1.1.3 Akú rýchlosť malo auto, keď vodič po zhliadnutí prekážky až do zastavenia prešiel dráhu ***s*** ? Jeho reakčný čas je t_r ,a brzdil so spomalením ***a***.

$s = s_1 + s_2$

$s_1 = v_0 t_r$

$s_2 = v_0 t_r - \frac{1}{2} a t^2$

$v = v_0 - a t_2$

$t_r = \frac{v_0}{a}$

$s_2 = v_0 t_r - \frac{1}{2} a \frac{{v_0}^2}{a^2}$

$s_2 = v_0 t_r - \frac{1}{2} \frac{{v_0}^2}{a}$

$s = v_0 t_r + v_0 \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} a \frac{v_0^2}{a^2}$

$s = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{a} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a}$

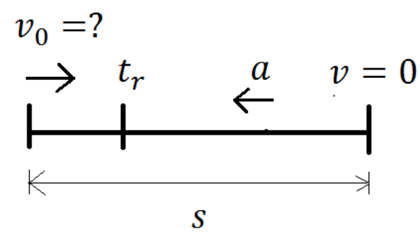
$s = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2a}$

$\frac{v_0^2}{2a} + v_0 t_r - s = 0$

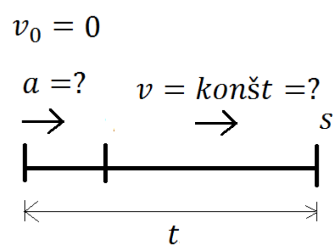
$v_0^2 + 2 a v_0 t_r - 2as = 0$

$v_{0_{1,2}} = \frac{-2atr \pm \sqrt{4\mathrm{a}^2 \mathrm{t}_r^2 + 8\mathrm{as}}}{2}$

$v_0 = -atr + \sqrt{\mathrm{a}^2 \mathrm{t}_r^2 + 2\mathrm{as}}$



1.1.4 Bežec na krátke trate ubehne trasu ***s*** za čas ***t***, z toho prvých ***s₁*** rovnomerne zrýchlene a zvyšok dráhy konštantnou rýchlosťou. Aké má zrýchlenie a akú má rýchlosť, ktorou beží zvyšok trate?



$v_0 = 0$

$s_1 = \frac{1}{2} a t_1^2$

$v = v_0 + a t_1 = a t_1 \implies t_1 = \frac{v}{a}$

$s - s_1 = v t_2 = v(t - t_1)$

$s - s_1 = v(t - \frac{v}{a})$

$a = \frac{2 s_1}{t_1^2}$

$t_1 = \sqrt{\frac{2 s_1}{a}} = \frac{v}{a}$

$\frac{2 s_1}{a} = \frac{v^2}{a^2}$

$\frac{2 s_1}{a} = \frac{v^2}{a^2}$

$\frac{2 s_1}{v^2} = \frac{1}{a}$

$a = \frac{v^2}{2 s_1}$

$s - s_1 = v\left(t - \frac{v}{\frac{v^2}{2 s_1}}\right) = v\left(t - \frac{2 v s_1}{v^2}\right) = v\left(t - \frac{2 v s_1}{v}\right)$

$s - s_1 = vt - 2 s_1$

$s + s_1 = vt$

$v = \frac{s + s_1}{t}$

$a = \frac{\left(\frac{s + s_1}{t}\right)^2}{2 s_1}$

$a = \frac{(s + s_1)^2}{2 s_1 t^2}$

1.1.5 Bod sa pohybuje po osi x tak, že závislosť jeho súradnice od času je daná rovnicou x = k/2 (e $^{\gamma t}$ + e$^{-\gamma t}$) kde ***k***, **γ** sú známe konštanty. Nájdite rýchlosť a zrýchlenie bodu ako funkciu ***x*** .

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{k}{2}\frac{d}{dt}(e^{\gamma t} + e^{-\gamma t}) = \frac{k}{2}(\gamma e^{\gamma t} - \gamma e^{-\gamma t})$$

$$x^2 = \frac{k^2}{4}(e^{\gamma t} + e^{-\gamma t})^2 = \frac{k^2}{4}(e^{2\gamma t} + 2e^{\gamma t}e^{-\gamma t} + e^{-2\gamma t}) = \frac{k^2}{4}(e^{2\gamma t} + e^{-2\gamma t} + 2)$$

$$v^2 = \frac{k^2\gamma^2}{4}(e^{2\gamma t} - 2e^{\gamma t}e^{-\gamma t} + e^{-2\gamma t}) = \frac{k^2\gamma^2}{4}(e^{2\gamma t} + e^{-2\gamma t} - 2)$$

I. $\gamma^2 x^2 = \frac{k^2\gamma^2}{4}(e^{2\gamma t} + e^{-2\gamma t} + 2)$

II. $\underline{v^2 = (e^{2\gamma t} + e^{-2\gamma t} - 2)}$ $\quad /.(-1)$

$$\gamma^2 x^2 - v^2 = \frac{\gamma^2 k^2}{4}(0 + 0 + 4) = \gamma^2 k^2$$

$$v^2 = \gamma^2 x^2 - \gamma^2 k^2$$

$$v = \gamma\sqrt{x^2 - k^2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{k\gamma}{2}\frac{d}{dt}(e^{\gamma t} + e^{-\gamma t}) = \frac{k\gamma}{2}(\gamma e^{\gamma t} - \gamma e^{-\gamma t})$$

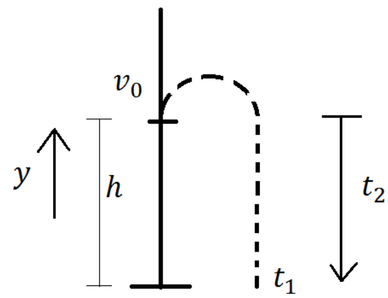
$$a = \frac{k\gamma^2}{2}(e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}) \qquad x = \frac{k}{2}(e^{\gamma t} - e^{-\gamma t})$$

$$a = \gamma^2 x$$

1.1.10 Teleso vyhodíme z výšky ***h*** nad Zemou zvisle nahor s rýchlosťou ***v₀***. Za aký čas za ním musíme voľne pustiť z tej istej výšky druhé teleso, aby dopadli na Zem súčasne?

$y_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 + h$

$v\ čase\ t_1 \ \rightarrow\ y_1 = 0$



$y_2 = h - \frac{1}{2} g t_2^2$

$v\ čase\ t_2 \ \rightarrow\ y_2 = 0$

$-\frac{1}{2} g t_1^2 + v_0 t_1 + h = 0$

$t_1 = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4\left(-\frac{1}{2} g\right) h}}{2\left(-\frac{1}{2} g\right)}$

$t_1 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$

$h - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0$

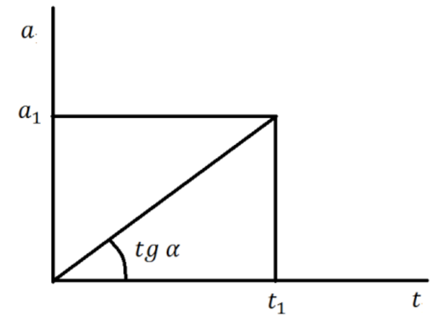
$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$t_1 - t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} - \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh} - \sqrt{2gh}}{g}$

1.1.15 Elektrický rušeň sa rozbieha z pokoja so zrýchlením, ktoré rovnomerne rastie tak, že v čase t_1 má zrýchlenie a_1. Vypočítajte:

a) rýchlosť rušňa v čase t_1 ako aj dráhu, ktorú rušeň za tento čas prešiel,

b) rýchlosť a dráhu v čase t_2.



$y = kx + q$

$a = kt + q \qquad q = 0$

$a = kt$

$a_1 = kt_1$

$k = \frac{a_1}{t_1}$

$a = \frac{a_1}{t_1} t \qquad a = \frac{dv}{dt} \qquad dv = adt \qquad v - v_0 = \int_0^t adt \qquad v_0 = 0$

$dv = \frac{a_1}{t_1} tdt$

$v = \int_0^t \frac{a_1}{t_1} t\, dt$

$v = \frac{a_1}{t_1} \int_0^t t\, dt = \frac{a_1}{t_1} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t = \frac{a_1}{t_1}\frac{t^2}{2} - 0$

$v = \frac{1}{2}\frac{a_1}{t_1} t^2$

$t = t_1 \Rightarrow v(t_1) = \frac{1}{2}\frac{a_1}{t_1} t_1^2 = \frac{1}{2} a_1 t_1 \qquad v = \frac{ds}{dt} \qquad ds = vdt \qquad s - s_0 = \int_0^t vdt \qquad s_0 = 0$

$s = \int_0^t \frac{1}{2}\frac{a_1}{t_1} t^2 = \frac{1}{2}\frac{a_1}{t_1} \int_0^t t^2 = \frac{1}{2}\frac{a_1}{t_1} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^t = \frac{a_1}{t_1}\frac{t^3}{3} - 0$

$s = \frac{1}{6}\frac{a_1}{t_1} t^3$

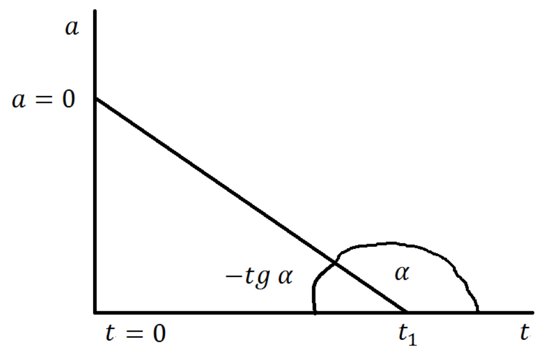
$s(t_1) = \frac{1}{6}\frac{a_1}{t_1} t_1^3 = \frac{1}{6} a_1 t_1^2$

$s(t_2) = \frac{1}{6}\frac{a_1}{t_1} t_2^3$

1.1.16 Zrýchlenie hmotného bodu pri jeho priamočiarom pohybe rovnomerne klesá zo začiatočnej hodnoty a_0 v čase t_0 na nulovú hodnotu v čase t_1 . Aká je rýchlosť hmotného bodu v čase t_1 a akú dráhu za tento čas vykonal, keď v čase t_0 bol v pokoji?

$y = kx + q$

$a = kt + q \qquad q = a_0$



$k = \frac{-a_0}{t_1}$

$a = \frac{-a_0}{t_1}\, t + a_0 \qquad v = \int_0^t a dt$

$v = \int_0^t \left(-\frac{a_0}{t_1}\, t + a_0\right) dt = -\frac{a_0}{t_1}\int_0^t t dt + a_0 \int_0^t dt =$
$-\frac{a_0}{t_1}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t + a_0[t]_0^t = -\frac{a_0}{t_1}\frac{t^2}{2} + a_0 t$

$v(t_1) = -\frac{a_0}{t_1}\frac{t_1^2}{2} + a_0 t_1$

$v(t_1) = \frac{1}{2} a_0 t_1 \qquad s = \int_0^t v dt$

$s = \int_0^t \left(-\frac{a_0}{t_1}\frac{t^2}{2} + a_0 t\right) dt = -\frac{a_0}{2t_1}\int_0^t t^2 + a_0 \int_0^t t = -\frac{a_0}{6t_1} t^3 + a_0 \frac{t^2}{2}$

$s(t_1) = -\frac{a_0}{6t_1} t_1^3 + a_0 \frac{t_1^2}{2} = -\frac{a_0 t_1^2}{6} + \frac{a_0 t_1^2}{2}$

$s(t_1) = \frac{1}{3} a_0 t_1^2$

1.1.18 Teleso s počiatočnou rýchlosťou v_0 má pod pôsobením brzdiacej sily zrýchlenie $a=-kv^2$ (k je konštanta). Predpokladajte, že pohyb telesa je priamočiary a na začiatku brzdenia bolo teleso v mieste s nenulovou súradnicou x_0. Určte: časovú závislosť rýchlosti telesa.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$-kv^2 = \frac{dv}{dt}$$

$$-kv^2 dt = dv$$

$$-kdt = \frac{dv}{v^2}$$

$$-\int_0^t kdt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2}$$

$$-k\int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} v^{-2} dv$$

$$-kt = -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0}$$

$$-kt = \frac{-v_0 + v}{vv_0}$$

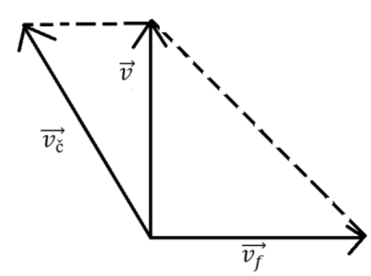
$$-ktvv_0 = -v_0 + v$$

$$v_0 = ktvv_0 + v$$

$$v_0 = v(1 + ktv_0)$$

$$v = \frac{v_0}{(1+ktv_0)}$$

1.2.2 Motorový čln preplával rieku tečúcu rovnomernou rýchlosťou najskôr kolmo na tok v oboch smeroch (t.j. tak, že sa vrátil na to isté miesto, z ktorého vyštartoval). Neskôr preplával rovnakú vzdialenosť, ako je šírka rieky, po prúde a vrátil sa proti prúdu späť. Na ktorú plavbu potreboval dlhší čas?



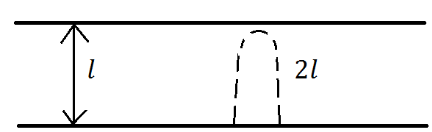
$$v_č^2 = v_f^2 + v^2$$

$$v = \sqrt{v_č^2 - v_f^2}$$

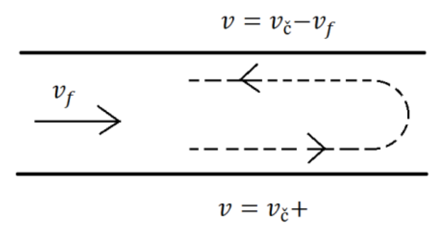
$$\Delta t_1 = \frac{2l}{v} = \frac{2l}{\sqrt{v_č^2 - v_f^2}}$$

$$\Delta t_2 = \frac{l}{v_č + v_f} + \frac{l}{v_č - v_f} = \frac{l(v_č + v_f) + l(v_č - v_f)}{v_č^2 - v_f^2} = \frac{2lv_č}{v_č^2 - v_f^2}$$

$$\Delta t = \Delta t_2 - \Delta t_1 = \frac{2lv_č}{v_č^2 - v_f^2} - \frac{2l}{\sqrt{v_č^2 - v_f^2}} > 0$$



$Plavba\ po\ prúde\ a\ späť\ trvá\ dlhšie.$



1.2.4 Pohyb bodu je určený rovnicami ***x = A₁t² + B₁***, ***y = A₂t² + B₂*** .

1. Po akej dráhe sa pohybuje?
2. Nájdite veľkosť aj smer rýchlosti a zrýchlenia v čase ***t***.

1. $x = A_1 t^2 + B_1 \quad \Longrightarrow \quad t^2 = \frac{x - B_1}{A_1}$

$$y = A_2 t^2 + B_2$$

$$y = \frac{x - B_1}{A_1} A_2 + B_2$$

$$y = \frac{A_2}{A_1} x \frac{B_1 A_2}{A_1} + B_2$$

$$y = kx + q$$

$$k = \frac{A_2}{A_1}$$

$$q = -\frac{B_1 A_2}{A_1} + B_2$$

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = (A_1 t^2 + B_1)\vec{\imath} + (A_2 t^2 + B_2)\vec{\jmath}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (2A_1 t)\vec{\imath} + (2A_2 t)\vec{\jmath}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2A_1 t)^2 + (2A_2 t)^2} = 2t\sqrt{A_1^2 + A_1^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}.\vec{\imath}}{|v||\imath|} = \frac{[(2A_1 t)\vec{\imath} + (2A_2 t)\vec{\jmath}\,]\vec{\imath}}{2t\sqrt{A_1^2 + A_1^2}} = \frac{2A_1 t + 0}{2t\sqrt{A_1^2 + A_1^2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2A_2 t}{2A_1 t} = \frac{A_2}{A_1}$$

$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{A_2}{A_1}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\left((2A_1 t)\vec{\imath} + (2A_2 t)\vec{\jmath}\,\right) = (2A_1)\vec{\imath} + (2A_2)\vec{\jmath}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(2A_1)^2 + (2A_2)^2} = 2\sqrt{A_1^2 + A_1^2}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2A_2}{2A_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

1.2.12 Kameň je vymrštený z praku pod uhlom ***β*** voči zvislici s počiatočnou rýchlosťou ***v_0***. Určte:

a) Maximálnu výšku dráhy letu kameňa ***h***.

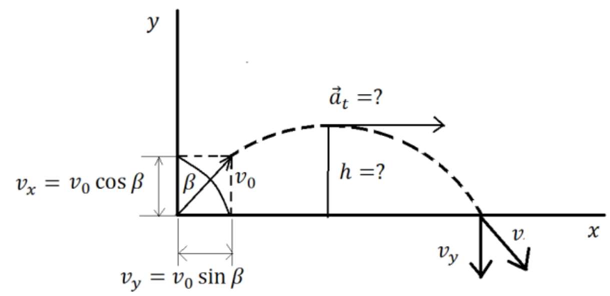
b) Dolet kameňa ***l***.

c) Veľkosť rýchlosti kameňa ***v_1*** v maximálnej výške.

d) Veľkosť rýchlosti kameňa ***v_2*** pri dopade na zem.

e) Veľkosť tangenciálneho zrýchlenia kameňa ***a_1***t v max. výške

f) ***a_{2t}*** pri dopade na zem.



a) $y = v_0 \cos\beta - \frac{1}{2} g t^2$

$v_y = v_0 \cos\beta - gt$

$ak\ y = h \implies \quad v_y = 0$

$0 = v_0 \cos\beta - gt$

$t = \frac{v_0 \cos\beta}{g}$

$y = h = v_0 \cos\beta \frac{v_0 \cos\beta}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2 \cos^2\beta}{g^2} =$

$= \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \cos^2\beta}{g}$

b) $y = 0$

$v_0 \cos\beta\, t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$

$t_1 = 0$

$v_0 \cos\beta\, t - \frac{1}{2} g t = 0$

$t = \frac{2 v_0 \cos\beta}{g}$

$x = v_0 \sin\beta\, t = \frac{2\, v_0^2 \cos\beta \sin\beta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g}$

c) $v\ max.\,výške\ v_y = 0$

$v = v_x$

$v = v_0 \sin\beta$

e) $vo\ vodorovnom\ smere\ ide\ o\ rovnomerný$

$pohyb\ po\ priamke \implies a_1 = 0$

f) $\frac{a_t}{g} = \cos\beta$

$a_t = g \cos\beta$

d) $\vec{v} = v_x \vec{\imath} + v_y \vec{\jmath}$

$v_x = v_0 \sin\beta$

$v_y = v_0 \cos\beta$

$pri\ zvislom\ vrhu\ rýchlosť\ dopadu =$
$rýchlosti\ vrhu$

$\vec{v} = v_0 \sin\beta \vec{\imath} - v_0 \cos\beta\, \vec{\jmath}$

$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} =$
$\sqrt{(v_0 \sin\beta)^2 + (v_0 \cos\beta)^2} = v_0$

1.3.2 Koleso s polomerom ***R*** rotuje s frekvenciou ***f_0***. Pôsobením brzdiacej sily ho zastavíme za čas ***t_1***. Aké bolo tangenciálne, dostredivé a celkové zrýchlenie počas pohybu (ak predpokladáme, že tangenciálne zrýchlenie je konštantné)?

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t$$

$$v \text{ čase } t_1 \ \omega = 0$$

$$0 = \omega_0 - \varepsilon t_1$$

$$0 = 2\pi f_0 - \varepsilon t_1$$

$$\varepsilon = \frac{2\pi f_0}{t_1}$$

$$a_t = \varepsilon R = \frac{2\pi f_0}{t_1} R$$

$$a_D = \omega^2 R$$

$$a_D = (\omega_0 - \varepsilon t)^2 R$$

$$a_D = \left(2\pi f_0 - \frac{2\pi f_0}{t_1} t\right)^2 R$$

$$a_D = 4\pi^2 f_0^2 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)^2 R$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_D^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi f_0}{t_1} R\right)^2 + \left[4\pi^2 f_0^2 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)^2 R\right]^2}$$

$$a = 2\pi f_0 R \sqrt{\frac{1}{t^2} + 4\pi^2 f_0^2 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)^4}$$

1.3.5 Hmotný bod sa pohybuje z pokoja po kružnici s polomerom ***R*** tak, že jeho uhlová súradnica závisí od času nasledovne ***$\varphi = A + Bt^3$***, kde ***A***, ***B*** sú konštanty. Vypočítajte veľkosť tangenciálneho, dostredivého a celkového zrýchlenia v čase ***t_1***. V akom čase ***t_2*** bude uhol medzi vektorom rýchlosti a vektorom celkového zrýchlenia ***α***?

$$\omega \frac{d\varphi}{dt} = 0 + 3Bt^2$$

$$\varepsilon = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3Bt^2) = 6Bt$$

$$a_t = \varepsilon R = 6BtR$$

$$a_D = \omega^2 R = 9B^2 t^4 R$$

$$a_t(t_1) = \varepsilon R = 6Bt_1 R$$

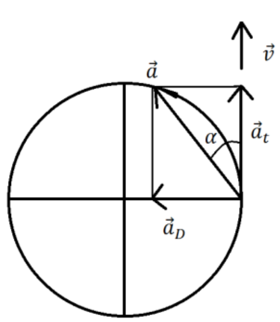
$$a_D(t_1) = \omega^2 R = 9B^2 t_1^4 R$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_D^2} = 3RBt_1\sqrt{4 + 9B^2 t^6}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\overrightarrow{a_D}|}{|\overrightarrow{a_t}|} = \frac{9B^2 t^4 R}{6BtR} = \frac{3}{2Bt^3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2} B t_2^3$$

$$t_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{3B} \operatorname{tg}\alpha}$$



1.3.6 Koleso sa otáča tak, že závislosť uhla otočenia polomeru kolesa od času má tvar ***φ = A + Bt + Ct² + Dt³*** . Nájdite polomer kolesa ***R***, ak vieme, že na konci druhej sekundy pohybu je dostredivé zrýchlenie a_D

$$a_D = \omega^2 R$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt + Ct^2 + Dt^3) = 0 + B + 2Ct + 3Dt^2$$

$$a_D = (0 + B + 2Ct + 3Dt^2)^2 R$$

$$R = \frac{a_D}{(0+B+2Ct+3Dt^2)^2}$$

1.3.11 Bod sa pohybuje z pokoja po kružnici s polomerom ***R*** s konštantným tangenciálnym zrýchlením a_t. Aké je normálové zrýchlenie a_D v čase t_1 od začiatku pohybu, keď na konci tretej otáčky mal obvodovú rýchlosť v_3?

$$a_D = \omega^2 R$$

$$v_3 = v_0 + a_t t = a_t t$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2$$

$$3.2\pi R = \frac{1}{2} a_t t^2$$

$$6\pi R = \frac{1}{2} a_t t^2$$

$$t = \frac{v_3}{a_t}$$

$$6\pi R = \frac{1}{2} a_t \frac{v_3^2}{a_t^2}$$

$$6\pi R a_t = \frac{1}{2} v_3^2$$

$$a_t = \frac{v_3^2}{12\pi R}$$

$$\varepsilon = \frac{a_t}{R} = \frac{v_3^2}{12\pi R^2}$$

$$\omega = \varepsilon t \implies \omega(t_1) = \varepsilon t_1 = \frac{v_3^2 t_1}{12\pi R^2}$$

$$a_D(t_1) = \omega^2 t_1 R = \frac{v_3^4 t_1^2}{144\pi^2 R^3}$$

1.3.12 Bod sa pohybuje po kružnici s polomerom ***R*** tak, že prebehnutá dráha ***s (t) = v_0t − (1/2) kt²***, kde ***k***, ***v_0*** sú konštanty. Určte:

a) veľkosť tangenciálneho zrýchlenia,

b) veľkosť normálového zrýchlenia,

c) veľkosť celkového zrýchlenia,

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_0 t - \frac{1}{2}kt^2\right) = v_0 - \frac{1}{2}k2t$$

$$v = v_0 - kt$$

$$a_t = \left|\frac{dv}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}(v_0 - kt)\right| = |0 - k| = k$$

$$a_D = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - kt)^2}{R}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_D^2} = k^2 + \frac{(v_0 - kt)^4}{R^2}$$

1.3.13 Koleso s polomerom ***r*** sa dáva do pohybu pomocou namotaného vlákna, na ktorom je zavesené závažie. Za čas ***t*** klesne závažie o ***h***. Akú má v tom okamihu uhlovú rýchlosť a koľko otočení vykoná koleso za tento čas?

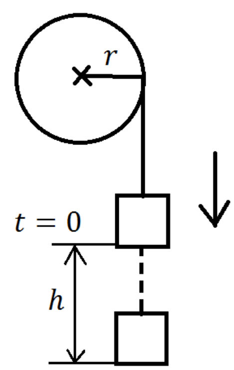
$$n.2\pi r = h$$

$$n = \frac{h}{2\pi r}$$

$$h = \frac{1}{2}at^2 \quad \Longrightarrow \quad a = a_t = \frac{2h}{t^2}$$

$$\varepsilon = \frac{a_t}{r} = \frac{2h}{rt^2}$$

$$\omega(t) = \varepsilon t = \frac{2h}{rt^2}t = \frac{2h}{rt}$$



http://www.ujfi.fei.stuba.sk/fyzika/priklady/Kinematika_20120522_Bez_ries.pdf