\frac{R_T}{R_0} =$ $T =$		$I_f =$ $U_f =$ $\frac{R_T}{R_0} =$ $T =$		$I_f =$ $U_f =$ $\frac{R_T}{R_0} =$ $T =$	
U_a(V)	$\sqrt{U_a}$ ($\sqrt{V}$)	I_a(μA)	log I_a	I_a(μA)	log I_a	I_a(μA)	log I_a	I_a(μA)	log I_a

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Nakreslite a opíšte jednotlivé časti voltampérovej charakteristiky vákuovej diódy (T ako parameter)!
2. Odvoďte Langmuirov (trojpolovinový) zákon!
3. Vysvetlite pojem "zrkadlový" potenciál a odvoďte vzťah (23.9)!
4. Čo môže byť zdrojom chýb pri použití opísanej metódy?

Úvod pre úlohy č.24 - 28

Rádioaktivita

Rádioaktivitou nazývame samovoľnú alebo umelo vyvolanú premenu jadier jedného prvku na jadrá iného prvku. Táto premena je sprevádzaná emisiou častíc alfa, elektrónov, pozitrónov a gama žiarením. Prvky s atómovým číslom väčším ako 82 sú prirodzene rádioaktívne. Príčinou je nestabilita ich jadier vyvolaná veľkým počtom nukleónov (protónov a neutrónov) v jadre. Prirodzené rádioaktívne prvky vysielajú tri typy žiarenia - alfa, beta a gama. Žiarenie alfa tvoria jadrá hélia (2 protóny a 2 neutróny) a novovzniknuté jadro má v Mendelejevovej periodickej tabuľke poradové číslo o 2 menšie a jeho hmotnostné číslo sa zmenší o 4 jednotky. Príkladom takejto premeny je

$$^{226}_{88}Ra \longrightarrow ^{222}_{86}Rn + ^{4}_{2}He$$

Žiarenie beta je tvorené elektrónmi, ktoré vznikajú pri energetickej prestavbe jadra. Novovzniknuté jadro má poradové číslo o jedno väčšie ako pôvodné a hmotnostné číslo sa prakticky nezmení. Príklad beta rozpadu:

$$^{210}_{83}Bi \longrightarrow ^{210}_{84}Po + ^{0}_{-1}e$$

Gama žiarenie je elektromagnetické žiarenie s veľmi krátkou vlnovou dĺžkou a spravidla sprevádza vyššie spomenuté typy žiarenia. Vznik gama žiarenia vysvetľujeme prechodom jadra zo vzbudeného stavu do stavu základného s vyžiarením uvoľnenej energie.

Základné fyzikálne veličiny a radiačná hygiena

Základnou charakteristikou rádioaktívneho zdroja je aktivita, ktorá je definovaná ako diferenciálny podiel počtu premenených jadier a času

$$A = \frac{dn}{dt}$$

Jednotkou aktivity je jedna premena za sekundu a má rozmer s^{-1}. Dostala názov becquerel (Bq).

Experimentálne zistená závislosť aktivity od času má exponenciálny charakter

$$A = A_0 \exp(-\lambda t)$$

kde A_0 je aktivita v čase $t = 0$, λ sa nazýva rozpadová konštanta. Často sa používa polčas rozpadu T definovaný ako čas, za ktorý sa premení polovica jadier. Vzťah medzi rozpadovou konštantou a polčasom rozpadu T je

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Exponenciálna závislosť aktivity od času poukazuje na štatistický charakter rádioaktívnych premien a predpokladá konštantnú pravdepodobnosť premeny za jednotku času.

Medzi veličiny, ktoré zavádzame na určenie účinkov žiarenia na látky, cez ktoré prechádza, patrí absorbovaná dávka D. Dávka je definovaná ako podiel strednej energie ΔW_D ionizujúceho žiarenia absorbovanej elementom ožiarenej látky s hmotnosťou Δm

$$D = \frac{\Delta W_D}{\Delta m}$$

Jednotkou dávky D je gray (Gy) a má rozmer $J.kg^{-1}$.

Pre charakteristiku ionizačných účinkov používame veličinu expozícia (ožiarenie), definovanú vzťahom

$$X = \frac{\Delta Q}{\Delta m}$$

kde ΔQ je stredný súčet elektrických nábojov všetkých iónov rovnakého znamienka vytvorených za stanovených podmienok dopadajúcimi fotónmi v objemovom elemente vzduchu s hmotnosťou Δm. Jednotkou je $C.kg^{-1}$.

Vyššie uvedená veličina - dávka - nevystihuje dobre účinky žiarenia na ľudský organizmus. Pri ochrane pred žiarením je potrebné teda brať do úvahy aj odlišnosti biologického účinku jednotlivých druhov žiarenia. Veličina, v ktorej sú tieto odlišnosti zahrnuté, sa nazýva dávkový ekvivalent a je daná vzťahom

$$H = DQN$$

kde D je dávka, Q je kvalitatívny faktor, N je koeficient zahrňujúci všetky ostatné modifikujúce faktory (v súčasnosti rovný 1). Kvalitatívny faktor Q môže nadobúdať hodnoty od 1 (pre gama žiarenie) až po 20 (pre odrazené jadrá a štiepne fragmenty). Jednotkou dávkového ekvivalentu je sievert (Sv) a má rozmer $J.kg^{-1}$.

Používanie zdrojov rádioaktívneho žiarenia je vždy spojené s ochranou pracovníkov pred škodlivými účinkami tohto žiarenia. Poškodenia v exponovanom jednotlivcovi môžu byť buď priame alebo dedičné. Z hľadiska nástupu môžeme rozdeliť poškodenia na tie, ktoré sa objavia v každom rozsahu expozície (stochastické) a na tie, ktoré sa spravidla objavia až po expozícii definovanej

veľkosti (nestochastické). K poškodeniam stochastickým patrí karcinogenéza,dedičné poškodenia atď. Medzi formy nestochastického poškodenia patrí útlm krvotvorby, nemalígne poškodenia kože a iné.

Cieľom ochrany zdravia pred žiarením je zabrániť vzniku škodlivých nestochastických účinkov a obmedziť pravdepodobnosť stochastických účinkov na úroveň, ktorú možno pokladať za prijateľnú.

Výskyt nestochastických účinkov môžeme obmedziť stanovením takých limitov dávkového ekvivalentu, aby nebola dosiahnutá prahová dávka ani po celoživotnej expozícii. Limitovanie stochastických účinkov dosiahneme udržiavaním všetkých zdôvodnených expozícií na takých nízkych úrovniach, aké môžeme s uvážením sociálnych a ekonomických podmienok rozumne dosiahnuť.

Rozlišujeme dva súbory limitných hodnôt dávkového ekvivalentu. Prvý tvoria limity určené pre ochranu profesionálnych pracovníkov pracujúcich so žiarením - sú to najvyššie prípustné dávky (NPD). Druhý súbor tvoria limity určené na ochranu ostatného obyvateľstva - medzné dávkové ekvivalenty (MD). Dávkové ekvivalenty nesmú prekročiť hodnoty uvedené v tabuľke:

Orgány	NPD		MD
	štvrťročne (mSv)	ročne (mSv)	ročne (mSv)
Gonády, kostná dreň celé telo	30	50	5
Koža, štítna žľaza kosti	150	300	30
Ruky - predlaktia Nohy - členky	400	750	75
Iné orgány, hlava	80	150	15

Z tabuľky je zrejmé, že limitom dávkového ekvivalentu (vychádzajúc z najvyššej citlivosti ľudských orgánov na ionizujúce žiarenie) bude 50 mSv ročne pre profesionálnych pracovníkov so žiarením a 5 mSv ročne pre ostatné obyvateľstvo. Profesionálni pracovníci podliehajú povinnosti monitorovania osobných dávok. Monitorovanie obyvateľstva prevádza hygienická služba.

Detekcia rádioaktívneho žiarenia

Na registráciu a meranie vlastností rádioaktívneho žiarenia sa používa celý rad detektorov. princíp práce detektorov je založený na absorpcii energie žiarenia a jej premene na inú formu. Túto novú formu energie potom registrujeme. Z veľkého počtu detektorov opíšeme princíp práce jedného z nich - Geigerovho - Müllerovho počítača.

G-M počítač využíva na registráciu žiarenia jeho ionizačné účinky pri prechode cez látku. Z konštrukčného hľadiska má tvar valcového kondenzátora, ktorého dielektrikum tvorí plyn (napríklad argón) pomerne malého tlaku. Častice rádioaktívneho žiarenia pri prechode počítačom ionizujú atómy (prípadne molekuly) plynovej náplne. Elektróny, ktoré sa pri ionizácii uvoľnia, sú urýchľované elektrickým poľom. Veľkosť pripojeného napätia je volená tak, aby elektróny po urýchlení boli schopné ionizovať ďalšie atómy, a až v počítači vytvorí samostatný výboj. Takto aj jediný elektrón, ktorý v počítači vznikne, spôsobí veľkú zmenu vodivosti počítača a túto už môžeme ľahko registrovať. Aby počítač

bol schopný zaregistrovať ďalšiu časticu, musí výboj zhasnúť. Zhášanie výboja možno dosiahnuť buď elektronicky alebo pridaním ťažkých organických molekúl (alkohol a iné) do plynovej náplne počítača. Doba horenia výboja, počas ktorej počítač nie je schopný registrovať ďalšie častice, sa nazýva mŕtvou dobou a pre G-M počítače má hodnotu $\sim 10^{-4}$s.

24. Štúdium Comptonovho javu

Na základe merania uhlového rozloženia odrazených elektrónov pri Comptonovom rozptyle γ-kvánt ukázať kvantové prejavy elektromagnetického žiarenia s vysokou frekvenciou a objasniť jeden z možných spôsobov interakcie fotónov s látkovým prostredím.

TEORETICKÝ ÚVOD

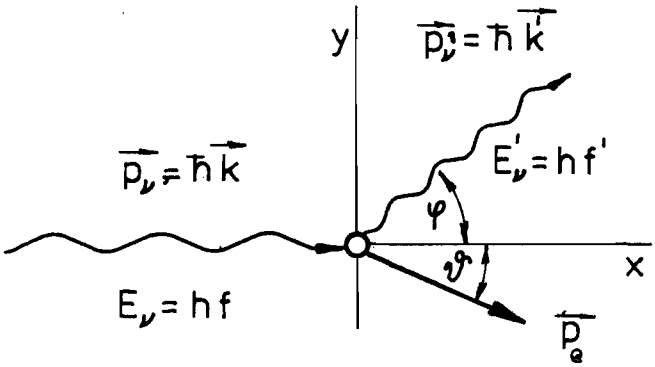
Pri prechode röntgenového žiarenia, resp. γ-žiarenia látkovým prostredím možno pozorovať dva javy, ktoré vedú k jeho zoslabeniu. Ide o absorpciu a rozptyl. Absorpcia prevažuje len u prvkov s veľkou atómovou hmotnosťou, u ľahkých prvkov je absorpcia malá, a preto môžeme v nich dobre pozorovať rozptyl röntgenového a γ-žiarenia.

Už prvé pokusy s rozptylom elektromagnetického žiarenia s veľmi krátkou vlnovou dĺžkou ukázali, že pri rozptyle röntgenového a najmä γ-žiarenia vlnová dĺžka sa mení a v spektre rozptýleného žiarenia sa objavujú oveľa väčšie vlnové dĺžky ako pri pôvodnom žiarení. Túto skutočnosť možno vysvetliť iba na základe toho, že elektromagnetické žiarenie má okrem vlnovej povahy aj vlastnosti korpuskulárne. Teda ak uvažujeme, že elektromagnetické žiarenie má charakter toku fotónov s energiou $E = hf$ ($f = \frac{c}{\lambda}$ je frekvencia žiarenia) a impulz $p = \frac{hk}{2\pi}$ ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$ je vlnové číslo), v tomto prípade môžeme rozptyl vysvetliť ako zrážku medzi fotónom a elektrónom. V dôsledku tejto zrážky fotón mení nielen smer svojho pohybu, ale aj frekvenciu, pretože časť

svojej energie odovzdáva elektrónu. To znamená, že energia fotónov sa pri zrážke zmenší a vlnová dĺžka sa zväčší. Najvýraznejšie sa to prejaví pri žiarení s veľmi krátkou vlnovou dĺžkou. Pri zrážke s takými fotónmi nadobúda elektrón veľmi veľké rýchlosti, pri ktorých sa už začínajú prejavovať relativistické závislosti.

Experimentálne sledovanie a vysvetlenie uvedeného javu s rozptylom elektromagnetického žiarenia na voľných elektrónoch uskutočnil v rokoch 1922 - 1923 Artur Holly Compton, po ktorom dostal jav aj pomenovanie.

Schéma zrážky fotónu a elektrónu je na obr. 24.1.



Obr. 24.1 Schéma zrážky fotónu a elektrónu (Vyznačené sú energie a impulzy fotónov a odrazeného elektrónu)

Do zrážky sa elektrón považuje za nehybný a voľný. Za také môžeme považovať aj elektróny viazané v atóme, pretože ich väzbová energia (niekoľko eV) je veľmi malá v porovnaní s energiou hf röntgenového, resp. γ-žiarenia (desiatky až tisíce keV).

Hybnosť dopadajúceho fotónu je $\hbar\vec{k}$. V dôsledku zrážky sa elektrón odrazí pod uhlom ϑ voči pôvodnému smeru fotónu a nadobudne hybnosť $\vec{p}_e = m\vec{v}$. Fotón rozptýlený pod uhlom φ bude mať hybnosť $\hbar\vec{k}'$.

Platia zákony :

1. Zákon zachovania energie:

$$hf + m_0c^2 = hf' + mc^2 \qquad (24.1)$$

(m_0 je pokojová hmotnosť elektrónu)

2. zákon zachovania hybnosti:

$$\hbar\vec{k} = \hbar\vec{k}' + \vec{p}_e \qquad (24.2)$$

Ak ďalej uvážime, že

$$k = \frac{2\pi f}{c} \qquad \text{a} \qquad k' = \frac{2\pi f'}{c}$$

relativistický vzťah pre celkovú energiu elektrónu

$$E_e = \sqrt{m_0^2c^4 + p_e^2c^2}$$

a rozpíšeme vektorovú rovnicu (24.2) na rovnice pre smery x a y (obr. 24.1), môžeme napísať vyjadrenie pre Comptonov posun, t.j. pre zmenu vlnovej dĺžky fotónu

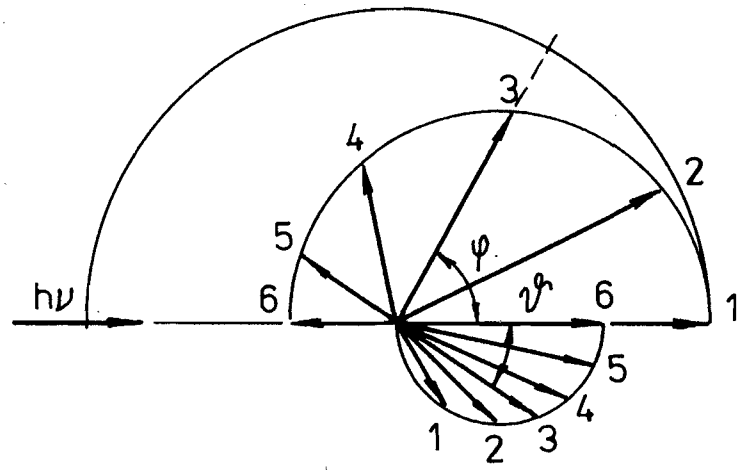
$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c}(1 - \cos\varphi) \qquad (24.3)$$

Výraz $\frac{h}{m_0c}$ na pravej strane vzťahu (24.3) má rozmer dĺžky a je kombináciou troch univerzálnych konštánt. Nazýva sa Comptonova vlnová dĺžka elektrónu a označuje sa Λ. Jej hodnota je

$$\Lambda = \frac{h}{m_0c} = 0{,}242 \text{ nm}$$

Zväčšeniu vlnovej dĺžky rozptýleného fotónu a tým aj zmenšeniu energie hf' s rastom uhla rozptylu φ odpovedá podľa vzťahu (24.1)

vzrast energie a hybnosti odrazeného elektrónu. Graficky je táto závislosť znázornená na obr. 24.2.



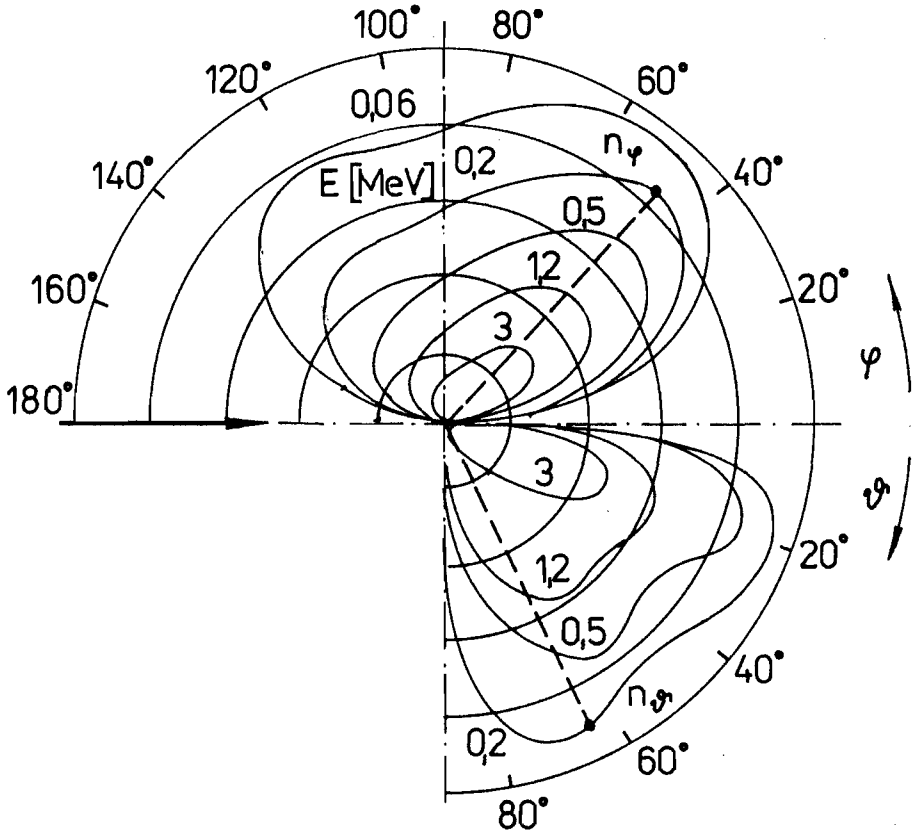
Obr. 24.2 Závislosť energie odrazeného elektrónu a rozptýleného fotónu pre rôzne uhly rozptylu.
Situácia 1: rozptyl pri $\varphi = 0^{o}$ ($\vartheta = 90^{o}$)
Situácia 2: rozptyl pri $\varphi = 180^{o}$ ($\vartheta = 0^{o}$)

Vzťah medzi uhlom rozptylu fotónov φ a uhlom odrazu elektrónu ϑ má tvar

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{m_0c^2}{m_0c^2 + hf}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\varphi}{2} \qquad (24.4)$$

Podľa relativistickej kvantovej teórie Comptonovho rozptylu uhlovou závislosťou nie je určená len energia rozptýleného fotónu a odrazeného elektrónu, ale aj pravdepodobnosť takej zrážky. To znamená, že vyrážané elektróny nemajú po zrážke s fotónom náhodný smer pohybu, ale možno vypočítať funkciu $f(\vartheta)$, t.j. hustotu pravdepodobnosti výskytu elektrónu letiaceho pod uhlom ϑ. Počet elektrónov odrazených pod uhlom z intervalu $\langle\vartheta, \vartheta + d\vartheta\rangle$ je úmerný súčinu $f(\vartheta)d\vartheta$. Podobne môžeme vyjadriť

hustotu pravdepodobnosti $f(\varphi)$ pre početnosti rozptýlených fotónov pre rôzne uhly φ. Graficky sú tieto závislosti uhlového rozloženia Comptonovských (odrazených) elektrónov a rozptýlených fotónov znázornené v polárnych súradniciach na obr. 24.3. Jednotlivé priebehy platia pre rôzne energie pôvodného fotónu (energia je vyjadrená v MeV pri príslušnej čiare).

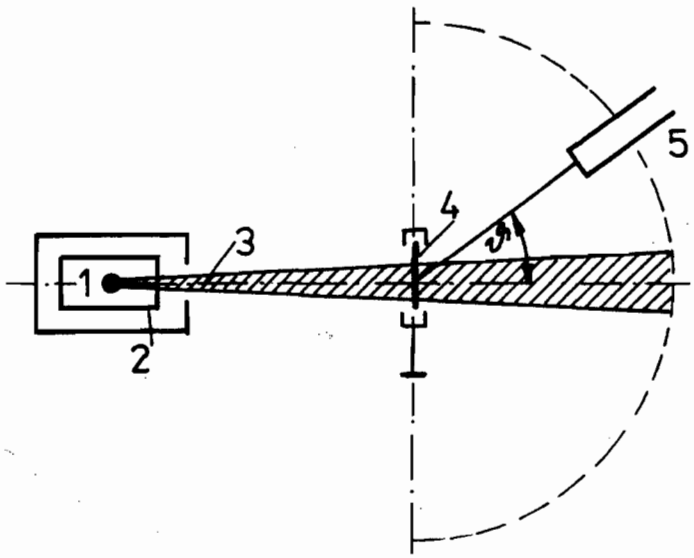


Obr. 24.3 Diferenciálny účinný prierez pre rovinný jednotkový uhol φ, resp. ϑ. Uvedená veličina vyjadruje uhlové rozloženie rozptýlených fotónov, resp. odrazených elektrónov pri Comptonovom jave.

METÓDA MERANIA

Cieľom tohto merania je overenie závislostí, ktoré sú znázornené na obr. 24.3. Pri meraní pozorujeme Comptonov rozptyl γ-žiarenia na tenkej hliníkovej fólii s hrúbkou 0,2 - 0,5 mm. Ako zdroj monoenergetického žiarenia sa používa rádionuklid $^{137}_{55}Cs$. Nestabilné jadro rádionuklidu sa rozpadá β^--rozpadom, pričom 8 % rozpadov sa uskutočňuje na $^{137}_{56}Ba$ v základnom stave a zvyšujúcich 92 % rozpadov na $^{137}_{56}Ba$ vo vzbudenom stave. Pri prechode jadra $^{137}_{56}Ba$ zo vzbudeného do základného stavu sa vyžiari γ-kvantum. Rádionuklid sa nachádza v ochrannom puzdre, elektróny sa tým pohlcujú v jeho stenách a von vychádza iba monoenergetické žiarenie γ .

Experimentálne zariadenie na skúmanie Comptonovho javu je na obr. 24.4.



Obr. 24.4 Schéma zariadenia na štúdium Comptonovho javu

Zapuzdrený zdroj žiarenia 1 sa nachádza v hrubostenom olovenom kryte 2, v ktorom je úzky kolimátor 3. Kolimátorom vymedzený zväzok γ-lúčov dopadá na rozptyľujúcu látku 4, ktorou je tenká hliníková fólia. Pri rozptyle γ-kvantá odovzdávajú časť svojej energie. Odrazené elektróny registrujeme pod uhlom ϑ vzhľadom na pôvodný smer γ-kvánt okienkovým G-M počítačom s príslušným elektronickým zariadením na registráciu elektrických napäťových impulzov. Detektor možno nastaviť pod uhlom 0^0 až 90^0 na obidve strany. Pre malé uhly (0^0 - 10^0) sa meranie nerobí, pretože čiastočne rozbiehavý zväzok prvotných nerozptýlených γ-kvánt by zasiahol aj detektor, čo by prispelo k značnému skresleniu nameraných údajov.

Aj pre väčšie uhly však v smere detektora letia niektoré rozptýlené γ-kvantá a tie, samozrejme, tiež okrem elektrónov prispievajú k celkovému počtu nameraných impulzov na počítači. Na získanie počtu elektrónov letiacich v smere detektora treba merať pri každom uhle dvakrát. Raz detekujeme elektróny a γ-kvantá spolu, čím dostaneme početnosť (počet impulzov za časovú jednotku) $n_{\beta+\gamma}$. Potom použijeme plexisklový filter s hrúbkou 1 mm, ktorý pohltí prakticky všetky elektróny, ale γ-kvantá, až na zanedbateľne malú časť, prepúšťa. V tomto prípade meriame početnosť n_γ. Počet elektrónov letiacich v smere detektora je daný rozdielom meraných početností, t.j. $n_\beta = n_{\beta+\gamma} - n_\gamma$. Podľa vzťahu pre odhad veľkosti relatívnej chyby merania početnosti

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

stanovíme stredné kvadratické chyby meraní jednotlivých početností a taktiež ich rozdielu.

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) Prístroje a pomôcky: zdroj monoenergetického γ-žiarenia $^{137}_{55}Cs$, G-M počítač s príslušenstvom, zariadenie na uhlové meranie odrazených Comptonových elektrónov, hliníková fólia, plexisklová fólia

b) Postup práce:

V prvej časti merania je potrebné oboznámiť sa so spôsobom obsluhy G-M počítača a počítač pripraviť k meraniu. Vykonáme meranie početností $n_{\beta+\gamma}$ a n_{γ} podľa výkladu v časti Metóda merania pre uhly 15° až 80° s krokom 5° na jednu a na druhú stranu od dopadajúceho zväzku. Výsledky zapíšeme do tab. 24.1.

Tab. 24.1

i	ϑ	$n_{\beta+\gamma}$ (s^{-1})			n_{γ} (s^{-1})			$n_{\beta+\gamma}$ (s^{-1})	n_{γ} (s^{-1})	n_{β} (s^{-1})	Δn_{β} (s^{-1})
		1	2	3	1	2	3				

V polárnej súradnicovej sústave graficky zobrazíme závislosť početnosti odrazených elektrónov n_{β} od uhla ϑ. Zobrazíme aj chybu merania ako úsečku na polárny rádius so stredom v bode n_{β} a dĺžkou $2\Delta n_{\beta}$. Preložíme spojitú čiaru (v rozmedzí úsečiek chýb merania) vyjadrujúcu závislosť $n_{\beta} = F(\vartheta)$. Odhadom vykonáme extrapoláciu krivky pre uhly 0° - 15° a 80° - 90° (v obidvoch prípadoch sa blíži $F(\vartheta)$ k nule). Porovnáme priebeh experimentálne zistenej krivky s krivkami na obr. 24.3 a na základe tvarovej podobnosti s niektorou z nich odhadneme energiu γ-kvánt použitého žiariča.

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Prečo možno na pozorovanie Comptonovho rozptylu použiť röntgenové žiarenie a γ-žiarenie, no elektromagnetické žiarenie z viditeľnej oblasti spektra nie je vhodné?
2. Comptonov jav je jedným z možných spôsobov interakcie fotónov s látkovým prostredím. Ktoré sú ďalšie?
3. Akú kinetickú energiu získa elektrón po zrážke s fotónom s energiou 0,5 MeV, ak sa fotón odrazí spätne ($\varphi = 180^{o}$)?

25. Štatistické spracovanie merania

Oboznámiť sa so základnými postupmi pri vyhodnocovaní experimentov pozostávajúcich z veľkého počtu opakovaných meraní fyzikálnej veličiny; vypočítať charakteristiky polohy a tvaru štatistického súboru.

TEORETICKÝ ÚVOD

Cieľom fyzikálneho merania je určenie hodnoty meranej veličiny, ktorá sa bude s najväčšou spoľahlivosťou rovnať skutočnej hodnote danej fyzikálnej veličiny. Každé meranie však možno vykonať iba s určitým priblížením alebo, inak povedané, presnosť merania je ohraničená a výsledky merania vždy obsahujú nepresnosti a chyby. Bez vyhodnotenia týchto chýb je výsledok merania nespoľahlivý a v mnohých prípadoch sa môže stať, že vôbec neobsahuje správnu informáciu o meranej veličine.

Rozdeleniu a klasifikácii chýb je venovaná úvodná kapitola. Chyby merania úzko súvisia jednak so samotným procesom merania, a jednak s nedokonalosťou meracej aparatúry, prípadne s nedokonalosťou metódy merania. Pritom sa obyčajne predpokladá, že skutočná hodnota meranej veličiny sa počas merania nemení.

Gaussovo normálne rozdelenie náhodných chýb

Pravdepodobnosť, že vo výsledku merania veličiny X sa dosiahne hodnota, ktorá je z intervalu (X, X+dX) podľa Gaussovho

(alebo tiež normálneho) rozdelenia bude

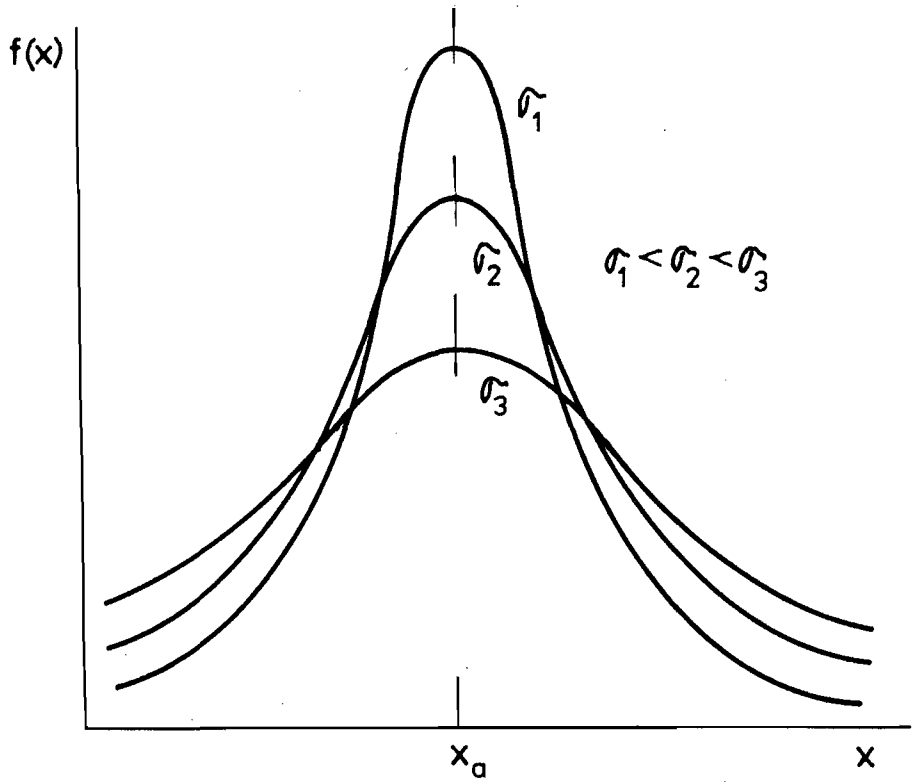
$$dP = f(X)\, dX \tag{25.1}$$

kde f(X) je Gaussovo rozdelenie hustoty pravdepodobnosti

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} \exp\left[- \frac{(X - X_a)^2}{2\sigma^2} \right] \tag{25.2}$$

X_a je stredná hodnota veličiny, σ^2 je rozptyl.

Poloha maxima (stredná hodnota) krivky normálneho rozdelenia, ktorá prislúcha meranému súboru hodnôt fyzikálnej veličiny, je odhadom skutočnej hodnoty veličiny. Šírka rozdeľovacej krivky nesie informáciu o spoľahlivosti uvedeného odhadu vzhľadom na skutočnú hodnotu (obr. 25.1).



Obr. 25.1 Gaussovo normálne rozdelenie chýb meranej fyzikálnej veličiny

Z teórie vyplýva, že najspoľahlivejším odhadom skutočnej hodnoty veličiny je aritmetický priemer meraných údajov X_a.

Vyhodnocovanie štatistických údajov

Zvýšenie spoľahlivosti fyzikálneho merania dosiahneme jeho viacnásobným opakovaním. Jednotlivé namerané hodnoty fyzikálnej veličiny tvoria prvky (znaky) štatistického súboru. Pri veľkom množstve prvkov nie je možný ich individuálny opis, ale s výhodou možno opísať celý súbor ako celok použitím tzv. štatistických momentov.

Začiatočný moment k-teho rádu je definovaný

$$M'_{X,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^k \qquad (25.3)$$

Pre k = 1

$$M'_{X,1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = X_a$$

Začiatočný moment 1. rádu je teda aritmetický priemer.

Centrálny moment k-teho rádu je definovaný

$$M_{X,k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_a)^k \qquad (25.4)$$

Pre k = 1

$$M_{X,1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_a) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n} nX_a = 0$$

pre k = 2

$$M_{X,2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - X_a^2 =$$

$$= M'_{X,2} - X_a^2 \qquad (25.5)$$

pre k = 3

$$M_{X,3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - X_a)^3 = M'_{X,3} - 3X_aM'_{X,2} + 2X_a^3 \qquad (25.6)$$

Druhý centrálny moment sa nazýva rozptyl σ^2 (charakterizuje šírku príslušnej Gaussovej krivky).

Asymetria je definovaná na základe 3. centrálneho momentu

$$a = \frac{M_{X,3}}{\sigma^3}$$

a charakterizuje jednostranné vychýlenie nameraných údajov vzhľadom na ich strednú hodnotu X_a.

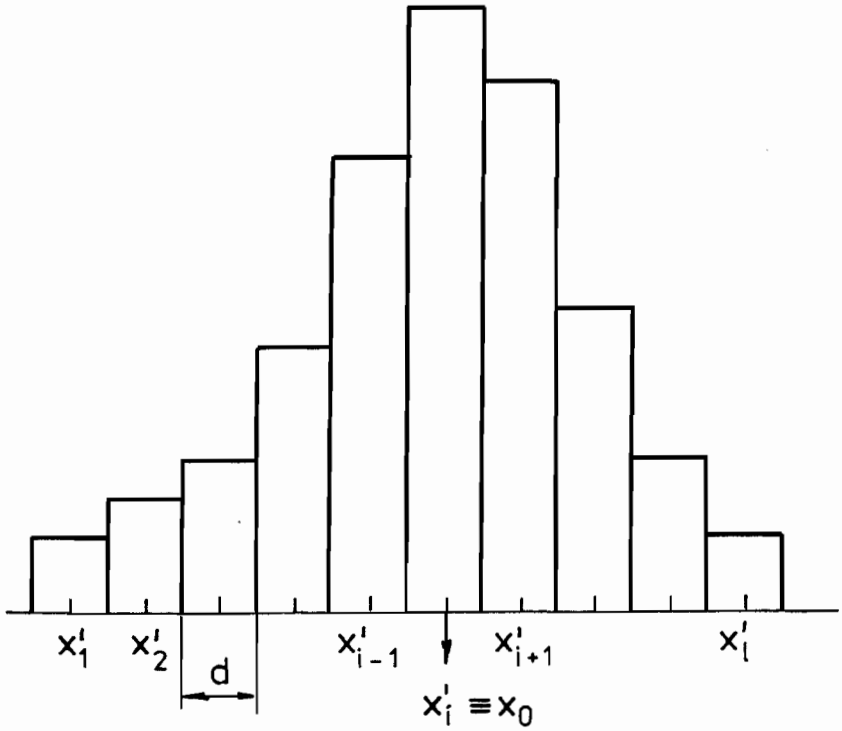
Rozdelenie veľkých súborov do tried

V prípade, že máme vyhodnotiť veľký súbor nameraných údajov, súbor rozdelíme do menších skupín - tried. Triedou rozumieme množinu prvkov (nameraných hodnôt), ktoré spadajú do vymedzeného intervalu. Relatívna početnosť danej triedy je daná

$$f_i = \frac{n_i}{n}$$

kde n_i je počet prvkov v danej triede, n je celkový počet prvkov súboru.

Obrazom danej situácie je histrogram, v ktorom výška jednotlivých stĺpikov je daná relatívnou početnosťou príslušnej triedy (relatívnym počtom meraní, v ktorých údaj padne do zvoleného intervalu) (obr. 25.2).



Obr. 25.2 Histogram.
d - šírka intervalov, do ktorých sú rozdelené prvky súboru (namerané hodnoty veličiny), ℓ - počet intervalov, X_0 - triedny znak intervalu s najväčšou relatívnou početnosťou

Šírky intervalov volíme spravidla rovnaké a vyberieme tzv. triedny znak X_i' ako stred intervalu. Pre jednotlivé momenty súboru dostaneme

$$M'_{X,1} = X_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} n_i X'_i \qquad (25.7)$$

$$M_{X,2} = \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} n_i (X_i' - X_a)^2 = M_{X,2}' - X_a^2 \qquad (25.8)$$

kde

$$M_{X,2}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} n_i X_i'^2$$

$$M_{X,3} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} n_i (X_i' - X_a)^3 = M_{X,3}' - 3X_a M_{X,2}' + 2X_a^3 \qquad (25.9)$$

kde

$$M_{X,3}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} n_i X_i'^3$$

a ℓ je počet tried.

Metóda nového triedneho znaku

Transformáciou zavedieme nový triedny znak

$$V_i' = \frac{X_i' - X_0}{d} \qquad (25.10)$$

kde X_0 je triedny znak triedy s najvyššou relatívnou početnosťou a d je šírka intervalov.

Spätne

$$X_i' = X_0 + dV_i'$$

a počítame jednotlivé momentové charakteristiky

$$M_{X,1}' = X_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} n_i X_i' = X_0 + dV_a \qquad (25.11)$$

.8) kde

$$V_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} n_i V_i'$$

$$M_{X,2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} n_i (X_i' - X_a)^2 = d^2 M_{V,2} \qquad (25.12)$$

.9) kde

$$M_{V,2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} n_i (V_i - v_a)^2 = M_{V,2}' - V_a^2$$

a

$$M_{V,2}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} n_i V_i'^2$$

$$M_{X,3} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} n_i (X_i' - X_a)^3 = d^3 M_{V,3} \qquad (25.13)$$

kde

.10) $$M_{V,3} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} n_i (V_i - V_a)^3 = M_{V,3}' - 3V_a M_{V,2}' + 2V_a^3$$

sťou a

$$M_{V,3}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\ell} n_i V_i'^3$$

Rozptyl σ^2 vypočítame ako 2. centrálny moment a asymetriu podľa vzťahu

.11) $$a = \frac{M_{X,3}}{\sigma^3} \qquad (25.14)$$

Výhoda použitia nového triedneho znaku spočíva v radikálnom zjednodušení počítania s číselnými hodnotami.

METÓDA MERANIA

Štatistický charakter javov, ktoré sa skúmajú v jadrovej fyzike, vedie k náhodným chybám merania. Štatistický prístup k javom a procesom merania je zvlášť charakteristický pre jadrovú fyziku, pretože jadrové procesy a procesy interakcie žiarenia s látkou majú pravdepodobnostnú povahu. Súvisí to s tým, že rovnice kvantovej fyziky, ktoré sa používajú na opis javov v mikrosvete, obsahujú vlnové rovnice, ktoré umožňujú vypočítať iba pravdepodobnosť týchto procesov.

V tomto prípade budeme sledovať rozpady rádioaktívnych jadier na základe registrácie γ-žiarenia. Rozpadový zákon má štatistický charakter. Ak poznáme aktivitu zdroja (priemerný počet rozpadov jadier v zdroji za 1 sekundu), to ešte neznamená, že každú sekundu sa rozpadne presne A jadier. Opakovaným meraním počtu rozpadov jadier v zadaných časových intervaloch dostaneme štatistický súbor hodnôt, ktorý možno vyhodnotiť podľa rovníc v teoretickom úvode. Týmto postupom získame nasledujúce charakteristiky súboru:

a) charakteristiku polohy - priemerný počet rozpadov jadier za meranú dobu,

b) charakteristiku tesnosti rozloženia meraných hodnôt - rozptyl,

c) charakteristiku tvaru - asymetriu, ktorá odráža bočnú vychýlenosť rozloženia meraných hodnôt od súmernej Gaussovej krivky normálneho rozdělenia.

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) Prístroje a pomôcky: Geigerov - Müllerov počítač s príslušenstvom, zapuzdrený rádioizotop, pinzeta

b) Postup práce:

Po pripojení detektora na sieť necháme celé zariadenie ustáliť na dobu 5 minút. Pinzetou vložíme rádioaktívny preparát do oloveného krytu s G-M trubicou.

Opakovaným meraním (50-krát) počtu impulzov za dobu 20 s získame súbor hodnôt, ktoré rozdelíme do tried. Počet tried volíme tak, aby dĺžka intervalov d spĺňala nerovnosť

$$\frac{X_{max} - X_{min}}{24} < d < \frac{X_{max} - X_{min}}{12}$$

(doporučujeme pracovať s 10 triedami). Hranice intervalov volíme tak, aby bola zabezpečená jednoznačnosť príslušnosti údajov do jednotlivých tried. Relatívne početnosti tried zapíšeme do tab. 25.1. Na milimetrový papier nakreslíme príslušný histogram.

Tab. 25.1

triedne hranice	triedny znak X_i'	početnosť n_i	nový triedny znak V_i'	$n_i V_i'$	$n_i V_i'^2$	$n_i V_i'^3$
sumy						

Vypočítame aritmetický priemer nových triednych znakov V_a a podľa vzťahu (25.11) aj X_a. Vypočítame 2. začiatočný moment $M'_{V,2}$ a centrálny moment $M_{V,2}$ podľa vzťahu (25.12), odtiaľ $M_{X,2}$ a tým aj rozptyl σ^2 súboru hodnôt.

Podobne postupujeme aj pri výpočte momentov 3. rádu; počítame postupne $M'_{V,3}$, $M_{V,3}$ a $M_{X,3}$ podľa vzťahu (25.13). Vypočítame asymetriu.

Do histrogramu vkreslíme Gaussovu krivku normálneho rozdelenia so stredom v X_a a rozptylom σ^2. Porovnajte priebehy krivky a stupňovitej závislosti histogramu!

OTÁZKY A PROBLÉMY

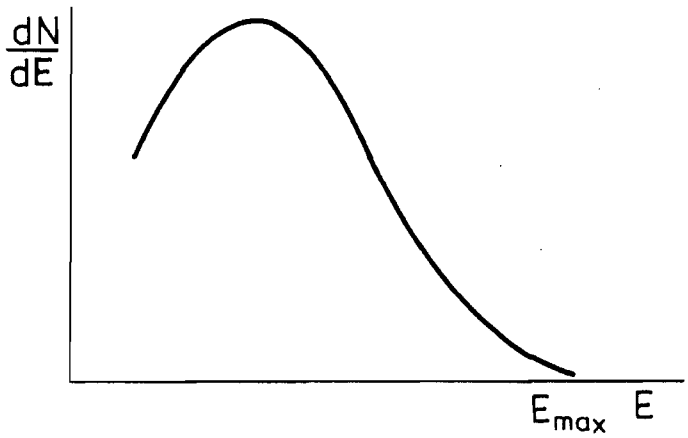
1. Aká je podľa rovnice (25.2) pravdepodobnosť, že nameraná hodnota bude z intervalu $\langle X_a-\sigma, X_a+\sigma\rangle$?
2. Aká je podľa vášho odhadu relácia rozptylu získaného štatistického rozdelenia pri konkrétnom meraní a ceny použitých prístrojov?

26. Určenie charakteristík zloženého beta žiariča

Odmerajte absorpčnú krivku a určte maximálne energie zložiek zloženého ß-žiariča.

TEORETICKÝ ÚVOD

Na obr. 26.1 je uvedený tzv. Sargentov diagram pre ß-žiarenie. Túto závislosť počtu častíc s určitou energiou od energie nazývame energetickým spektrom ß-žiarenia.



Obr. 26.1 Energetické spektrum ß-žiarenia (Sargentov diagram)

Z obr. 26.1 je vidieť, že spektrum je spojité. Pretože energia jadra je kvantovaná, dalo by sa očakávať, že energia uvoľnená pri prestavbe jadra by mala nadobúdať len určité dovolené hodnoty. Tento zdanlivý rozpor teórie a experimentu môžeme odstrániť predpokladom vzniku ďalšej častice (neutrína, resp. antineutrína).

Zo Sargentovho diagramu vyplýva, že v ß-žiarení sa vyskytujú častice s energiou meniacou sa od nuly až po určitú hranicu E_{max}. Pri premene konkrétneho jadra sa uvoľní vždy rovnaké množstvo energie a predpokladáme, že energia sa delí medzi ß-časticu a neutríno tak,že súčet ich energií sa rovná E_{max}. Maximálna energia E_{max} ß-žiarenia je teda pre daný rádioaktívny žiarič charakteristická.

Inou charakteristickou veličinou ß-žiariča je maximálny dolet d_{max}, t.j. vzdialenosť, na ktorej klesne pôvodná energia ß-častíc s maximálnou energiou na úroveň energie tepelného pohybu ostatných častíc prostredia. (Keďže pružné zrážky ß-častíc s atómami prostredia spôsobujú jeho odchýlky od pôvodného smeru pohybu, bude skutočná dráha častice podstatne väčšia ako dolet.)

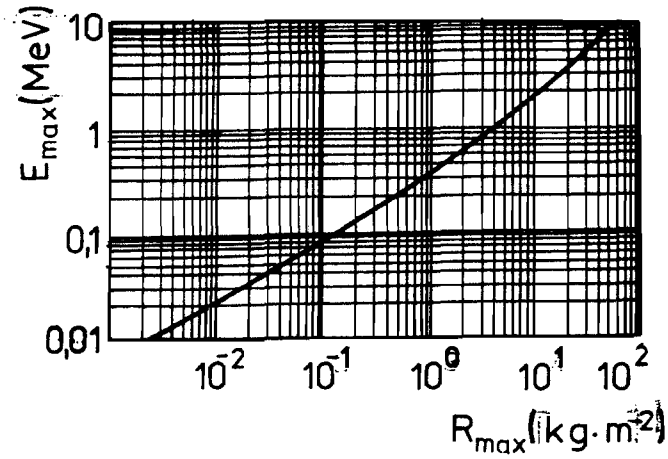
Často sa namiesto maximálneho doletu ß-častíc udáva plošná hustota materiálu, ktorým žiarenie ešte prenikne. Plošná hustota R_{max} je definovaná vzťahom

$$R_{max} = d_{max}\rho \qquad (26.1)$$

kde ρ je špecifická hmotnosť materiálu.

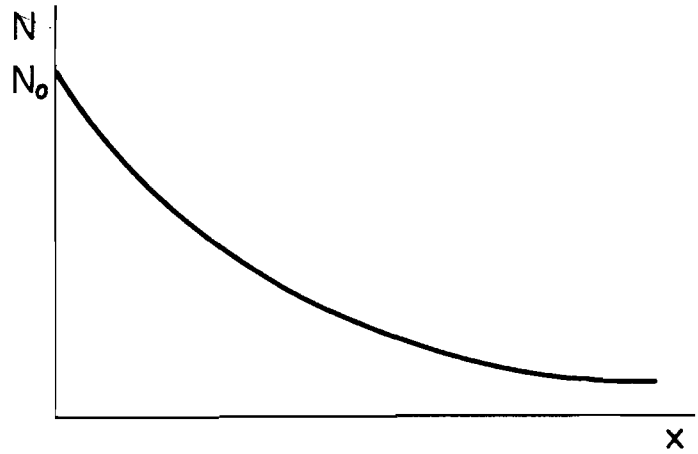
Aj keď medzi maximálnou energiou a maximálnym doletom (alebo plošnou hustotou materiálu) neexistuje vo všeobecnosti platný vzťah, pri známom dolete (plošnej hustote materiálu) môžeme určiť maximálnu energiu pomocou grafu uvedeného na obr. 26.2.

Príčinou strát energie ß-častíc pri prechode hmotným prostredím sú nepružné zrážky častíc s atómami (molekulami) prostredia. Časť energie sa stráca na ionizáciu a vzbudenie atómov - ionizačné straty. Časť energie stratia častice vyžiarením pri zabrzdení - radiačné straty. Absorpčná krivka, t.j. závislosť



Obr. 26.2 Závislosť maximálnej energie ß-žiarenia od plošnej hustoty absorbátora

počtu ß-častíc, ktoré prejdú cez absorbujúce prostredie s hrúbkou x, od tejto hrúbky je uvedená na obr. 26.3.



Obr. 26.3 Absorpčná krivka ß-žiariča

Približné matematické vyjadrenie tejto závislosti má tvar

$$N = N_0 \exp(-\mu x) \qquad (26.2)$$

kde N_0 je počet častíc dopadajúcich na absorbátor a μ je koeficient absorpcie.

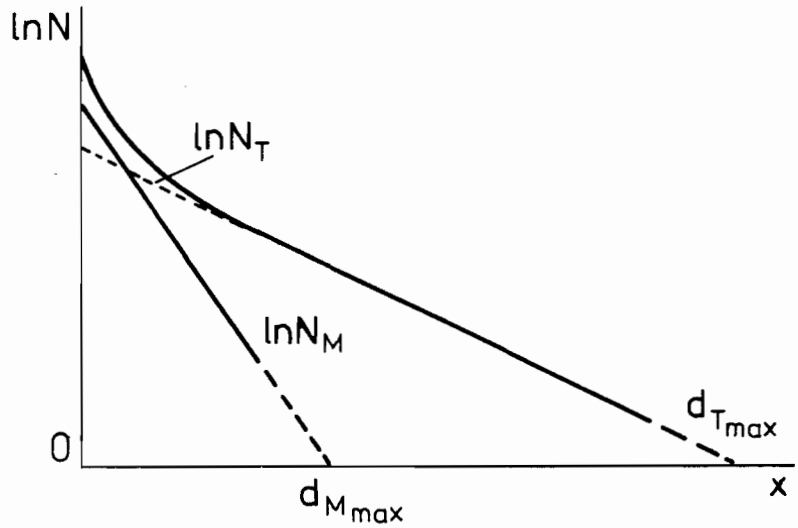
Koeficienty absorpcie pre rôzne prvky sa od seba líšia len málo, ale silne závisia od maximálnej energie absorbovaného ß-žiarenia.

METÓDA MERANIA

V praxi je často potrebné určiť charakteristiky rôznych ß-žiaričov zastúpených v jedinej rádioaktívnej vzorke. Vhodnou metódou na zistenie počtu jednotlivých ß-žiaričov a ich charakteristických vlastností je analýza absorpčnej krivky skúmanej vzorky. V prípade jediného ß-žiariča je absorpčná krivka určená vzťahom (26.2), grafickým zobrazením ktorého, v semilogaritmickom súradnicovom systéme, je priamka. Pri zloženom ß-žiariči absorpčnú závislosť v semilogaritmickom súradnicovom systéme predstavuje krivka. Predpokladáme, že táto krivka vznikla zložením viacerých priamkových závislostí. Nájdením týchto závislostí môžeme určiť počet žiaričov (je totožný s počtom priamok), koeficienty absorpcie pre jednotlivé žiariče (zo smerníc priamok) a maximálny dolet (extrapoláciou, t.j. predĺžením priamok k osi úsečiek).

Kvôli názornosti prevedieme analýzu absorpčnej krivky vzorky, ktorá je zložená z dvoch ß-žiaričov (obr. 26.4). Extrapoláciou lineárnej časti krivky k osi úsečiek môžeme určiť maximálny dolet prenikavejšej ("tvrdšej") zložky vzorky $d_{T_{max}}$, smernica tejto priamky určuje absorpčný koeficient "tvrdšej" zložky žiarenia. Extrapoláciou lineárnej časti aj pre oblasť $x \longrightarrow 0$ získame kompletnú absorpčnú krivku pre "tvrdšiu" zložku. Ak teda predpokladáme, že $N = N_T + N_M$ (N_T je počet častíc od "tvrdšej"

a N_M počet častíc od "mäkšej" zložky žiarenia zloženého žiariča), môžeme grafickým odčítaním zistiť absorpčnú krivku pre "mäkšiu" zložku žiariča. (Nezabudnite na pravidlá počítania s logaritmami!) Analogicky ako v prípade "tvrdšej" zložky určíme maximálny dolet a absorpčný koeficient aj pre "mäkšiu" zložku.



Obr. 26.4 Absorpčná krivka zloženého ß-žiariča

Podobne postupujeme aj v prípade, keď je žiarič zložený z viacerých zložiek. Postup však opakujeme potiaľ, kým posledným výsledkom bude opäť lineárna závislosť.

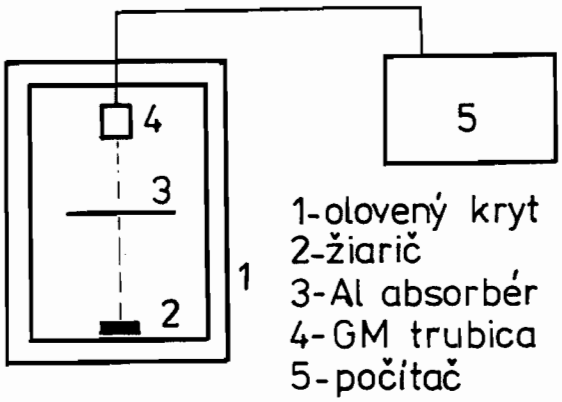
Presnosť tejto metódy na zisťovanie charakteristík zloženého ß-žiariča nie je vysoká, a preto sa používa len na orientačné merania.

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) Prístroje a pomôcky: zložený ß-žiarič, hliníkové absorbátory, (ρ_{Al} = 2,7.10^3 kg.m^{-3}), detektor žiarenia (G-M trubica s príslušenstvom)

b) Postup práce:

Schematické rozloženie zariadenia je uvedené na obr. 26.5.



Obr. 26.5 Schematické rozloženie zariadenia na meranie absorpčnej krivky ß-žiariča

Po pripojení G-M počítača na sieť odmerajte 5-krát tzv. pozadie N_p (pozadie je počet impulzov počítača bez žiariča).Vložte žiarič pomocou pinzety do oloveného krytu G-M trubice a odmerajte počet impulzov. Ďalej vkladajte medzi žiarič a trubicu hliníkové absorbátory a merajte počet impulzov. V meraní pokračujte dovtedy, kým počet registrovaných impulzov neklesne približne na úroveň pozadia. Namerané hodnoty zapisujte do tab. 26.1.

Tab. 26.1

$t =$ $\quad t_p =$ $\quad N_p =$ $\quad n_p = \frac{N_p}{t_p}$

i	x (mm)	N (s^{-1})	$n = \frac{N}{t}$ (s^{-1})	$n-n_p$ (s^{-1})	$\ln(n-n_p)$

Dobu merania počtu impulzov určí vedúci cvičenia. Pre grafickú analýzu si pripravte závislosť $\ln(n-n_p) = f(x)$, kde n je počet impulzov žiarenia pri hrúbke absorbátora rovnej x za jednotku času, n_p je priemerný počet impulzov pozadia za jednotku času. Grafickou analýzou uvedenej závislosti určte počet zložiek žiariča, maximálne dolety a absorpčné koeficienty. Z grafu na obr. 26.2 určte maximálne energie zložiek.

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Ako je definovaná maximálna energia ß-žiariča?
2. Prečo je spektrum ß- žiarenia spojité?
3. Ako sa dá využiť absorpčná krivka na určenie maximálnej energie ß-žiarenia?

27. Určenie charakteristík gama žiariča

Odmerajte absorpčnú krivku γ-žiariča a určte energiu jeho zložiek.

TEORETICKÝ ÚVOD

Atómové jadrá, ktoré sa nachádzajú vo vzbudenom stave, môžu prejsť do základného energetického stavu vyžiarením kvanta elektromagnetického žiarenia - γ-kvanta. Pri rádioaktívnej premene jadier vzniká takéto žiarenie v dôsledku preskupenia nukleónov v jadre. Energia γ-kvánt nadobúda hodnoty od 10 keV do 10 MeV. Energetické stavy jadra sú kvantované a z toho vyplýva, že γ-žiarenie bude mať tiež len určité hodnoty energie charakteristické pre daný typ žiariča. Pri prechode γ-žiarenia cez látku interaguje žiarenie s jej časticami, v dôsledku čoho intenzita γ-žiarenia klesá. Absorpčný zákon pre γ-žiarenie môžeme približne napísať v tvare

$$N = N_0 \exp(- \mu x)$$

kde N_0 je počet γ-častíc dopadajúcich na absorbátor, N je počet častíc, ktoré prešli absorbátorom s hrúbkou x a μ je lineárny koeficient absorpcie.

Prevažnú časť svojej energie stráca γ-žiarenie v dôsledku troch nezávisle prebiehajúcich procesov - fotoefektu, Comptonovho javu a tvoreniu elektrónovo - pozitrónových párov.

Fotoefekt spočíva v ionizácii atómu hmotného prostredia γ-žiarením.

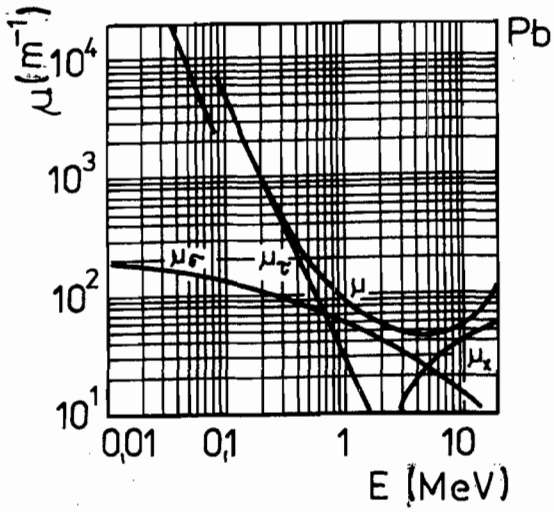
Pri Comptonovom jave je γ-kvantum rozptyľované na elektróne, pričom mení smer svojho pohybu a časť svojej energie odovzdá elektrónu.

Ak je energia γ-kvanta väčšia ako pokojová energia páru elektrón - pozitrón, môže sa pri interakcii γ-žiarenia s látkou takýto pár vytvoriť.

Výsledný koeficient absorpcie bude potom superpozíciou jednotlivých vplyvov

$$\mu = \mu_\tau + \mu_\sigma + \mu_\varkappa$$

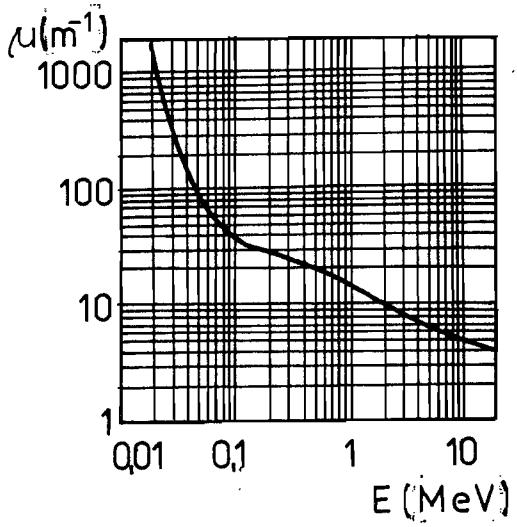
kde μ_τ je absorpčný koeficient určený fotoefektom, μ_σ je absorpčný koeficient určený Comptonovým javom a $\mu_\varkappa$ je absorpčný koeficient určený tvorením párov elektrón - pozitrón. Závislosť celkového koeficientu absorpcie a jeho jednotlivých zložiek od energie γ-častíc je uvedená na obr. 27.1.



Obr. 27.1 Závislosť koeficienta absorpcie a jeho zložiek od energie γ-častíc pre olovený absorbátor

METÓDA MERANIA

Jednou z približných metód na určenie energie γ-žiarenia je metóda absorpcie žiarenia v hmotnom prostredí. Metóda je vhodná na orientačné určenie veľkosti energie žiarenia. Meraním sa získajú absorpčné krivky pre daný typ žiariča a rôzne absorbátory. Musíme použiť minimálne dva absorbátory, lebo závislosť koeficienta absorpcie pre olovo má minimum a určenie energie žiariča pre vypočítanú hodnotu koeficienta absorpcie nie je jednoznačné. Použitie dvoch absorbátorov je dôležité najmä vtedy, ak nemáme o žiariči žiadne predbežné informácie. Spomínanú metódu možno použiť aj vtedy, keď skúmané žiarenie pozostáva z viacerých zložiek s rôznymi energiami. Absorpčnú krivku v takomto prípade rozložíme na lineárne závislosti, podobne ako v úlohe "Určenie charakteristík zloženého ß-žiariča". Pre každú zložku osobitne určíme hodnotu koeficienta absorpcie a z grafu na obr. 27.1 alebo obr. 27.2 odčítame príslušné hodnoty energie.

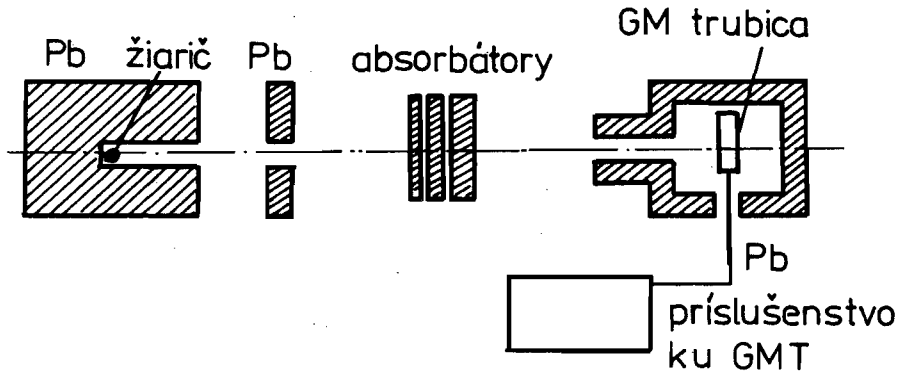


Obr. 27.2 Závislosť koeficienta absorpcie od energie γ-častíc pre hliníkový absorbátor

OPIS APARATÚRY A POSTUP PRÁCE

a) Prístroje a pomôcky: γ-žiarič v olovenom kryte, sada absorbátorov, detektor žiarenia (G-M trubica) s príslušenstvom

Schematické rozloženie zariadenia je uvedené na obr. 27.3. Aby sa na detektor nedostali rozptýlené γ-častice, je potrebné umiestniť detektor do oloveného krytu. Otvor v kryte musí byť čo najmenší, aby rozptýlené fotóny neskresľovali výsledky merania.



Obr. 27.3 Schematické rozloženie zariadenia na meranie absorpčnej krivky γ-žiarenia

b) Postup práce:

Po pripojení zariadenia na sieť odmerajte 5-krát pozadie N_p, t.j. počet impulzov so zakrytým žiaričom. Ďalej odmerajte počty impulzov pre rôzne hrúbky absorbátorov. Dobu merania, počet a druh absorbátora určí vedúci cvičenia. Namerané hodnoty zapíšte do tab. 27.1.

Z nameraných hodnôt zostrojte absorpčnú krivku - závislosť $\ln(n-n_p) = f(x)$, kde n_p je počet impulzov pozadia za časovú

jednotku, n je počet impulzov za jednotku času pri hrúbke absorbátora x. Grafickou analýzou (podobne ako v úlohe č. 26) absorpčnej krivky určte koeficienty absorpcie a energie zložiek γ-žiariča.

Tab. 27.1

$$t_p = \qquad N_p = \qquad n_p = \frac{N_p}{t_p}$$

i	x (mm)	N (s^{-1})	$n = \frac{N}{t}$ (s^{-1})	$n-n_p$ (s^{-1})	$\ln(n-n_p)$

OTÁZKY A PROBLÉMY

1. Čo je to absorpčná krivka?
2. Ako sa dá využiť absorpčná krivka na určenie energie -žiarenia?
3. Ktoré hlavné príčiny straty energie γ-častíc pri prechode hmotným prostredím poznáte?

28. Scintilačný detektor RI žiarenia

Oboznámiť sa s činnosťou scintilačného detektora rádioaktívneho žiarenia v spojení s fotoelektrónovým násobičom. Overiť závislosti hustoty toku emitovaných γ-častíc z bodového zdroja od vzdialenosti. Stanoviť účinnosť detektora.

TEORETICKÝ ÚVOD

Registrácia nabitých častíc pomocou zábleskov svetla, ktoré vznikajú pri dopade týchto častíc na tienidlo pokryté vrstvou sulfidu zinočnatého (ZnS) bola jednou z prvých metód detekcie jadrového žiarenia. Vizuálny spôsob pozorovania krátkych zábleskov svetla - scintilácií sa postupne používal predovšetkým na detekovanie a registráciu α-častíc a protónov s energiou niekoľkých MeV. Rozvoj scintilačného spôsobu registrácie žiarenia nastal najmä po roku 1947, keď už boli k dispozícii pomerne kvalitné fotoelektrónové násobiče (fotonásobiče), pomocou ktorých bolo možné registrovať aj veľmi slabé svetelné záblesky vznikajúce v scintilačnej látke pod vplyvom žiarenia. Boli vyhotovené scintilačné detektory umožňujúce jednak zvýšiť rýchlosť počítania zábleskov (do 10^6 za sekundu), a jednak registrovať a analyzovať podľa energie ako nabité častice, tak aj neutróny a γ-žiarenie.

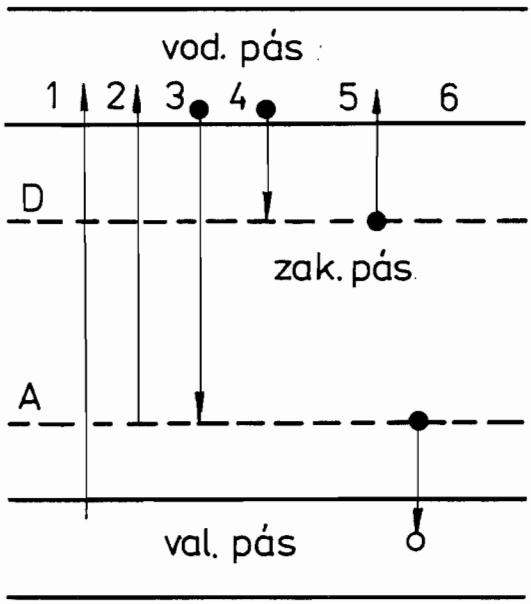
OPIS APARATÚRY

Princíp činnosti scintilačného detektora

Scintilačný detektor sa skladá zo scintilátora a fotoelektrónového násobiča. Do zostavy detektora patrí ešte elektrický napájací zdroj pre fotonásobič a elektronická aparatúra pre zosilnenie a registráciu elektrických impulzov z fotonásobiča.

Proces vzniku scintilácií v tuhej látke možno vysvetliť na základe pásovej teórie. V izolovanom atóme sa elektróny nachádzajú na určitých diskrétnych energetických hladinách. V tuhej látke sú atómy umiestnené v tesnej blízkosti a ich vzájomné pôsobenie je dostatočne silné. Následkom toho sa hladiny vonkajších elektrónov takých atómov štiepia a vytvárajú pásy, ktoré sú od seba oddelené tzv. zakázanými pásmi. Každý pás obsahuje toľko dovolených diskrétnych stavov, koľko je v kryštáli atómov. Energetické hladiny sú teda veľmi blízko, takže pás sa javí prakticky ako spojitý. Najvyšší dovolený pás, ktorý je prakticky celkom zaplnený elektrónmi, je valenčný pás (obr. 28.1). Vyššie položený dovolený pás sa nazýva vodivostný. Medzi nimi je zakázaný pás, ktorého energetická šírka, podľa typu materiálu, sa mení od desatín po jednotky elektrónvoltov (eV).

V skutočnosti však kryštály nie sú ideálne. Majú poruchy (defekty) vo forme cudzích prímesných atómov, vo forme prázdnych uzlov v mriežke (vakancií), mikroskopických trhlín a pod. Prítomnosť týchto defektov má za následok vznik lokálnych energetických hladín, ktoré ležia v zakázanom páse (na obr. 28.1 hladiny A a D).



Obr. 28.1 Charakteristické pásové spektrum energie elektrónov v kryštáli s vyznačenými prechodmi

Pri vonkajšom pôsobení žiarenia na scintilátor (napríklad ak ním prechádza rýchle sa pohybujúca nabitá častica) elektróny môžu pohltiť časť energie tejto častice a prejsť z valenčného do vodivostného pásu. Tento prechod je na obr. 28.1 vyznačený číslom 1. Pohltením energie sa môže dostať do vodivostného pásu aj elektrón z prímesnej hladiny A (prechod 2). Dieru, ktorá vznikne vo valenčnom páse po prechode 1, môže zaplniť elektrón z prímesnej hladiny A (prechod 6). Prechodom 2 a 6 vzniknú na hladine A voľné miesta, ktoré sa stávajú centrami vzniku svetelných zábleskov (luminiscenčné centrá). Na uvoľnené miesta v prímesnej hladine A môžu prejsť elektróny z vodivostného pásu (prechod 3). Pri ich rekombinácii s dierami na hladine A sa nadbytok energie elektrónu vyžiari vo forme svetelného záblesku. Generované fotóny majú menšiu energiu hf ako je šírka zakázaného pásu,

a preto pravdepodobnosť jeho pohltenia v samotnom scintilátore je malá a ľahko vychádzajú z jeho objemu. Prechody 4 a 5 nemajú význam pre registráciu žiarenia.

V scintilačných počítačoch sa obvykle využíva proces fluorescencie s dobou vysvecovania 10^{-5} až 10^{-9} s.

Podľa typu možno používané scintilátory rozdeliť do niekoľkých skupín:

neorganické kryštály

organické kryštály

tekuté organické scintilátory

tuhé plastické scintilátory

plynové scintilátory

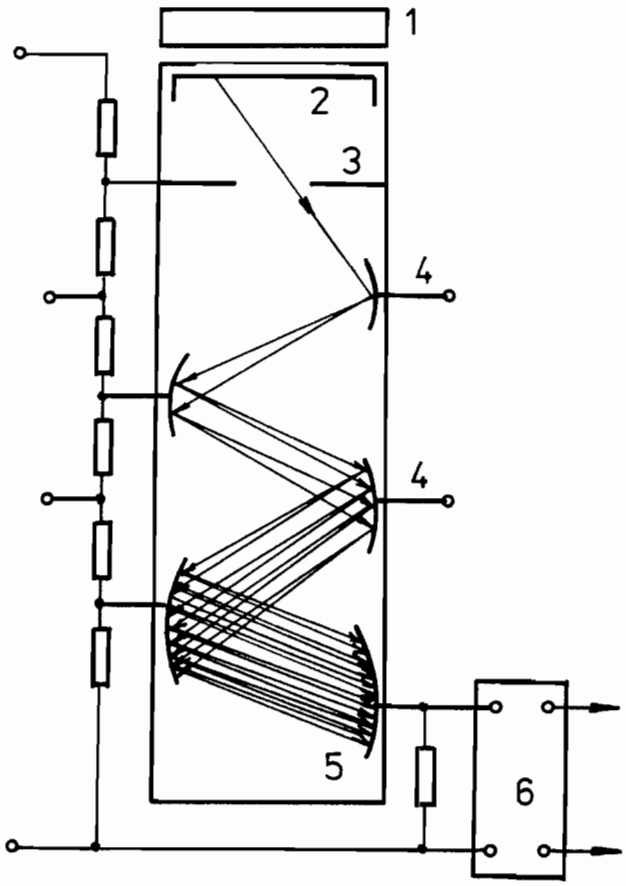
Základnými charakterisitkami scintilátorov sú svetelný výťažok, spektrálne zloženie a trvanie scintilácie.

Fotoelektrónový násobič (fotonásobič)

Na premenu svetelných zábleskov zo scintilátora na elektrické impulzy sa používajú fotoelektrónové násobiče (fotonásobiče). Fotonásobič je v podstate sklená banka vyčerpaná do vysokého vákua obsahujúca katódu, sústavu dynód a anódu (obr. 28.2).

Svetlo zo scintilátora 1 prechádza cez priezračné vstupné okienko a dopadá na polopriezračnú katódu 2, ktorá je nanesená vo forme tenkej vrstvy na vnútornom povrchu okienka. Vplyvom svetelného záblesku sa z fotokatódy, v dôsledku fotoefektov, emitujú elektróny. Elektrické pole medzi katódou a fokusujúcou elektródou 3 urýchľuje emitované elektróny a usmerňuje ich na prvú zo sústavy násobiacich elektród, tzv. dynód 4. Pri dopade

elektrónu na povrch dynódy dochádza k emisii sekundárnych elektrónov. Rozloženie elektrického poľa vo fotonásobiči je také, aby elektróny postupovali od fotokatódy postupne cez sústavu dynód až na anódu 5. Elektrické napätie sa na fotonásobič zapája cez odporový delič tak, aby potenciál narastal od dynódy k dynóde, a tým aby dochádzalo k "množeniu" putujúcich elektrónov.



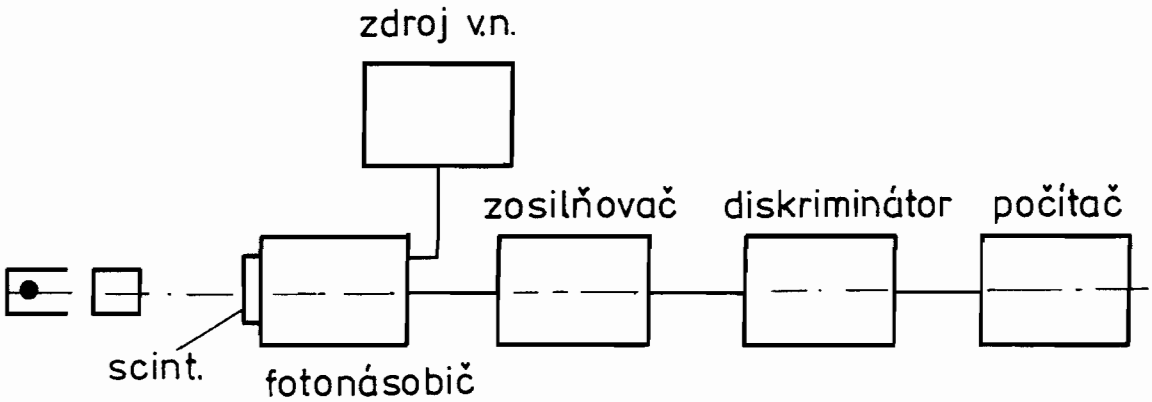
Obr. 28.2 Schéma fotonásobiča

Dôležitou charakteristikou fotonásobiča je koeficient zosilnenia (koeficient znásobenia), ktorým sa rozumie pomer počtu elektrónov dopadajúcich na anódu k počtu fotoelektrónov emitovaných z katódy. Dosahuje hodnoty 10^5 - 10^9 a súvisí s koeficientom

sekundárnej emisie σ vzťahom $N = \sigma^n$, kde n je počet dynód (býva 10 - 15). Koeficient sekundárnej emisie σ je daný podielom počtu sekundárnych a primárnych elektrónov.

V scintilačnom počítači, aj keď naň nepôsobí vonkajšie žiarenie, môže vzniknúť veľký počet impulzov na výstupe fotonásobiča. Tieto impulzy majú obyčajne neveľké amplitúdy a nazývajú sa šumové impulzy. Najväčší počet šumových impulzov vzniká v dôsledku termoelektrónovej emisie z fotokatódy alebo aj z prvých dynód. Na zmenšenie počtu šumových impulzov sa často používa chladenie fotonásobiča.

Počet zaregistrovaných šumových impulzov možno znížiť niekoľkými spôsobmi. V laboratórnej práci je meranie usporiadané podľa obr. 28.3. Využijeme rozdiel medzi amplitúdou šumových a pravých impulzov pre oddelenie impulzov šumových.



Obr. 28.3 Bloková schéma meracieho zariadenia

METÓDA MERANIA

Aktivita rádioaktívneho preparátu vyjadrená v jednotkách becquerel (Bq) udáva počet rozpadov jadier v preparáte za 1 s.

Ak pri jednom rozpade jadra dochádza k emisii k-kvánt žiarenia, počet zaregistrovaných impulzov scintilačným detektorom za jednotku času vyvolaných žiarením vychádzajúcimi zo žiariča je

$$n = kA \frac{\omega}{4\pi} \tag{28.1}$$

kde A je aktivita rádioaktívnej látky. Predpokladáme totiž, že:

1. žiarenie vychádza z bodového žiariča rovnomerne do plného priestorového uhla 4π, a teda pravdepodobnosť, že uvoľnené kvantum žiarenia zasiahne aktívnu zónu scintilačnej sondy je daná podielom priestorového uhla ω, pod ktorým je vidieť scintilátor z miesta bodového žiariča, a plného uhla 4π,
2. počítač pracuje s účinnosťou η; to určuje pravdepodobnosť registrácie kvanta žiarenia, ktoré preletí aktívnou zónou detektora.

Ak je scintilátor vo vzdialenosti x od zdroja rádioaktívneho žiarenia a plocha scintilátora videná zo strany žiariča je S, možno pre ω písať

$$\omega = \frac{S}{x^2} \tag{28.2}$$

a po dosadení do vzťahu (28.1) dostaneme

$$n = kA \frac{S}{4\pi} \eta \frac{1}{x^2} \tag{28.3}$$

Celkový počet impulzov zaregistrovaných za jednotku času je

$$N = n + n_š = kA \frac{S}{4\pi x^2} \eta + n_š \tag{28.4}$$

Zo vzťahu (28.4) vidíme, že závislosť počtu zaregistrovaných impulzov za jednotku času od vzdialenosti x možno zapísať v tvare

$$N = \frac{B}{x^2} + C \tag{28.5}$$

Metóda najmenších štvorcov nám na základe meraní N v rôznych vzdialenostiach x umožní určiť koeficienty B a C. Hodnoty uvedených koeficientov vychádzajú z podmienky

$$\sum_{i=1}^{m} \left[N_i - \left(C + \frac{B}{x_i^2} \right) \right]^2 = \min \tag{28.6}$$

alebo prepisom

$$\frac{d}{dC} \sum_{i=1}^{m} \left[N_i - \left(C + \frac{B}{x_i^2} \right) \right]^2 = 0$$

$$\frac{d}{dB} \sum_{i=1}^{m} \left[N_i - \left(C + \frac{B}{x_i^2} \right) \right]^2 = 0$$

kde m je počet meraní. Z posledných dvoch vzťahov dostávame sústavu dvoch rovníc pre C a B

$$mC + B \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i^2} = \sum_{i=1}^{m} N_i \tag{28.7a}$$

$$C \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i^2} + B \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i^4} = \sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{x_i^2} \tag{28.7b}$$

Z vypočítaných koeficientov B a C možno vyjadriť jednak úroveň šumu a pozadia

$$n_š = C \tag{28.8}$$

a pri známych vlastnostiach žiariča (k, A) a plochy scintilátora stanoviť účinnosť detekcie rádioaktívneho žiarenia

$$\eta = B \frac{4\pi}{kAS} \qquad (28.9)$$

POSTUP PRÁCE

a) Prístroje a pomôcky: zdroj rádioaktívneho žiarenia ^{60}Co s krytom, scintilačná sonda, počítač impulzov s príslušenstvom, dĺžkové meradlo, stopky

b) Postup práce:

Po zapnutí prístrojov nastavíme na počítači pomocou automatickej časovej predvoľby dobu meraní 100 s. Odmeriame počty impulzov pri 10 vzdialenostiach scintilačnej trubice od žiariča od 0,5 m do 1,5 m. Pre každú vzdialenosť meriame 3-krát a priemernú hodnotu N_i prepočítanú na časovú jednotku zapíšeme do tab. 28.1.

Tab. 28.1

i	x (m)	N_i (s^{-1})	$\frac{1}{x^2}$ (m^{-2})	$\frac{1}{x^4}$ (m^{-4})	$\frac{N}{x^2}$ ($s^{-1}.m^{-2}$)
		$\sum N_i =$	$\sum \frac{1}{x_i^2} =$	$\sum \frac{1}{x_i^4} =$	$\sum \frac{N_i}{x_i^2} =$

Z hodnôt zapísaných a vypočítaných v tab. 28.1 určíme zo sústavy rovníc (28.7a,b) koeficienty B a C. Veličinu $n_š$ vypočítame zo vzťahu (28.8) a (28.9). Na záver odmeriame $n_š$ (pri zakrytom žiariči) a porovnáme s vypočítanou hodnotou.

OTÁZKY a PROBLÉMY

1. V akom prostredí by bolo potrebné uskutočniť experiment, aby vzťah (28.3), resp. uvážiac šumové impulzy vzťah (28.4), platil presne? Ako ovplyvní reálne prostredie (vzduch) meranie?
2. Čo je polčas rozpadu?
3. Ukážte, aká je časová závislosť aktivity žiariča?

Dodatok I

Základné veličiny

veličina	základná jednotka		vedľajšia jednotka	
	názov	značka	názov	značka
dĺžka	1 meter	m		
hmotnosť	1 kilogram	kg	1 tona	t
čas	1 sekunda	s	1 minúta 1 hodina 1 deň	min h d
elektrický prúd	1 ampér	A		
teplotný rozdiel	1 kelvin	K	1 stupeň Celzia	^{o}C
svietivosť	1 kandela	cd		
látkové množstvo	1 mól	mol		

Doplnkové a niektoré odvodené veličiny

plošný obsah	1 štvorcový meter	m^2		
objem	1 kubický meter	m^3	1 liter	l
uhol (rovinný)	1 radián	rad	1 uhlový stupeň 1 uhlová minúta 1 uhlová sekunda	o
uhol (priestorový)	1 steradián	sr		

veličina	základná jednotka		vedľajšia jednotka	
	názov	značka	značka	názov
frekvencia	1 hertz	Hz		
sila	1 newton	N		
hustota	1 kilogram na kubický meter	$kg.m^{-3}$		
tlak, mechanické napätie	1 pascal	Pa		
dynamická viskozita	1 pascal sekunda	Pa.s		
kinematická viskozita	1 štvorcový meter za sekundu	$m^2.s^{-1}$		
energia, teplo	1 joule	J		
výkon	1 watt	W		
elektrický náboj	1 coulomb	C		
elektrické napätie, rozdiel potenciálov, elmot.napätie	1 volt	V		
elektrický odpor	1 ohm	Ω		
elektrická vodivosť	1 siemens	S		
elektrická kapacita	1 farad	F		
indukčnosť	1 henry	H		
magnetický tok	1 weber	Wb		
magnetická indukcia, hustota magnetického toku	1 tesla	T		
magnetomotor. napätie	1 ampér	A		
intenzita magnetického poľa	1 ampér na meter	$A.m^{-1}$		
svetelný tok	1 lumen	lm		
osvetlenie	1 lux	lx		

notka

zov

Definície základných jednotiek

Meter je dráha, ktorú prebehne svetlo vo vákuu za časový interval 1/299 792 458 sekundy. (1983)

Kilogram je hmotnosť medzinárodného prototypu kilogramu, ktorý je uložený v Medzinárodnom ústave pre váhy a miery v Paríži.

Sekunda je doba trvania 9 192 631 770 period žiarenia vznikajúceho pri prechode medzi dvoma veľmi jemnými energetickými podhladinami (F = 4 a F = 3) základného stavu 6 $^{2}S_{1/2}$) atómu ^{133}Cs. (Základná hladina atómu Cs sa štiepi v dôsledku interakcie medzi elektrónovým a jadrovým momentom atómu na dve podhladiny F = 4 a F = 3.)

Ampér je prúd, ktorý pri konštantnom prechode dvoma rovnobežnými priamymi nekonečne dlhými vodičmi zanedbateľného kruhového prierezu, umiestnenými vo vákuu vo vzdialenosti 1 meter, vyvolá medzi vodičmi silu 2.10^{-7} N na jeden meter dĺžky.

Mól je látkové množstvo sústavy, ktorá obsahuje toľko elementárnych jedincov (entít), koľko je atómov v 0,012 kg ^{12}C.

Kandela je svietivosť zdroja svetla v určitom smere, ktorý vyžaruje monochromatické žiarenie s frekvenciou 540.10^{12} Hz a ktorého žiarivý výkon v tom smere je 1/683 $W.sr^{-1}$.

Dodatok II

Základné fyzikálne konštanty

Zrýchlenie voľného pádu

$$g = 9{,}780\,49(1 + 0{,}528\,8 \sin\alpha - 0{,}000\,6 \sin^2\alpha) - 0{,}030\,86 \cdot \ell \quad \mathrm{m.s^{-2}}$$

kde α je zemepisná šírka a ℓ je výška nad hladinou mora

(pri riešení úloh počítajte so zrýchlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$)

Gravitačná konštanta

$$\varkappa = (6{,}672 \pm 0{,}004\,1).10^{-11}\ \mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$$

Molárna plynová konštanta

$$R_m = (8{,}314\,41 \pm 0{,}000\,26)\ \mathrm{J.mol^{-1}.K^{-1}}$$

Avogadrova konštanta (počet molekúl v látkovom množstve 1 mól)

$$N_A = (6{,}022\,045 \pm 0{,}000\,031).10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$$

Molárny objem ideálneho plynu (objem, ktorý má 1 mól pri teplote 273,15 K a tlaku 101 325 Pa)

$$V_0 = (2{,}241\,383 \pm 0{,}000\,07).10^{-2}\ \mathrm{m^3.mol^{-1}}$$

Boltzmannova konštanta

$$k = \frac{R_m}{N_A} = (1{,}380\,662 \pm 0{,}000\,044).10^{-23}\ \mathrm{J.K^{-1}}$$

Permitivita vákua

$$\varepsilon_0 = (8{,}854\,187\,82 \pm 0{,}000\,000\,07).10^{-12}\ \mathrm{m^{-3}.kg^{-1}.s^4.A^{-2}}$$

Rýchlosť svetla vo vákuu

$$c = (2{,}997\,924\,58 \pm 0{,}000\,000\,012).10^{8}\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

Planckova konštanta

$$h = (6{,}626\,176 \pm 0{,}000\,036).10^{-34}\ \mathrm{J.s}$$

Stefanova - Boltzmannova konštanta

$$\sigma = (5{,}670\ 32 \pm 0{,}000\ 71)\ J.m^{-2}.s^{-1}.K^{-4}$$

Konštanta vo Wienovom posuvnom zákone

$$b = (2{,}897\ 79 \pm 0{,}000\ 09).10^{-3}\ m.K$$

Elementárny elektrický náboj elektrónu

$$e = -\ (1{,}602\ 189\ 2 \pm 0{,}000\ 004\ 6).10^{-19}\ C$$

Pokojová hmotnosť elektrónu

$$m_0 = (9.109\ 534 \pm 0{,}000\ 047).10^{-31}\ kg$$

Pokojová hmotnosť protónu

$$m_p = (1{,}672\ 648\ 5 \pm 0{,}000\ 008\ 6).10^{-27}\ kg$$

Pokojová hmotnosť neutrónu

$$m_n = (1{,}674\ 954\ 3 \pm 0{,}000\ 008\ 6).10^{-27}\ kg$$

Hmotnosť vodíkového atómu

$$m_H = (1{,}673\ 559 \pm 0{,}000\ 008\ 5).10^{-27}\ kg$$

Permeabilita vákua

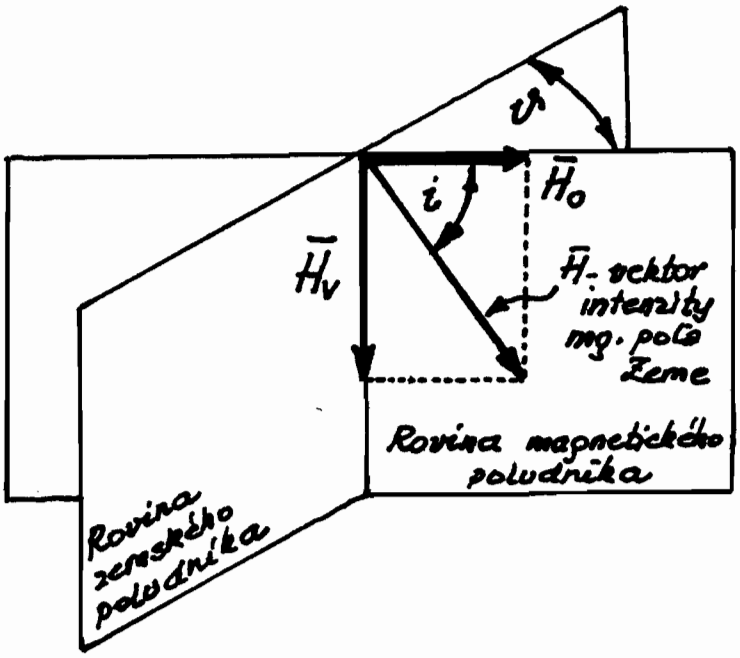
$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ m.kg.C^{-2}$$

Dodatok III

MERANIE HORIZONTÁLNEJ ZLOŽKY INTENZITY MAGNETICKÉHO POĽA ZEME TANGENTOVOU BUZOLOU

Protokol z laboratórneho cvičenia - 24.2.1994

Magnetické pole Zeme možno v určitom mieste na jej povrchu opísať tromi veličinami: horizontálnou zložkou magnetického poľa Zeme H_0, deklináciou ϑ a inklináciou i . Význam veličín je zrejmý z obr. III.1.



Obr. III.1

Metóda a postup merania

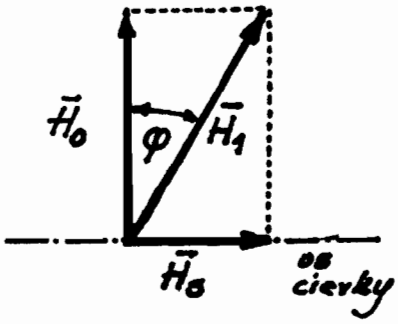
Horizontálnu zložku H_0 meriame pomocou tangentovej buzoly. Skladá sa z cievky s N závitmi a magnetky uloženej v jej strede. Ak je polomer cievky oveľa väčší ako jej dĺžka, intenzita magnetického poľa v jej strede je

$$H_s = \frac{NI}{2R}$$

Toto pole cievky sa skladá s magnetickým poľom Zeme a výchylka magnetky sleduje výslednicu

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_s + \vec{H}_0$$

Je vhodné natočiť cievku tak, aby pri nulovom prúde bola jej os kolmá na smer, ktorý ukazuje magnetka, teda kolmá na magnetický poludník. Vtedy platí (obr. III.2)



Obr. III.2

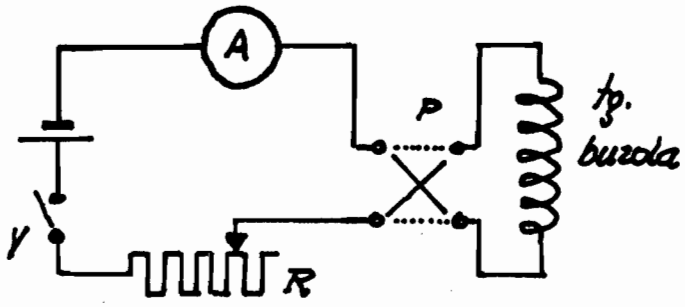
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H_s}{H_0}$$

a po dosadení

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{NI}{2RH_0}$$

Z merania odchýlky φ v závislosti od veľkosti cievkového prúdu možno určiť horizontálnu zložku H_0.

Schéma zapojenia



Obr. III.3

a výchylka

Použité pomôcky a prístroje:

ručičkový miliampérmeter

drôtový reostat

zdroj prúdu

komutátor prúdu

vypínač

tangentová buzola

laboratórne výrobky KF

ola jej os

magnetický

Samotné meranie sme uskutočnili vždy pri obidvoch smeroch prúdu I a odčítali výchylky φ_- a φ_+. Z nich určíme aritmetický priemer $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_- + \varphi_+)$ a funkčnú hodnotu tg φ.

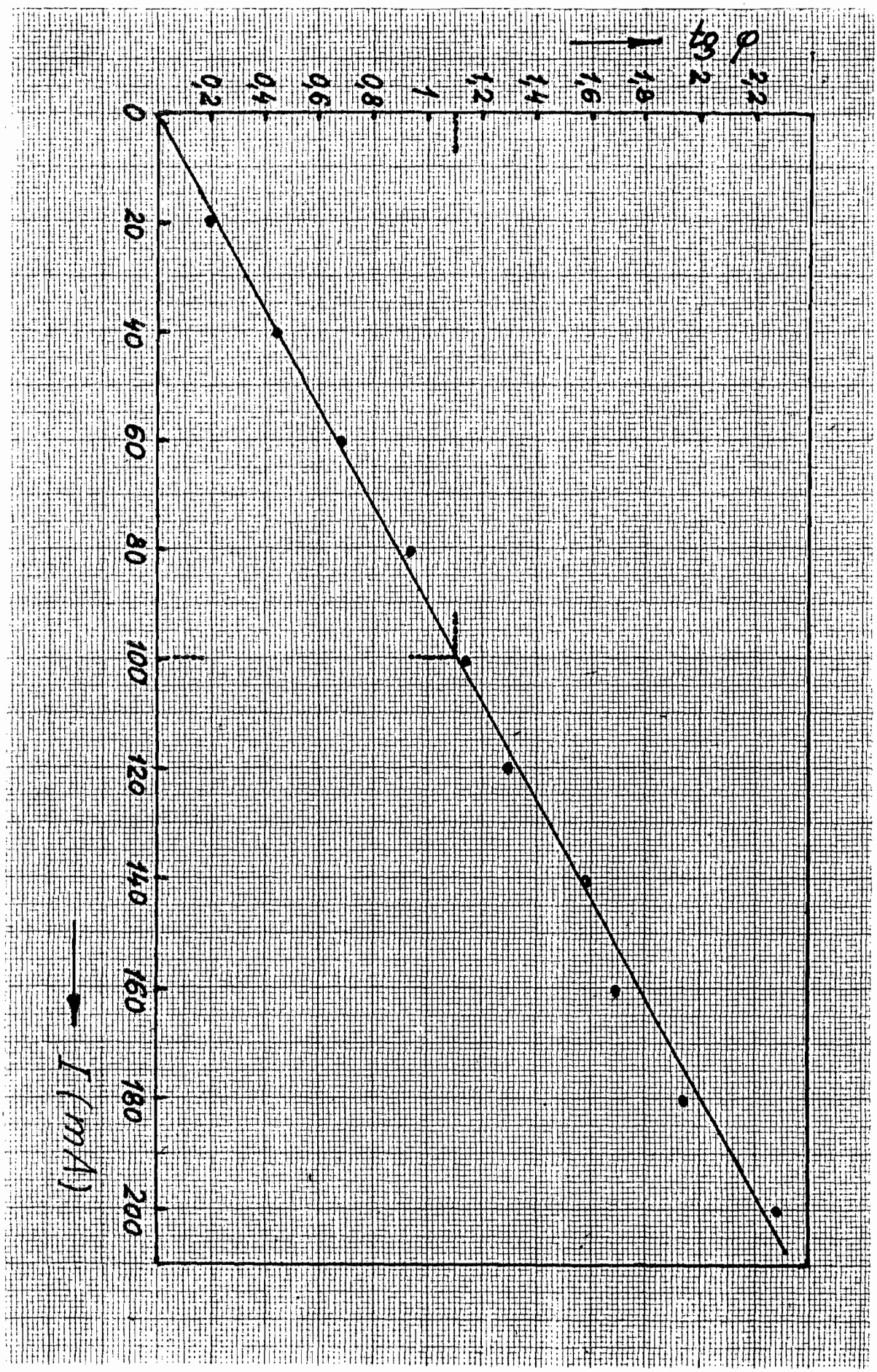
Namerané hodnoty:

kového prúdu

I (mA)	φ_- (°)	φ_+ (°)	$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_- + \varphi_+)$ (°)	tg φ
20	12	12	12	0,212
40	26	23	24,5	0,455
60	34	35	34,5	0,687
80	42	44	43	0,932
100	47	50	48,5	1,13
120	50	54	52	1,28
140	57	58	57,5	1,57
160	58	60	59	1,66
180	62	63	62,5	1,92
200	66	66	66	2,25

Spracovanie nameraných hodnôt:

$$\mathrm{tg}\,\varphi = kI \quad , \quad \text{kde} \quad k = \frac{N}{2RH_0} \quad , \quad N = 27, \quad 2R = 19\ \text{cm}$$


tg φ
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
2,2
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
I (mA)

Cez body závislosti tg φ = f(I) preložíme priamku. Určíme hodnotu smernice k

$$k = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi_{100}}{100\ \mathrm{mA}} = \frac{1{,}1}{0{,}1\ \mathrm{A}} = 11\ \mathrm{A}^{-1}$$

kde φ_{100} je výchylka buzoly pri prúde 100 mA.

Hodnotu H_0 vypočítame podľa vzťahu

$$H_0 = \frac{N}{2Rk} = \frac{27}{0{,}19\ \mathrm{m}.11\ \mathrm{A}^{-1}} = 12{,}91\ \mathrm{A.m}^{-1}$$

Zhodnotenie výsledkov

Porovnaním rameranej hodnoty s oficiálnym údajom z roku 1993 (H_0 = 16,70 $\mathrm{A.m}^{-1}$) zistíme značný rozdiel, až 22 %. Uvedenú odchýlku nespôsobuje prítomnosť magnetu v použitom ampérmetri, pretože ten bol pri meraní vzdialený od buzoly 1 m, čo je dostatočná vzdialenosť. Príčinu možno vidieť v tom, že v priestore laboratória v budove EF je magnetické pole silne nehomogénne. Možno sa o tom presvedčiť pomocou magnetky, ktorej smer sa na rôznych miestach v blízkom okolí zariadenia mení v rozsahu až o 30°.

OBSAH

Predslov 3

Metódy spracovania experimentálnych výsledkov (Ing. P.Ballo,CSc.) 5

1. Určenie tiažového zrýchlenia reverzným kyvadlom (Ing. J.Lasz) 23

2. Maxwellovo kyvadlo (Ing. J.Lasz) 29

3. Určenie momentov zotrvačnosti tuhých telies pomocou kyvadla na trifilárnom závese (doc.Ing. O.Budke,CSc.) 37

4. Matematické kyvadlo (Ing. J.Lasz) 45

5. Skladanie kolmých kmitov (doc.Ing. D.Barančok,CSc.) 51

6. Meranie rýchlosti zvuku (doc.Ing. D.Barančok,CSc.) 57

7. Meranie teploty (doc.Ing. D.Barančok,CSc.) 65

8. Verifikácia Boyleovho zákona (doc.Ing. P.Dieška,CSc.) 73

9. Koeficient teplotnej rozpínavosti vzduchu (doc.Ing. P.Dieška,CSc) 76

10. Pomer špecifických tepiel plynu (doc.Ing. P.Dieška,CSc.) 79

11. Meranie koeficientu dĺžkovej teplotnej rozťažnosti (doc.Ing. P.Dieška,CSc.) 87

12. Meranie špecifickej vodivosti kvapaliny (Ing. J.Lasz) 91

13. Magnetická indukcia v okolí dlhého priameho vodiča a v cievke (Ing. P.Tomčík) 97

14. Meranie horizontálnej zložky intenzity magnetického poľa Zeme tangentovou buzolou (doc.Ing.D.Barančok,CSc.) 105

15. Meranie magnetického momentu permanentného magnetu (doc.Ing. D.Barančok,CSc.) 111

16. Špecifický náboj elektrónu (doc.Ing. P.Dieška,CSc.) 117

17. Elektrická vodivosť kovov a polovodičov (Ing.J.Lasz) 125

18. Meranie polomeru krivosti šošovky a vlnovej dĺžky svetla (Ing. P.Tomčík) 135

19. Meranie hrúbky tenkej dielektrickej vrstvy (Ing. O.Foltin,CSc.) 141

20. Ohyb a polarizácia svetla (doc.Ing. D.Barančok,CSc.) 151

21. Planckova konštanta (Ing. O.Foltin,CSc.) 157

22. Tepelné žiarenie (Ing.O.Foltin,CSc.) 167

23. Tepelná emisia elektrónov v kovoch (RNDr. M.Valach) 175

Úvod pre úlohy č. 24 - 28 (Ing. P.Tomčík) 185

24. Štúdium Comptonovho javu (doc.Ing. J.Cirák,CSc.) 191

25. Štatistické spracovanie merania (doc.Ing. J.Cirák,CSc.) 201

26. Určenie charakteristík zloženého ß-žiariča (Ing. P.Tomčík) 211

27. Určenie charakteristík γ-žiariča (Ing. P.Tomčík) 219

28. Scintilačný detektor RI žiarenia (doc.Ing. J.Cirák,CSc.) 225

Dodatok I (Ing.A.Vlnieška) 235

Dodatok II (Ing.A.Vlnieška) 239

Dodatok III (Ing.A.Vlnieška) 241