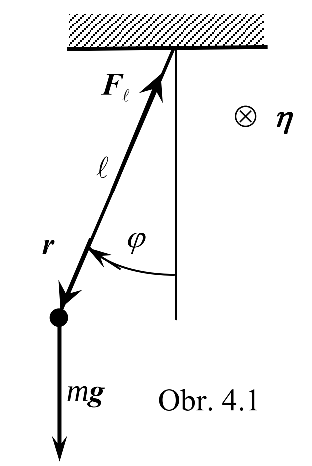
4. Matematické kyvadlo

Autor pôvodného textu: **Jozef Lasz**

Úloha: Zistiť závislosť doby kmitu matematického kyvadla od veľkosti začiatočnej výchylky a extrapoláciou k nulovej výchylke určiť veľkosť tiažového zrýchlenia v laboratóriu. Určiť koeficient tlmenia kyvadla.

Teoretický úvod

Matematické kyvadlo je idealizovaný mechanický oscilátor, ktorý si predstavujeme ako malé, prakticky bodové teliesko s hmotnosťou m, zavesené na niti s dĺžkou ℓ, ktorej hmotnosť považujeme za nulovú (obr. 4.1). Na teliesko pôsobia dve sily – sila $\boldsymbol{F}_\ell$, ktorou ho pridržiava lanko a tiažová sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{g} = m\boldsymbol{g}$. Pohyb matematického kyvadla je opísaný rovnakou pohybovou rovnicou, ako pohyb akéhokoľvek iného kyvadla, teda ako pohyb telesa otáčajúceho sa okolo horizontálnej osi, ktorá neprechádza jeho ťažiskom:



Obr. 4.1

$$\boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\alpha}\,. \tag{4.1}$$

V tomto vzťahu $\boldsymbol{M}$ je súčet momentov síl pôsobiacich na teleso, J jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania a $\boldsymbol{\alpha}$ vektor uhlového zrýchlenia telesa. Vodorovná os otáčania prechádza bodom závesu a vzhľadom na túto os je moment sily $\boldsymbol{F}_\ell$ nulový, lebo táto sila zviera s polohovým vektorom $\boldsymbol{r}$, ktorý má dĺžku ℓ, uhol 180°. Preto sa pri pohybe kyvadla uplatňuje iba moment tiažovej sily $\boldsymbol{M}_\mathrm{mg}$. Vychádzajúc z obrázku, na ktorom je znázornený jednotkový vektor $\boldsymbol{\eta}$, kolmý na rovinu obrázku a smerujúci za obrázok, môžeme napísať nasledujúce vzťahy:

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{mg} = \boldsymbol{r}\times m\,\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\eta}\, mg\,\ell\sin\varphi\,, \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\eta}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\,.$$

Po ich dosadení do (4.1) dostaneme upravenú pohybovú rovnicu:

$$J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\eta} = -\boldsymbol{\eta}\, mg\,\ell\,\sin\varphi\,. \tag{4.2}$$

Kyvadlo predstavuje harmonický oscilátor iba pri malých výchylkách φ z rovnovážnej polohy, keď moment sily, udržiavajúci kyvadlo v pohybe, môžeme považovať za lineárnu funkciu uhlovej výchylky φ. To znamená, že iba vtedy, keď funkciu $\sin\varphi$ môžeme nahradiť uhlovou výchylkou φ. Ak nahradíme $\sin\varphi$ výchylkou φ, rovnicu vynásobíme skalárne jednotkovým vektorom $\boldsymbol{\eta}$ a člen z pravej strany premiestnime na ľavú stranu, pohybová rovnica získa tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mg\,\ell}{J}\varphi = 0\,, \tag{4.3}$$

čo je pohybová rovnica harmonického oscilátora. Jej všeobecným riešením je funkcia

$$\varphi(t) = A\sin(\omega_\mathrm{o} t) + B\cos(\omega_\mathrm{o} t)\,, \tag{4.4}$$

kde v našom prípade

$$\omega_\mathrm{o}^2 = \frac{mg\,\ell}{J} = \frac{mg\,\ell}{m\ell^2} = \frac{g}{\ell}\,.$$

Ak začiatok merania času zvolíme v okamihu maximálnej výchylky φ_o, pohyb kyvadla bude opísaný funkciou

$$\varphi(t) = \varphi_o \cos(\omega_o t) .$$

Pre dobu kmitu pri malých amplitúdach φ_o (nezávisle od ich veľkosti), platí vzťah

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} . \tag{4.5}$$

Ak je amplitúda φ_o väčšia ako niekoľko stupňov, z hľadiska presnosti riešenia sa treba vrátiť k rovnici (4.2). Z jej riešenia vyplýva, že doba kmitu ako funkcia amplitúdy sa dá vyjadriť približným vzťahom (amplitúdu φ_o treba dosadzovať v radiánoch!):

$$T(\varphi_o) \approx T_o\,(1 + \frac{1}{16}\varphi_o^{\,2}) , \tag{4.6}$$

kde T_o je doba kmitu pri malých amplitúdach, teda pri $\varphi_o \to 0$.

Pohybové rovnice (4.2) a (4.3), a teda ani vzťahy (4.5) a (4.6), neberú do úvahy tlmenie pohybu kyvadla prostredím. Pri tlmenom harmonickom pohybe sa amplitúda exponenciálne zmenšuje, takže uhlová výchylka φ ako funkcia času sa vyjadruje vzťahom

$$\varphi(t) = \varphi_o\, e^{-\gamma t} \cos(\omega t) , \tag{4.7}$$

kde

$$\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{T_o^2} - \gamma^2} \tag{4.8}$$

je uhlová frekvencia tlmeného harmonického pohybu, T jeho doba kmitu a γ *koeficient tlmenia*. Vychádzajúc z rovnice (4.7), môžeme získať vzťah:

$$\gamma T = \ln\frac{\varphi(t)}{\varphi(t+T)} , \tag{4.9}$$

ktorý poslúži na výpočet tohto koeficientu. Koeficient tlmenia určíme, ak zistíme veľkosti dvoch maximálnych výchyliek (amplitúd) φ_1 a φ_2 a príslušné časové okamihy t_1 a t_2 :

$$\gamma = \frac{\ln\varphi(t_1) - \ln\varphi(t_2)}{t_2 - t_1} . \tag{4.10}$$

Treba poznamenať, že uvedené vzťahy, vrátane hodnôt ω, T a γ, platia iba pri malých výchylkách (amplitúdach).

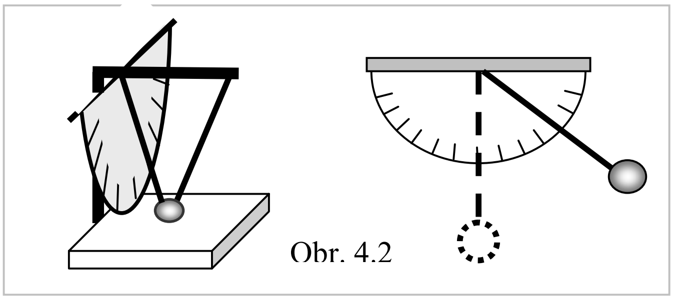
Závislosť (4.6) bola získaná za predpokladu, že ide o netlmený pohyb. Pri tlmenom pohybe, čo je prípad reálneho merania v laboratóriu, túto závislosť vyjadríme v tvare

$$T(\varphi_o) = A + B\varphi_o^{\,2} . \tag{4.11}$$

Po vynesení závislosti $T = f(\varphi_o^2)$ sa pomocou lineárnej regresie dá získať veličina A, t.j. extrapolovaná doba kmitu T_{ex} tlmeného pohybu, zodpovedajúca malým výchylkám..

Koeficient tlmenia γ využijeme na výpočet doby kmitu T_o netlmeného pohybu. Všetky v laboratóriu namerané doby kmitu, aj pri malých amplitúdach, sú dobami kmitu tlmeného harmonického pohybu, ktorý má väčšiu dobu kmitu ako netlmený pohyb ($T > T_o$). Za nameranú dobu kmitu tlmeného pohybu môžeme považovať dva údaje – dobu T_m , ktorú získame meraním pri malých výchylkách, ako aj údaj T_{ex} , ktorý získame extrapoláciou merania závislosti doby kmitu od začiatočnej výchylky (údaje by sa mali zhodovať). Pomocou vzťahu (4.8), do ktorého namiesto T dosadíme jednu z uvedených hodnôt, vypočítame dobu kmitu T_o netlmeného pohybu. Túto môžeme porovnať s dobou T_g , ktorú získame, keď do vzťahu (4.5) za tiažové zrýchlenie dosadíme g = 9,806 m/s^2.

Opis aparatúry a postup pri meraní



Obr. 4.2

Matematické kyvadlo je realizované guľkou zavesenou na dvoch vláknach, čím sa zabezpečí, aby kyvadlo kmitalo iba v jednej rovine, rovnobežnej s rovinou uhlomera. Laboratórna zostava má aj elektronické stopky, spojené so snímačom okamihu prechodu kyvadla najnižšou polohou. Na meranie dĺžky závesu kyvadla je k dispozícii dĺžkové meradlo.

Postup pri meraní:

1. Odmerajte dĺžku kyvadla ℓ .
2. Vypočítajte dobu kmitu T_g pomocou vzťahu (4.5) za predpokladu, že g = 9,806 m/s^2.
3. Odmerajte dobu kmitu T_m pri malej amplitúde (približne 5°). Merajte 10 kmitov niekoľkokrát, vypočítajte aritmetický priemer (tab. 4.1) a porovnajte s T_g .
4. Pri amplitúdach φ_o = 10° , 20°, ... až 50° odmerajte doby kmitu $T(\varphi_o)$ a porovnajte ich s teoretickými hodnotami vyjadrenými vzťahom (4.6). Do vzťahu za T_o dosaďte údaj T_m . Využite tabuľku 4.2.
5. Nakreslite graf závislosti $T\,(\varphi_o^2)$, pomocou lineárnej regresie určte extrapolovanú hodnotu T_{ex} pre $\varphi_o \to 0$. Porovnajte ju s nameranou hodnotou T_m a hodnotou T_g .
6. Zvoľte začiatočnú amplitúdu φ_1 = 30° a po 30 kmitoch zmerajte zmenšenú amplitúdu kmitania φ_2 (Tab. 4.3). Pomocou vzťahu (4.10) vypočítajte koeficient tlmenia γ. Meranie viackrát opakujte a vypočítajte aritmetický priemer.
7. Získaný koeficient tlmenia využite na výpočet doby kmitu T_o netlmeného pohybu podľa vzťahu (4.8) a porovnajte s dobou T_g .

Tab. 4.1

i	1	2	3	4	5	priemer T_m /s
50 T_m /s						

Tab. 4.2

φ_o	$(T/2)$ /s										priemer T /s	T podľa (4.6)
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
10°												

Tab. 4.3

t_1	φ_1	t_2	φ_2	γ

Otázky

1. Ktorá poloha kyvadla – rovnovážna, alebo krajná – je výhodnejšia na presnejšie určenie doby kmitu?
2. Akú závislosť tlmiacej sily predpokladáme v prípade, ktorý vedie na vzťahy (4.7) a (4.8) ?

Meno: Krúžok: Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy 4
Matematické kyvadlo

Stručný opis metódy merania:

Vzťahy ktoré sa používajú pri meraní:

Prístroje a pomôcky:

Meranie

Dĺžka závesu matematického kyvadla: $\ell =$

Doba kmitu podľa vzťahu (4.5) $T_g =$

Tab. 4.1 Doba kmitu pri malej amplitúde

i	1	2	3	4	5	priemer T_m /s
10 T_m /s						

Aritmetický priemer: $T_m =$

Rozdiel v percentách : $p_1 = \dfrac{T_m - T_g}{T_g} \cdot 100 =$

Tab. 4.2 Závislosť doby kmitu od amplitúdy

φ_{os} stupne	φ_{or} rad	φ_{or}^2	$(T / 2)$ /s										T priemer	T (4.6)
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
10°														
20°														
30°														
40°														
50°														

Extrapolovaná hodnota z grafickej závislosti $T\,(\varphi_o^2)$ $\quad T_{ex} =$

Rozdiel v percentách $\quad p_2 = \dfrac{T_{ex} - T_g}{T_g} \cdot 100 =$

Tab. 4.3 Koeficient tlmenia

	t_1	φ_1	t_2	φ_2	γ
1					
2					
3					
4					
5					
			aritmetický priemer:	$\gamma =$	

Koeficient tlmenia: $\gamma =$

Doba kmitu netlmeného pohybu $T_o =$ $\qquad p_3 = \dfrac{T_o - T_g}{T_g} \cdot 100 =$

K protokolu treba pripojiť graf závislosti doby kmitu od začiatočnej amplitúdy, podľa tabuľky 4.2

Slovné zhodnotenie výsledkov merania:

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta: **Podpis učiteľa:**