

MZ Určenie momentov zotrvačnosti tuhých telies metódou torzných kmitov

Autor pôvodného textu: **Jozef Lasz**

Úloha: Zmerať direkčný moment pružiny torzného kyvadla a využiť ho na meranie momentov zotrvačnosti vybraných telies vzhľadom na ich os súmernosti. Meraním určiť závislosť momentu zotrvačnosti dvoch rozmerovo malých telies („hmotných bodov“) ako funkciu ich vzdialenosti od osi otáčania.

Teoretický úvod

Zariadenie, ktoré umožňuje realizovať zadané úlohy, pozostáva z masívneho ťažkého stojana v ktorom je v ložiskách upevnená zvislá osová tyč – os otáčania (obr. MZ.1). Na stojan je pripevnený jeden koniec špirálovej pružiny, na osovú tyč jej druhý koniec. Na tyč sa uchytávajú symetrické telesá rôzneho tvaru, ktorých momenty zotrvačnosti chceme určiť (na obrázku je vodorovná tyč s posuvnými závažiami). Momenty zotrvačnosti sa určujú na základe doby kmitu torzného kyvadla. V pohybovej rovnici torzného kyvadla

$$\mathbf{M} = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \mathbf{j} , \quad (\text{MZ.1})$$

vystupujú veličiny:

\mathbf{M} - moment sily vzhľadom na os otáčania, pôsobiaci na kmitajúce teleso, J moment zotrvačnosti telesa, φ uhlová výchylka z rovnovážnej polohy, \mathbf{j} jednotkový vektor rovnobežný s osou otáčania.

Moment sily špirálovej pružiny vyvolávajúci otáčanie telesa, v oblasti platnosti Hookovho zákona, je priamoúmerný výchylke φ . Účinkuje proti výchylke, čo sa pri vektorovom zápise vyjadří záporným znamienkom:

$$\mathbf{M} = -M_o \varphi \mathbf{j} = -M_o \varphi \mathbf{j} . \quad (\text{MZ.2})$$

Veličina M_o je tzv. **direkčný moment** pružiny, t.j. moment sily potrebný na pootočenie pružiny o jednotkový uhol (1 radián). Po vložení vzťahu (MZ.2) do vzťahu (MZ.1) dostaneme rovnicu

$$\mathbf{M} = -M_o \varphi \mathbf{j} = J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{M_o}{J} \varphi = 0 , \quad (\text{MZ.3})$$

čo je pohybová rovnica harmonického oscilátora. Preto jej riešením je nasledujúca závislosť výchylky od času:

$$\varphi = \varphi_0 \sin (\omega t + \beta) , \quad (\text{MZ.4})$$

pričom uhlová frekvencia kmitania $\omega = \sqrt{\frac{M_o}{J}}$ a doba kmitu $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{M_o}}$. Odtiaľto pre

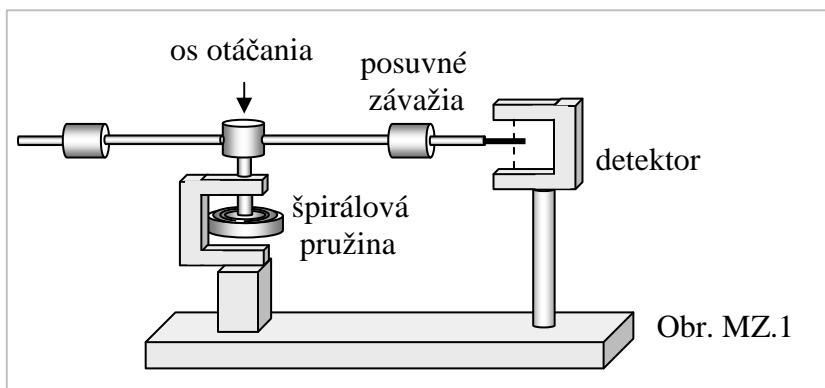
hľadaný moment zotrvačnosti získame vzťah:

$$J = \frac{T^2 M_o}{4\pi^2} . \quad (\text{MZ.5})$$

čo znamená, že na jeho určenie potrebujeme zmerať direkčný moment a dobu kmitu.

Postup pri meraní

1. Najprv určíme direkčný moment pružiny. Os otáčania pevne spojíme s vodorovnou tyčou, na ktorej sú posuvné závažia. Tieto symetricky umiestnime do určitej vzdialenosti r od osi otáčania (odporúča sa $r = 10 \text{ cm}$) a zabezpečíme proti pohybu skrutkami na závažiach. Tyč vychýlime z rovnovážnej polohy postupne o uhly $\varphi = \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ a zakaždým zmeriame silomerom silu potrebnú na udržania tyče v danej vychýlenej polohe (tyč a silomer musia byť pritom na seba kolmé). Súčinom nameranej sily so vzdialenosťou r získame príslušný moment sily. Do grafu vynesieme závislosť momentu sily M od uhlovej výchylky φ . Smernicu tejto lineárnej závislosti, ktorá predstavuje direkčný moment M_0 pružiny, získame pomocou lineárnej regresie.



2. Pred určovaním momentov zotrvačnosti rôznych telies, meraním ich doby kyvu, postavíme detektor do takej vzdialenosti od osi otáčania, aby lúč detektora mohol byť prerušený hrotom nachádzajúcim sa na meranom telese. V rovnovážnej polohe musí byť svetelný lúč prerušený hrotom, na detektore vtedy svieti červené svetielko. Potom teleso vychýlime z rovnovážnej polohy, vždy o rovnaký uhol, napr. $\pi/2$ a pustíme. Elektronickým prístrojom na meranie času, napojeným na detektor, sa zaznamená doba medzi dvomi prechodmi hrotu cez svetelný lúč, teda **doba kyvu**. Meranie opakujeme 5-krát pri vychýlení na jednu a 5-krát pri vychýlení na druhú stranu, a štatisticky vyhodnotíme. Výsledkom je stredná doba kyvu, resp. jej dvojnásobok - doba kmitu T^* . Pre každé merané teleso určíme pomocou vzťahu (MZ.5) nameraný moment zotrvačnosti J_{mer} a pomocou príslušného údaj z nasledujúcej tabuľky jeho teoretickú hodnotu J_{teor} . Parametre (m, R) sú uvedené na telesách.

Útvár	disk, valec	guľa	dutý valec	tyč
Moment zotrvačnosti	$(1/2) mR^2$	$(5/2) mR^2$	$(1/2) m(R_1^2 + R_2^2)$	$(1/12) ml^2$

3. Na os nasadíme tyč s posuvnými závažiami. Závažia umiestnime symetricky vzhľadom na os otáčania. Moment zotrvačnosti tyče s „bodovými“ závažiami $J = J_0 + 2mr^2$, kde J_0 je moment zotrvačnosti samotnej tyče a m hmotnosť jedného závažia. Postupne zväčšujeme vzdialenosť závaží r od osi otáčania. Zakaždým zmeriame dobu kyvu a tak určíme moment zotrvačnosti. Tak získame závislosť momentu zotrvačnosti od vzdialenosti r . Do grafu vynesieme závislosť $J = f(r^2)$. Má sa ukázať, že v súlade s definíciou momentu zotrvačnosti, je táto závislosť lineárna. Zo smernice tejto závislosti vypočítajte hmotnosť m_m závaží a porovnajte s hmotnosťou m_v získanou vážením.

Meno:

Kružok:

Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy MZ

Určenie momentov zotrvačnosti metódou torzných kmitov

Stručný opis metódy merania:

Vzťahy ktoré sa používajú pri meraní:

Prístroje a pomôcky:

1. Meranie direkčného momentu

$r =$				
φ	π	2π	3π	4π
F (N)				
M (Nm)				

Smernica regresnej priamky $k =$

Direkčný moment pružiny $M_o =$

2. Meranie momentov zotrvačnosti telies

Prvé zvolené teleso:

$m =$

$R =$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T/2$										
T										

$T^* =$

$J_{\text{mer}} =$

$J_{\text{teor}} =$

Druhé zvolené teleso:

 $m =$ $R =$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$T/2$										
T										

 $T^* =$ $J_{\text{mer}} =$ $J_{\text{teor}} =$ **3. Meranie závislosti $J = f(r^2)$ tyče s posuvnými závažiami**

r (cm)	5	10	15	20	25
$T/2$					
T^*					
J					
Smernica graf. závislosti $k =$			hmotnosť závaží $m_m =$		

Výpočet: $m_m =$ Hmotnosť závaží získaná vážením: $m_v =$

K protokolu treba pripojiť graf závislosti $J = f(r^2)$

Zhodnotenie výsledkov merania:**Dátum odovzdania protokolu:****Podpis študenta:****Podpis učiteľa:**