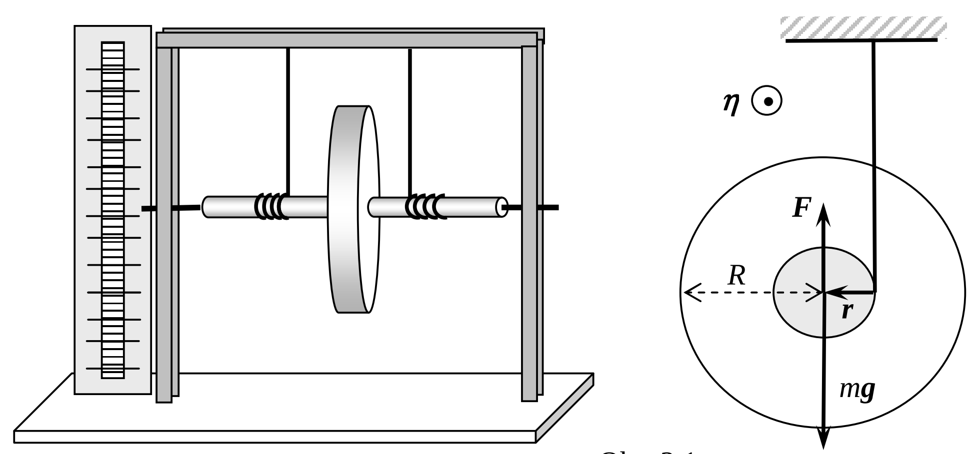
2. Maxwellovo kyvadlo

Autor pôvodného textu: **Jozef Lasz**

Úloha: Z nameraných charakteristických hodnôt Maxwellovho kyvadla určiť moment zotrvačnosti zotrvačníka tohto kyvadla a priemernú veľkosť sily pôsobiacej proti jeho pohybu

Teoretický úvod

Maxwellovo kyvadlo je kotúč na hriadeli (zotrvačník) s pomerne veľkým momentom zotrvačnosti, zavesený na dvoch vláknach (obrázok). Vláknami, ktorých konce sú pevne spojené s hriadeľom, je zotrvačník zavesený na rám stojana, pričom os zotrvačníka sa môže pohybovať vo zvislom vedení rámu. Keď sa v hornej polohe zotrvačník uvolní, začne klesať, vlákna sa začnú z hriadeľa odvíjať a zotrvačník klesajúc sa začne roztáčať. Pri prechode dolnou úvraťou, keď sa nite celkom odvinuli, zotrvačník sa zotrvačnosťou otáča ďalej tým istým smerom, ale nite sa začnú na hriadeľ navíjať, takže zotrvačník začne stúpať.



Obr. 2.1

Pohyb zotrvačníka posúdime z energetického hľadiska. Východiskovej hornej polohe priradíme výškovú súradnicu y_o, takže polohová energia zotrvačníka je vtedy mgy_o, kinetická energia je nulová. Predpokladajme, že v istom časovom okamihu je zotrvačník vo výške $y < y_o$, takže jeho potenciálna energia je už menšia. Časť potenciálnej energie sa premenila na kinetickú energiu (tá má dve zložky – translačnú a rotačnú), časť sa spotrebovala na prekonávanie odporu prostredia. Zo zákona zachovania energie tak vyplýva vzťah:

$$mgy_o - mgy = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_o\,\omega^2 + F(y_o - y) \qquad (2.1)$$

kde m je hmotnosť zotrvačníka spolu s hriadeľom, v translačná rýchlosť ťažiska zotrvačníka a ω uhlová rýchlosť otáčania zotrvačníka. Veličina J_o je moment zotrvačnosti zotrvačníka s hriadeľom, vzhľadom na ich os súmernosti, ktorá prechádza ťažiskom a je rovnobežná s osou otáčania. Veličina F predstavuje celkovú odporovú silu pôsobiacu proti pohybu zotrvačníka.

Keď si uvedomíme, že medzi uhlovou rýchlosťou ω a rýchlosťou v platí vzťah $\omega = v/r$, lebo vlákna sa odvíjajú z hriadeľa ktorý má polomer r, môžeme rovnicu (2.1) upraviť:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_o\,\omega^2 = (mg - F)(y_o - y) \quad \Rightarrow \quad \left(m + \frac{J_o}{r^2}\right)v^2 = 2(mg - F)(y_o - y)\,.$$

V tejto rovnici od času závisia iba veličiny v a y. Jej deriváciou podľa času dostaneme:

$$\left(m + \frac{J_o}{r^2}\right) 2v\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2(mg - F)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(-1)\,, \tag{2.2}$$

pričom $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v$ je rýchlosť ťažiska zotrvačníka a $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a_k$ jeho zrýchlenie. Pri klesaní zotrvačníka sa súradnica y s časom zmenšuje, teda $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} < 0$, čo vo vzťahu (2.2) v súčine s číslom (-1) poskytne kladnú hodnotu. Pre veľkosť (absolútnu hodnotu) zrýchlenia a_k pri klesaní zotrvačníka, tak ďalšou úpravou dostaneme vzťah:

$$a_{\boldsymbol{k}} = \frac{r^2(mg - F)}{J_o + mr^2}\,. \tag{2.3}$$

Odtiaľ vyplýva, že za predpokladu nemennosti sily F, je zrýchlenie konštantné. To znamená, že za časový interval Δt_k zotrvačník prejde dráhu s_k (mal nulovú začiatočnú rýchlosť)

$$s_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{2}a_{\boldsymbol{k}}\,(\Delta t_k)^2 = \frac{r^2(mg - F)}{2(J_o + mr^2)}(\Delta t_k)^2\,.$$

Z tejto rovnice vypočítame moment zotrvačnosti zotrvačníka:

$$J_o = \frac{r^2(mg - F)}{2}\frac{(\Delta t_k)^2}{s_{\boldsymbol{k}}} - mr^2\,. \tag{2.4a}$$

Úvahami o energetickej bilancii pri stúpaní zotrvačníka by sme pre moment zotrvačnosti dostali analogický vzťah

$$J_o = \frac{r^2(mg + F)}{2}\frac{(\Delta t_v)^2}{s_v} - mr^2\,, \tag{2.4b}$$

v ktorom Δt_v predstavuje časový interval potrebný na výstup do hornej úvrate po dráhe s dĺžkou s_v. Keď poznáme veľkosti veličín m a r, a zmeriame veličiny s_k, Δt_k, s_v a Δt_v, v rovniciach (2.4a) a (2.4b) zostanú iba dve neznáme – moment zotrvačnosti J_o a sila F predstavujúca odpor prostredia spolu s trením. Z rovníc ich teda možno vypočítať, ale ako je uvedené ďalej, je aj iná možnosť ako určiť tieto dve veličiny.

Poznámka Rovnaký výsledok dostaneme, keď riešime pohybovú rovnicu $\boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\alpha}$, opisujúcu rotačný pohyb telesa okolo osi. V tejto rovnici J je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania (povrchová priamka hriadeľa, v ktorej sa vlákno od neho odpája), $\boldsymbol{M}$ moment vonkajších síl pôsobiacich na teleso vzhľadom na tú istú os a $\boldsymbol{\alpha}$ uhlové zrýchlenie otáčania telesa. Vonkajšími silami pôsobiacimi na zotrvačník sú - jeho tiaž $m\boldsymbol{g}$, reakcie na sily ktorými sú napínané závesné vlákna a odpor prostredia spolu s trením. Moment tiažovej sily vzhľadom na os otáčania je $\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{g}$, má smer jednotkového vektora $\boldsymbol{\eta}$ (na obr. 2.1 smeruje k čitateľovi), takže sa dá vyjadriť v tvare $mg\, r\, \boldsymbol{\eta}$, kde r je aj polomer hriadeľa. Moment síl reakcie na napínanie vlákien je však vzhľadom na os otáčania nulový, takže nevstupuje do pohybovej rovnice. Sily odporu prostredia, ktorých výslednica $\boldsymbol{F}$ pôsobí v ťažisku zotrvačníka, majú nenulový moment $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ (veľkosť momentu je Fr), takže ho treba zahrnúť do pohybovej rovnice. Zatiaľ čo moment tiažovej sily má smer jednotkového vektora $\boldsymbol{\eta}$, pri pohybe zotrvačníka nadol smeruje moment sily $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ opačným smerom, takže pohybová rovnica má tvar.

$$J\boldsymbol{\alpha} = mg\, r\, \boldsymbol{\eta} - Fr\, \boldsymbol{\eta}\,.$$

Vektor uhlovej rýchlosti pri klesaní zotrvačníka má smer vektora $\boldsymbol{\eta}$. Veľkosť uhlovej rýchlosti sa zväčšuje, takže aj vektor uhlového zrýchlenia $\boldsymbol{\alpha}$, pri klesaní zotrvačníka, má smer vektora $\boldsymbol{\eta}$. Jeho veľkosť sa rovná podielu zrýchlenia a_k ťažiska a polomeru r hriadeľa, takže platí vzťah $\boldsymbol{\alpha} = (a_k / r)\, \boldsymbol{\eta}$. Moment zotrvačnosti J vzhľadom na os otáčania sa podľa Steinerovej vety rovná súčtu $J_o + mr^2$, kde J_o je moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom, teda os súmernosti zotrvačníka. Po dosadení uvedených vzťahov do pohybovej rovnice dostaneme:

$$(J_o + mr^2)\frac{a_k}{r}\boldsymbol{\eta} = (mgr - Fr)\boldsymbol{\eta} \qquad \Rightarrow \qquad (J_o + mr^2)\, a_k = mgr^2 - Fr^2 \quad ,$$

odkiaľ pre veľkosť zrýchlenia získame rovnicu zhodnú s rovnicou (2.3).

Metóda merania

Ak Maxwellovo kyvadlo spustíme z výšky y_o, začne klesať, až dosiahne najnižšiu polohu y_z a znovu začne stúpať. V dôsledku strát energie nevystúpi do pôvodnej výšky y_o, ale iba do výšky y_1. Potom znovu začne klesať a proces sa viackrát opakuje, pričom postupne dosahuje maximálne výšky y_2, y_3, atď. V prvom priblížení môžeme predpokladať, že energetické straty sú úmerné celkovej dĺžke dráhy, ktorú zotrvačník prešiel. To znamená, že ak sa zotrvačník po prvom cykle zastaví vo výške y_1, potom platí

$$mg(y_o - y_1) = F\,(s_o + s_1) \tag{2.5}$$

kde $s_o = y_o - y_z$, $s_1 = y_1 - y_z$ a všeobecne $s_i = y_i - y_z$.

Moment zotrvačnosti J_o a silu F môžeme určiť zo vzťahov (2.4a) a (2.5) pomocou nameraných hodnôt prislúchajúcich **jedinému** cyklu „klesanie – výstup“. Presnosť výsledku však môžeme zvýšiť zmeraním **viacerých cyklov**, napríklad desiatich. Pre každý pokles a výstup môžeme napísať rovnicu

$$mg(y_i - y_{i+1}) = F\,(s_i + s_{i+1}),$$

teda spolu 10 rovníc. Ich sčítaním a úpravou dostaneme

$$F = \frac{mg(y_o - y_{10})}{y_o + y_{10} + 2\sum_{i=1}^{9} y_i - 20\, y_z}\quad . \tag{2.6}$$

Z tohto vzťahu vypočítame veľkosť sily F, ktorá predstavuje odpor prostredia. Potom ju využijeme pri určení veľkosti momentu zotrvačnosti zotrvačníka. Na to môžeme použiť vzťah (2.4a), alebo (2.4b).

Pri meraní viacerých cyklov, vychádzajúc zo vzťahov (2.4a) a (2.4b), pre moment zotrvačnosti dostaneme:
pri klesaní zotrvačníka

$$J_{\mathrm{o}} = \frac{(mg - F)\,r^2}{20} \sum_{i=1}^{9} \frac{(\Delta t_{\mathrm{k}i})^2}{s_i} - mr^2 \,, \tag{2.7a}$$

pri výstupe zotrvačníka

$$J_{\mathrm{o}} = \frac{(mg + F)\,r^2}{20} \sum_{i=1}^{10} \frac{(\Delta t_{\mathrm{v}i})^2}{s_i} - mr^2 \tag{2.7b}$$

pričom platí $s_i = y_i - y_{\mathrm{z}}$.

Postup práce

Pomocou váh určíme hmotnosť zotrvačníka. Potom na viacerých miestach zmeriame priemer hriadeľa, a z aritmetického priemeru nameraných hodnôt určíme jeho polomer. Na zvislom meradle určíme najnižšiu polohu y_{z} zotrvačníka. Navíjaním nití na hriadeľ zvihneme zotrvačník do východiskovej hornej polohy y_{o} , pričom dbáme, aby hriadeľ bol vodorovný. Po uvolnení zotrvačník striedavo klesá k najnižšej polohe (dolnej úvrati) y_{z} a stúpa k postupne sa zmenšujúcim najvyšším polohám y_i , ktoré zakaždým odčítame a zapisujeme do tabuľky (tab. 3). Zotrvačník potom znovu zdvihneme do východiskovej hornej polohy y_{o} , uvolníme ho a súčasne spustíme stopky, pomocou ktorých odčítavame a do tabuľky zaznamenávame medzičasy $t_{\mathrm{h}1}$, $t_{\mathrm{h}2}$, ... $t_{\mathrm{h}10}$, zodpovedajúce okamihom dosiahnutia najvyšších polôh, ako aj medzičasy $t_{\mathrm{z}0}$, $t_{\mathrm{z}1}$, ..., $t_{\mathrm{z}9}$, zodpovedajúce najnižšej polohe pri jednotlivých cykloch. Z nameraných hodnôt určíme dĺžky dráh s_{k} medzi najvyššími a najnižšou polohou, ako aj príslušné časové intervaly Δt_{k} , potrebné pri výpočte momentu zotrvačnosti.

Otázky a úlohy

1. Dôsledne odvoďte vzťah (2.4b).
2. Teoreticky vyjadrite pomer s_i / s_{i+1} . Výsledok overte pomocou nameraných hodnôt.
3. Aké podmienky by museli byť splnené, aby pohyb kyvadla bol periodický?
4. Ukážte, že dĺžka dráhy s_{n} je exponenciálnou funkciou poradového čísla n .
5. Vyjadrite vzájomný pomer rotačnej a translačnej časti kinetickej energie zotrvačníka.

Meno: Krúžok: Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy 2
Maxwellovo kyvadlo

Stručný opis metódy merania:

Východiskové vzťahy tejto metódy:

Prístroje a pomôcky:

Meranie

Tab. 2.1 Meranie polomeru hriadeľa

meranie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	a.priemer
$2r$ / mm											

Tab. 2.2 Stále veličiny

Hmotnosť zotrvačníka	Polomer hriadeľa	Najnižšia poloha zotrvačníka
m =	r =	y_z =

Tab. 2.3 Polohy maxím a príslušné časy

i	y_i / cm				t_{hi} / s				t_{zi} / s			
	1	2	3	priemer	1	2	3	priemer	1	2	3	priemer
0					0	0	0	0				
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												

Tab. 2.4 Dráhy (v metroch) a časové intervaly (v sekundách)

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s_i = y_i - y_z$											
$(\Delta t)_{ki}$											
$(\Delta t)_{vi}$											

Tu vpisujte konkrétne výpočty s uvedením veľkosti a rozmerov fyzikálnych veličín:

Sila pôsobiaca proti pohybu zotrvačníka:

$F =$

Moment zotrvačnosti podľa vzťahu (2.7a)

$J_o =$

Moment zotrvačnosti podľa vzťahu (2.7b)

$J_o =$

Slovné zhodnotenie výsledkov merania:

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta:

Podpis učiteľa: