1. Určenie tiažového zrýchlenia reverzným kyvadlom

Autor pôvodného textu: **Jozef Lasz**

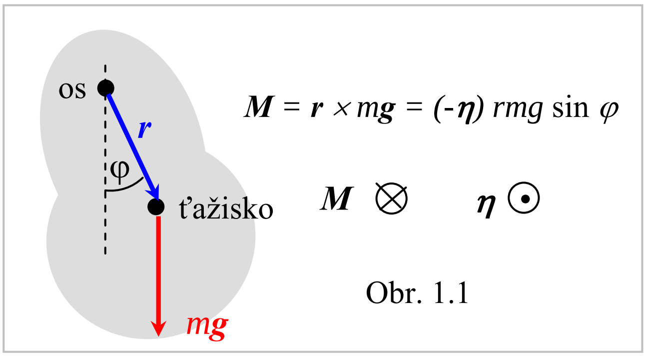
Úloha: V mieste fyzikálneho laboratória experimentálne určiť veľkosť tiažového zrýchlenia

Teoretický úvod

Každé teleso upevnené tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej jeho ťažiskom, sa môže považovať za ***fyzikálne kyvadlo***. Kyvadlo je v ***rovnovážnej polohe***, ak jeho ťažisko je v najnižšej polohe, teda ak leží na zvislej priamke prechádzajúcej osou otáčania. Pri vychýlení kyvadla z rovnovážnej polohy o uhol φ , začne naň pôsobiť moment $\boldsymbol{M}$ tiažovej sily:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{g} = (-\boldsymbol{\eta})\, rmg \sin\varphi \ , \tag{1.1}$$

kde $\boldsymbol{g}$ je vektor tiažového zrýchlenia, $\boldsymbol{\eta}$ jednotkový vektor zvolený tak, že smeruje pred rovinu papiera, ale podľa obrázku vektor reprezentujúci moment sily smeruje za rovinu papiera. Preto vo vzťahu (1.1) vystupuje znamienko mínus. Moment sily vracia kyvadlo do rovnovážnej polohy.



Obr. 1.1

Pohybová rovnica telesa ktoré sa môže otáčať okolo pevnej osi, teda aj fyzikálneho kyvadla, má tvar:

$$\boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\alpha} \ , \tag{1.2}$$

kde J je moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom na danú os, $\boldsymbol{M}$ moment sily vzhľadom na tú istú os a $\boldsymbol{\alpha}$ je vektor uhlového zrýchlenia kyvadla. Uhlové zrýchlenie $\boldsymbol{\alpha}$ sa rovná druhej derivácii vektora $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\,\boldsymbol{\eta}$, predstavujúceho výchylku kyvadla ako vektorovú veličinu:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\eta} \ . \tag{1.3}$$

Po dosadení vzťahov (1.1) a (1.3) do pohybovej rovnice (1.2) dostaneme výsledok

$$J\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{\eta} = -\,rmg\sin\varphi\ \boldsymbol{\eta} \quad . \tag{1.4}$$

Skalárny tvar tejto rovnice, ktorý získame odstránením jednotkového vektora, po menšej úprave je nasledujúci:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{rmg}{J}\sin\varphi = 0 \ . \tag{1.5}$$

Nájsť riešenie tejto diferenciálnej rovnice znamená nájsť závislosť uhlovej súradnice φ od času. Pri kmitavom pohybe kyvadla sa súradnica φ periodicky mení od maximálnej kladnej hodnoty cez nulovú až po minimálnu zápornú. V krajnej polohe sa zastaví a maximálnu uhlovú rýchlosť dosahuje pri prechode rovnovážnou polohou. Závislosť výchylky od času sa podobá funkcii sínus (resp. kosínus). Takéto jednoduché riešenie v tvare funkcie sínus je celkom správne iba v prípade veľmi malých výchyliek. Pri malých výchylkách možno funkciu $\sin\varphi$ s dostatočnou presnosťou nahradiť uhlovou súradnicou φ vyjadrenou v radiánoch. Diferenciálna rovnica pre malé výchylky má potom tvar:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgr}{J}\varphi = 0 \ . \qquad (1.6)$$

Je to tvar zhodný s tvarom diferenciálnej rovnice harmonického oscilátora. Exaktným riešením takejto diferenciálnej rovnice je nasledujúca časová závislosť uhlovej súradnice:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{mgr}{J}}\,t\right) \ , \qquad (1.7)$$

kde φ_0 je amplitúda, čiže maximálna uhlová výchylka kyvadla, meraná v radiánoch. Z tohto riešenia vyplýva, že uhlová frekvencia ω kmitavého pohybu sa vyjadruje vzťahom:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{J}} \ . \qquad (1.8)$$

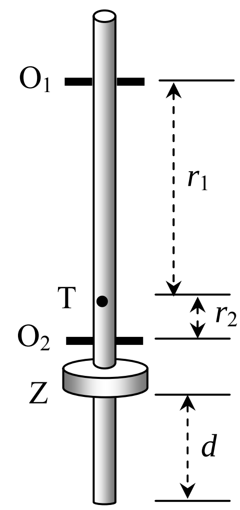
Medzi dobou kmitu T a uhlovou frekvenciou ω platí vzťah $\omega T = 2\pi$, takže doba kmitu fyzikálneho kyvadla je vyjadrená vzťahom:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgr}} \ . \qquad (1.9)$$

V tomto vzťahu vystupuje moment zotrvačnosti kyvadla J, hmotnosť kyvadla m, tiažové zrýchlenie g a vzdialenosť r ťažiska od (vodorovnej) osi otáčania.

Metóda merania

Na meranie tiažového zrýchlenia využijeme tzv. ***reverzné kyvadlo***. Toto kyvadlo pozostáva z kovovej tyče s dvomi rovnobežnými závesmi, predstavujúcimi osi otáčania, a zo závažia Z, ktoré sa na konci tyče môže posúvať (mení sa vzdialenosť d). Osi otáčania sú umiestnené v nerovnakých vzdialenostiach od ťažiska tyče so závažím. Posúvaním závažia sa posúva poloha ťažiska celej sústavy. Ak kyvadlo kmitá okolo osi O_1, pre uhlovú frekvenciu platí vzťah



Obr. 1.2

$$\omega_1^2 = \frac{mgr_1}{J_1} \ , \qquad (1.10)$$

kde podľa Steinerovej vety $J_1 = J_0 + mr_1^2$. Po preklopení kyvadla, t.j. keď do hornej polohy dáme os O_2, pre uhlovú frekvenciu kmitov okolo tejto osi platí vzťah

$$\omega_2^2 = \frac{mgr_2}{J_2} \ , \qquad (1.11),$$

v ktorom $J_2 = J_0 + mr_2^2$. Veličina J_0 je moment zotrvačnosti tyče so závažím vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom celej sústavy. Posúvaním závažia sa dá kyvadlo nastaviť tak, aby kmitalo s rovnakou dobou kmitu okolo obidvoch osí (t.j. aj rovnakými uhlovými frekvenciami). Vtedy platí:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \ . \qquad (1.12)$$

Použitím vzťahov (1.10), (1.11), (1.12) a vylúčením veličiny J_o , ktorej veľkosť nemusíme poznať, dostaneme výsledok

$$\omega^2 = \frac{g}{r_1 + r_2} = \frac{g}{\ell}, \tag{1.13}$$

kde ℓ je vzájomná vzdialenosť osí O_1 a O_2 . Pre dobu kmitu T^* potom vychádza

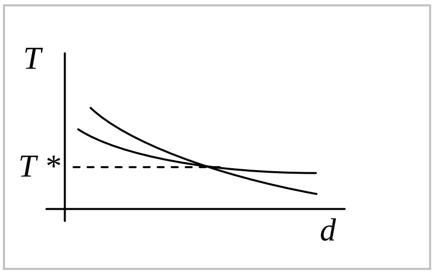
$$T^* = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{1.14}$$

odkiaľ vypočítame tiažové zrýchlenie.

Opis aparatúry a postup práce

a) Prístroje a pomôcky: reverzné kyvadlo, skrutkovač, dĺžkové meradlo, elektronické zariadenie na meranie doby kmitu a počtu kmitov.

b) Postup práce:
Zmeriame závislosť doby kmitu T okolo osí O_1 a O_2 od parametra d , čo je vzdialenosť závažia Z od konca tyče. Vzdialenosť postupne zväčšujeme s krokom 1 cm, začíname od polohy d = 7 cm. Presnosť merania zvýšime tým, že meriame dobu aspoň 10 kmitov v každej polohe závažia. Navyše všetky merania aspoň trikrát opakujeme. Namerané údaje zapisujeme do tabuľky. Dôsledne treba dbať na to, aby začiatočná výchylka nebola väčšia než 5 ° (na zariadení je maximálna výchylka vyznačená) a aby tyč kyvadla kývala vo zvislej rovine. Podľa nameraných hodnôt nakreslíme graf závislosti dôb kmitu T_1 a T_2 od polohy závažia d . Z grafu odčítame čas T^* , pre ktorý platí $T_1 = T_2 = T^*$ a pomocou vzťahu (1.14) vypočítame tiažové zrýchlenie. Porovnáme ho s normálnym tiažovým zrýchlením $g_n = 9{,}806$ m/s^2 .



Hlavička odporúčanej tabuľky

O_1 (horná os)					O_2 (dolná os)				
d_1 / cm	1	2	3	T_1 / s	d_2 / cm				T_2 / s
	10 T_1	10 T_1	10 T_1			10 T_2	10 T_2	10 T_2	

Otázky

1. Aká musí byť dĺžka matematického kyvadla, aby kmitalo s rovnakou periódou, ako konkrétne fyzikálne kyvadlo?
2. V čom spočíva metóda merania tiažového zrýchlenia pomocou reverzného kyvadla?
3. Aký je vzťah medzi vzdialenosťou osí reverzného kyvadla a dĺžkou matematického kyvadla kmitajúceho s rovnakou periódou ako reverzné kyvadlo?

Meno: Krúžok: Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy 1
Meranie tiažového zrýchlenia reverzným kyvadlom

Stručný opis metódy merania:

Vzťah ktorý sa používa pri meraní:

Prístroje a pomôcky:

Meranie:

Vzdialenosť osí kyvadla: ℓ =

Tabuľka 1.1

O$_1$ (horná os)					O$_2$ (dolná os)				
d_1 / cm	1 10 T_1	2 10 T_1	3 10 T_1	T_1 / s	d_2 / cm	10 T_2	10 T_2	10 T_2	T_2 / s

---

K protokolu treba pripojiť graf závislosti doby kmitu od polohy závažia

---

Nájdená hodnota T^{*} **=**

Sem vpíšte výpočet s uvedením hodnôt a rozmerov veličín:

$g\ =$

Percentuálny rozdiel nameranej a normálnej hodnoty tiažového zrýchlenia:

$$\Delta = \frac{g - g_{\mathrm{n}}}{g_{\mathrm{n}}} \cdot 100 =$$

Zhodnotenie výsledkov merania:

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta: **Podpis učiteľa:**