# Robottechnika

Magyar Attila

Pannon Egyetem
Műszaki Informatikai Kar
Villamosmérnöki és Információs Rendszerek Tanszék

magyar.attila@virt.uni-pannon.hu

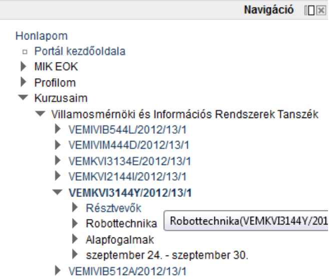
Robottechnika:

# Alapfogalmak

2015. szeptember

# Általános információk

- Tárgykód: VEMKVI3144Y
- MIK Moodle alapú kurzus (oktatas.mik.uni-pannon.hu)




- Gyakorló feladatok
- Beadandó feladatok
- Moodle alapú zh

# A tárgy Moodle oldala

ROBOTTECHNIKA (VEMKVI3144Y)

## Általános információk

A tárgy célja, hogy a hallgatók megismerkedjenek a robotika alapvető ágaival, a robotmanipulátorok elméletével, illetve a mobil robotikával.

**A tárgy helye és ideje a 2015/16 őszi félévben**

I3, szerda 8:00-11:45

**Előadó:**

Neukirchner László

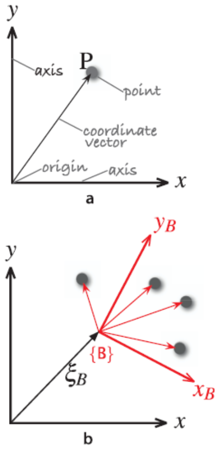
Dr. Magyar Attila

# Aláírásfeltételek

- Előadás látogatása nem kötelező
- Félévközi beadandók, kis zárthelyik, beszámolók lehetnek
- Egy zárthelyi ($100\,\%$)
- Évközi munka ($100\,\%$)
- Vizsgára bocsátás feltétele ($50\,\%$)

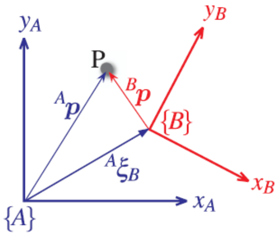
# Áttekintés

# Bevezetés




- Testek pozíciójának és orientációjának leírása egy adott környezetben.
  - Robot
  - Kamera
  - Munkadarab
  - Akadály
- Egy pont matematikai leírása
  - Koordinátarendszer (descartes)
  - Helyvektor
- De a testek több pontból állnak
  - Merev test: pontjainak egymáshoz képesti pozíciója állandó
  - Testhez rendelt $\{B\}$ koordináta rendszer
  - Merev test transzformációk: eltolás, elforgatás

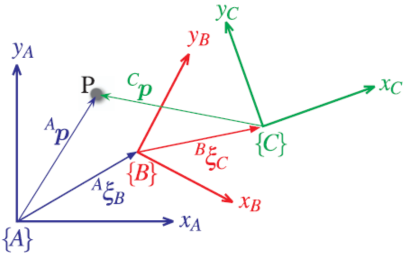
# Pozíció és orientáció




- A robot koordinátarendszer jellemzői: pozíció és orientáció
- Más koordináta rendszerben való reprezentáció: referencia koordinátarendszerhez képesti pozíció és orientáció: $\xi$
- Ahol: ${}^{A}\xi_B$ egy koordinátatranszformáció
- ${}^{A}\boldsymbol{p}$ referencia rendszerben definiált $\mathbf{p}$ pont leírható egy másik ${}^{B}\boldsymbol{p}$ koordinátarendszerrel.

$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}\xi_B \cdot {}^{B}\boldsymbol{p} $$

# Összetett koordinátatranszformációk




- Koord. transzformációk közti művelet: kompozíció ($\oplus$)

$$ {}^{A}\xi_C = {}^{A}\xi_B \oplus {}^{B}\xi_C $$

- Tehát, az $\{\mathbf{A}\}$ rendszerben definiált $p$ pont leírása a $\{\mathbf{C}\}$ rendszerrel:

$$ {}^{A}\boldsymbol{p} = \left({}^{A}\xi_B \oplus {}^{B}\xi_C\right) \cdot {}^{C}\boldsymbol{p} $$

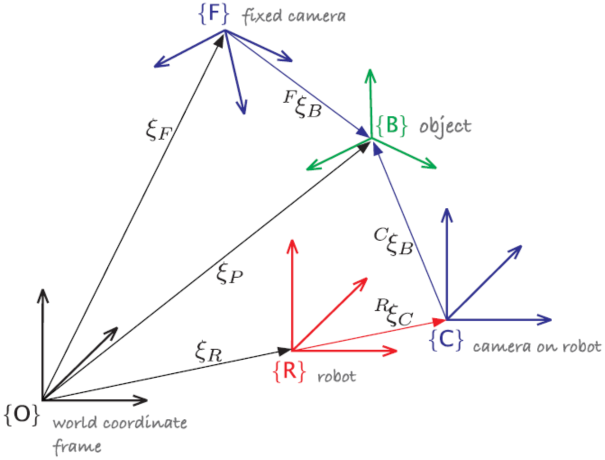
## Általánosan

A transzformációk összevonhatók:

$$ {}^{A}\xi_Z = {}^{A}\xi_B \oplus {}^{B}\xi_C \oplus \cdots \oplus {}^{Y}\xi_Z $$

# Háromdimenziós koordinátatranszformációk

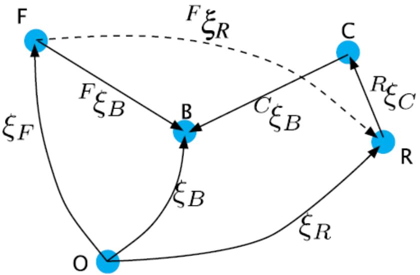
Példa: robot munkahely koordinátarendszereinek kapcsolata




- Tárgy (B) képe: $\xi_F \oplus {}^F\xi_B = \xi_R \oplus {}^R\xi_C \oplus {}^C\xi_B$
- Robot (R) képe: $\xi_F \oplus {}^F\xi_R = \xi_R$

# Háromdimenziós koordinátatranszformációk

Alternatív leírás: irányított gráfokkal




Csomópont: pozíció és orientáció

Él: relatív pozíció és orientáció

Hurok: egyenlet

$$\xi_F \oplus {}^{F}\xi_B = \xi_R \oplus {}^{R}\xi_C \oplus {}^{C}\xi_B$$
$$\xi_F \oplus {}^{F}\xi_R = \xi_R$$

- A robot relatív pozíciója és orientációja a rögzített kamerához képest

$$\ominus\xi_F \oplus \xi_F \oplus {}^{F}\xi_R = \ominus\xi_F \oplus \xi_R$$
$${}^{F}\xi_R = \ominus\xi_F \oplus \xi_R$$

- $\xi_F$ kiejthető az egyenletekből, az inverze segítségével ($\ominus\xi_F$)

# Koordinátatranszformációk algebrai leírása

## Tulajdonságok:

1. Algebrai szabályok:

$$\xi \oplus 0 = \xi, \qquad \xi \ominus 0 = \xi$$
$$\xi \ominus \xi = 0, \qquad \ominus\xi \oplus \xi = 0$$

ahol $0$ a nulla koordináta transzformációt jelenti

2. Minden koordináta transzfomációnak van inverze:

$$\ominus^{X}\xi_{Y} = {}^{Y}\xi_{X}$$

3. Koordináta transzformációk kompozíciója

$${}^{X}\xi_{Y} \oplus {}^{Y}\xi_{Z} = {}^{X}\xi_{Z}$$

4. A kompozíció nem kommutatív

$$\xi_1 \oplus \xi_2 \neq \xi_2 \oplus \xi_1$$

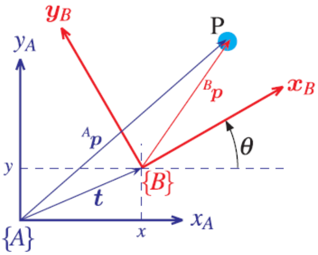
5. A koordináta transzformáció segítségével egy adott vektor kifejezhető különböző koordinátarendszerekhez képest

$${}^{X}\boldsymbol{p} = {}^{X}\xi_{Y} \cdot {}^{Y}\boldsymbol{p}$$

# Összefoglalva

1. Egy pont leírható egy vektorral, ami megadja a pont egy referencia koordinátarendszerhez képesti eltolását
2. Merev testet alkotó ponthalmaz leírható egy koordinátarendszerrel. A testet alkotó pontok jellemezhetők a testet leíró kordinátarendszerbeli eltolással
3. A koordináta transzformáció leírja az egyik koordinátarendszer másikhoz képesti pozícióját és orientációját, jele $\xi$
4. Egy pont leírható másik koordinátarendszerben is, ha a koordináta transzformáció operátorral hatunk a vektorra $(\cdot)$

# $\xi$ kétdimenziós reprezentációi




- $\mathbf{p}$ pont leírása a Descartes-rendszerben:

$$\boldsymbol{p} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} = (x, y)$$

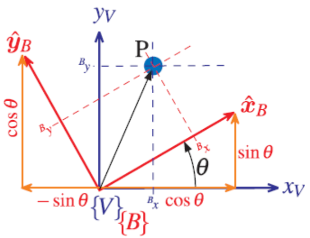
,ahol $\hat{\mathbf{x}}$, és $\hat{\mathbf{y}}$ a koord. tengelyekkel párhuzamos egységvektorok.

- Referencia koordinátarendszerhez képesti relatív pozíció és orientáció megadása:
  - Eltolással $\boldsymbol{t} = (x, y)$
  - Forgatással *pozitív irányban* $\theta$ szöggel
- Reprezentáció: ${}^A\xi_B \sim (x, y, \theta)$
- DE, a kompozíció nem kényelmes ebben a repzentációban, más megoldás kell.

$$(x_1, y_1, \theta_1) \oplus (x_2, y_2, \theta_2) \quad \rightarrow \quad ☹$$

Ötlet: kezeljük külön a forgatást és az eltolást!

# 2D Forgatás




- A $\mathbf{P}$ pont leírható egy elforgatott $\{V\}$ koordinátarendszerben:

$$\begin{aligned} {}^V\boldsymbol{p} &= {}^Vx\hat{\boldsymbol{x}}_V + {}^Vy\hat{\boldsymbol{y}}_V \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_V & \hat{\boldsymbol{y}}_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^Vx \\ {}^Vy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

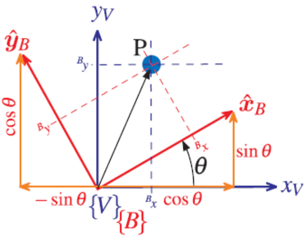
- $\{B\}$ felírható $\{V\}$-ben az egységvektoraival:

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_B & \hat{\boldsymbol{y}}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_V & \hat{\boldsymbol{y}}_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- A $\mathbf{P}$ pont képe a $\{B\}$ koordinátarendszerben:

$$\begin{aligned} {}^B\boldsymbol{p} &= {}^Bx\hat{\boldsymbol{x}}_B + {}^By\hat{\boldsymbol{y}}_B \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_B & \hat{\boldsymbol{y}}_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^Bx \\ {}^By \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# 2D Forgatás folyt.




- Behelyettesítve:

$$^B\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}}_V & \hat{\boldsymbol{y}}_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ^B x \\ ^B y \end{pmatrix}$$

- Azaz:

$$\begin{pmatrix} ^V x \\ ^V y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ^B x \\ ^B y \end{pmatrix} = {}^V\boldsymbol{R}_B \begin{pmatrix} ^B x \\ ^B y \end{pmatrix}$$

- Tehát ${}^V\boldsymbol{R}_B$ a forgatási mátrix.

# Forgatási mátrix

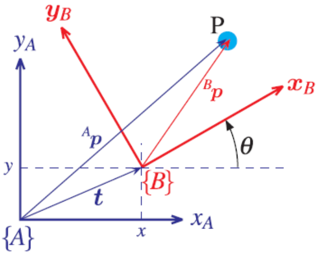
- Az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix tulajdonságai:
  - Ortonormált mátrix (oszlopai egységnyi hosszú, egymásra merőleges vektorok)
  - Ortonormált $\boldsymbol{R}$ mátrixokra $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^T$, azaz
    $$\begin{pmatrix} {}^B x \\ {}^B y \end{pmatrix} = \left({}^V\boldsymbol{R}_B\right)^{-1} \begin{pmatrix} {}^V x \\ {}^V y \end{pmatrix} = \left({}^V\boldsymbol{R}_B\right)^T \begin{pmatrix} {}^V x \\ {}^V y \end{pmatrix} = {}^B\boldsymbol{R}_V \begin{pmatrix} {}^V x \\ {}^V y \end{pmatrix}$$
  - $\det \boldsymbol{R} = +1$, azaz a forgatás nem változtatja meg a vektor hosszát
  - $\boldsymbol{R}(-\theta) = \boldsymbol{R}(\theta)^T = \boldsymbol{R}(\theta)^{-1}$
- Egy skalár helyett négy paraméterrel írjuk le a forgatást, de a szabadsági fok továbbra is egy
- Nem-minimális reprezentáció

# $\xi$ kétdimenziós reprezentációi folyt.

- Az eltolást is elvégezve megkapjuk az $\{A\}$ és $\{B\}$ koordinátarendszerek közti transzformációt

$$\begin{pmatrix} {}^{A}x \\ {}^{A}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{V}x \\ {}^{V}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{B}x \\ {}^{B}y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{B}x \\ {}^{B}y \\ 1 \end{pmatrix}$$




- Kompakt alak: homogén transzformáció

$$\left(\begin{array}{c} {}^{A}x \\ {}^{A}y \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} {}^{A}\boldsymbol{R}_{B} & \boldsymbol{t} \\ \hline \boldsymbol{0}_{1\times 2} & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} {}^{B}x \\ {}^{B}y \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

# Homogén transzformáció

## Algebrai tulajdonságok:

- Homogén transzformációs mátrix

$$\xi(x, y, \theta) \sim {}^{A}\boldsymbol{T}_B = \begin{pmatrix} {}^{A}\boldsymbol{R}_B & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

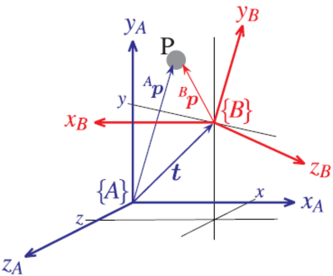
- Kompozíció a homogén transzformáció reprezentációban

$$\boldsymbol{T}_1 \oplus \boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{t}_1 \\ \mathbf{0}_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{t}_2 \\ \mathbf{0}_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{t}_2 \\ \mathbf{0}_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix}$$

- $\xi \oplus 0 = \xi$ a mátrixalgebrában $\boldsymbol{T}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}$-nak felel meg, azaz $0 \mapsto \boldsymbol{I}$
- $\xi \ominus \xi = 0 \;\mapsto\; \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{I}$, azaz $\ominus\xi \;\mapsto\; \boldsymbol{T}^{-1}$

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}^T & -\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix}$$

# $\xi$ háromdimenziós reprezentációi

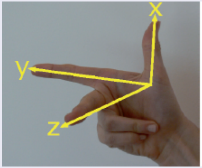


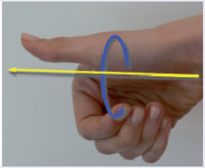

- Adott $\mathbf{p}$ pont leírása a kétdimenziós esetre vezethető vissza:

$$\boldsymbol{p} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}} = (x, y, z)$$

- Ahol a referencia koordinátarendszerhez képesti relatív pozíció és orientáció:
  - Eltolás $\boldsymbol{t} = (x, y, z)$ (mint eddig)
  - A forgatás az előbbi módszerrel nehézkes
  - Euler forgatási tétele: Tetszőleges forgatás felbontható koordinátatengelyek körüli elemi forgatások sorozataként.

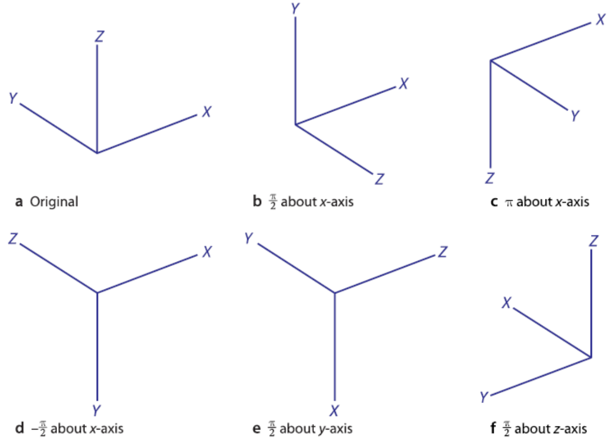
## Jobbkéz szabály





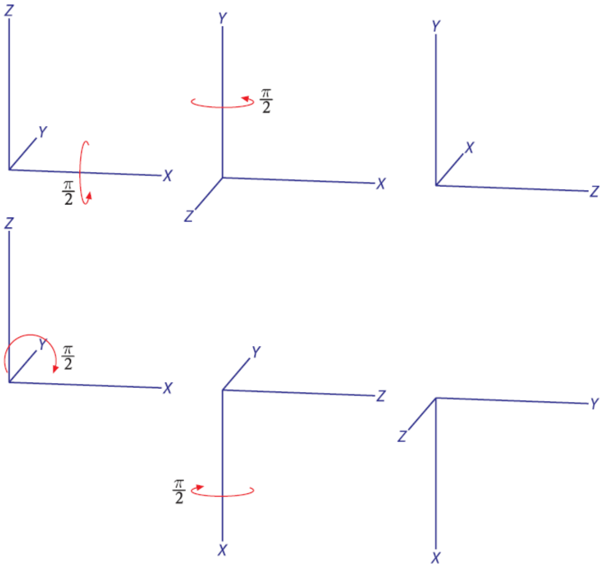
# Forgatás három dimenzióban

## Példa (Elemi forgatások sorozata)



# Forgatás három dimenzióban

## Példa (A forgatás nem kommutatív)



# Ortonormált forgatási mátrixok

- Elemi forgatási mátrix a kétdimenziós eset általánosításaként

$$\begin{pmatrix} {}^{A}x \\ {}^{A}y \\ {}^{A}z \end{pmatrix} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{B} \begin{pmatrix} {}^{B}x \\ {}^{B}y \\ {}^{B}z \end{pmatrix}, \qquad {}^{A}\boldsymbol{R}_{B} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ forgatási mátrix}$$

- Tulajdonságok: $\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}^{-1}$ és $\det \boldsymbol{R} = 1$
- Koordinátatengelyek körüli elemi forgatások

$$\boldsymbol{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Összetett forgatások

- Euler forgatási tétele: Tetszőleges forgatás a háromdimenziós térben leírható *legfeljebb három* elemi forgatás kompozíciójaként.
- $3 \times 3$-as forgatási mátrix
  - 9 paraméter
  - 3 korlátozás (oszlopok egységnyi hosszúak)
  - 3 korlátozás (oszlopok derékszögűek)
  - 3 szabadsági fok

## Példa (Összetett forgatás)

$$\boldsymbol{R}_y(\frac{\pi}{2})\boldsymbol{R}_x(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Forgatások leírása Euler szögekkel

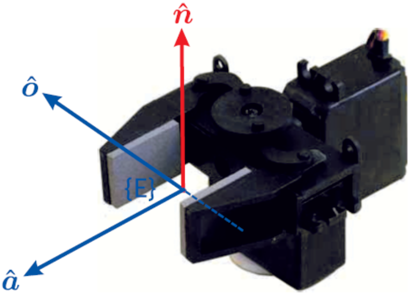
- Euler: Tetszőleges forgatás előáll három egymásutáni elemi forgatás kompozíciójaként (az egymást követő forgatások nem történhetnek ugyanazon a tengely körül) $\rightarrow$ $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ kombináció
- Euler-féle forgatási sorozatok: van ismétlődés
  $XYX, XZX, YXY, YZY, ZXZ, ZYZ$
- Cardan-féle forgatási sorozatok: nincs ismétlődés
  $XYZ, XZY, YZX, YXZ, ZXY, ZYX$
- Általánosan használt Euler szögek
  - $ZYZ$

    $$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_z(\phi)\boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{R}_z(\psi) \quad \text{jelölés:} \quad \boldsymbol{\Gamma} = (\phi, \theta, \psi)$$

  - $XYZ$, azaz roll-pitch-yaw, fordulás-bólintás-billenés

    $$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_x(\phi_r)\boldsymbol{R}_y(\theta_p)\boldsymbol{R}_z(\psi_y)$$

# Az orientáció leírása két vektorral




- Robotmanipulátorok esetén használatos
- A $z$-tengely irányába mutat a szerszám (approach)

$$\hat{\boldsymbol{a}} = (a_x, a_y, a_z)$$

- Az $y$-tengely orientációs vektor

$$\hat{\boldsymbol{o}} = (o_x, o_y, o_z)$$

- A fenti kettő vektoriális szorzata a harmadik irányvektor

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \hat{\boldsymbol{o}} \times \hat{\boldsymbol{a}}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{pmatrix}$$

# Tetszőleges vektor körüli forgatás

- Tetszőleges összetett forgatás (orientáció) leírható valamely tengely körüli elforgatásként
- Paraméterek (látszólag négy)
  - Tengely iránya: $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$
  - Forgatási szög: $\theta$
- $\boldsymbol{R}$-ből kinyerhetők: sajátérték, sajátvektor

## Sajátérték, sajátvektor

$\boldsymbol{A}$ sajátértéke $\lambda_i$ a hozzátartozó $\boldsymbol{v}_i$ sajátvektorral $(i = 1, 2, 3)$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$$

Geometriai jelentés: $\boldsymbol{v}_i$ irányban $\lambda_i$ mértékben nyújt.

- $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix esetén a sajátértékek

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \cos\theta \pm \boldsymbol{i}\sin\theta$$

# Tetszőleges vektor körüli forgatás folyt.

- A forgatás tengelyére ($\boldsymbol{v}$) nem hat $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$$

- Vektor és szög ismeretében felírható a forgatási mátrix a Rodrigues képlet segítségével

## Rodrigues képlet

Adott $\boldsymbol{v}$ a forgatás tengelyének irányvektora, és $\theta$ pedig a forgatási szög, ekkor a forgatás mátrixa:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}_{3\times 3} + \sin\theta \boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}) + (1 - \cos\theta)(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^T - \boldsymbol{I}_{3\times 3})$$

,ahol $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v})$ ferdén szimmetrikus mátrix: $(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v})^T = -\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}))$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

# Egységkvaterniók

- Kvaternió = hiperkomplex szám

$$\mathring{q} = s + \boldsymbol{v} = s + v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k}$$

ahol $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ és $\boldsymbol{k}$ egymásra merőleges komplex egységvektorok, melyekre

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{ijk} = -1$$

- Jelölés: $\mathring{q} = s, < v_1,\ v_2,\ v_3 >$
- Egységkvaternió: $|\mathring{q}| = s^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$
- $\mathring{q}$ egy $\hat{\boldsymbol{n}}$ irányú tengely körüli $\theta$ szöggel való forgatást ír le, ahol

$$s = \cos\frac{\theta}{2}, \quad \boldsymbol{v} = \sin\frac{\theta}{2}\hat{\boldsymbol{n}}$$

# Egységkvaterniók folyt.

## Algebrai tulajdonságai:

- Kvaternió $\sim$ koordináta transzformáció ($\mathring{q} \sim \xi$)
- Kompozíció:

$$\mathring{q}_1 \oplus \mathring{q}_2 \mapsto s_1 s_2 - \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2, < s_1 \boldsymbol{v}_2 + s_2 \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2 >$$

- Inverz(= konjugálás):

$$\ominus \mathring{q} \mapsto \mathring{q}^{-1} = s, < -\boldsymbol{v} >$$

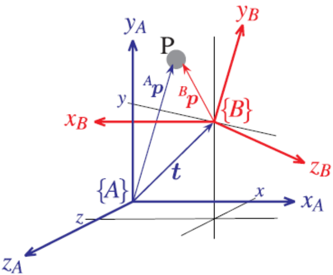
- Inverzelem: $0 \mapsto 1, < 0, 0, 0 >$

Példa: Egy $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ vektor forgatása

$$\mathring{q} \cdot \boldsymbol{v} \mapsto \mathring{q} \oplus \mathring{q}(\boldsymbol{v}) \oplus \mathring{q}^{-1}$$

,ahol $\mathring{q}(\boldsymbol{v}) = 0, < \boldsymbol{v} >$ egy ún. tiszta kvaternió.

# Eltolás és forgatás három dimenzióban

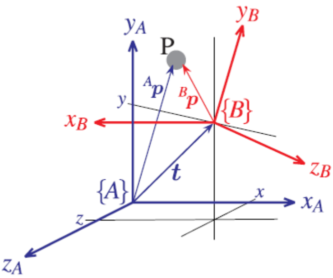



- Orientáció (forgatás) és pozíció (eltolás) együtt
- Leggyakrabban használt reprezentációk
  - Egységkvaterniók ($\xi \sim (\boldsymbol{t}, \mathring{q})$)
  - $4 \times 4$ -es homogén transzformációs mátrix ($\xi \sim \boldsymbol{T}$)

## Összefoglalva:

- Egységkvaternió: $\xi \sim (\boldsymbol{t}, \mathring{q})$, ahol $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^3$ eltolás és $\mathring{q} \in \mathbb{Q}$ forgatás
  - Kompozíció: $\xi_1 \oplus \xi_2 = (\boldsymbol{t}_1 + \mathring{q}_1 \cdot \boldsymbol{t}_2, \mathring{q}_1 \oplus \mathring{q}_2)$
  - Invertálás: $\ominus\xi = (-\mathring{q}^{-1} \cdot \boldsymbol{t}, \mathring{q}^{-1})$
  - Koordináta transzformáció: ${}^A\boldsymbol{p} = {}^A\xi_B \cdot {}^B\boldsymbol{p} = \mathring{q} \cdot {}^B\boldsymbol{p} + \boldsymbol{t}$

# Eltolás és forgatás három dimenzióban



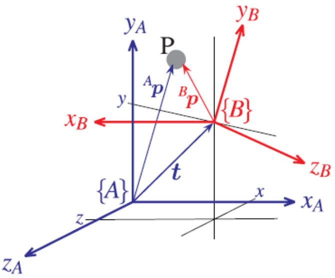

- Homogén transzformációs mátrix $({}^A\boldsymbol{T}_B)$ háromdimenziós esetben

$$\begin{pmatrix} {}^Ax \\ {}^Ay \\ {}^Az \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^A\boldsymbol{R}_B & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}_{1\times 3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^Bx \\ {}^By \\ {}^Bz \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Kompozíció $\boldsymbol{T}_1 \oplus \boldsymbol{T}_2 \mapsto \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2$

$$\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{t}_1 \\ \boldsymbol{0}_{1\times 3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{t}_2 \\ \boldsymbol{0}_{1\times 3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{t}_2 \\ \boldsymbol{0}_{1\times 3} & 1 \end{pmatrix}$$

# Eltolás és forgatás három dimenzióban




- Egységelem:

$$\xi \oplus 0 = \xi \mapsto \boldsymbol{T}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}, \qquad \text{így } 0 \mapsto \boldsymbol{I}$$

- Inverz $\xi \ominus \xi = 0 \mapsto \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{I}$, azaz $\ominus\boldsymbol{T} \mapsto \boldsymbol{T}^{-1}$

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}^T & -\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{pmatrix}$$

# Összefoglalás

- Pozíció és orientáció leírása
  - Pozíció - eltolás
  - Orientáció - forgatás $\rightarrow$ háromdimenziós esetben bonyolult
  - Sokféle matematikai objektum használható

# Ajánlott irodalom


- P. Corke.
  *Robotics, Vision and Control - Fundamental Algorithms in MATLAB*.
  Springer, 2011.
- R. Siegwart and I. R. Nourbakhsh.
  *Introduction to Autonomous Mobile Robots*.
  MIT Press, 2004.