

**ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»**

Факультет компьютерных наук
Образовательная программа «Прикладная математика и информатика»
УДК 00494

Отчет об исследовательском проекте (итоговый)
на тему “Компьютерный анализ биологической модели адаптивной динамики”

Выполнил:

студент группы БПМИ195_

01.06.2021

Дата



Подпись

А.К. Колчина

И.О. Фамилия

Принял:

руководитель проекта Алексей Антонович Никитин

Имя, Отчество, Фамилия

доцент

Должность, ученое звание

департамент математики НИУ ВШЭ

Место работы (Компания или подразделение НИУ ВШЭ)

Дата проверки 01/06 2021

9

Оценка
(по 10-тибалльной шкале)



Подпись

Москва 2021

РЕФЕРАТ

Объект исследования: Модель Лоу-Дикмана: математическая модель биологического сообщества, состоящего из нескольких видов стационарных организмов (растений), находящихся на одном ареале, отражающая процессы, происходящие с сообществом в течение времени (в динамике).

Цель работы: исследование предложенной модели с помощью программы, являющейся реализацией численного метода, решающего систему интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в модели; сравнение полученных результатов с компьютерными симуляциями стохастических процессов, происходящих в сообществе.

Метод работы: проведение компьютерных симуляций по входному набору параметров видов; запуск численного метода на том же наборе; сравнение результатов производится путём визуализации результатов с помощью графиков.

Результаты работы: исследованы два сценария сосуществования двух видов: ССТО и НМ в одномерной, двумерной и трехмерной области. Были получены графики: поверхностей, отражающих первый момент (плотность видов) по сценарию ССТО; вторых моментов в фиксированной точке; сравнения работы симуляций и численного метода по вышеуказанным сценариям.

Перечень ключевых слов: математическое моделирование, биология, численные методы.

СОДЕРЖАНИЕ

Основные термины и определения	4
Введение	5
Обзор и сравнительный анализ источников	9
Описание вычислительного эксперимента	11
Заключение	25
Список источников	26

ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Сосуществование видов – состояние системы, при котором численность данных видов организмов не равна нулю

Динамическая модель – модель, отображающая происходящие процессы в динамике, то есть с течением времени

Mean-field theory – теория, которая утверждает, что взаимодействие видов происходит пропорционально их плотности распространения на территории

IBM (individual-based model) – экологическая модель, учитывающая процессы, происходящие с каждым индивидом-участником сообщества

Момент n -го порядка – функция, выражающая среднюю плотность n видов на заданном расстоянии друг от друга

Замыкание пространственных моментов – выражение момента через моменты более низких порядков

Competition-colonization trade-off (ССТО) – механизм сосуществования, при котором один вид сильнее доминирует, а второй вид распространяется на более дальние расстояния

Heteromyopia (НМ) – механизм сосуществования, при котором предполагается, что межвидовая конкуренция происходит на меньших расстояниях, нежели внутривидовая

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность

Математические модели приближенно отражают действительность с помощью математики и широко находят свое применение во многих естественно-научных областях, в частности экологии и биологии, где реальные эксперименты бывают затруднительны. На данный момент не теряет актуальности задача исследования биологического сообщества, состоящего из нескольких видов организмов, находящихся на одном ареале. Экологам требуется понять, как с течением времени меняется численность популяции того или иного вида, и осознать, возможно ли их сосуществование [4]. Развитие информационных технологий и вычислительной техники позволило проводить компьютерные симуляции, отображающие стохастические процессы, происходящие в биологическом сообществе. Но подобные симуляции работают медленно и могут давать случайный шум, а потому экологи по-прежнему нуждаются в качественных аналитических моделях [5]. Такие модели уже были предложены учеными: например, знаменитая модель Лотки-Вольтерры воспроизводит сосуществование “хищников” и “жертв”. Данная модель не является достаточно точной, поскольку не учитывает пространственную структуру биологического сообщества, ведь индивиды могут быть рассредоточены неравномерно по ареалу. Также во многих моделях использовалась mean-field theory, не отражающая взаимодействие видов на близком расстоянии. Ричардом Лоу и Ульфом Дикманом была предложена динамическая IBM, решающая эту проблему: она отображает изменение пространственной структуры сообщества с течением времени. Труд этих ученых открыл огромное поле для исследований в области математической биологии, в частности, системы интегро-дифференциальных уравнений, неизбежно возникающие в модели, приводят к появлению численного метода для их решения.

Объект исследования

Объект исследования - модель Ульфа Дикмана (далее - модель) - построена на методе пространственных моментов. Опишем данную модель, основываясь на статьях [1] и [6].

Рассматривается n -видовое биологическое сообщество растений, находящихся на некотором ареале площади A . Введем функцию плотности i -го вида:

$$p_i(x) = \sum_{x' \in X_t^i} \delta(x - x'),$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, X_t^i – множество точек, в которых присутствует индивид в момент времени t .

Пусть $p(x) = (p_1(x), \dots, p_n(x))$ – пространственный паттерн - вектор функций плотностей $p_i(x)$ для каждого вида i , отражающий состояние системы в момент времени t .

Первый момент – это средняя плотность вида i на площади A :

$$N_i(p) = \frac{1}{A} \int p_i(x) dx$$

Второй момент – это плотность пар видов i и j на расстоянии ξ на площади A :

$$C_{ij}(\xi, p) = \frac{1}{A} \int p_i(x) \times [p_j(x + \xi) - \delta_{ij} \times \delta(\xi)] dx$$

Третий момент – это плотность троек видов: i ; j на расстоянии ξ от i ; k на расстоянии ξ' от i на площади A :

$$T_{ijk}(\xi, \xi', p) = \frac{1}{A} \int \{p_i(x) \times [p_j(x + \xi) - \delta_{ij} \times \delta(\xi)] \times [p_k(x + \xi') - \delta_{ik} \times \delta(\xi') - \delta_{jk} \times \delta(\xi - \xi')]\} dx$$

Пространственные паттерны случайны, поэтому в итоге окончательные моменты представляют собой матожидания в момент времени t по пространству паттернов:

$$N_i(t) = \mathbb{E}_p N_i(p)$$

$$C_{ij}(\xi, t) = \mathbb{E}_p C_{ij}(\xi, p)$$

$$T_{ijk}(\xi, \xi', t) = \mathbb{E}_p T_{ijk}(\xi, \xi', p)$$

Чтобы сделать модель динамической и индивидуально-ориентированной, рассмотрим стохастические процессы, происходящие с каждым индивидом по отдельности:

Движение – перемещение вида i в точку x' (предполагается, что растения стационарны, но могут распространяться при рождении):

$$M_i(x, x', p) = m_i(x' - x),$$

где m_i – параметр движения вида i .

Рождение – новая особь появляется в точке x' :

$$B_i(x, x', p) = \left(b_i + \sum_j \left[b_{ij} \int w_{ij}^{(b)}(x'' - x) \times [p_j(x'') - \delta_{ij} \times \delta_x(x'')] dx'' \right] \right) \times m_i^{(b)}(x' - x),$$

где b_i – коэффициент рождаемости вида i , b_{ij} – влияние вида j на рождаемость вида i , $w_{ij}^{(b)}$ – функция, добавляющая вклад вида j в рождаемость вида i , $m_i^{(b)}$ – ядро рождаемости.

Смерть:

$$D_i(x, p) = d_i + \sum_j \left[d_{ij} \int w_{ij}^{(d)}(x' - x) \times [p_j(x') - \delta_{ij} \times \delta_x(x')] dx' \right]$$

где d_i – коэффициент смертности вида i , d_{ij} – влияние вида j на смертность вида i .

Объединяя метод моментов и вышеуказанные стохастические процессы, получаем следующую динамическую систему:

Первый момент:

$$\frac{d}{dt} N_i = (b_i - d_i) \times N_i + \sum_j b_{ij} \times W_{ij}^{(b)} - \sum_j d_{ij} \times W_{ij}^{(d)},$$

где

$$W_{ij}^{(b)} = \int w_{ij}^{(b)}(\xi') \times C_{ij}(\xi') d\xi'$$

$$W_{ij}^{(d)} = \int w_{ij}^{(d)}(\xi') \times C_{ij}(\xi') d\xi'$$

- весовые функции рождаемости и смертности соответственно.

Второй момент:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} C_{ij}(\xi) = & \delta_{ij} m_i(-\xi) N_i + \int m_i(\xi') C_{ij}(\xi + \xi') d\xi' - d_i C_{ij}(\xi) - \sum_k \int w_{ik}(\xi') T_{ijk}(\xi, \xi') d\xi \\ & - w_{ij}(\xi) C_{ij}(\xi) + \langle i, j, \xi \rightarrow j, i - \xi \rangle, \end{aligned}$$

где $\langle i, j, \xi \rightarrow j, i - \xi \rangle$ - повторение всех предыдущих членов с точностью до данной замены.

Система уравнений из первого и второго момента и есть динамическая IBM. Но возникает проблема, связанная с тем, что система не является замкнутой из-за наличия третьего момента. По сути, моментов может быть и больше, от чего возрастает точность

модели, но это значительно усложняет наше исследование, потому что момент n -го порядка зависит от момента $n + 1$ -го порядка, поэтому требуется избавиться от третьего момента путем замыкания. Можно найти несколько видов замыканий, вот один из них, который был предложен Ульфом Дикманом:

$$T_{ijk}(\xi, \xi') = \frac{C_{ij}(\xi) \times C_{ik}(\xi')}{N_i}$$

Цель и задачи исследования

Цель моей работы: изучение многовидовой экологической модели, предложенной Ульфом Дикманом с помощью численного метода [8], компьютерных симуляций [9] и сравнение результатов их работы.

Еще раз подчеркну, что спецификой моей команды является работа именно с многовидовой (а конкретно двухвидовой) моделью. Я в основном работала над сценарием ССТО, в то время как Дарья Шагалкина делала акцент на НМ.

Было поставлено несколько **задач**:

- 1) Изучить базовые статьи, необходимые для понимания модели
- 2) Научиться запускать численный метод и компьютерные симуляции с различными параметрами
- 3) Исследовать равновесные положения популяции для ССТО в разных размерностях при параметрах, указанных в работе Савостьянова [7, с. 30-36]
- 4) Получить графики вторых моментов для ССТО в нулевой и последней точках
- 5) Сравнить работу симуляций и численного метода по наборам параметров из сценариев ССТО (+ я рассмотрела НМ)
- 6) Визуализировать полученные результаты работы в виде графиков

ОБЗОР И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИСТОЧНИКОВ

Компьютерные симуляции были написаны Е.Г. Галкиным, выпускником ВМК МГУ, впоследствии доработаны для исследования многовидовой модели студентом НИУ ВШЭ В.К. Зеленковым. Используется язык программирования R. Программа моделирует стохастические процессы, происходящие в сообществе, в зависимости от входных параметров. Вследствие моделирования случайных процессов компьютерные симуляции наиболее точно позволяют исследовать модель с течением времени. Проблема в том, что они долго работают, а также могут выдавать ошибку при подсчете второго момента. Также симуляции были написаны для трехвидовой модели, то есть исследование другого числа видов требует некоторой работы по изменению кода.

Автором алгоритма численного метода является выпускник НИУ ВШЭ А.С. Савостьянов, реализация на языке C++ была осуществлена В.К. Зеленковым. Численный метод, решающий системы интегральных уравнений, является практической реализацией модели Дикмана. Он работает быстрее и достаточно правдиво считает как первый, так и второй моменты, работает для любого количества видов. Недостатком является то, что в нуле численный метод часто выдает неадекватные результаты (см. Рисунок 1).

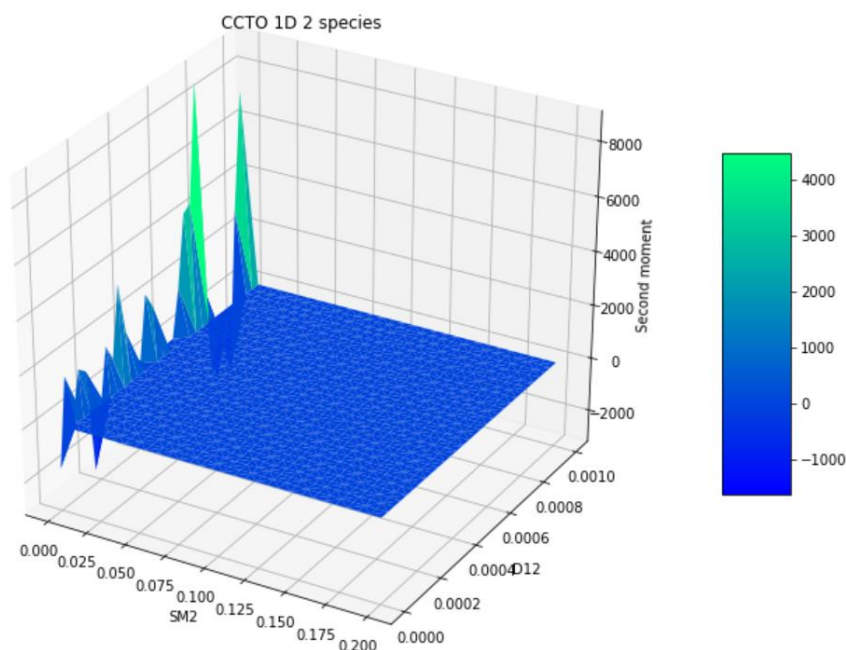


Рисунок 1. Некорректная работа программы в нуле (график второго момента C_{12} при $x = 0$ в одномерном случае)

Некорректно сравнивать компьютерные симуляции и численный метод с позицией “кто хуже, а кто лучше”, ведь оба инструмента имеют как преимущества, так и недостатки, и наилучшим образом пригодны при их совместном использовании, а именно путем сравнения результатов работы компьютерных симуляций и численного метода, что позволяет исследовать

модель на предмет сосуществования видов, найти параметры, при которых оно возможно. Механизмы сосуществования подробно исследованы с помощью численного метода А.С. Савостьяновым в ВКР [7]. Тем не менее, достаточное количество невыясненного материала, а также некоторые результаты его работы порождают новые задачи, которые были поставлены выше. В моем случае требуется продолжить данное исследование, но уже с привлечением компьютерных симуляций.

ОПИСАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

План работы:

- Изучить статьи, посвященные тематике проекта, с целью ознакомления с теоретической стороной исследования
- Научиться проводить эксперименты с помощью численного метода по множеству точек
- Построить графики поверхностей первого момента сценария ССТО
- Построить графики поверхностей второго момента в нулевой и последней точках
- Провести компьютерные симуляции по наборам точек из сценариев ССТО и НМ
- Сравнить результат работы компьютерных симуляций с численным методом

Выбранные методы

1. Численный метод

Программа, являющаяся реализацией численного метода, принимает на вход параметры модели, задаваемые пользователем:

- t – название теста
- \dim – размерность пространства
- a_l – параметр замыкания
- $points$ – число точек
- a – размер области
- b – вектор рождаемости размера
- $dvec$ – вектор смертности
- $dmat$ – матрица смертности (влияние одного вида на другой)
- sw – матрица ядер конкуренции
- sm – вектор радиусов распространения

На выходе программа выдает значения первого момента для каждого вида, а также файл с массивами вторых моментов C_{ij} .

2. Компьютерные симуляции

Компьютерные симуляции принимают на вход те же биологические параметры, что и численный метод. Основные отличия кроются в сути программы. Как мы помним, симуляции основаны на стохастических процессах. Таким образом, при использовании симуляций также задается число итераций программы (число временных событий) и периодичность (к примеру, мы считываем значение первого момента после каждых 5 итераций). На выходе получаем значения первого момента двух видов, представленные в виде кривых, меняющихся с увеличением числа итераций. Начиная с определенного момента кривые “стабилизируются”, перестая сильно колебаться, и тогда мы можем говорить, что система перешла в стационарное состояние, а значит можно сравнивать результат с численным методом.

Полученные результаты:

Мне показался не очень удобным тот факт, что программа численного метода обрабатывает по одной точке, ведь нам интересно посмотреть, как меняются значения плотностей видов (т.е. первых моментов) в динамике, при изменении каких-либо параметров. Для решения этой задачи я написала скрипты на Python, автоматизирующие запуск. У меня есть версии скриптов для ССТО и НМ [10], которые записывают в файл значения первых моментов и двух параметров, меняющихся в динамике в виде трехмерных точек. По этим точкам удобно строить трехмерные поверхности.

Одна из задач – построение графиков поверхностей первого момента ССТО в трех размерностях по набору параметров, представленному в ВКР А.С. Савостьянова.

Фиксированные параметры:

- $b = (0.4 \ 0.4)$
- $dvec = (0.2 \ 0.2)$
- $dmat = (0.001 \ d12 \ 0.001 \ 0.001)$
- $sm = (0.04 \ sm2)$
- $sw = (0.04 \ 0.04 \ 0.04 \ 0.04)$

То есть, как подбавляет сценарию, меняется агрессивность первого вида (d_{12}) и дальность рождаемости (разброса семян) (sm_2) второго. Полученные графики (см. Рисунки 2-4) примечательны тем, что можно наблюдать изменение плотности видов при изменении биологических параметров. Таким образом, высокая агрессивность первого вида компенсируется дальностью рождаемости второго, что позволяет ему занимать большую площадь и избежать пагубного воздействия первого вида, не способного распространяться на столь же дальние расстояния, что приводит к сосуществованию видов.

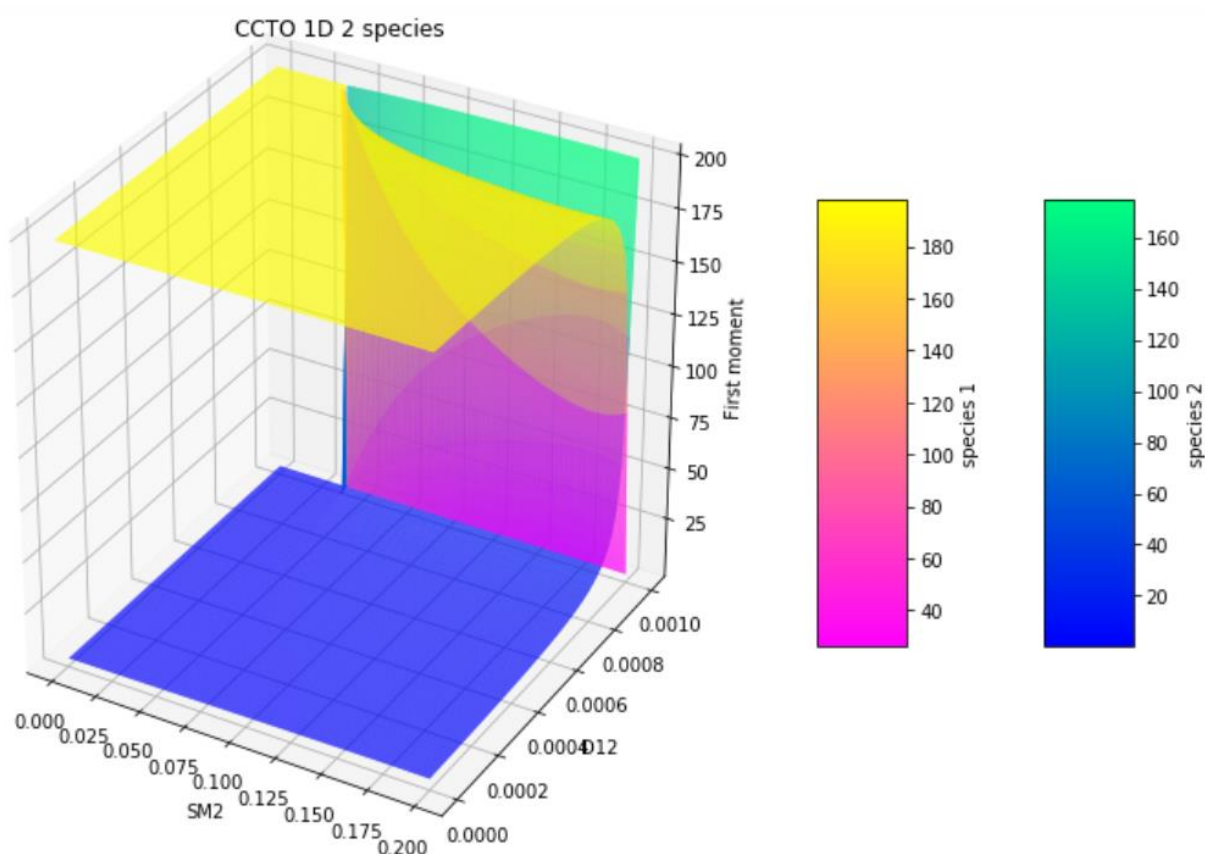


Рисунок 2. ССТО в одномерном случае

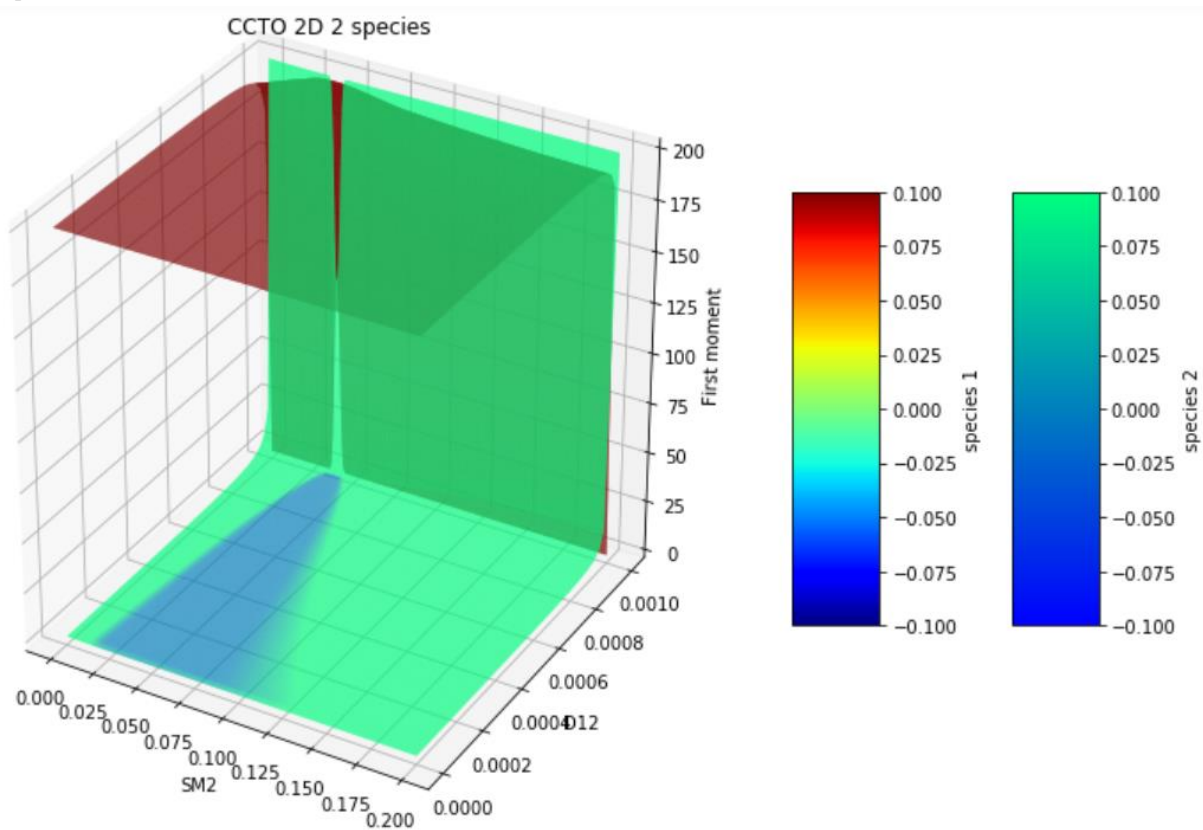


Рисунок 3. CCTO в двумерном случае

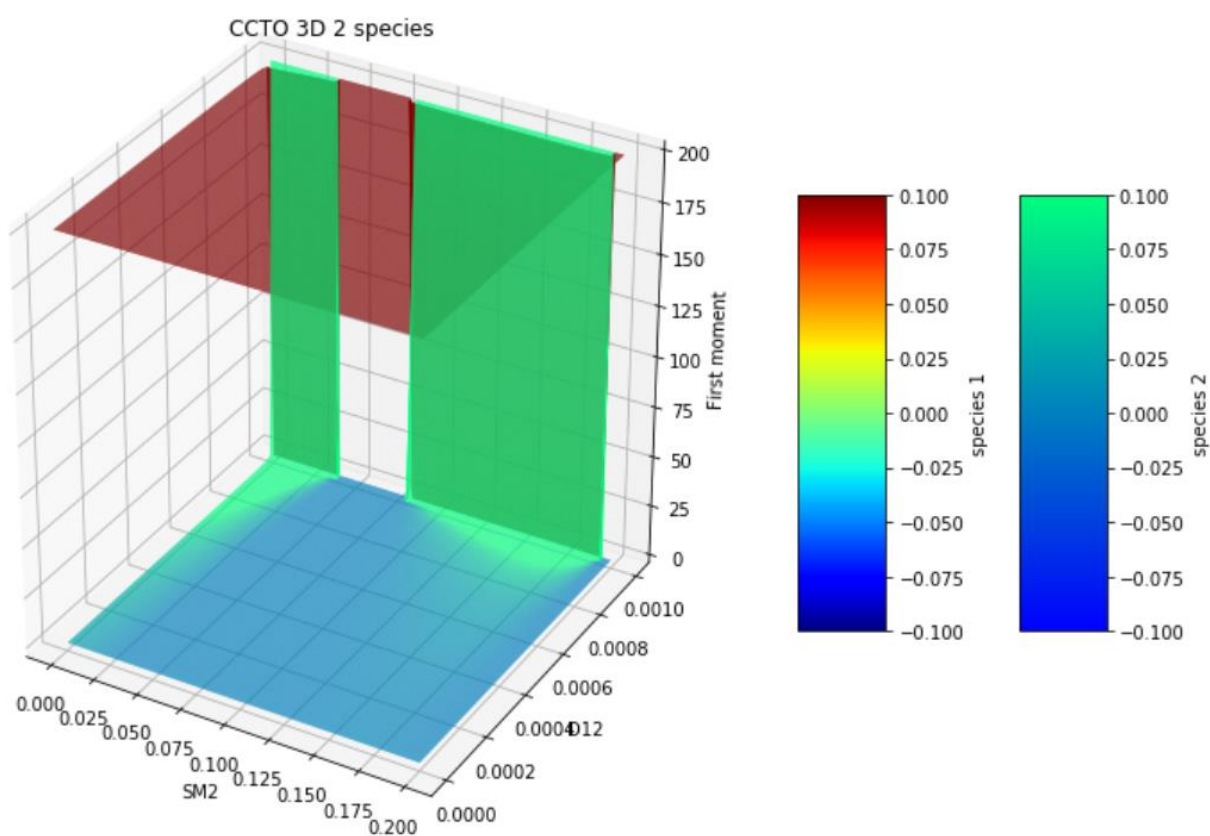


Рисунок 4. CCTO в трехмерном случае

В процессе работы я исследовала и другие сценарии. Например, на Рисунках 5-7 можно посмотреть, как меняется плотность видов при изменении $sm1$ и $sm2$ в трех размерностях. Закономерно графики получаются симметричными и в данной ситуации всегда выживает только один вид, поскольку он имеет преимущество по рождаемости.

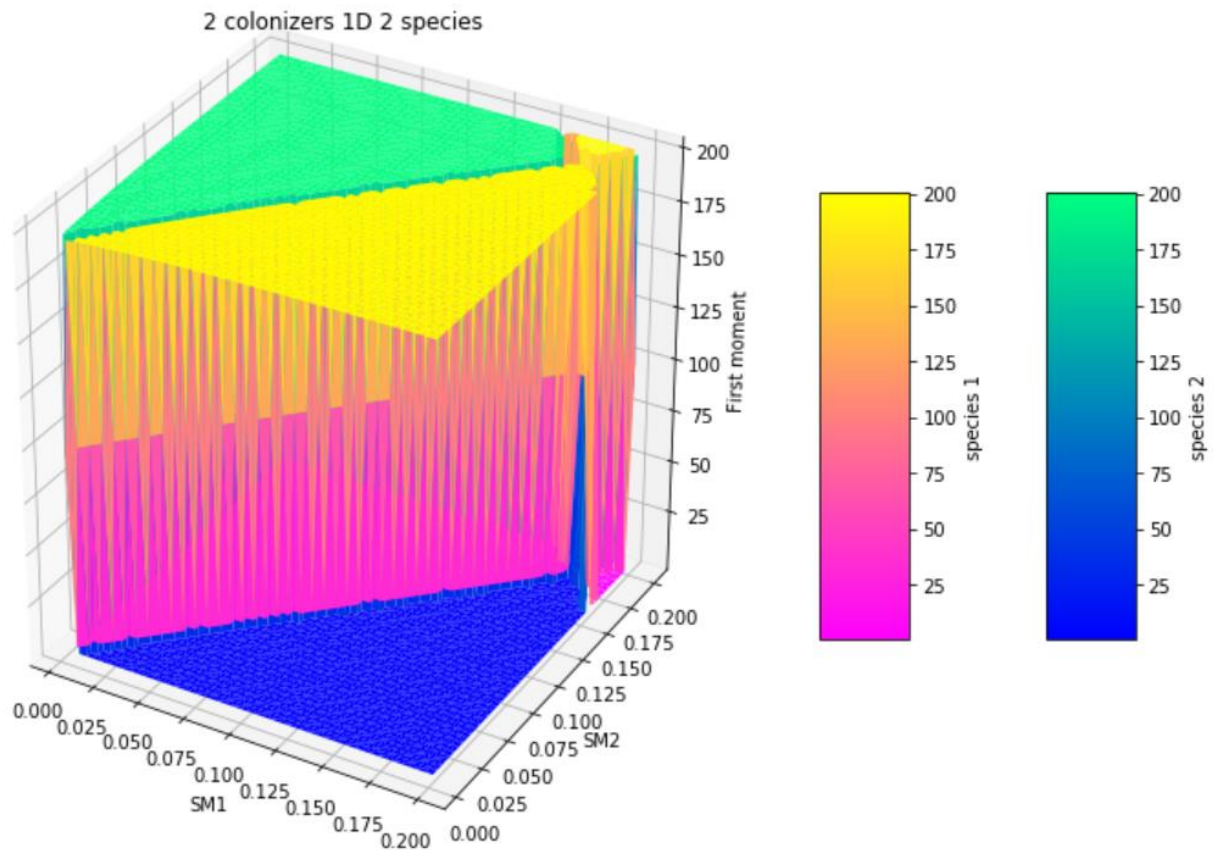


Рисунок 5. Одномерная область

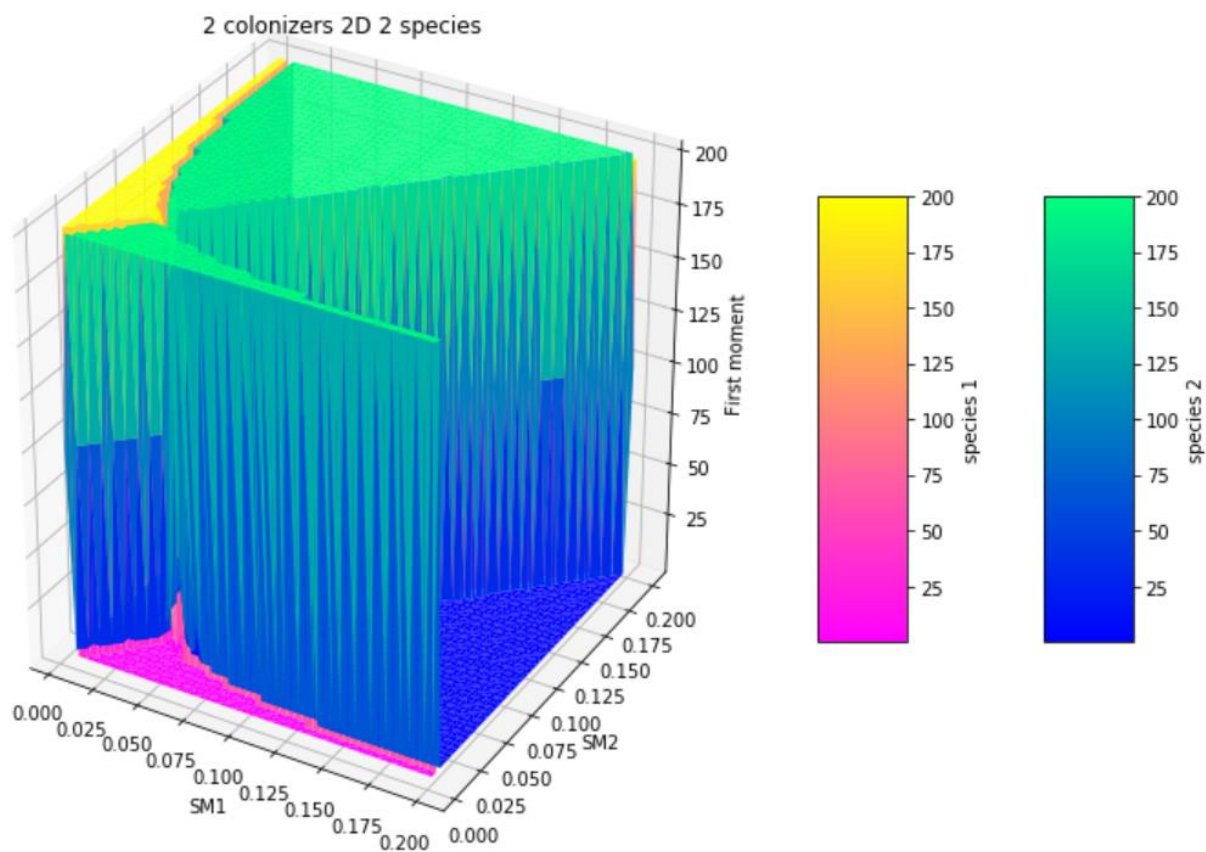


Рисунок 6. Двумерная область

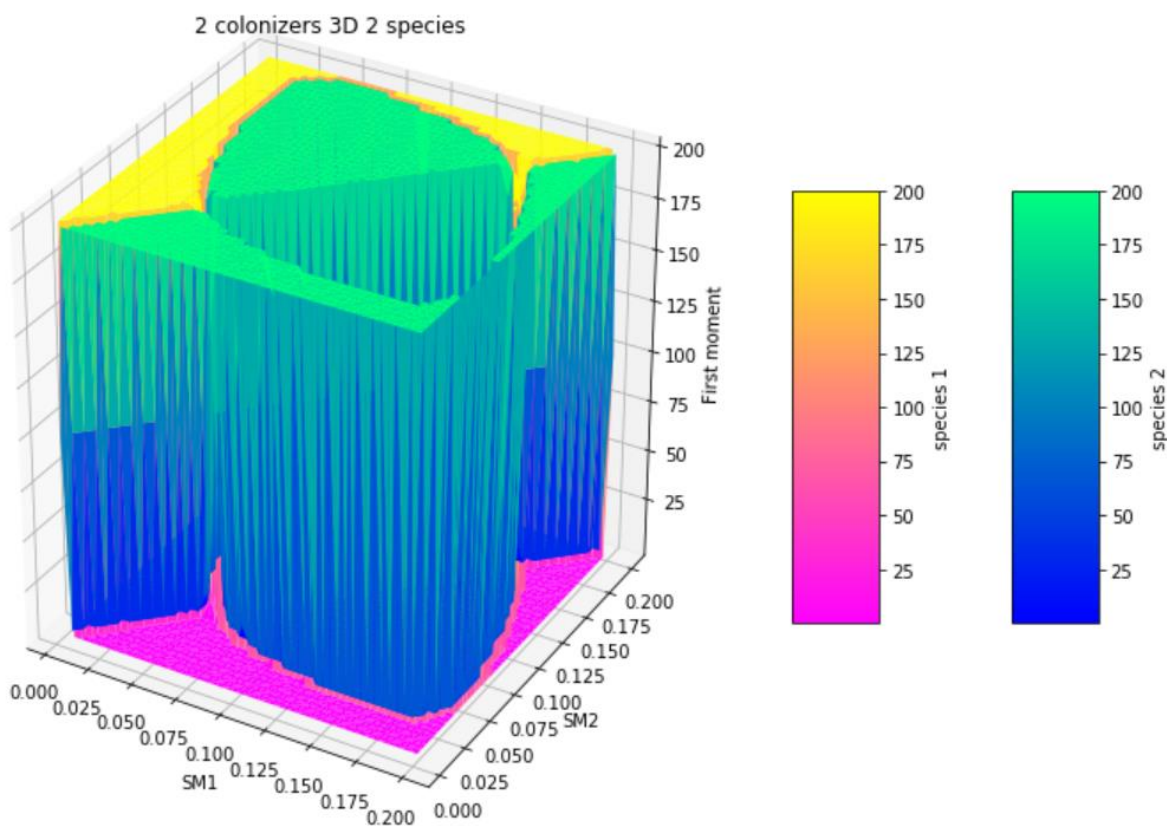


Рисунок 7. Трёхмерная область

Несмотря на то, что в численном методе есть встроенная программа для построения двумерных графиков вторых моментов (в зависимости от расстояния), я также написала скрипт, благодаря которому мы можем узнать, как меняется значение второго момента в конкретной точке при изменении параметров, что бывает довольно информативно при исследовании механизмов сосуществования. Приведу примеры обеих версий (Рисунки 8-9):

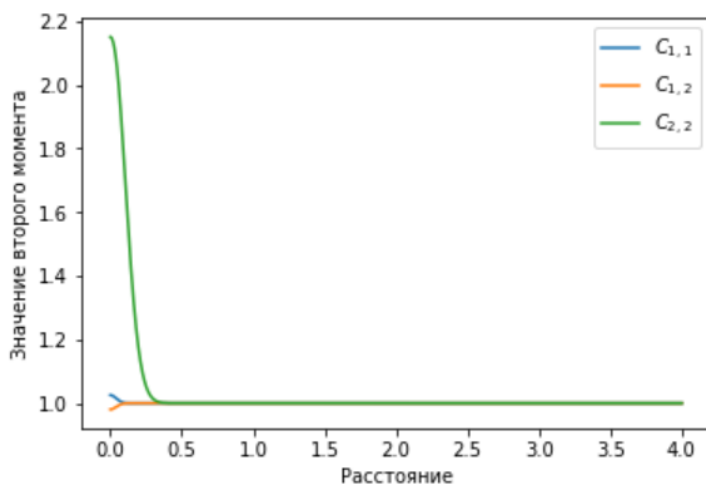


Рисунок 8. График вторых моментов при фиксированных параметрах

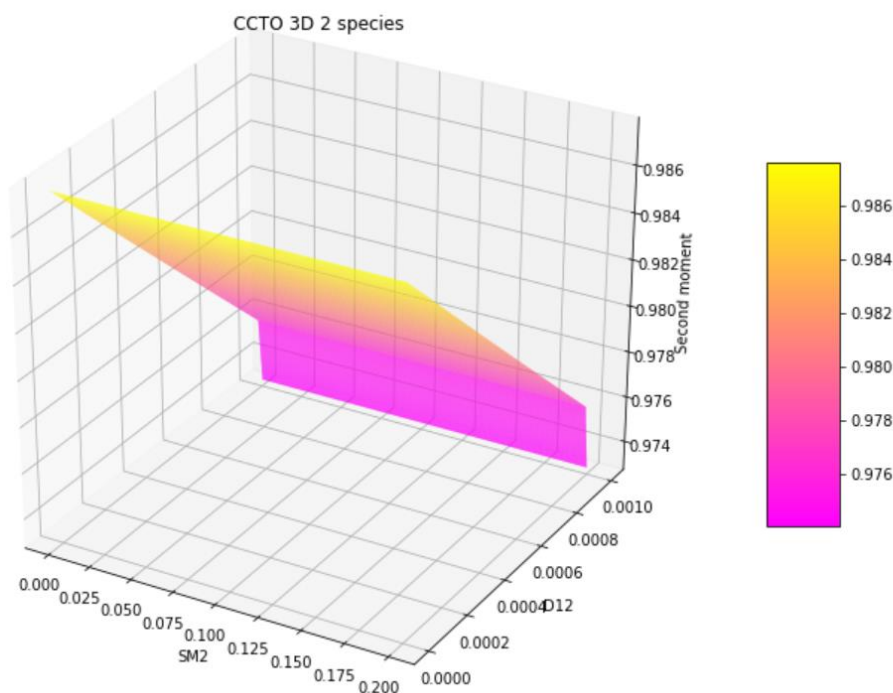


Рисунок 9. График второго момента при $x = 0$ (C_{12} в трехмерной размерности). Биологические параметры можно варьировать

В команде совместно с Виктором Зеленковым также были получены более точные графики поверхностей вторых моментов (ССТО) в трех размерностях в нулевой и последней точках (см. Рисунки 10-11).

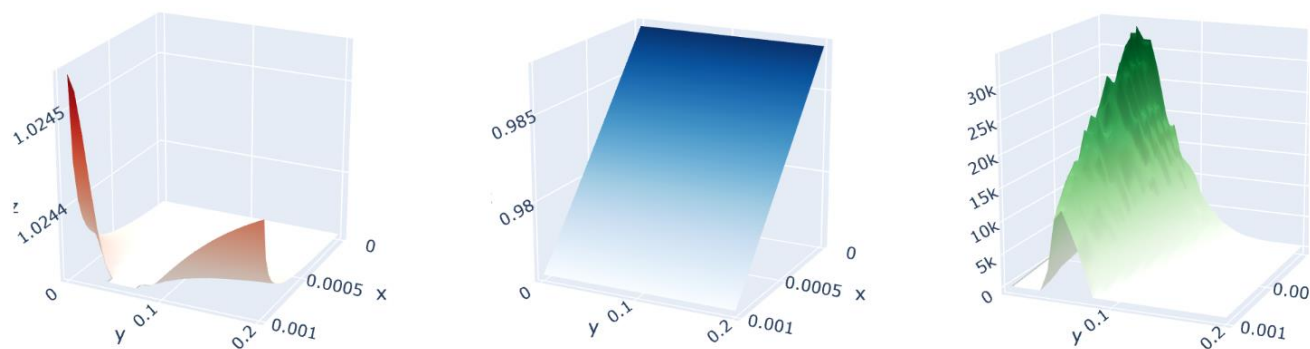


Рисунок 10. Второй момент в нулевой точке, слева направо: $C11$, $C12$, $C22$

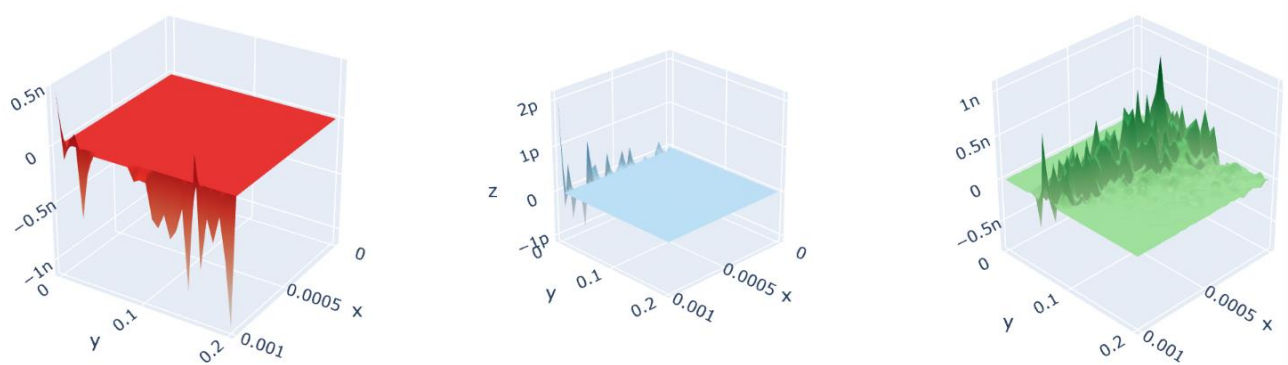


Рисунок 11. Второй момент в последней точке, слева направо: $C11$, $C12$, $C22$

Компьютерные симуляции. Сравнение с численным методом

1. Сценарий ССТО

По умолчанию в ССТО используется следующий набор параметров:

- $b = (0.4 \ 0.4)$
- $dvec = (0.2 \ 0.2)$
- $dmat = (0.001 \ d12 \ 0.001 \ 0.001)$
- $sw = (0.04 \ 0.04 \ 0.04 \ 0.04)$
- $sm = (0.04 \ sm2)$

Таким образом, по сценарию изменяется агрессивность первого вида ($d12$) и ядро рождения второго ($sm2$).

1) $d12 = 0.0008$, $sm2 = 0.175$

Первый вид вымирает из-за чрезмерной рождаемости второго, что отражается на симуляциях, а по численному методу у видов достигается сосуществование, пусть и с

очень малой плотностью первого вида. Такое несоответствие в целом нормально, поскольку численный метод является лишь приближением симуляций, так что мы должны равняться в первую очередь на них (см. Рисунок 12).

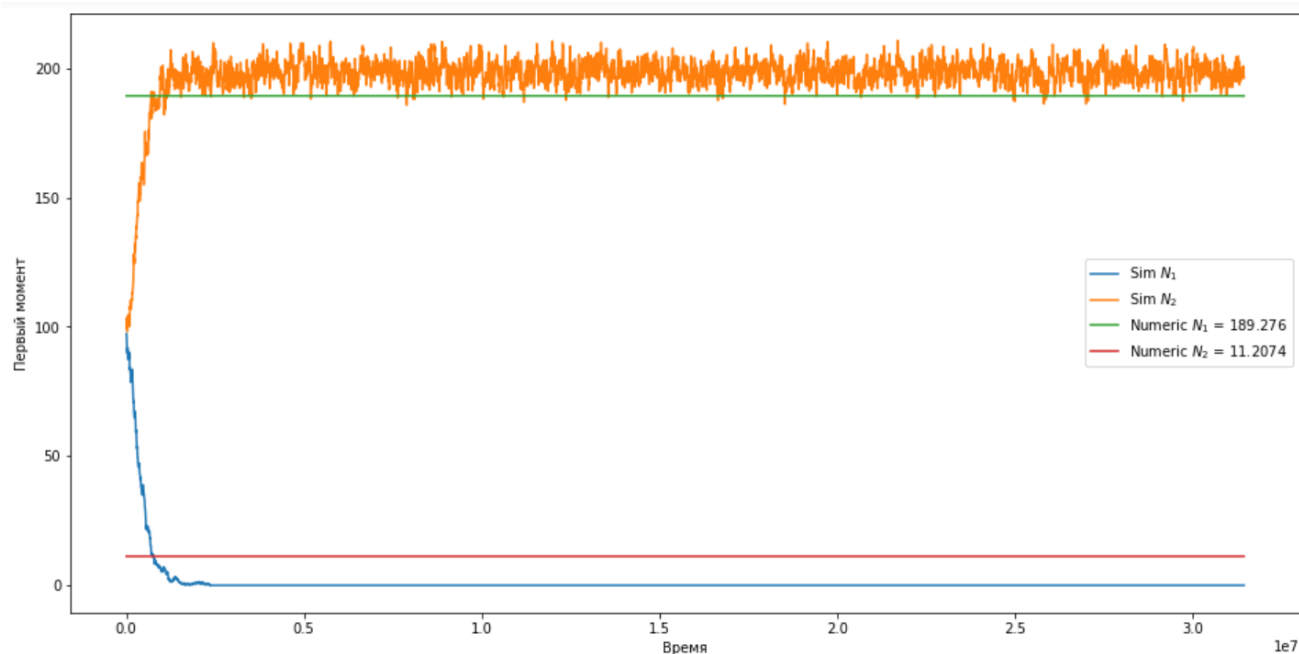


Рисунок 12

2) $d_{12} = 0.009$, $sm_2 = 0.180$

В целом поведение аналогично первому случаю (см. Рисунок 13).

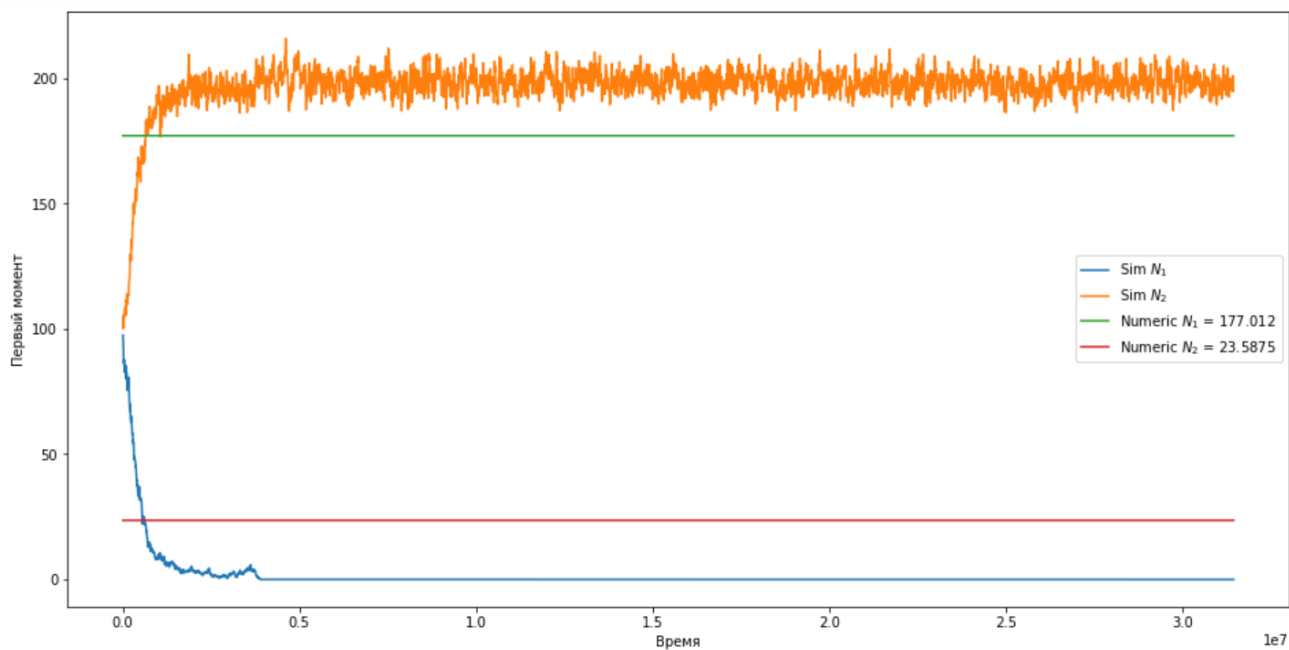


Рисунок 13

3) $d_{12} = 0.009$, $sm_2 = 0.125$

Аналогично случаям 1 и 2. На самом деле главное для нас, что симуляции стабилизировались (т.е. приблизительно вышли на плато), только тогда можно оценивать полученные результаты. (см. Рисунок 14)

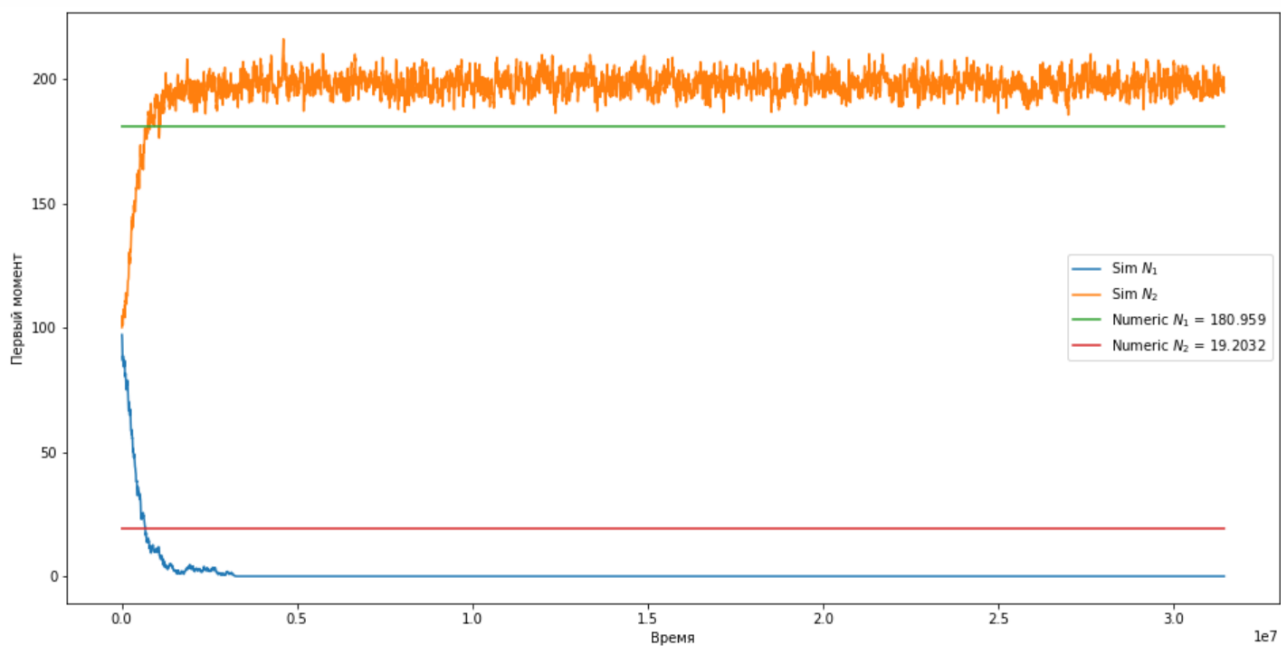


Рисунок 14

4) $d_{12} = 0.0004$, $sm_2 = 0.100$

Численный метод почти идеально приближен к симуляциям (см. Рисунок 15).

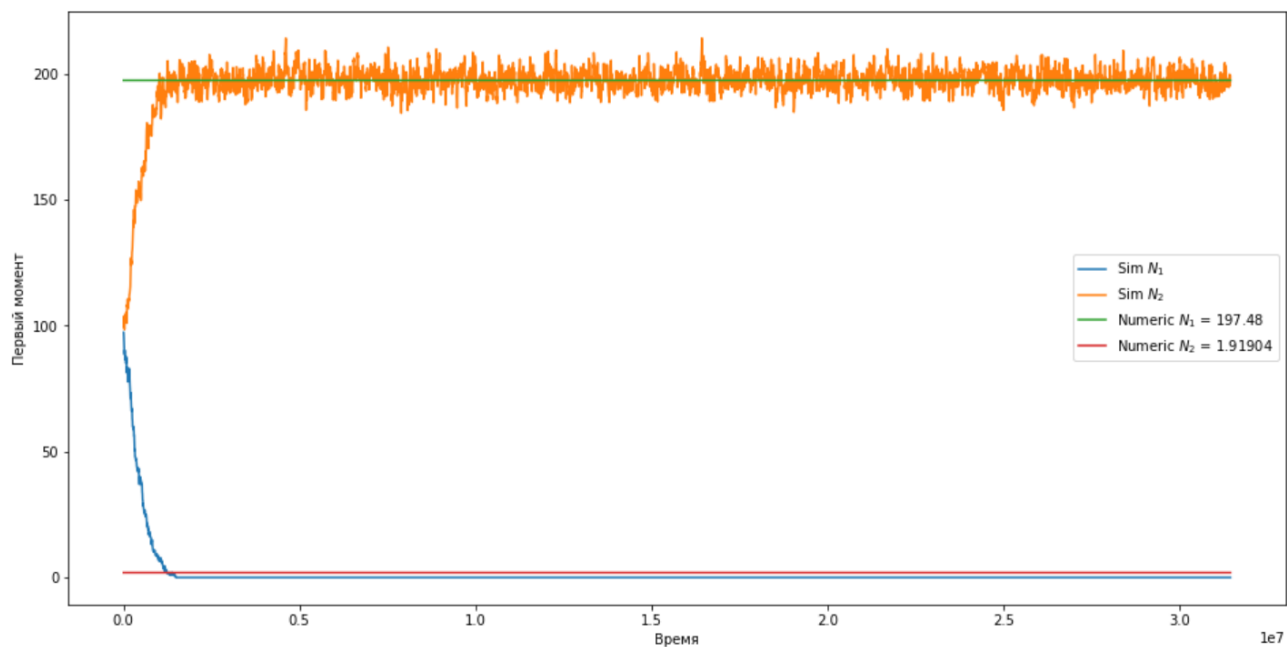


Рисунок 15

5) $d_{12} = 0.0008$, $sm_2 = 0.025$

Опять же численный метод хорошо аппроксимирует симуляции. В данном случае выживает уже первый вид, поскольку ядро рождаемости второго вида не компенсирует агрессивность первого (см. Рисунок 16).

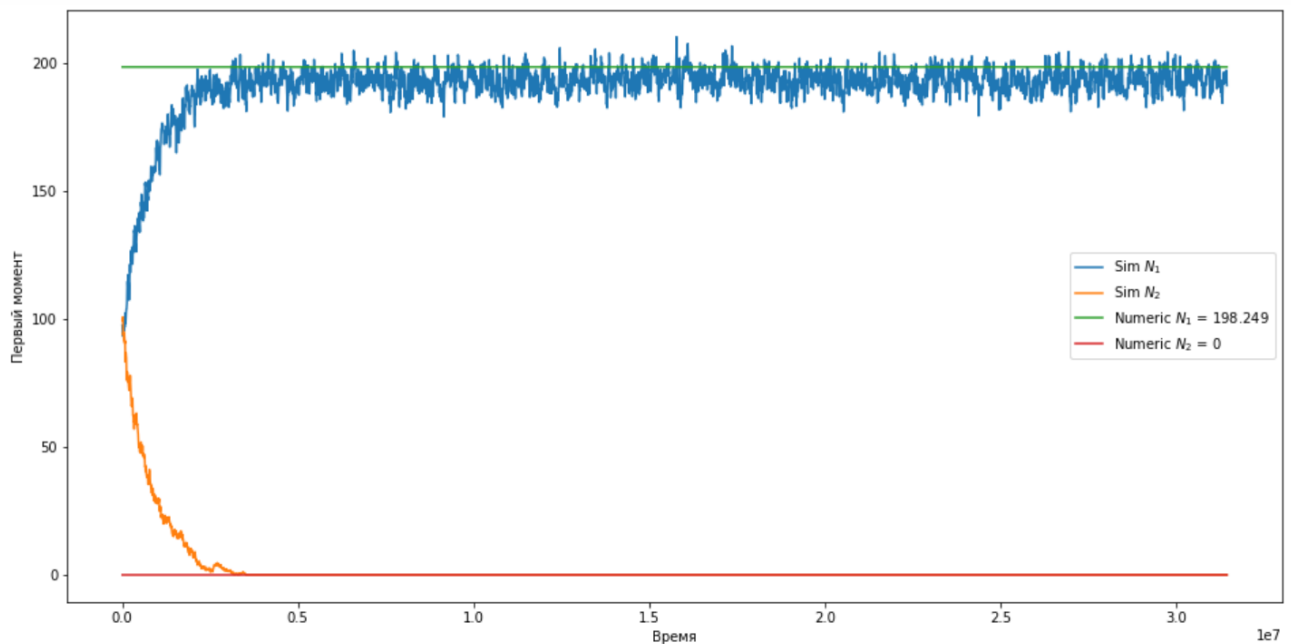


Рисунок 16

2. Сценарий НМ

По умолчанию в НМ используется следующий набор параметров:

- $b = (0.4 \ 0.4)$
- $dvec = (0.2 \ 0.2)$
- $dmat = (0.001 \ 0.001 \ 0.001 \ 0.001)$
- $sw = (sw11 \ sw12 \ sw21 \ sw22)$
- $sm = (0.04 \ 0.06)$

По сценарию НМ мы рассматриваем пространство параметров $sw11 = sw22$ и $sw12 = sw21$.

1) $sw11 = sw22 = 0.02$, $sw12 = sw21 = 0.012$ (см. Рисунок 17)

Довольно сильное расхождение между численным методом и симуляциями.

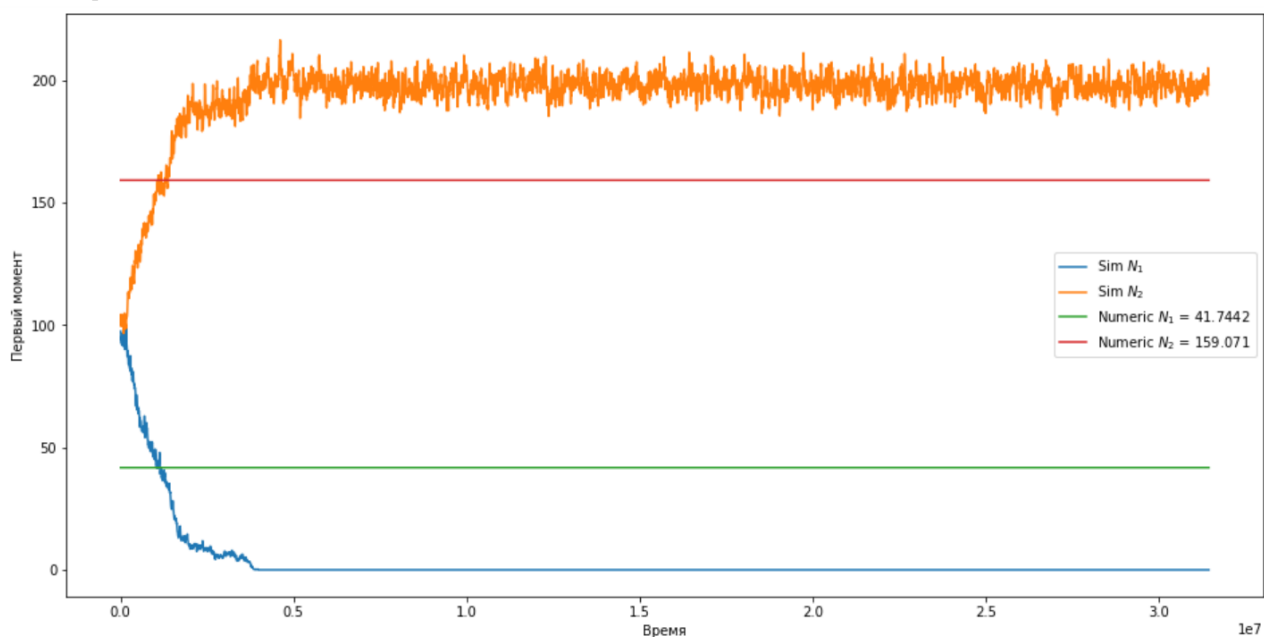


Рисунок 17

2) $sw_{11} = sw_{22} = 0.012$, $sw_{12} = sw_{21} = 0.02$ (см. Рисунок 18)

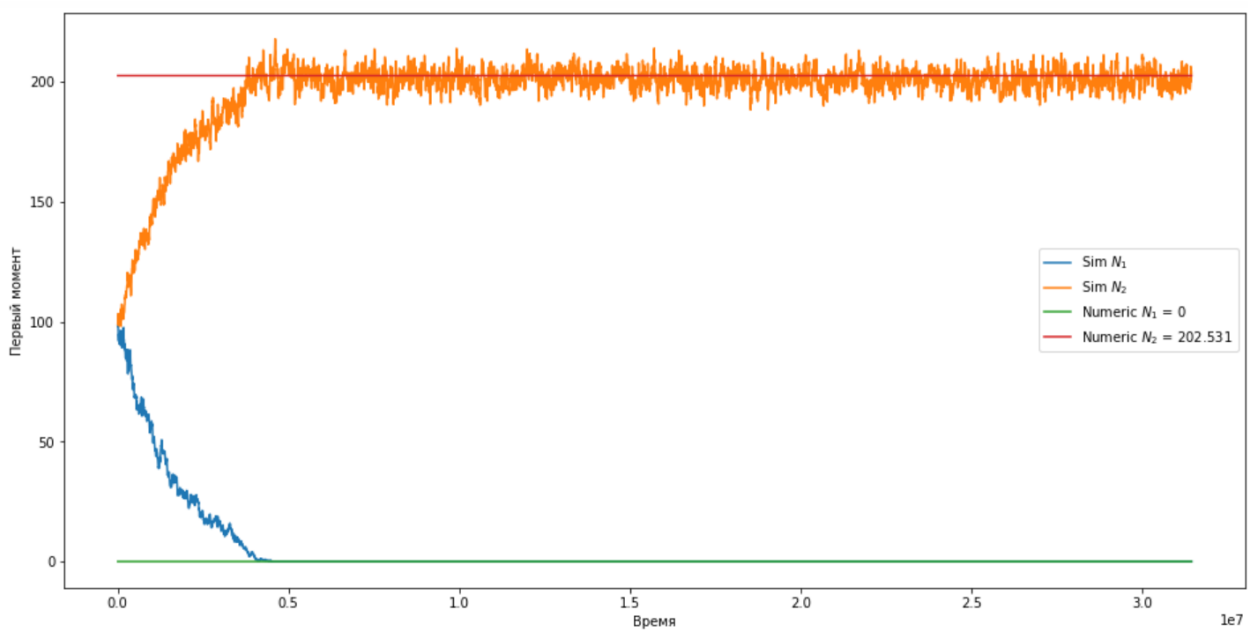


Рисунок 18

3) $sw_{11} = sw_{22} = 0.12$, $sw_{12} = sw_{21} = 0.02$ (см. Рисунок 19)

Симуляции не стабилизировались, несмотря на долгое время работы. Оценивать такой результат нельзя, значит, стоит увеличить время работы симуляций.

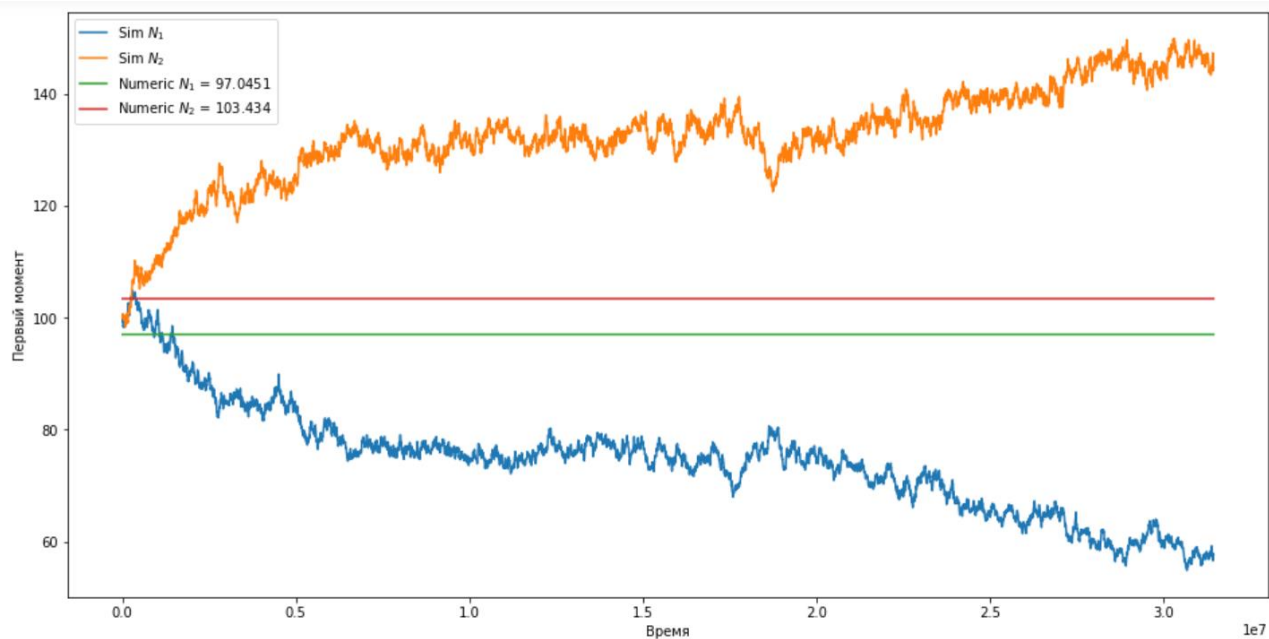


Рисунок 19

4) $sw_{11} = sw_{22} = 0.06$, $sw_{12} = sw_{21} = 0.04$ (см. Рисунок 20)

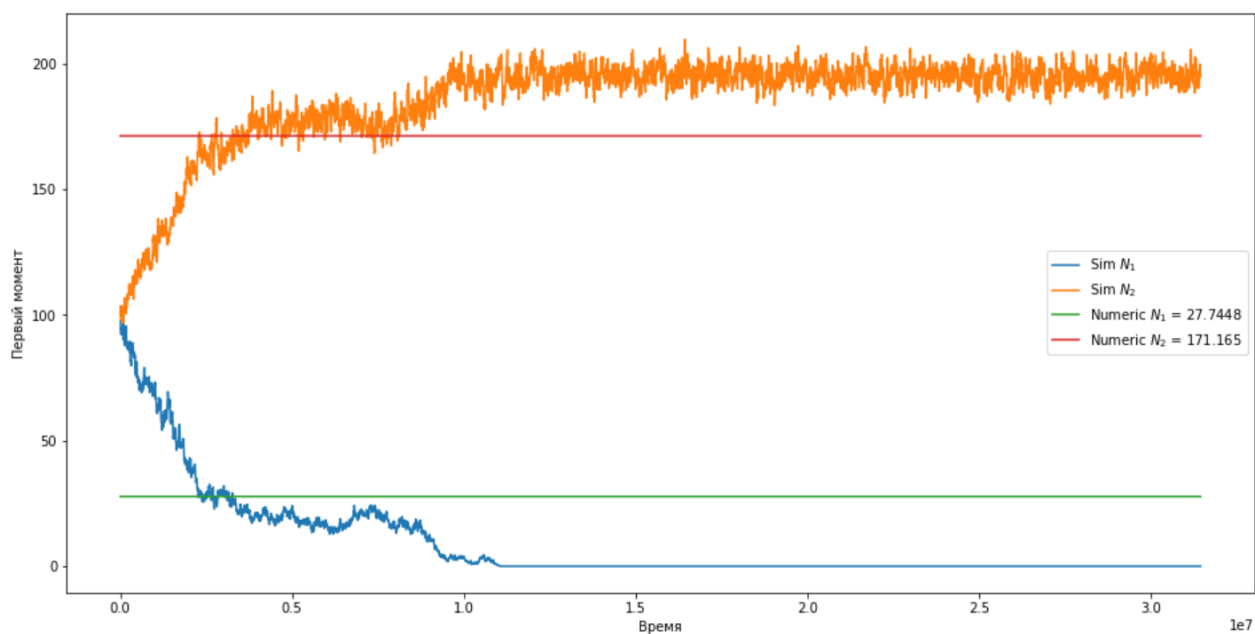


Рисунок 20

5) $sw_{11} = sw_{22} = 0.1$, $sw_{12} = sw_{21} = 0.08$ (см. Рисунок 21)

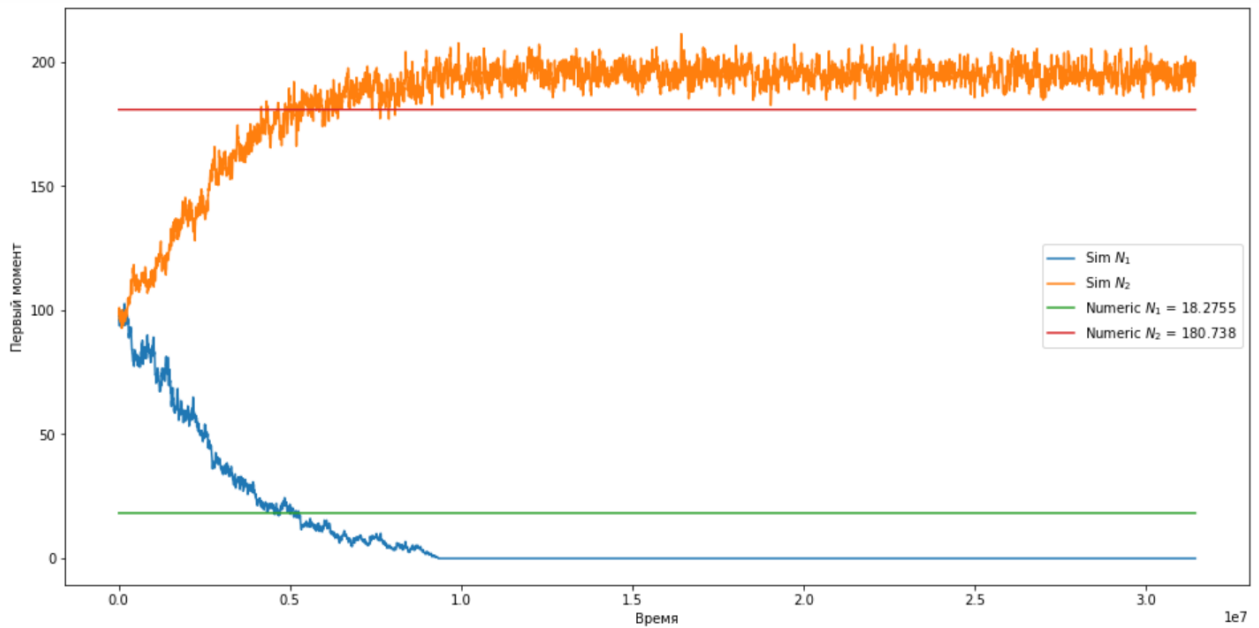


Рисунок 21

Вывод: численный метод в целом хорошо приближает симуляции, особенно в сценариях, ведущих к гибели одного из видов, однако необходимо понимать, что численный метод является лишь моделью и не отражает достоверно реальные процессы, происходящие в сообществе, в отличие от симуляций. Следовательно, при работе с численным методом стоит всегда обращаться к симуляциям, чтобы сравнить результаты и убедиться в их корректности. Несмотря на недостатки, численный метод имеет важное значение для исследований из-за своего быстрого действия.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты

Был исследован сценарий ССТО в трех размерностях с помощью численного метода: по полученным графикам видно, какие параметры приводят к вымиранию одного из видов, а какие к их сосуществованию;

Были получены графики вторых моментов ССТО, по которым можно судить о зависимости плотности пар от биологических параметров как на нулевом расстоянии друг от друга, так и максимально далеко;

Был проведен ряд вычислительных экспериментов с привлечением компьютерных симуляций для ССТО и НМ;

В конце концов, было проведено сравнение результатов работы симуляций с предпосчитанными решениями численного метода, позволяющее сделать вывод о правомерности совместного использования данных инструментов для исследования модели.

Перспективы дальнейших исследований

На мой взгляд одной из наиболее перспективных задач является автоматизация работы компьютерных симуляций. В данный момент для того, чтобы понять, стабилизировался ли график первого момента, нужно взглянуть на него и оценить визуально колебания. Таким образом, существует “проблема остановки”, то есть мы не знаем, можно ли останавливать работу симуляций, не взглянув на график. Можно задуматься о создании алгоритма, который бы сам определял, когда значение первого момента выходит на плато. Благодаря такому решению значительно сократится время работы симуляций, а также появится возможность считать их по нескольким точкам по аналогии с численным методом, получая на выходе усредненные значения. Несмотря на кажущуюся простоту, данная задача является нетривиальной, поскольку требует, помимо навыков программирования, привлечения серьезного математического аппарата.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Law R. and Dieckmann U.: A dynamical system for neighborhoods in plant communities – Ecology, 81(8), 2000, pp. 2137-2148 by the Ecological Society of America
2. Murrel D.J. and Law R.: Heteromyopia and the spatial coexistence of similar competitors – Ecology Letters, (2003) 6: 48-59
3. Nikitin A. A., Savostianov A. S. Nontrivial stationary points of two-species self-structuring communities // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. — 2017. — Vol. 41, no. 3. — P. 122–129
4. Velazquez J, Garrahan JP, Eichhorn MP (2014) Spatial Complementarity and the Coexistence of Species. PLoS ONE 9(12): e114979. doi:10.1371/journal.pone.0114979
5. Е.Г. Галкин, В.К. Зеленков, А.А. Никитин: Компьютерные симуляции и численные методы в двухвидовой модели пространственных сообществ, октябрь 2019
6. М.В. Николаев: Выпускная квалификационная работа на тему “Исследование нелинейного интегрального уравнения, возникающего в модели биологических сообществ”, МГУ им. М.В. Ломоносова, Факультет ВМиК, кафедра общей математики, Москва, 2019
7. А.С. Савостьянов: Выпускная квалификационная работа бакалавра на тему “Механизмы сосуществования стационарных биологических сообществ в пространствах разных размерностей”, НИУ ВШЭ, ФКН, ОП “Прикладная математика и информатика”, Москва 2017
8. Реализация численного метода (В.К. Зеленков):
<https://bitbucket.org/Alolag/nonlinearsolver/src/worked/>, дата обращения: 01.06.2021
9. Многовидовые компьютерные симуляции (Е.Г. Галкин, В.К. Зеленков):
<https://github.com/YegorGalkin/RcppSim>, дата обращения: 01.06.2021
10. Мой репозиторий на Github: <https://github.com/netwasted/Computer-analysis-of-the-biological-model-of-adaptive-dynamics>, дата обращения: 01.06.2021