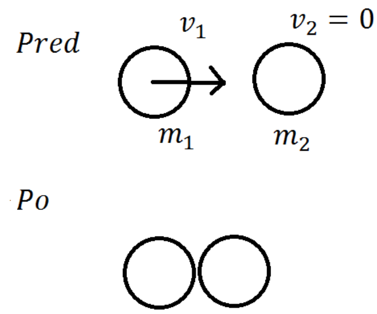
3.1 Aká časť kinetickej energie ΔE_k sa „stratila“ pri centrálnej zrážke dvoch gúľ s hmotnosťami m_1 a m_2, ktorých rýchlosti pred zrážkou boli v_1 a v_2 a po zrážke boli rovnaké?

$$m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) v$$



$$v = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)}$$

$$E_{K1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2$$

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R}$$

$$J_1 = \frac{2}{5} m_1 R^2 \ (guľa)$$

$$E_{K1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5} m_1 R^2 \frac{{v_1}^2}{R^2} = \frac{7}{10} m_1 v_1^2$$

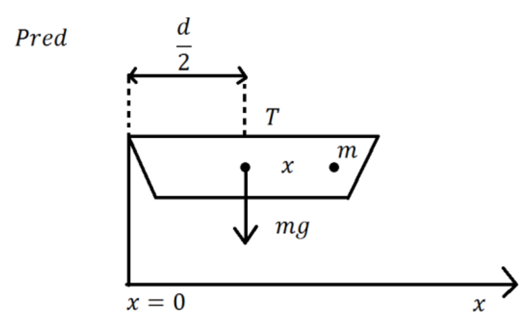
$$E_{K2} = \frac{7}{10}(m_1 + m_2) v^2 = \frac{7}{10}(m_1 + m_2)\frac{{m_1}^2 {v_1}^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{7}{10}\frac{{m_1}^2 {v_1}^2}{(m_1 + m_2)}$$

$$\Delta E_K = E_{K1} - E_{K2} = \frac{7}{10} m_1 v_1^2 - \frac{7}{10}\frac{{m_1}^2 {v_1}^2}{(m_1 + m_2)} = \frac{7}{10} m_1 v_1^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) = \frac{7}{10} m_1 v_1^2 \left(\frac{m_1 + m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) =$$

$$\frac{\Delta E_K}{E_{K1}} = \frac{\frac{7}{10}\frac{m_1 v_1^2 m_2}{m_1 + m_2}}{\frac{7}{10} m_1 v_1^2} = \frac{m_1 m_2 v_1^2}{(m_1 + m_2) m_1 v_1^2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

3.4 Loďka s dĺžkou d a hmotnosťou m_0 stojí na pokojnej hladine vody. Človek s hmotnosťou m prejde z jedného jej konca na druhý. O akú vzdialenosť Δx sa pritom loďka posunie? Odpor prostredia neuvažujte.

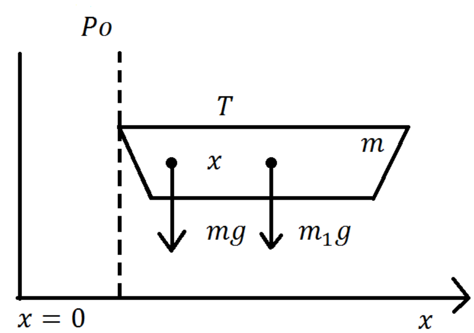
$$x^* = \sum m_i \vec{r_i}$$



$$x^* = \frac{m_0 \frac{d}{2} + md}{m_0 + m}$$

$$x^* = \frac{m\Delta x + m_0\left(\frac{d}{2} + m\Delta x\right)}{m_0 + m}$$

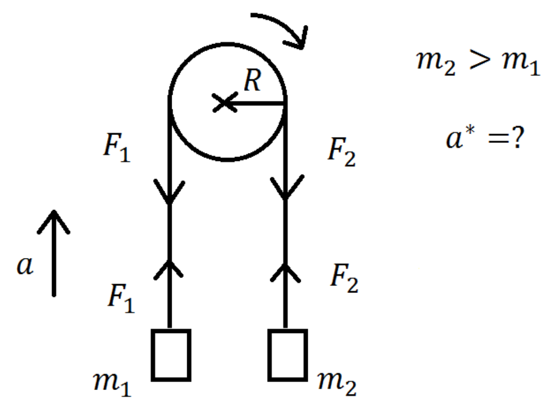
$$x^* = x^*$$



$$\frac{m_0 \frac{d}{2} + md}{m_0 + m} = \frac{m\Delta x + m_0\left(\frac{d}{2} + m\Delta x\right)}{m_0 + m}$$

$$\Delta x = \frac{md}{m_0 + m}$$

3.12 Cez kladku upevnenú na strope miestnosti je prevesené lanko, na koncoch ktorého sú zavesené závažia o hmotnostiach ***m₁***, ***m₂***. Vypočítajte zrýchlenie ťažiska sústavy telies za predpokladu, že hmotnosti lanka a kladky sú zanedbateľné a tak isto aj trenie.



$J\varepsilon = F_2R - F_1R$

$hmotnost\ kladky \to 0 \ \Rightarrow J = 0$

$0 = F_2R - F_1R$

$F_2 = F_1$

$m_1a = -m_1g + F_1 \ \Rightarrow \ F_1 = m_1a + m_1g$

$m_2a = m_2g + F_2 \ \Rightarrow \ F_2 = m_2g - m_2a$

$F_1 = F_2$

$m_1a + m_1g = m_2g - m_2a$

$(m_1 + m_2)a = m_2 - m_1g$

$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$

$F_1 = m_2g - m_2\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$

$F_1 = m_2g - m_2\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$

$F_1 = \frac{m_2{}^2g + m_1m_2g - m_2{}^2g + m_2m_1g}{m_1 + m_2}$

$F_1 = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2} = F_2$

Súčet vonkajších síl:

$M\vec{a}^*$

$(m_1 + m_2)a^* = m_1g + m_2g - 2\frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2}$

$a^* = \frac{(m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} g$

X.X Vypočítajte akým **a** sa pohybujú závažia s **m1** > **m2**, zavesené na kladke hmotnosti **M** a upevnené na vodorovnej osi. Polomer kladky je **R** a moment síl trenia kladky je **M$_t$**

$$J = \frac{1}{2}MR^2 (valec)$$

$$J\varepsilon = J\frac{a}{R} = F_1R - F_2R - M_G$$

$$m_1a = m_1g - F_1$$

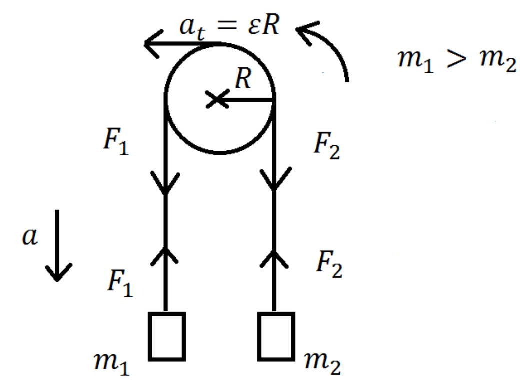
$$m_2a = F_2 - m_2g$$

$$m_1aR + m_2aR = m_1gR - F_1R + F_2R - m_2gR$$

$$F_1R - F_2R = m_1gR - m_2gR - m_1aR - m_2aR$$

$$\frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} = m_1gR - m_2gR - m_1aR - m_2aR - Mt$$

$$\frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} = \frac{m_1gR - m_2gR - Mt}{\frac{1}{2}MR + m_1aR + m_2aR}$$



3.16 Na hladkej horizontálnej rovine sa nachádza teleso o hmotnosti ***M***, ktoré sa môže pohybovať po vodorovnej rovine bez trenia. Na ňom je položené iné teleso o hmotnosti ***m*** (obrázok). Tomuto druhému telesu sme udelili v horizontálnej rovine rýchlosť ***v$_1$***. Do akej výšky ***H*** nad začiatočnú polohu vyletí toto teleso po oddelení sa od telesa ***M***. Trenie sa v celej úlohe neuvažuje.

$$m_1v_1 = (M+m)v$$

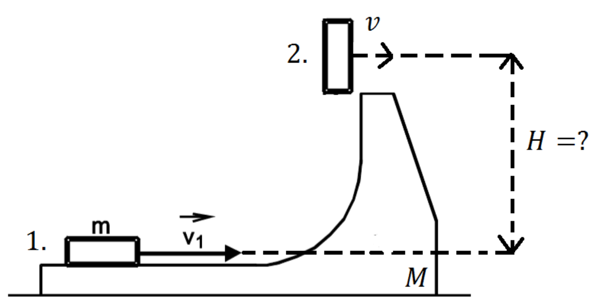
$$v = \frac{m_1v_1}{(M+m)}$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1 = \frac{1}{2}(M+m)v^2 + mgH$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1 = \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m_1v_1}{M+m}\right)^2 + mgH$$

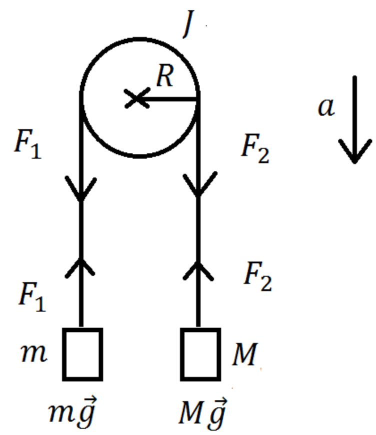
$$H = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g}\left(1 - \frac{m_1}{m_1+M}\right)$$

$$H = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g}\frac{M}{m_1+M}$$



ZZH

4.2 Akými silami je namáhané lano, prevesené cez kladku s polomerom ***R*** a momentom zotrvačnosti ***J*** (vzhľadom na jej os otáčania), na konci ktorého sú upevnené bremená s hmotnosťami ***m*** a ***M***, ak sa bremená samovoľne pohybujú?



$\varepsilon = \frac{a}{R}$

$J\varepsilon = F_2R - F_1R$

$ma = F_1 - mg$

$Ma = Mg - F_2$

$J\frac{a}{R} = F_2R - F_1R$

$a = \frac{F_2R^2 - F_1R^2}{J}$

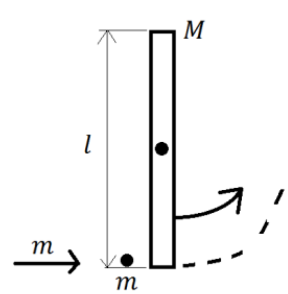
$m\frac{F_2R^2 - F_1R^2}{J} = F_1 - mg$

$M\frac{F_2R^2 - F_1R^2}{J} = Mg - F_2$

$F_1 = gm\frac{2M + \frac{J}{R^2}}{\frac{J}{R^2} + m + M}$

$F_2 = gM\frac{2m + \frac{J}{R^2}}{\frac{J}{R^2} + M + m}$

4.4 Aká je uhlová rýchlosť ***ω*** homogénnej tenkej tyče, ktorá sa môže otáčať okolo osi kolmej na tyč prechádzajúcej jej ťažiskom, ak v nej uviazne strela s hmotnosťou ***m*** vo vzdialenosti ***l/2*** od ťažiska? Strela dopadla rýchlosťou v kolmou na tyč aj os otáčania tyče. Hmotnosť tyče je ***M*** a jej dĺžka ***2l***. Os tyče je kolmá na zem.



$J_1\omega = (J + J_1)\omega'$

Moment zotrvačnosti bodu

$J_1 = m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \quad \sum m_i R_{i\perp}^2 \quad \frac{l}{2} \equiv R_{i\perp}$

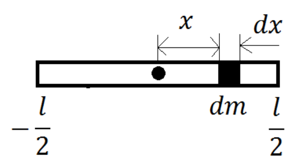
$a = \frac{v}{\frac{l}{2}} = \frac{2v}{l}$

Výpočet – môže byť aj samostatný príklad

$J = \int x^2 dm$

$dm = \lambda dx = \frac{M}{l} dx$

$J = \frac{M}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{M}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{M}{3l}\left[\frac{l^3}{3} - \left(-\frac{l^3}{8}\right)\right] = \frac{1}{2}Ml^2$



$m\left(\frac{l}{2}\right)^2 \frac{2v}{l} = \left(\frac{1}{12}Ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right)\omega'$

$m\frac{l^2}{4}\frac{2v}{l} = \left(\frac{1}{12}Ml^2 + \frac{ml^2}{4}\right)\omega'$

$\omega' = \frac{\frac{1}{2}mlv}{\frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}ml^2} = \frac{\frac{1}{2}mlv}{\frac{Ml^2+3ml^2}{12}} = \frac{6mlv}{Ml^2+3ml^2} = \frac{6mv}{Ml+3ml}$

$\omega' = \frac{6mv}{Ml+3ml}$

4.20 Nájdite polohu ťažiska homogénneho telesa tvaru tenkej polkruhovej dosky s polomerom ***R***.

$dS = dy2x$

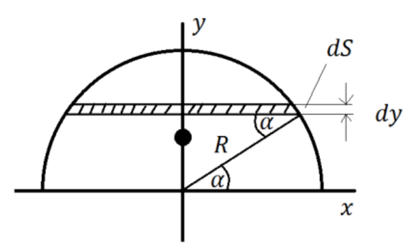
$y = R\sin\alpha$

$x = R\cos\alpha$

$y^* = \frac{1}{M}\int y\, dm$

$\vec{r}^* = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i \rightarrow \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \qquad \vec{r} = \vec{x}_i + \vec{y}_i + \vec{z}_i$

$-dm\ \sigma\ dS = \frac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2} 2x\, dy$



$y^* = \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin\alpha \frac{2M}{\pi R^2} 2R\cos\alpha\, R\cos\alpha\, d\alpha = \frac{4R}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\alpha \sin\alpha\, d\alpha$

$dy = R\cos\alpha\, d\alpha$

$\cos\alpha = u$

$-\sin\alpha\, d\alpha = du \qquad u < 1{,}0 > nové\ integračné\ hranice$

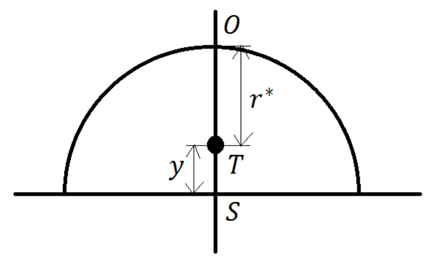
$y^* = \frac{4R}{\pi}\int_1^0 u^2 - du = -\frac{4R}{\pi}\left[\frac{u^3}{3}\right]_1^0 = -\frac{4R}{\pi}\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4R}{3\pi}$

4.26 Teleso tvaru tenkého tuhého drôtu ohnutého do tvaru polkružnice s polomerom ***R*** je zavesené na klinci zatlčenom v stene tak, že stred polkružnice je v kľudovom stave zvislo pod klincom. Ak teleso vychýlime z rovnovážnej polohy, kýva ako fyzikálne kyvadlo. Aká je doba kmitu tohto kyvadla?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mgr^*}}$$

$J - moment\ zotrvačnosti\ vzhľadom\ na\ os\ O$

Steinervova veta: $J = J^* + Mr_\perp^2$



$$J_S = J^* + My^{*^2}$$

$$J_S = \sum m_i R_{i\perp}^2 = MR^2$$

$$J^* = J_S - My^{*^2} = MR^2 - My^{*^2}$$

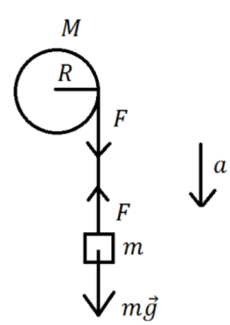
$$J_O = J^* + Mr^{*^2} = J^* + M(R - y^*)^2$$

$$J_O = MR^2 - My^{*^2} + MR^2 - 2MRy^* + My^{*^2} = 2MR^2 - 2MRy^* = 2MR(R - y^*) = 2MRr^*$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_O}{Mgr^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{2MRr^*}{Mgr^*}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

4.6 Na homogénnom plnom valci, ktorý sa môže otáčať okolo svojej osi symetrie, je namotané tenké lanko. Os má vodorovnú polohu. Na jednom konci lanka visí bremeno hmotnosti ***m***, druhý je upevnený na valci. Akou silou je namáhané lanko, ak necháme bremeno samovoľne sa pohybovať? Valec má polomer ***R*** a hmotnosť ***M***. Trecie sily aj hmotnosť lanka zanedbajte.

$$J = \frac{1}{2}MR^2 (valec)$$



$$J\varepsilon = FR$$

$$\varepsilon = \frac{a}{R}$$

$$ma = mg - F$$

$$\frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} = FR$$

$$\frac{1}{2}MRa = FR$$

$$\frac{1}{2}Ma = F \qquad a = \frac{2F}{M}$$

$$ma = mg - F$$

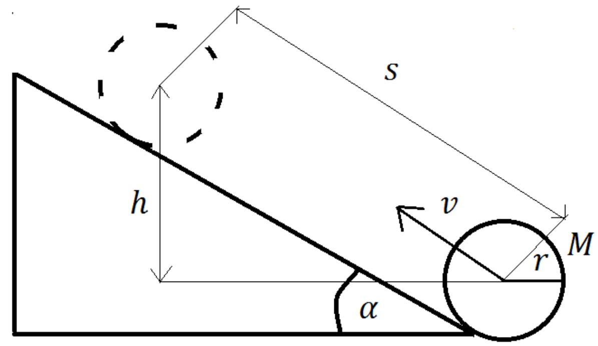
$$m\frac{2F}{M} = mg - F$$

$$m\frac{2F}{M} + F = mg$$

$$2Fm + FM = Mmg$$

$$F = \frac{Mmg}{2m+M}$$

4.17 Valec a guľa tej istej hmotnosti a polomeru mali v spodnej časti naklonenej roviny s uhlom sklonu ***α*** rovnakú začiatočnú rýchlosť ***v***. Ktoré z telies sa po naklonenej rovine smerom nahor dokotúľa ďalej? O aký dráhový úsek?



$\frac{h}{s} = \sin\alpha$

$h = s\sin\alpha$

$1 = valec$

$2 = guľa$

$E_{k_1} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_1^*\omega^2$

$J_1^* = \frac{1}{2}MR^2$

$\omega = \frac{v}{R}$

$E_{k_1} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4}mv^2$

$E_{k_2} = \frac{7}{10}mv^2 \quad pozri\ prednásku$

$\frac{3}{4}mv^2 > \frac{7}{10}mv^2$

ZZE

$Mgh_1 = \frac{3}{4}mv^2$

$Mgs_1\sin\alpha = \frac{3}{4}mv^2$

$s_1 = \frac{3mv^2}{4g\sin\alpha}$

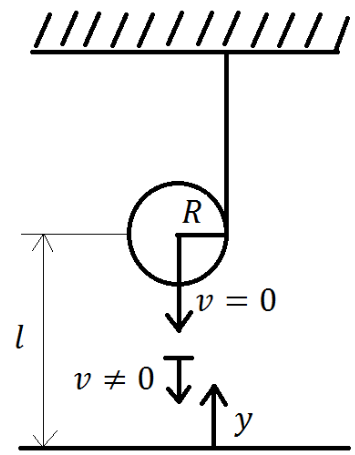
$Mgh_2 = \frac{7}{10}mv^2$

$Mgs_2\sin\alpha = \frac{7}{10}mv^2$

$s_2 = \frac{7v^2}{10g\sin\alpha}$

$s_1 - s_2 = \frac{v^2}{g\sin\alpha}\left(\frac{3}{4} - \frac{7}{10}\right) = \frac{v^2}{20g\sin\alpha}$

4.18 Koleso upevnené závesným lankom na hriadeli s polomerom ***R*** sa môže (bez trenia) pohybovať vo zvislej rovine do hĺbky ***l***. Za aký čas sa vráti do hornej polohy? (Moment zotrvačnosti kolesa na hriadeli vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom je ***J***, hmotnosť kolesa je ***m***.)



$$mgl = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 + mgy$$

$$0 = \frac{1}{2}m2v\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}J\frac{1}{R^2}2v\frac{dv}{dt} + mg\frac{dy}{dt}$$

$$0 = ma\frac{J}{R^2}a - mg$$

$$mg = a\left(m + \frac{J}{R^2}\right) \qquad a = \frac{mgR^2}{mR^2+J}$$

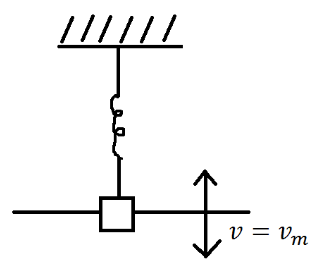
$$l = \frac{1}{2}at_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2l(mR^2+J)}{mgR^2}}$$

$$t = 2t_1 = \sqrt{\frac{8l(mR^2+J)}{mgR^2}}$$

5.13 Silová konštanta pružiny je ***k***. Aká je hmotnosť zaveseného telesa, ktorá kmitá s amplitúdou ***A***?

(?)prechádza rýchlosťou v_m



$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv_m^2 \qquad E_p = 0$$

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2 \qquad E_k = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$m = \frac{kA^2}{v_m^2}$$

5.14 Keď zväčšíme hmotnosť (??) telesa na pružine o hmotnosť **Δm**, doba kmitu sa zdvojnásobí. Aká bola pôvodná hmotnosť telesa?

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}}$$

$$2T = 2\pi\sqrt{\frac{m_0+\Delta m}{k}}$$

$$2T = 4\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}}$$

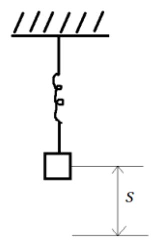
$$2T = 2T$$

$$2\pi\sqrt{\frac{m_0+\Delta m}{k}} = 4\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}} \quad /:2\pi \qquad /(\,)^2$$

$$\frac{m_0+\Delta m}{k} = 4\frac{m_0}{k} \quad /.k \quad /-m_0$$

$$m_0 = \frac{\Delta m}{3}$$

5.17 Pri pomalom natiahnutí pružiny o ***s*** vykonáme prácu ***W***. Akú periódu budú mať kmity, ak na pružinu zavesíme ***m***?



$$W = E = \frac{1}{2}ks^2$$

$$k = \frac{2W}{s^2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{ms^2}{2W}}$$

5.18 Teleso zavesené na pružine vykoná za minútu ***N*** kmitov. Aké predĺženie pružiny pôsobí teleso v rovnovážnej polohe?

$$f = \frac{1}{T} = \frac{N}{60}$$

$$F = G$$

$$k\Delta l = mg$$

$$\Delta l = \frac{mg}{k}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{60}{N} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$k = 4\pi^2\left(\frac{60}{N}\right)^2 m$$

$$\Delta l = \frac{mg}{4\pi^2\left(\frac{60}{N}\right)^2 m} = \frac{g}{4\pi^2}\left(\frac{N}{60}\right)^2$$

5.19 Hmotný bod s hmotnosťou ***m*** koná harmonický pohyb po úsečke podľa vzťahu $\boldsymbol{x = sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)}$

a) Nájdite max. silu, ktorá pôsobí na bod
b) Celkovú energiu kmit. Bodu
c) Max. rýchlosť

$\omega^2 = \frac{k}{m}$ $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$F_{max} = x_{max} \equiv A$

$max. sila = sila\ ktorá\ pôsobí\ pri\ max. výchylke$

$F_{max} = kA$

$E = \frac{1}{2}kA^2$

$k = m\omega^2$

$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$

$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2$ $\qquad v\ rovnovážnej\ polohe$

$\frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$

$v_{max} = \omega A$

5.21 Teleso s hmotnosťou ***m*** je pripevnené na pružinu. Silová konštanta: ***k*** . Teleso vykoná harmonický pohyb amplitúdou ***A***. Vypočítajte:

1) Max. hodnotu veľkosti rýchlosti a veľkosti zrýchlenia
2) Čas, za ktorý prejde z rovnovážnej polohy do polohy veľkosti ***x***

$x = A\sin\omega t \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$x = A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$

$v = \frac{dx}{dt} = A\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$

$v = v_{max}\ ak \cos(\quad) = 1$

$v_{max} = A\sqrt{\frac{k}{m}}$

$a = \frac{dv}{dt} = A\sqrt{\frac{k}{m}}\left(-\sqrt{\frac{k}{m}}\right)sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$

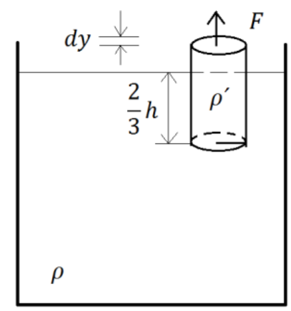
$\sin(\quad) = 1$

$a = a_{max} = A\frac{k}{m}$ $\qquad A\omega^2$

$x = A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \qquad arcsin\frac{x}{A} = \sqrt{\frac{k}{m}}t$

$t = \sqrt{\frac{m}{k}}\ arcsin\frac{x}{A}$

6.5 Drevený valec je ponorený vo vode do 2/3 svojej výšky. Akú prácu W treba vykonať na vytiahnutie valca z vody? Polomer podstavy valca je ***r*** výška ***h***, hustota vody ***ρ***.



$$F = mg - F_{valec}$$

$$F_{valec} = V\rho g = \pi r^2 y\rho g$$

$$m = \rho' V$$

$$\rho' = \frac{2}{3}\rho$$

$$m = \pi r^2 h \frac{2}{3}\rho$$

$$F = \frac{2}{3}\pi r^2 h\rho g - \pi r^2 y\rho g$$

$$W = \int_0^{\frac{2}{3}h} F\,dy = \int_0^{\frac{2}{3}h}\left[\frac{2}{3}\pi r^2 h\rho g - \pi r^2 y\rho g\right] dy =$$

$$= \frac{2}{3}\pi r^2 h\rho g \int_0^{\frac{2}{3}h} dy - \pi r^2\rho g\int_0^{\frac{2}{3}h} y dy =$$

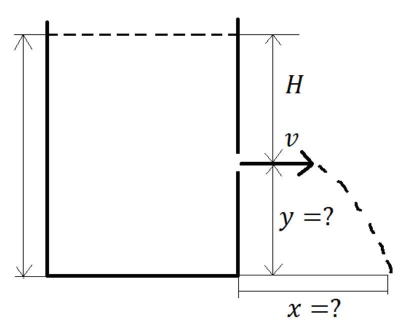
$$= \frac{2}{3}\pi r^2 h\rho g[y]_0^{\frac{2}{3}h} - \pi r^2\rho g\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}h} =$$

$$= \frac{4}{9}\pi r^2 h^2\rho g - \pi r^2\rho g\frac{1}{2}\frac{4h^2}{9} = \frac{4}{9}\pi r^2 h^2\rho g\left(\frac{4}{9} - \frac{4}{18}\right)$$

$$W = \frac{2}{9}\pi r^2 h^2\rho g$$

6.13 Voda v nádobe má hladinu vo výške ***h***. V akej výške ***y₁*** nad dnom treba urobiť otvor v stene nádoby, aby voda striekala čo najďalej na vodorovnú rovinu, na ktorej je nádoba položená?

Výtoková rýchlosť (Toricelli)



$$v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2g(h-y)}$$

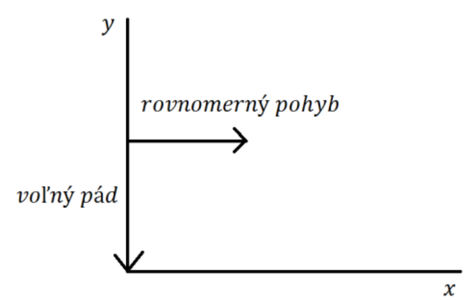
$$y = \frac{1}{2}gt^2 \qquad t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \qquad \textit{doba dopadu}$$

$$x = vt = \sqrt{2g(h-y)}\sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$x = \sqrt{4(h-y)y}$$

$$x \to x_{max}$$

$$(h-y)y \to max$$



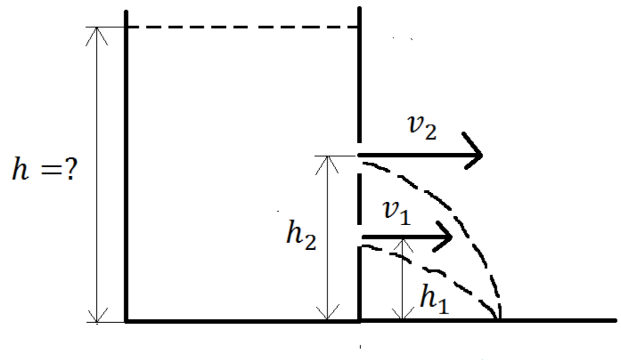
$$\frac{d}{dy}(hy - y^2) = h - 2y = 0$$

$$y = \frac{h}{2}$$

6.14 Nádoba valcovitého tvaru má v stene dva otvory umiestnené nad sebou vo výškach ***h₁*** a ***h₂*** od dna. V akej výške má byť hladina kvapaliny nad dnom nádoby, aby kvapalina striekala z obidvoch otvorov do rovnakej vzdialenosti na vodorovnú rovinu, na ktorej je nádoba položená?

$v_2 = \sqrt{2g(h - h_2)}$

$v_1 = \sqrt{2g(h - h_1)}$



$h_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$

$h_2 = \frac{1}{2} g t_2^2 \qquad t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$

$x = v_1 t_1 = v_2 t_2$

$\sqrt{2g(h - h_1)\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{2g(h - h_2)\frac{2h_2}{g}}$

$(h - h_1)h_1 = (h - h_2)h_2$

$(hh_1 - h_1^2) = (hh_2 - h_2^2)$

$h = h_1 + h_2$

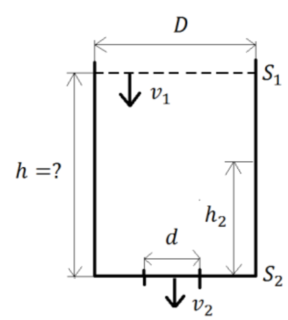
6.17 Na dne valcovitej nádoby je kruhový otvor s priemerom ***d***. Priemer nádoby je ***D***. Nájdite závislosť rýchlosti ***v***, ktorou klesá hladina vody v nádobe, od výšky ***h*** hladiny nad dnom. Vypočítajte číselnú hodnotu tejto rýchlosti pre ***h***. Vodu považujte za ideálnu kvapalinu.

$S_1 v_1 = S_2 v_2$

$\pi \frac{D^2}{4} v_1 = \pi \frac{d^2}{4} v_2$

$v_2 = v_1 \frac{D^2}{d^2}$

$v_1 = v_1(h) =?$



$Bernoulliho\ rovnica$: $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h + b = b + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h + b = b + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \frac{D^4}{d^4} \,/\!-b \;/.\frac{2}{\rho}$

$v_1^2 + 2gh = v_1^2 \frac{D^4}{d^4}$

$v_1^2 - v_1^2 \frac{D^4}{d^4} = -2gh$

$v_1^2 (1 - \frac{D^4}{d^4}) = -2gh$

$v_1^2 = \frac{-2gh}{\frac{d^4 - D^4}{d^4}}$

$v_1^2 = \frac{d^4 2gh}{D^4 - d^4}$

$v_1 = d^2 \sqrt{\frac{2gh}{D^4 - d^4}}$