UFPB/CCEN/DMPGMAT

Análise no $\mathbb{R}^n$

Exame de Qualificação – 2012.2

Nome:____ Matrícula:_______________

1. Dados dois conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ definimos $d(X,Y) = \inf\{|x-y|; x \in X, y \in Y\}$

   a) Dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$, mostre que $d(x,Y) = d(x,\overline{Y})$.

   b) Mostre que $d(x,Y) = 0 \Leftrightarrow x \in Y$.

   c) Mostre que $d(X,Y) = d(\overline{X},\overline{Y})$.

2. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Mostre que são equivalentes as seguintes afirmações:

   a) $|Tx| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

   b) $|Tx - Ty| = |x-y|, \forall x,y \in \mathbb{R}^n$.

   c) $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x,y\rangle, \forall x,y \in \mathbb{R}^n$.

3. Mostre que se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma transformação linear então existe único $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = \langle x,y\rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ funções de classe C^1.

   a) Mostre que f não pode ser injetiva. *(Sugestão: Use o teorema da função implícita caso haja $x \in \mathbb{R}^2$ com $Df(x) \neq 0$.)*

   b) Mostre que g não pode ser sobrejetiva.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^1 tal que $|f\prime(t) \leq k < 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Considere a aplicação $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$. Mostre que ϕ é um difeomorfismo.
   Sugestão: Mostre que ϕ é um difeomorfismo local e injetiva.

6. Sejam $\phi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que $\phi(x) \leq \psi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Considere $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a,b], \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$.

   a) Mostre que X é J-mensurável. *(Sugestão: determine ∂X.)*

   b) Dada $f : X \to \mathbb{R}$ contínua, mostre que

$$\int_X f = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

   .