

Polyakov-Formeln für Riemannsche Flächen unendlichen Volumens

Diplomarbeit



Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik

eingereicht von: Robin Neumann
geboren am: 31.05.1986
in: Perleberg

Gutachter(innen): Prof. Dr. Andreas Juhl
Prof. Dr. Helga Baum

eingereicht am: verteidigt am:

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
2	Der Wärmeleitungskern geschlossener Mannigfaltigkeiten	9
2.1	Spektraltheorie des Laplace-Operators	9
2.2	Die Wärmeleitungsgleichung	10
2.3	Die Spur des Wärmeleitungskerns	12
3	Konforme Geometrie	15
3.1	L^2 -Struktur und konforme Variation	15
3.2	Das Prinzip von Duhamel	17
4	Die Funktionaldeterminante des Laplace-Beltrami-Operators	19
4.1	ζ -regularisierte Funktionaldeterminante	19
4.2	Polyakov-Formel für geschlossene Flächen	23
5	Trichterflächen	33
5.1	Hyperbolische Flächen	33
5.2	Trichterenden	34
5.3	Integration entlang Trichtern	37
5.4	Poincaré-Einstein-Metriken	38
6	Renormalisierung auf konform-kompakten Mannigfaltigkeiten	41
6.1	Das renormalisierte Volumen einer Poincaré-Einstein-Mannigfaltigkeit . . .	41
6.2	Riesz-Renormalisierung für konform-kompakte Mannigfaltigkeiten	42
6.3	Mellin-Transformation und Polyhomogenität	45
6.4	Vergleich von Riesz- und Hadamard-Renormalisierung	47
6.5	Der renormalisierte Satz von Gauß-Bonnet	49
7	Der Wärmeleitungskern von edge-Mannigfaltigkeiten	51
7.1	edge-Metriken	51
7.2	Der Wärmeleitungsraum des \mathbb{R}^m	52
7.3	Der Wärmeleitungsraum einer Riemannschen Mannigfaltigkeit	53
7.4	Der Wärmeleitungsraum einer edge-Metrik	55

8	Eine Polyakov-Formel für die renormalisierte Determinante	59
8.1	Die renormalisierte Spur	59
8.2	Die Asymptotik der renormalisierten Spur	60
8.3	Die renormalisierte Funktionaldeterminante	62
8.4	Polyakov-Formel	64

1 Einführung

Die Determinante selbstadjungierter Endomorphismen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen stimmt mit dem Produkt der Eigenwerte überein. Dieses Konzept kann durch **ζ -Regularisierung** auf Operatoren zwischen unendlichdimensionalen Hilberträumen erweitert werden, sofern das Spektrum des betrachteten Operators ausschließlich aus Eigenwerten besteht. Das wichtigste Beispiel bilden Laplace-Operatoren auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten, wie der Laplace-Beltrami-Operator auf Funktionen. Die Idee einer sogenannten **Funktionaldeterminante** des Laplace-Beltrami-Operators durch ζ -Regularisierung geht zurück auf [RS71] und fand seitdem breite Anwendung in der mathematischen Physik [Haw77, Dun09].

In seiner 1981 veröffentlichten Arbeit [Pol81] untersuchte A.M.POLYAKOV im Rahmen der Stringtheorie das Verhalten der Determinante des Laplace-Beltrami-Operators auf geschlossenen Riemannschen Flächen unter konformer Variation der Riemannschen Metrik. Er entdeckte folgende Formel, welche die Funktionaldeterminante von Δ mit der Gaußkrümmung in Beziehung setzt:

Satz 1.1 ([Pol81]) *Sei M eine geschlossene Fläche, g_0 eine Riemannsche Metrik auf M und $g_1 = e^{2\varphi}g_0$ für ein $\varphi \in C^\infty(M)$. Es gelte weiterhin $\text{vol}(M, g_0) = \text{vol}(M, g_1)$. Δ_0 bezeichne den Laplace-Beltrami-Operator zu g_0 und Δ_1 den Laplace-Beltrami-Operator zu g_1 . Dann gilt:*

$$\log \frac{\det \Delta_1}{\det \Delta_0} = -\frac{1}{12\pi} \int_M \{|\nabla \varphi|_0^2 + 2\varphi K_0\} d\text{vol}_{g_0}. \quad (1.1)$$

An die Struktur der letzten Gleichung angelehnt, werden Formeln, welche die konforme Variation der log-Determinante von Δ als Integral über Krümmungsterme darstellen, heute **Polyakov-Formeln** genannt. Für den Fall $\partial M \neq \emptyset$ konnte O.ALVAREZ 1983 eine ähnliche Formel zeigen [Alv83].

Die Polyakov-Formeln der frühen 1980er Jahre wurden von B.OSGOOD, R.PHILLIPS und P.SARNAK verwendet, um Resultate über die Determinante des Laplace-Beltrami-Operators auf kompakten Flächen zu beweisen. In [OPS88] betrachteten sie $\det \Delta_g$ als Funktion in Abhängigkeit der Metrik g innerhalb einer konformen Klasse bei konstantem Volumen. Eine ihrer Fragestellungen lautete dann: Gibt es Bedingungen an g , so dass $\det \Delta_g$ extremal wird? Die Antwort gibt der folgende Satz:

Satz 1.2 ([OPS88]) *Sei M eine geschlossene Fläche und $[g]$ eine Menge konform äquivalenter Riemannscher Metriken gleichen Volumens auf M . Innerhalb der Menge dieser Metriken ist die Determinante des Laplace-Beltrami-Operators für Metriken konstanter Krümmung maximal.*

Die Ideen aus [OPS88] wurden von P.ALBIN, C.L.ALDANA und F.ROCHON aufgegriffen. In ihrer Arbeit [AAR13] konnten die Autoren ähnliche Resultate für **konform-kompakte Flächen** zeigen. Derartige Flächen werden von den Autoren auch als **Flächen mit Trichterenden** genannt. Diese Bezeichnung ist an die Terminologie der Klassifikation der Enden zweidimensionaler hyperbolischer Mannigfaltigkeiten angelehnt: Das Ende einer hyperbolischen Fläche unendlichen Volumens erinnert, sofern man die Fläche geeignet in den \mathbb{R}^3 einbetten kann, an einen Trichter.

Das Spektrum des Laplace-Beltrami-Operators auf derartigen Flächen ist nicht mehr rein diskret. Insbesondere kann eine Determinante in diesem Fall nicht durch ζ -Regularisierung allein definiert werden. Einen Ausweg bieten Renormalisierungsverfahren, welche formal divergenten Integralen unter bestimmten Voraussetzungen einen endlichen Wert zuordnen. Die zur ζ -Regularisierung verwendete ζ -Funktion ist eine meromorph nach \mathbb{C} fortsetzbare komplexe Funktion, welche für kompakte Flächen auf einer Halbebene der Form $D := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1\}$ folgende Darstellung erlaubt:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr} (e^{-t\Delta} - \mathcal{P}_{\ker \Delta}) \, ds \quad \forall s \in D. \quad (1.2)$$

$\mathcal{P}_{\ker \Delta}$ bezeichnet dabei die orthogonale Projektion auf $\ker \Delta$. Das Problem im nichtkompakten Fall ist, dass die Operatoren $e^{-t\Delta}$ im Allgemeinen keine Spurklasseoperatoren sind. Jedoch kann die Spur wiederum als Integral dargestellt werden, welches sich renormalisieren lässt. Auf diese Weise kann man eine **renormalisierte Spur** definieren und über obige Darstellung der ζ -Funktion schließlich eine **renormalisierte Funktionaldeterminante** für den Laplace-Beltrami-Operator bilden, indem man die Spur durch ihr renormalisiertes Pendant ersetzt.

Die in [AAR13] benutzten Methoden, **Riesz-** und **Hadamard-Renormalisierung**, bieten dazu zwei verschiedene Ansätze ein divergentes Integral der Gestalt

$$\int_M f \, d\operatorname{vol}_g,$$

für eine Funktion f auf einer Fläche mit Trichterenden zu renormalisieren. Für die Riesz-Renormalisierung wird unter gewissen Anforderungen an den Integranden f im Zusammenspiel mit einer randdefinierenden Funktion x die Abbildung $\zeta_f(z) = \int_M x^z f \, d\operatorname{vol}_g$ meromorph nach \mathbb{C} fortgesetzt. Der konstante Term der Laurent-Reihe um $z = 0$ wird dann als neues,

renormalisiertes Integral festgelegt.

Für die Hadamard-Renormalisierung wird das Integral auf kompakten Untermannigfaltigkeiten $M_\varepsilon \subset M = M_0$ betrachtet. Für $\varepsilon > 0$ ergibt sich ein endliches Integral, dessen Asymptotik für $\varepsilon \rightarrow 0$ beobachtet wird. Der konstante Term in der asymptotischen Entwicklung für $\varepsilon \rightarrow 0$ wird dann als Hadamard-renormalisiertes Integral definiert. Auch dies geschieht unter bestimmten Anforderungen an den Integranden f , welche die Existenz dieser asymptotischen Entwicklung sicherstellen.

Es ist interessant, dass diese beiden Konzepte in der Situation von [AAR13] übereinstimmen. Ist $f \operatorname{dvol}_g$ bereits integrierbar, so stimmt das renormalisierte Integral mit den klassischen Integral überein. Diese Eigenschaft ermöglicht es, eine renormalisierte Determinante derart zu definieren, dass sie für kompakte Flächen mit der ζ -regularisierten Funktionaldeterminante übereinstimmt.

Mit diesen Begriffen konnten ALBIN, ALDANA und ROCHON schließlich eine Polyakov-Formel für nichtkompakte Flächen mit Trichterenden beweisen. Mit einer geeigneten Einschränkung des konformen Metrikwechsels $g(\tau) = e^{\omega(\tau)}g_0$ einer gegebenen Trichterfläche (M, g_0) zeigten sie die nachfolgende Formel, auf deren Einzelheiten in Kapitel 8, Satz 8.1 ausführlich eingegangen wird:

$$\partial_\tau \log \det \Delta_\tau = -\frac{1}{24\pi} \int_M^R \omega'(\tau) R_\tau dA_\tau. \quad (1.3)$$

Hier bezeichne R_τ die Skalarkrümmung der Fläche $(M, g(\tau))$ und für geeignete Funktionen $f \in C^\infty(M)$ bezeichne $\int_M^R f \operatorname{dvol}_g$ das bereits oben erwähnte renormalisierte Integral, welches in Kapitel 6 detailliert studiert wird.

Unter geeigneten Bedingungen kann diese Gleichung durch Integration in eine ähnliche Struktur wie (1.1) gebracht werden.

2 Der Wärmeleitungskern geschlossener Mannigfaltigkeiten

2.1 Spektraltheorie des Laplace-Operators

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n . M heißt **(geodätisch) vollständig**, falls sich jede Geodäte $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ zu einer Geodäte definiert auf ganz \mathbb{R} fortsetzen lässt. In diesem Falle ist M nach dem Satz von Hopf-Rinow als metrischer Raum (mit der Abstandsfunktion definiert durch g) vollständig. Alle Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die in dieser Arbeit besprochen werden, sind, unabhängig von ihrer Kompaktheit, (geodätisch) vollständig. Für die nächste Definition wird noch keine Kompaktheit von (M, g) vorausgesetzt.

Betrachtet man unbeschränkte lineare Operatoren auf einem Hilbertraum \mathcal{H} , so lässt man als Definitionsbereich auch Teilmengen $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$, welche dicht in \mathcal{H} liegen, zu. Ein wichtiges Beispiel ist der *Laplace-Beltrami-Operator*:

Definition 2.1 Der **Laplace-Beltrami-Operator** auf Funktionen $\Delta : C_0^\infty(M) \rightarrow L^2(M, g)$ ist gegeben durch

$$\Delta f = -\operatorname{div} \operatorname{grad} f \quad \forall f \in C_0^\infty(M). \quad (2.1)$$

Im Falle des Laplace-Beltrami-Operators ist der Definitionsbereich zunächst nur $C_0^\infty(M)$. Dieser Raum der kompakt getragenen Funktionen liegt dicht in $L^2(M, g)$ und der Laplace-Beltrami-Operator ist auf diesem Definitionsgebiet **wesentlich selbstadjungiert**, d.h. sein Abschluss ist ein selbstadjungierter Operator $\Delta : \mathcal{D}(\Delta) \rightarrow L^2(M, g)$, wobei $C_0^\infty(M) \subset \mathcal{D}(\Delta)$. In dieser Arbeit wird nicht zwischen dem Laplace-Beltrami-Operator und seinem Abschluss unterschieden: Wann immer es benötigt wird, ist mit dem Laplace-Beltrami-Operator sein Abschluss gemeint. Um die Existenz zu gewährleisten, setzen wir (geodätische) Vollständigkeit der Mannigfaltigkeit (M, g) voraus. In diesem Falle ist die selbstadjungierte Fortsetzung sogar eindeutig. Sie kann durch die Konstruktion der *Friedrichsschen Erweiterung* gewonnen werden (siehe [Tay10], A.8 und [Bor07], A.3).

Definition 2.2 Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter linearer Operator. Dann ist die **Resolventmenge** von A die Menge

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda \operatorname{Id}) : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{H} \text{ ist invertierbar}\}. \quad (2.2)$$

Das Komplement $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ nennt man **Spektrum** von A .

Für den gesamten Rest dieses Abschnitts, einschließlich aller Unterabschnitte über den Wärmeleitungskern geschlossener Flächen bezeichne (M, g) stets eine *kompakte* Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim M = n$. Auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten (M, g) sind alle Funktionen kompakt getragen, d.h. $C^\infty(M) = C_0^\infty(M)$. Der Laplace-Beltrami-Operator ist also auf $C^\infty(M)$ wesentlich selbstadjungiert. Der exakte Definitionsbereich seines Abschlusses ist gegeben durch den Sobolev-Raum $H^2(M, g)$:

$$H^2(M, g) := \{f \in L^2(M, g) \mid \Delta f \in L^2(M, g)\}. \quad (2.3)$$

Man betrachte das zum Laplace-Beltrami-Operator gehörende Eigenwertproblem

$$\Delta \phi + \lambda \phi = 0. \quad (2.4)$$

Ist diese Gleichung für eine geeignete Funktion $\phi \in H^2(M, g)$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt, so heißt ϕ **Eigenfunktion** von Δ zum **Eigenwert** λ . Das Spektrum des Laplace-Beltrami-Operators auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten besteht nur aus Eigenwerten, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 2.1 *Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist das Spektrum des Laplace-Beltrami-Operators Δ rein diskret. Es besteht nur aus Eigenwerten*

$$\sigma(\Delta) = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty\} \subset \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Alle korrespondierenden Eigenräume sind endlichdimensional, insbesondere ist $\lambda_0 = 0$ ein einfacher Eigenwert. Die Eigenwerte häufen sich nur im Unendlichen und die Menge der zugehörigen Eigenfunktionen $\{\phi_i\}_{i=0}^\infty$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem für $L^2(M, g)$

Eine elegante Beweisskizze dieses Theorems findet man in [Bor07], A.3. Ausführlichere Betrachtungen zu diesem Satz sind in [Ros97] sowie [Jos08] zu finden.

2.2 Die Wärmeleitungsgleichung

Die folgende Definition benötigt keine Kompaktheit der unterliegenden Mannigfaltigkeit M .

Definition 2.3 Zum Laplace-Beltrami-Operator Δ_g einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) gehört das Anfangswertproblem für $f \in C^\infty(\overline{M} \times \mathbb{R}^+)$

$$\begin{aligned} (\partial_t + \Delta_g)f(x, t) &= 0, \\ f(x, 0) &= u_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Diese parabolische Differentialgleichung wird als **Wärmeleitungsgleichung** bezeichnet.

Definition 2.4 Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und L ein linearer partieller Differentialoperator auf M . Es sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x, y, t)$ eine stetige Funktion auf $M \times M \times (0, \infty)$, welche zweimal stetig differenzierbar in der Variablen x , einmal stetig differenzierbar in der Variablen t ist und folgenden Bedingungen genügt:

$$L_x \mathcal{K}(x, y, t) = 0, \quad (2.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_M \mathcal{K}(x, y, t) f(x) d\text{vol}_g(x) = f(y), \quad (2.7)$$

für jede stetige, beschränkte Funktion f auf M . Dann heißt \mathcal{K} **Fundamentallösung** des zu L gehörenden Anfangswertproblems.

Definition 2.5 Die Fundamentallösung zu $L = \Delta + \partial_t$ wird als **Wärmeleitungskern** bezeichnet.

Eine solche Fundamentallösung für das Wärmeleitungsproblem existiert für alle Riemannschen Mannigfaltigkeiten [Cha84].

Die Bezeichnung Wärmeleitungskern ist angelehnt an eine Familie von Integraloperatoren, deren gemeinsamer Integralkern per definitionem der Wärmeleitungskern ist. Für $t > 0$ ist der Operator $e^{-t\Delta_g}$ definiert durch

$$e^{-t\Delta_g} : \begin{array}{ccc} C^\infty(M) & \longrightarrow & C^\infty(M) \\ \psi & & \psi \end{array}$$

$$\varphi \longmapsto \left(x \mapsto \int_M \mathcal{K}_{\Delta_g}(x, y, t) \varphi(y) d\text{vol}_g(y) \right).$$

Die Familie von Operatoren $\{e^{-t\Delta_g} \mid t > 0\}$ wird auch **Wärmeleitungshalbgruppe** genannt, da sie eine multiplikative Halbgruppe bildet. Operatoren der Wärmeleitungshalbgruppe werden auch **Wärmeleitungsoperatoren** genannt. Für $t > 0$ besitzt der Wärmeleitungsoperator $e^{-t\Delta}$ eine selbstadjungierte Fortsetzung auf $L^2(M, g)$. Er ist dabei ein beschränkter Operator auf $L^2(M, g)$.

Die Wärmeleitungsoperatoren sind für das Wärmeleitungsproblem *Lösungsoperatoren* in folgendem Sinne: Sei $f \in L^2(M, g)$ eine Funktion, welche den Anfangswert des Cauchy-Problems beschreibt. Mit $f(x, t) := e^{-t\Delta_g} f(x)$ gilt dann

$$(\partial_t + \Delta_g) f(x, t) = 0, \quad (2.8)$$

$$f(x, 0) = f(x). \quad (2.9)$$

Die Wärmeleitungsoperatoren *lösen* also das Wärmeleitungsproblem für die Anfangsverteilung $f(x)$.

2.3 Die Spur des Wärmeleitungskerns

Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es bezeichne $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ das vollständige Orthonormalsystem des Raumes $L^2(M, g)$, welches aus Eigenfunktionen von Δ_g durch Normierung gewonnen werden kann. Mithilfe dieser Basis kann der Wärmeleitungskern wie folgt dargestellt werden [Gil84]:

$$\mathcal{K}_{\Delta_g}(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \overline{\phi_i(y)}. \quad (2.10)$$

Für $f, g \in L^2(M, g)$ ist das L^2 -Skalarprodukt gegeben durch

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_M f \cdot \bar{g} \, d\text{vol}_g. \quad (2.11)$$

Ein Operator der Wärmeleitungshalbgruppe wirkt auf eine Funktion $f \in L^2(M, g)$ durch Integration gegen den Wärmeleitungskern:

$$\begin{aligned} (e^{-t\Delta_g} f)(x) &= \int_M \mathcal{K}_{\Delta_g}(x, y, t) f(y) d\text{vol}_g(y) \\ &= \int_M \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \overline{\phi_i(y)} f(y) d\text{vol}_g(y) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda_i t} \phi_i(x) \langle \phi_i, f \rangle_{L^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Für einen Operator $A : L^2(M, g) \rightarrow L^2(M, g)$ ist die **Spur** definiert durch

$$\text{Tr}(A) := \sum_{j=1}^{\infty} \langle \phi_j, A\phi_j \rangle_{L^2}. \quad (2.13)$$

Ist $\text{Tr}(A) < \infty$, so wird A **von Spurklasse** genannt. So ist für $t > 0$ ist der Operator $e^{-t\Delta}$ von Spurklasse.

Die Spur von Operatoren auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M , welche durch Integration gegen einen glatten Integralkern $K \in C^\infty(M \times M)$ wirken, kann als Integral des Kerns über $\text{diag}_M \times (0, \infty)$ ausgedrückt werden, wobei

$$\text{diag}_M := \{(x, x) \mid x \in M\} \subset M \times M. \quad (2.14)$$

Die Spur ist des Wärmeleitungsoperators einer kompakten Mannigfaltigkeit (M, g) ist gegeben durch (vgl. auch [Mel93], Proposition 4.55).

$$\text{Tr}_{L^2}(e^{-t\Delta_g}) = \int_M \mathcal{K}_{\Delta_g}(x, x, t) d\text{vol}_g(x). \quad (2.15)$$

Man erhält mit (2.10) für die Spur des Wärmeleitungsoperators $e^{-t\Delta_g}$ folgenden Ausdruck:

$$\mathrm{Tr}_{L^2}(e^{-t\Delta_g}) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-t\lambda_i}. \quad (2.16)$$

Die Spur des Wärmeleitungsoperators, $\mathrm{Tr}_{L^2}(e^{-t\Delta_g})$, wird in der Literatur als **Spur des Wärmeleitungskerns** bezeichnet. Generell werden Operatoren, die durch Integration gegen einen Kern wirken, oft mit ihrem Kern identifiziert.

Es stellt sich heraus, dass der Wärmeleitungskern eingeschränkt auf diag_M eine asymptotische Entwicklung für $t \rightarrow 0$ der Gestalt

$$\mathcal{K}_{\Delta_g}(x, x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \sum_{j=0}^k u_j[\Delta_g] t^j + O(t^{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (2.17)$$

zulässt, wobei die Koeffizienten durch Linearkombinationen skalarer Riemannscher Invarianten gegeben sind. Da die Spur des Wärmeleitungskerns auf kompakten Mannigfaltigkeiten als Integral über $\mathcal{K}_{\Delta_g}|_{\mathrm{diag}_M}$ ausgedrückt werden kann, erhält man das folgende Ergebnis:

Satz 2.2 ([MP49]) *Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand. Dann besitzt $Z(t) := \mathrm{Tr}_{L^2}(e^{-t\Delta_g})$ für $t \rightarrow 0$ eine asymptotische Entwicklung der Form*

$$Z(t) = (4\pi t)^{-n/2} \sum_{j=0}^k a_j[\Delta_g] t^j + O(t^{k+1}) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (2.18)$$

mit

$$a_0[\Delta_g] = \mathrm{vol}(M, g), \quad (2.19)$$

$$a_1[\Delta_g] = \frac{1}{6} \int_M R \mathrm{dvol}_g. \quad (2.20)$$

Hier bezeichne wie in der Einleitung $R(x)$ die Skalarkrümmung im Punkt $x \in M$. Die Koeffizienten $a_k[\Delta_g]$ werden in der breiten Literatur als **Minakshisundaram–Pleijel-Koeffizienten**, **Seeley-De-Witt-Koeffizienten** oder einfach als **Wärmeleitungskoeffizienten** bezeichnet. Die Koeffizienten $a_j[\Delta_g]$ entstehen durch Integration der Koeffizienten $u_j[\Delta_g]$. Vorsicht geboten ist bei der Terminologie: Der Begriff Wärmeleitungskoeffizienten bezeichnet die Menge der integrierten Koeffizienten $\{a_j[\Delta_g] \mid j \in \mathbb{N}_0\}$. Es kommt in der Literatur aber auch vor, dass die Koeffizienten $\{u_j[\Delta_g] \mid j \in \mathbb{N}_0\}$ als Wärmeleitungskoeffizienten bezeichnet werden. Weiterführende Informationen zu den Wärmeleitungskoeffizienten sind in [Gil84] zu finden.

Für diese Arbeit ist der Koeffizient $u_1[\Delta_g]$ am wichtigsten. Ist (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand und $x \in M$, so gilt [Cha84]

$$u_1[\Delta_g](x, x) = \frac{1}{6} R(x). \quad (2.21)$$

Man beachte, dass in der oben angegebenen Form der Asymptotik für den Wärmeleitungskern bzw. der Spur des Wärmeleitungskerns im Falle $n = 2$ der Faktor $\frac{1}{4\pi t}$ noch ausklammert wurde. Die konstanten Terme sind also in dieser Notation $u_1[\Delta_g]$ bzw. $a_1[\Delta_g]$.

Proposition 2.1 *Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es bezeichne $\mathcal{P}_{\ker \Delta}$ die orthogonale Projektion auf den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_0 = 0$. Dann gilt:*

$$|\operatorname{Tr}(e^{-t\Delta_g} - \mathcal{P}_{\ker \Delta})| < e^{-t\lambda_1} \quad (t \rightarrow \infty). \quad (2.22)$$

Die Spur des Wärmeleitungskerns fällt also exponentiell für $t \rightarrow \infty$. Ein Beweis findet man in [Alb12].

3 Konforme Geometrie

Definition 3.1 Seien (M, g) und (M', g') Riemannsche Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension n . Ein Diffeomorphismus $f : M \rightarrow M'$ heißt **konformer Diffeomorphismus**, falls es eine glatte Funktion $\Omega : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ gibt, sodass

$$f^*g' = \Omega^2 g. \quad (3.1)$$

Definition 3.2 Sei (M, g_0) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine weitere Metrik \hat{g} auf M heißt **konform äquivalent** zu g_0 , wenn gilt

$$\hat{g} = \lambda^2 g_0.$$

für $\lambda \in C^\infty(M)$ mit $\lambda > 0$.

Diese Art von Metrikwechsel belässt Winkel zwischen Tangentialvektoren invariant, während Längen von Vektoren sich unterscheiden können. Einen konformen Wechsel der Metrik $g_0 \mapsto \lambda^2 g_0$ kann man aufgrund der Positivität des konformen Faktors λ mit $\omega := \log \lambda$ auch durch

$$\hat{g} = g_\omega := e^{2\omega} g_0.$$

ausdrücken. Die Menge

$$[g_0] := \{h \mid \exists \omega \in C^\infty(M) \text{ mit } h = e^{2\omega} g_0\} \quad (3.2)$$

aller zu g_0 konform äquivalenten Metriken wird als **konforme Klasse von g_0** bezeichnet.

Im Einklang mit dieser Definition ist eine **konforme Mannigfaltigkeit** eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) zusammen mit einer konformen Klasse $[g]$.

3.1 L^2 -Struktur und konforme Variation

Das Material dieses Kapitels folgt einigen Ideen der Arbeit [Ald13]. Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\{g_\tau\}$ eine Menge von Riemannschen Metriken, die zu g konform äquivalent sind, wobei der konforme Faktor durch $\tau \in \mathbb{R}$ parametrisiert ist. Das bedeutet

$$\{g_\tau\} := \{e^{\omega(\tau)} g \mid \tau \in \mathbb{R}\} \quad (3.3)$$

für eine glatte Funktion $\omega \in C^\infty(M)$. Fixiert man $\tau_1, \tau_2 > 0$, so liegen die Definitionsbereiche der zugehörigen Laplace-Operatoren $\Delta_{\tau_0}, \Delta_{\tau_1}$ in den a priori verschiedenen Hilberträumen $L^2(M, g_0 := g_{\tau_0})$ bzw. $L^2(M, g_1 := g_{\tau_1})$. Folglich sind auch die Operatoren der zugehörigen Wärmeleitungshalbgruppen auf verschiedenen Räumen definiert. Insbesondere ist die Differenz zweier Wärmeleitungsoperatoren nicht wohldefiniert. Diese wird aber benötigt, um Familien der Form $\{e^{-t\Delta_\tau}\}_\tau$ nach dem Parameter τ zu differenzieren. Zur Lösung dieses Problems benutzt man Hilbertraumisomorphismen zwischen den L^2 -Räumen.

Sei $\varphi \in C^\infty(M)$ die glatte Funktion, welche den konformen Metrikwechsel $g_1 = e^{2\varphi}g_0$ realisiert. Die Volumenform transformiert sich unter dieser Änderung wie folgt:

$$\mathrm{dvol}_1 = e^{2\varphi} \mathrm{dvol}_0.$$

Man betrachte nun die folgende unitäre Abbildung:

$$\begin{aligned} T : \quad L^2(M, g_0) &\longrightarrow L^2(M, g_1) \\ \Psi \quad \quad \Psi \\ f &\longmapsto e^{-\varphi} f. \end{aligned}$$

Mit ihr gilt für $f \in L^2(M, g_0)$

$$\begin{aligned} \|Tf\|_1^{L^2} &= \sqrt{\int_M |e^{-\varphi} f|^2 e^{2\varphi} \mathrm{dvol}_0} \\ &= \sqrt{\int_M |f|^2 \mathrm{dvol}_0} \\ &= \|f\|_0^{L^2}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung kann man schließlich mit den Wärmeleitungsoperatoren verknüpfen, ohne die Selbstadjungiertheit zu verletzen. Der Operator

$$T^{-1} e^{-t\Delta_1} T : L^2(M, g_0) \rightarrow L^2(M, g_0)$$

bleibt selbstadjungiert und wirkt insbesondere auf dem *gleichen* L^2 -Raum wie der ursprüngliche Wärmeleitungsoperator $e^{-t\Delta_0}$. Er operiert auf $f \in L^2(M, g_0)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} T^{-1} e^{-t\Delta_1} T f(x) &= T^{-1} e^{-t\Delta_1} (e^{-\varphi(x)} f(x)) \\ &= T^{-1} \int_M \mathcal{K}_{\Delta_1}(x, y, t) (e^{-\varphi(y)} f(y)) \mathrm{dvol}_\tau(y) \\ &= \int_M e^{\varphi(x)} \mathcal{K}_{\Delta_1}(x, y, t) (e^{-\varphi(y)} f(y)) e^{2\varphi(y)} \mathrm{dvol}_0(y). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dies zeigt, wie der transformierte Integralkern aussieht:

$$\mathcal{K}_{T^{-1}e^{-t\Delta_1}T}(x, y, t) = e^{\varphi(x)} \mathcal{K}_{e^{-t\Delta_0}}(x, y, t) e^{\varphi(y)}. \tag{3.5}$$

Wird eine fixierte Hintergrundmetrik g_0 nun konform variiert, so ändert sich zwar formal die L^2 -Struktur, aber man kann durch Hinzunahme der unitären Transformation T die Wärmeleitungsoperatoren auf dem gleichen Raum $L^2(M, g_0)$ betrachten. Sei also nun $T > 0$, $\tau \in [0, T]$ und $\{g_\tau\}_{\tau \in [0, T]}$ eine Familie paarweise konform äquivalenter Metriken definiert durch

$$g_\tau = e^{2\omega(\tau)} g_0. \quad (3.6)$$

Für jedes τ bezeichne T_τ die entsprechende Transformation, damit $T_\tau^{-1} e^{-t\Delta_\tau} T_\tau$ auf $L^2(M, g_0)$ wirkt. Ist ein Operator von Spurklasse, so kann man dann die Spur des auf $L^2(M, g_0)$ transformierten Operators bezüglich des Skalarprodukts des Raums $L^2(M, g_0)$ bilden. Ist ein Wärmeleitungsoperator Spurklasse, so kann die Spur als das Integral über die Diagonale des Wärmeleitungskerns ausgedrückt werden. Man erhält:

$$\begin{aligned} \text{Tr} (T_\tau^{-1} e^{-t\Delta_\tau} T_\tau) &= \int_M e^{\omega(\tau, x)} \mathcal{K}_{\Delta_\tau}(x, x, t) e^{\omega(\tau, x)} \text{dvol}_0(x) \\ &= \int_M \mathcal{K}_{\Delta_0}(x, x, t) e^{2\omega(\tau, x)} \text{dvol}_0(x) \\ &= \int_M \mathcal{K}_{\Delta_0}(x, x, t) \text{dvol}_\tau(x) \\ &= \text{Tr} (e^{-t\Delta_\tau}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2 Das Prinzip von Duhamel

Nun werden die in 3.1 gewonnenen Resultate benutzt, um die Änderung des zugehörigen Wärmeleitungsoperators $e^{-t\Delta_\tau}$ zu untersuchen, wenn man τ ändert, d.h. durch $\tau + \varepsilon, \varepsilon > 0$ ersetzt.

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Verändert man eine Metrik g mit in Abhängigkeit eines Parameters $\tau \in [0, T]$, so wirken für $\varepsilon > 0$ und $\tau, \tau + \varepsilon \in [0, T]$ beliebig die Laplace-Beltrami-Operatoren Δ_τ und $\Delta_{\tau+\varepsilon}$ auf a priori verschiedenen Hilberträumen. Die Konjugation mit den eben eingeführten Hilbertraumisomorphismen ermöglicht es, Differenzen der Form

$$e^{-t\Delta_\tau} - e^{-t(T^{-1}\Delta_{\tau+\varepsilon}T)} : L^2(M, g_0) \rightarrow L^2(M, g_0) \quad (3.8)$$

zu untersuchen. Man setze zur Abkürzung

$$H_\varepsilon := T_\varepsilon^{-1} \Delta_{(\tau+\varepsilon)} T_\varepsilon, \quad (3.9)$$

sodass $H_0 = \Delta_\tau$. Dabei bezeichne T_ε den Isomorphismus $T_\varepsilon : L^2(M, g_\tau) \rightarrow L^2(M, g_{\tau+\varepsilon})$.

Lemma 3.1 (Prinzip von Duhamel) *Seien $\tau, \tau + \varepsilon \in [0, T]$. Dann gilt:*

$$e^{-tH_0} - e^{-tH_\varepsilon} = \int_0^t e^{-sH_0} (H_\varepsilon - H_0) e^{-(t-s)H_\varepsilon} \text{d}s \quad (3.10)$$

sowie

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} e^{-tH_\varepsilon} = - \int_0^t e^{-sH_0} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} H_\varepsilon \right) e^{-(t-s)H_0} ds. \quad (3.11)$$

BEWEIS Definiere $F(s) := e^{-sH_0} e^{-(t-s)H_\varepsilon}$. Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} F(t) - F(0) &= e^{-tH_0} - e^{-tH_\varepsilon} \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds} \left(e^{-sH_0} e^{-(t-s)H_\varepsilon} \right) ds \\ &= \int_0^t \left(-e^{-sH_0} H_0 e^{-(t-s)H_\varepsilon} + e^{-sH_0} H_\varepsilon e^{-(t-s)H_\varepsilon} \right) ds \\ &= \int_0^t e^{-sH_0} (H_\varepsilon - H_0) e^{-(t-s)H_\varepsilon} ds. \end{aligned}$$

Dividieren durch ε ergibt:

$$\frac{e^{-tH_0} - e^{-tH_\varepsilon}}{\varepsilon} = \int_0^t e^{-sH_0} \left(\frac{H_\varepsilon - H_0}{-\varepsilon} \right) e^{-(t-s)H_\varepsilon} ds.$$

Der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ zeigt die Behauptung:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} e^{-tH_\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-tH_0} - e^{-tH_\varepsilon}}{\varepsilon} \\ &= - \int_0^t e^{-sH_0} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H_\varepsilon - H_0}{\varepsilon} \right) e^{-(t-s)H_0} ds \\ &= - \int_0^t e^{-sH_0} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} H_\varepsilon \right) e^{-(t-s)H_0} ds. \end{aligned}$$

□

Der Operator e^{-tH_ε} bezeichnet den Wärmeleitungsoperator von $H_\varepsilon = T_\varepsilon^{-1} \Delta_{(\tau+\varepsilon)} T_\varepsilon$. Man beachte, dass gilt

$$\partial_t T_\varepsilon^{-1} e^{-t\Delta_{(\tau+\varepsilon)}} T_\varepsilon = T_\varepsilon^{-1} \partial_t e^{-t\Delta_{(\tau+\varepsilon)}} T_\varepsilon \quad (3.12)$$

$$= T_\varepsilon^{-1} \Delta_{(\tau+\varepsilon)} T_\varepsilon, \quad (3.13)$$

sowie

$$\lim_{t \rightarrow 0} T_\varepsilon^{-1} e^{-t\Delta_{(\tau+\varepsilon)}} T_\varepsilon = \text{id}_{L^2(M, g_0)}. \quad (3.14)$$

Mit anderen Worten, der Wärmeleitungskern von $T_\varepsilon^{-1} \Delta_{(\tau+\varepsilon)} T_\varepsilon$ ist der Integralkern des Operators $T_\varepsilon^{-1} e^{-t\Delta_{(\tau+\varepsilon)}} T_\varepsilon$. Es gilt also

$$e^{-tH_\varepsilon} = T_\varepsilon^{-1} e^{-t\Delta_{(\tau+\varepsilon)}} T_\varepsilon. \quad (3.15)$$

4 Die Funktionaldeterminante des Laplace-Beltrami-Operators

4.1 ζ -regularisierte Funktionaldeterminante

In diesem Abschnitt bezeichnet (M, g) stets eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\Delta = \Delta_g$ den zugehörigen Laplace-Beltrami-Operator mit seinem Spektrum

$$\sigma(\Delta) = \{\lambda_0 = 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots\} \subset \mathbb{R}^+.$$

Definition 4.1 Für $\dim M = n$ sei

$$D_n := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \frac{n}{2}\}.$$

Die Funktion $\zeta : D_n \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\zeta(s) := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-s} \quad (4.1)$$

heißt **spektrale ζ -Funktion**.

Bemerkung 4.1 Man beachte, dass definitionsgemäß der Eigenwert $\lambda_0 = 0$ in (4.1) ignoriert wird.

Bemerkung 4.2 Für die Sphäre $S^1 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ versehen mit der Standardmetrik g , sodass $\Delta_g = \frac{d^2}{dx^2}$, ergibt sich folgende Beziehung zwischen spektraler ζ -Funktion und Riemannscher ζ -Funktion:

$$\zeta(s) = \zeta_{\text{Riemann}}(2s).$$

Satz 4.1 (Weyl-Asymptotik, [Bor07], A.15) Sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n und $\sigma(\Delta) = \{\lambda_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ das Spektrum des zugehörigen Laplace-Beltrami-Operators. Dann gilt für $\lambda_k \in \sigma(\Delta)$

$$\lambda_k \sim \frac{\operatorname{vol}(M, g)}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)(4\pi)^{\frac{n}{2}}} k^{\frac{n}{2}}. \quad (4.2)$$

Im Folgenden wird die Γ -Funktion auftreten. Sie ist definiert durch

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt. \quad (4.3)$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar**, wenn ihre Einschränkung auf jedes kompakte Teilintervall $[a, b] \subset (0, \infty)$ Lebesgue-integrierbar ist, d.h. wenn

$$\int_{[a,b]} f(x) dx < \infty. \quad (4.4)$$

Definition 4.2 Sei $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine lokal integrierbare Funktion. Ist für $s \in \mathbb{C}$ die Funktion $x \mapsto x^{s-1}f(x)$ über $(0, \infty)$ Lebesgue-integrierbar, so ist

$$\mathcal{M}_f(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty f(x) x^{s-1} dx, \quad (4.5)$$

die **Mellin-Transformation** von f in s .

Beispiel 4.1 Für $t \in [0, \infty)$ sei $f(t) := e^{-tp}$ wobei $p > 0$. Dann gilt

$$\mathcal{M}_f(s) = p^{-s}. \quad (4.6)$$

Für eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) sei

$$\mathfrak{T}(t) := \text{Tr} (e^{-t\Delta_g} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_g}) = \sum_{k=1}^\infty e^{-t\lambda_k}, \quad (4.7)$$

wobei $e^{-t\Delta_g}$ den zu g gehörenden Wärmeleitungsoperator bezeichnet und $\mathcal{P}_{\ker \Delta_g}$ die orthogonale Projektion auf $\ker \Delta_g$ bezeichnet. Wegen (4.6) gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) > \frac{n}{2}$:

$$\zeta(s) = \mathcal{M}_{\mathfrak{T}}(s). \quad (4.8)$$

Satz 4.2 Sei (M, g) eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann konvergiert die spektrale ζ -Funktion $\zeta(s)$ auf $\{s \mid \text{Re}(s) > \frac{n}{2}\}$. Auf diesem Gebiet definiert sie eine holomorphe Funktion, welche meromorph nach \mathbb{C} fortsetzbar ist. Bei der meromorphen Fortsetzung treten höchstens einfache Polstellen auf und $s = 0$ ist ein regulärer Punkt der meromorphen Fortsetzung.

BEWEIS von Satz 4.2. Der hier vorgestellte Beweis folgt den Ausführungen in [Ros97]. Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) > \frac{n}{2}$ gilt nach Definition

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{i=1}^\infty \lambda_i^{-s} \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \text{Tr} (e^{-t\Delta_g} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_g}) dt \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \left(\sum_{i=0}^\infty e^{-t\lambda_i} - \dim \ker \Delta \right) dt \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1} \text{Tr} (e^{-t\Delta_g} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_g}) dt + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty t^{s-1} \text{Tr} (e^{-t\Delta_g} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_g}) dt \\ &=: \psi(s) + \phi(s). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Für die Spur des Wärmeleitungskerns gilt nach 2.22

$$\mathrm{Tr} \left(e^{-t\Delta_g} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_g} \right) = O(e^{-t\lambda_1}) \quad (4.12)$$

Die Γ -Funktion hat keine Nullstellen, daher ist die Funktion

$$\phi(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^\infty t^{s-1} \mathrm{Tr} \left(e^{-t\Delta_g} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_g} \right) dt \quad (4.13)$$

holomorph auf ganz \mathbb{C} , insbesondere also konvergent $\forall s \in \mathbb{C}$. Es bleibt, die komplexe Funktion

$$\psi(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1} \mathrm{Tr} \left(e^{-t\Delta_g} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_g} \right) dt \quad (4.14)$$

zu untersuchen. Man rufe sich in Erinnerung, dass nach Satz 2.2 für die Spur des Wärmeleitungskerns für $t \rightarrow 0$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} \left(e^{-t\Delta_g} \right) &= (4\pi t)^{-n/2} \sum_{j=0}^k a_j[\Delta_g] t^j + O(t^{k+1}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ &= \sum_{j=0}^k (4\pi)^{-n/2} a_j[\Delta_g] t^{j-\frac{n}{2}} + O(t^{k+1-\frac{n}{2}}) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Für beliebige $k > \frac{n}{2}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \psi(s) &:= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1} \mathrm{Tr} \left(e^{-t\Delta_g} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_g} \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1} \left(\sum_{j=0}^k (4\pi)^{-n/2} a_j[\Delta_g] t^{j-\frac{n}{2}} + O(t^{k+1-\frac{n}{2}}) - \dim \ker \Delta_g \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1} \sum_{j=0}^k (4\pi)^{-n/2} a_j[\Delta_g] t^{j-\frac{n}{2}} dt \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 O(t^{k+s-\frac{n}{2}}) dt \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1} \dim \ker \Delta_g dt. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Da $k > \frac{n}{2}$ gilt

$$\int_0^1 t^{k+s-\frac{n}{2}} dt = \frac{t^{k+s-\frac{n}{2}+1}}{k+s-\frac{n}{2}+1} =: B(s). \quad (4.17)$$

Man erhält für (4.16):

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{j=0}^k \frac{1}{s+j-\frac{n}{2}} (4\pi)^{-n/2} a_j[\Delta_g] \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(s)} O(B(s)) \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{\dim \ker \Delta_g}{s}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Aus (4.18) geht hervor, dass $\psi(s)$ für $\operatorname{Re}(s) > \frac{n}{2}$ konvergiert und meromorph nach \mathbb{C} fortsetzbar ist. Zur Erinnerung: Nach Konstruktion gilt

$$\zeta(s) = \psi(s) + \phi(s), \quad (4.19)$$

wobei ϕ holomorph auf ganz \mathbb{C} ist. Es wurde also gezeigt, dass die spektrale ζ -Funktion für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \frac{n}{2}$ konvergiert und meromorph nach \mathbb{C} fortsetzbar ist. Die Γ -Funktion hat einen einfachen Pol in $s = 0$, so dass $\frac{1}{\Gamma(s)}$ eine einfache Nullstelle in $s = 0$ hat. Aus (4.18) folgt daher, dass die Polstellen allesamt einfache Polstellen sind und $s = 0$ ein regulärer Punkt der meromorphen Fortsetzung der spektralen ζ -Funktion ist.

□

Bemerkung 4.3 Wann immer benötigt, ist mit ζ die meromorphe Fortsetzung der spektralen ζ -Funktion nach \mathbb{C} bezeichnet.

Bemerkung 4.4 Der Beweis von Satz 4.2 stützt sich lediglich auf die asymptotischen Entwicklungen der Spur des Wärmeleitungskerns für $t \rightarrow 0$ und $t \rightarrow \infty$.

Es sei $A : H \rightarrow H$ ein selbstadjungierter Endomorphismus auf dem n -dimensionalen Vektorraum H . Dann existiert nach dem Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen eine Orthonormalbasis für H bestehend aus Eigenfunktionen von A . Bezüglich dieser Basis hat A die Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A bezeichnen. In dieser Situation ist die Determinante von A gegeben durch das Produkt der Eigenwerte:

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i. \quad (4.21)$$

Man betrachte nun den Laplace-Beltrami Operator Δ_g einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) . Die Beziehung (4.21) motiviert die Frage nach einer einem Analogon der Determinante für Operatoren auf unendlichdimensionalen Hilberträumen. Da das Produkt aller Eigenwerte des Laplace-Beltrami-Operators als Konsequenz von Satz 4.1 divergiert, muss aber eine andere Definition für die Determinante gefunden werden.

Eine Lösung dieses Problems bietet die folgende Beobachtung der oben eingeführten spektralen ζ -Funktion:

Sei $N \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial s} \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-s} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial s} \lambda_i^{-s} \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial s} (e^{\log \lambda_i})^{-s} \\
 &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial s} e^{-s \log \lambda_i} \\
 &= \sum_{i=1}^N e^{-s \log \lambda_i} \cdot (-\log \lambda_i).
 \end{aligned}$$

Wertet man diesen Ausdruck im Punkt $s = 0$ aus, so ergibt sich:

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i^{-s} \right) = \sum_{i=1}^N (-\log \lambda_i) = -\log \prod_{i=1}^N \lambda_i.$$

Letzteres zeigt, dass formal also gilt:

$$\zeta'(0) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-s} \right) = -\log \prod_{i=1}^{\infty} \lambda_i. \quad (4.22)$$

Da $s = 0$ ein regulärer Punkt der spektralen ζ -Funktion ist, kann nun die Determinante des Laplace-Operators definiert werden:

Definition 4.3 Für eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist die **Determinante des Laplace-Beltrami-Operators** definiert als

$$\det \Delta_g := \exp(-\zeta'(0)). \quad (4.23)$$

Das Verfahren, mithilfe der Ableitung einer (meromorph fortgesetzten) ζ -Funktion einem formal divergentem Ausdruck einen endlichen Wert zuzuordnen, wird **ζ -Regularisierung** genannt. Folglich nennt man die oben definierte Determinante des Laplace-Beltrami-Operators auch **ζ -regularisierte Funktionaldeterminante** von Δ_g . Die Definition der ζ -regularisierten Funktionaldeterminante geht zurück auf die Arbeit [RS71] von D.B. RAY und I.M. SINGER über die analytische Torsion Riemannscher Mannigfaltigkeiten.

4.2 Polyakov-Formel für geschlossene Flächen

Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit $\dim M = 2$ heißt **Fläche**. In diesem Abschnitt wird erörtert, wie sich $\log \det \Delta_g$ im Falle geschlossener Flächen verhält, wenn die zugrunde liegende Riemannsche Metrik g konform geändert wird. Das Ergebnis, die Polyakov-Formel, wurde in [OPS88] benutzt, um Metriken innerhalb einer Menge konform äquivalenter Metriken gleichen Volumens zu charakterisieren, für die $\det \Delta_g$ extremal wird. Diese Ausführungen basieren größtenteils auf den Argumentationen in [OPS88] sowie [CLN06].

Bemerkung 4.5 Im gesamten Abschnitt 4.2 wird die Darstellung der spektralen ζ -Funktion als Mellin-Transformierte benutzt:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr} (e^{-t\Delta_\tau} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_\tau}) dt. \quad (4.24)$$

Es ist zu beachten, dass diese Darstellung für Flächen nur gilt, wenn $\operatorname{Re}(s) > 1$. Für $s \in \mathbb{C} \setminus \{s \mid \operatorname{Re}(s) > 1\} \subset \mathbb{C}$ bezeichnet $\zeta(s)$ die meromorphe Fortsetzung der ζ -Funktion.

Sei (M, g_0) eine geschlossene Fläche und

$$g_1 := e^\omega g_0 \quad (4.25)$$

für eine glatte Funktion $\omega \in C^\infty(M)$. Sei für $\tau \in [0, 1]$ weiterhin

$$g_\tau := e^{\tau\omega} g_0. \quad (4.26)$$

Dann gilt für den zur Metrik g_τ gehörenden Laplace-Beltrami-operator:

$$\Delta_\tau = e^{-\tau\omega} \Delta_0. \quad (4.27)$$

Man erhält aus dieser Beziehung folglich

$$\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \Delta_\tau = -\omega \Delta_0. \quad (4.28)$$

Lemma 4.1 ([BØ86], Proposition 3.5)

$$\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \operatorname{Tr} (e^{-t\Delta_\tau}) = -t \operatorname{Tr} \left(\left\{ \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \Delta_\tau \right\} e^{-t\Delta_0} \right). \quad (4.29)$$

Unter Benutzung von (4.29) kann die Ableitung bezüglich des Parameters τ der spektralen ζ -Funktion ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned} - \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \log \det \Delta_\tau &= \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \zeta(s) \\ &= \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr} (e^{-t\Delta_\tau} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_\tau}) dt \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \operatorname{Tr} (e^{-t\Delta_\tau} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_\tau}) dt \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \left\{ \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \operatorname{Tr} (e^{-t\Delta_\tau}) - \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} 1 \right\} dt \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \operatorname{Tr} (e^{-t\Delta_\tau}) dt \end{aligned}$$

$$= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} (-t) \operatorname{Tr} \left(\left\{ \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \Delta_\tau \right\} e^{-t\Delta_0} \right) dt \quad (4.30)$$

$$= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^s \operatorname{Tr} (\omega \Delta_0 e^{-t\Delta_0}) dt \quad (4.31)$$

$$= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^s \operatorname{Tr} (\omega \{-\partial_t (e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0})\}) dt \quad (4.32)$$

$$= - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^s \partial_t \operatorname{Tr} (\omega (e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0})) dt. \quad (4.33)$$

Für kompakte Flächen gilt

$$f \in \ker \Delta_0 \Leftrightarrow f \text{ konstant.} \quad (4.34)$$

In (4.32) wurde dementsprechend die Wirkung von Δ_0 entsprechend ersetzt durch

$$\Delta_0 e^{-t\Delta_0} = -\partial_t e^{-t\Delta_0} = -\partial_t e^{-t\Delta_0} - \partial_t \mathcal{P}_{\ker \Delta_0}. \quad (4.35)$$

Das Integral in Gleichung (4.33) wird nun mittels partieller Integration dargestellt als:

$$\int_0^\infty t^s \partial_t \operatorname{Tr} (\omega (e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0})) dt \quad (4.36)$$

$$= - [t^s \operatorname{Tr} (\omega (e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0}))]_0^\infty + s \int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr} (\omega (e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0})) dt \quad (4.37)$$

$$= - \lim_{t \rightarrow 0} [t^s \operatorname{Tr} (\omega (e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0}))] + \lim_{t \rightarrow \infty} [t^s \operatorname{Tr} (\omega (e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0}))] \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} &+ s \int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr} (\omega (e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0})) dt \\ &\stackrel{(2.22)}{=} s \int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr} (\omega (e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0})) dt. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Das Verhalten der Γ -Funktion für $s \rightarrow 0$ ist bekannt. Hier gilt:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s + O(s^2). \quad (4.40)$$

Nach Multiplikation mit s erhält man folglich

$$\frac{s}{\Gamma(s)} = s^2 + O(s^3). \quad (4.41)$$

Für die betrachtete Differentiation der log-Determinante bedeutet dies, dass

$$\begin{aligned}
 & - \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \log \det \Delta_\tau \\
 &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{s}{\Gamma(s)} \left[\int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr} (\omega(e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0})) dt \right] \\
 &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (s^2 + O(s^3)) \left[\int_0^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr} (\omega(e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0})) dt \right] \\
 &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (s^2 + O(s^3)) \left[\int_0^1 t^{s-1} \operatorname{Tr} (\omega(e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0})) dt \right] \\
 &+ \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (s^2 + O(s^3)) \left[\int_1^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr} (\omega(e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0})) dt \right]. \tag{4.42}
 \end{aligned}$$

Nach Gleichung (2.22) fällt die Spur des Wärmeleitungskerns geschlossener Flächen exponentiell für $t \rightarrow \infty$. Dies stellt sicher, dass für $t \rightarrow \infty$

$$f(s) := \int_1^\infty t^{s-1} \operatorname{Tr} (\omega(e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0})) dt \tag{4.43}$$

eine ganze Funktion ist, d.h. holomorph $\forall s \in \mathbb{C}$. Insbesondere bleibt also die Nullstelle des Vorfaktors $(s^2 + O(s^3))$ bei $s = 0$ erhalten, sodass der letzte Term aus (4.42) verschwindet.

Für den Rest wird die Asymptotik für $t \rightarrow 0$ benötigt. Die Spur des Wärmeleitungskerns besitzt nach (2.17) für $t \rightarrow 0$ eine Entwicklung der Form

$$\mathcal{K}_{\Delta_0}(x, x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \sum_{j=0}^k u_j[\Delta_0] t^j + O(t^{k+1}). \tag{4.44}$$

Für den Integranden des verbliebenen Integrals in (4.42) muss eine asymptotische Entwicklung der Form

$$\operatorname{Tr} (\omega(e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0})) = \sum_{j=-1}^k d_j t^j + O(t^{k+1}) \tag{4.45}$$

mit geeigneten Koeffizienten $\{d_j \in \mathbb{R} \mid j \in \mathbb{N}_0\}$ gefunden werden. Die Wärmeleitungsoperatoren wirken durch ihren Integralkern. Entsprechend kann der Operator $\omega e^{-t\Delta_0}$ als Integraloperator dargestellt werden, der durch Integration gegen den Kern $\omega \mathcal{K}_{\Delta_0}|_{\text{diag}}$ wirkt. Da ω und die Projektion $\mathcal{P}_{\ker \Delta_0}$ nicht von der Veränderlichen t abhängen, bekommt man die gewünschte Asymptotik durch (2.17) via

$$\operatorname{Tr} (\omega(e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0})) = \int_M \omega \{ \mathcal{K}_{\Delta_0}|_{\text{diag}} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0} \} dA_0. \tag{4.46}$$

Es gilt also für beliebiges $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Tr} \left(\omega(e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0}) \right) = \int_M \omega \left\{ (4\pi t)^{-n/2} \sum_{j=0}^k a_j[\Delta_0] t^j + O(t^{k+1}) - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0} \right\} dA_0. \quad (4.47)$$

Nach Einsetzen in (4.42) erhält man folgende Situation:

$$-\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \log \det \Delta_\tau = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (s^2 + O(s^3)) \left[\int_0^1 t^{s-1} \mathrm{Tr} (\omega(e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0})) dt \right] \quad (4.48)$$

$$= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (s^2 + O(s^3)) \left[\int_0^1 t^{s-1} \left\{ \sum_{j=-1}^k d_j t^j + O(t^{k+1}) \right\} dt \right] \quad (4.49)$$

$$= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (s^2 + O(s^3)) \left[\int_0^1 \left\{ \sum_{j=-1}^k d_j t^{j+s-1} + O(t^{k+s}) \right\} dt \right]. \quad (4.50)$$

Für das Integral in (4.56) gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \sum_{j=-1}^k d_j t^{j+s-1} + O(t^{k+s}) \right\} dt &= \sum_{j=-1}^k d_j \int_0^1 t^{j+s-1} dt + \int_0^1 O(t^{k+s}) dt \\ &= \sum_{j=-1}^k d_j \left[\frac{1}{j+s} t^{j+s} \right]_0^1 + \int_0^1 O(t^{k+s}) dt \\ &=: \sum_{j=-1}^k \frac{d_j}{j+s} + \beta(s), \end{aligned} \quad (4.51)$$

wobei β analytisch auf $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > -k-1\}$ ist. Weiteres Auflösen ergibt:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (s^2 + O(s^3)) \sum_{j=-1}^k \frac{d_j}{j+s} \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \sum_{j=-1}^k \frac{(s^2 d_j + O(s^3) d_j)}{j+s} \\ &= \left(\sum_{j=-1}^k \frac{2sj + s^2}{j^2 + 2sj + s^2} d_j \right) \Big|_{s=0} + \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \sum_{j=-1}^k \frac{O(s^3) d_j}{j+s} \\ &= d_0 \\ &= \mathrm{FP}_{t=0} \mathrm{Tr} (\omega(e^{-t\Delta_0} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_0})) \\ &= \int_M \omega \left\{ \frac{R_0}{24\pi} - \frac{1}{\mathrm{Area}(g_0)} \right\} dA_0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Für $k > -1$ verschwindet $O(s^3)\beta(s)$ nach Differentiation und Einsetzen von $s = 0$. Es ist an dieser Stelle zu beachten, dass die Auswertung in $s = 0$ nur möglich war, weil man

durch Einsetzen der asymptotischen Entwicklung der Spur des Wärmeleitungskerns die ζ -Funktion in eine Form bringen konnte, die meromorph nach \mathbb{C} fortgesetzt werden kann.

Damit kann nun $\log \frac{\det \Delta_1}{\det \Delta_0}$ für zwei konform äquivalente Metriken g_0 und g_1 berechnet werden. Dafür verwendet man noch, dass das Verhalten von $\log \text{Area}(g_\tau)$ unter der Differentiation bezüglich τ gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} \partial_\tau \log \text{Area}(g_\tau) &= \frac{1}{\text{Area}(g_\tau)} \partial_\tau \text{Area}(g_\tau) \\ &= \frac{1}{\text{Area}(g_\tau)} \partial_\tau \int_M dA_\tau \\ &= \frac{1}{\text{Area}(g_\tau)} \int_M \partial_\tau e^{\tau\omega} dA_0 \\ &= \frac{1}{\text{Area}(g_\tau)} \int_M \omega dA_\tau, \end{aligned} \quad (4.53)$$

und sich Skalarkrümmung sowie die Volumenform wie folgt transformieren:

$$dA_\tau = e^{\tau\omega} dA_0, \quad (4.54)$$

$$R_\tau = e^{-\tau\omega} (-\tau\Delta_0\omega + R_0). \quad (4.55)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \log \det \Delta_1 - \log \det \Delta_0 &= \int_0^1 \partial_\tau \log \det \Delta_\tau d\tau \\ &= \int_0^1 \partial_\tau \log \det \Delta_{e^{\tau\omega} g_0} d\tau \\ &= \int_0^1 \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \log \det \Delta_{e^{(\tau+s)\omega} g_0} d\tau \\ &= - \int_0^1 \int_M \omega \left\{ \frac{R_\tau}{24\pi} - \frac{1}{\text{Area}(g_\tau)} \right\} dA_\tau d\tau \\ &= - \int_0^1 \int_M \omega \frac{R_\tau}{24\pi} dA_\tau d\tau + \int_0^1 \partial_\tau \log \text{Area}(g_\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Man erhält für das erste Integral in (4.56):

$$\begin{aligned} &- \int_0^1 \int_M \omega \frac{R_\tau}{24\pi} dA_\tau \\ &= - \frac{1}{24\pi} \int_0^1 \int_M \omega e^{-\tau\omega} (-\tau\Delta_0\omega + R_0) dA_\tau d\tau \\ &= - \frac{1}{24\pi} \int_0^1 \int_M \omega e^{-\tau\omega} (-\tau\Delta_0\omega + R_0) e^{\tau\omega} dA_0 d\tau \\ &= + \frac{1}{24\pi} \int_0^1 \int_M \omega e^{-\tau\omega} \tau \Delta_0 \omega e^{\tau\omega} dA_0 d\tau - \frac{1}{24\pi} \int_0^1 \int_M \omega e^{-\tau\omega} R_0 e^{\tau\omega} dA_0 d\tau \\ &= + \frac{1}{24\pi} \int_0^1 \tau d\tau \int_M \omega \Delta_0 \omega dA_0 - \frac{1}{24\pi} \int_0^1 d\tau \int_M \omega R_0 dA_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= +\frac{1}{24\pi}[\frac{1}{2}\tau^2]_0^1 \int_M \omega \Delta_0 \omega dA_0 - \frac{1}{24\pi}[\tau]_0^1 \int_M \omega R_0 dA_0 \\
 &= +\frac{1}{48\pi} \int_M \omega \Delta_0 \omega dA_0 - \frac{1}{24\pi} \int_M \omega R_0 dA_0 \\
 &= -\frac{1}{48\pi} \int_M \nabla \omega \nabla \omega dA_0 - \frac{1}{24\pi} \int_M \omega R_0 dA_0 \\
 &= -\frac{1}{48\pi} \int_M \{\nabla \omega \nabla \omega + 2\omega R_0\} dA_0 \\
 &= -\frac{1}{48\pi} \int_M \{|\nabla \omega|_0^2 + 2\omega R_0\} dA_0.
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

In dieser Rechnung wurde die zweite Greensche Identität für geschlossene Mannigfaltigkeiten verwendet:

$$\langle \omega, \Delta \omega \rangle + \langle \nabla \omega, \nabla \omega \rangle = 0 \quad \forall \omega \in C^\infty(M). \tag{4.58}$$

Mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist hier das L^2 -Skalarprodukt zur Metrik g_0 gemeint. Oft findet man in der Literatur die Polyakov-Formel in der Version mit Gaußkrümmung und $\omega = 2\varphi$. Setzt man in die obige Version (4.57) die Gaußkrümmung $2K_0 = R_0$ und $\omega = 2\varphi$ ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 (4.57) &= -\frac{1}{48\pi} \int_M \{|\nabla 2\varphi|_0^2 + 4\varphi R_0\} dA_0 \\
 &= -\frac{1}{12\pi} \int_M \{|\nabla \varphi|_0^2 + \varphi R_0\} dA_0 \\
 &= -\frac{1}{12\pi} \int_M \{|\nabla \varphi|_0^2 + 2\varphi K_0\} dA_0.
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Damit ist gezeigt, dass mit $g_1 = e^{2\varphi} g_0$ die klassische Polyakov-Formel gilt. Denn man erhält

$$\log \frac{\det \Delta_1}{\det \Delta_0} = -\frac{1}{12\pi} \int_M \{|\nabla \varphi|_0^2 + 2\varphi K_0\} d\text{vol}_{g_0} + \log \text{Area}(g_1) - \log \text{Area}(g_0), \tag{4.60}$$

und daher folgenden Satz:

Satz 4.3 ([Pol81]) *Sei (M, g_0) eine geschlossene Fläche und $g_1 = e^{2\varphi} g_0$ für ein $\varphi \in C^\infty(M)$. Es gelte weiterhin $\text{vol}(M, g_0) = \text{vol}(M, g_1)$. Dann gilt:*

$$\log \frac{\det \Delta_1}{\det \Delta_0} = -\frac{1}{12\pi} \int_M \{|\nabla \varphi|_0^2 + 2\varphi K_0\} d\text{vol}_{g_0} \tag{4.61}$$

Die Polyakov-Formel kann auch im Zusammenhang mit dem Uniformisierungssatz für Riemannsche Flächen betrachtet werden. Um diesen Satz anwenden zu können, wird nun vorausgesetzt, dass die Fläche M einfach zusammenhängend ist. Der klassische Uniformisierungssatz für Riemannsche Flächen sagt aus, dass (M, g_0) genau zu einer der folgenden Mannigfaltigkeiten konform äquivalent im Sinne der Definition (3.2) ist:

- (i) Die obere Halbebene \mathbb{H} mit der hyperbolischen Metrik $g_{\mathbb{H}} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$,
- (ii) Die komplexe Ebene \mathbb{C} mit der Metrik $g_{\mathbb{C}} = dz^2$,
- (iii) Die Riemannsche Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
mit ihrer Metrik $g_{\hat{\mathbb{C}}} = \frac{4}{(1+x^2+y^2)}(dx^2 + dy^2)$.

In der konformen Klasse zu g_0 ist folglich genau eine Metrik konstanter Krümmung enthalten. Metriken konstanter Krümmung stellen sich als besonders interessant hinsichtlich des Verhaltens der Determinante des Laplace-Beltrami-Operators heraus, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 4.4 ([OPS88]) *Sei M eine geschlossene Fläche und $[g]$ eine Menge konform äquivalenter Riemannscher Metriken gleichen Volumens auf M . Innerhalb der Menge dieser Metriken ist die Determinante des Laplace-Beltrami-Operators für Metriken konstanter Krümmung maximal.*

Der folgende, etwas schwächere Satz, folgt den Ausführungen von S.-Y. A.CHANG in [Cha97] und illustriert, wie die Polyakov-Formel als Funktional verwendet werden kann, um die extremalen Eigenschaften der Determinante innerhalb einer konformen Klasse von Metriken gleichen Volumens zu studieren:

Satz 4.5 *Angenommen, K_0 sei eine negative Konstante und $\text{vol}_{\omega} = \text{vol}_0 \ \forall e^{2\omega} g_0 \in [g_0]$. Dann nimmt das Funktional $F[\omega] := \log \frac{\det \Delta_{\omega}}{\det \Delta_0}$ sein Maximum genau bei Metriken konstanter Krümmung an.*

BEWEIS Da das Volumen fixiert ist, gilt

$$\int_M e^{2\omega} dA_0 = \int_M dA_{\omega} = \int_M dA_0. \quad (4.62)$$

Definiere nun

$$\bar{\omega} := \frac{1}{\text{vol}(M, g_0)} \int_M \omega dA_0, \quad (4.63)$$

sowie

$$\overline{e^{2\omega}} := \frac{1}{\text{vol}(M, g_0)} \int_M e^{2\omega} dA_0. \quad (4.64)$$

Damit erhält man

$$e^{2\bar{\omega}} \leq \overline{e^{2\omega}} = 1. \quad (4.65)$$

Also gilt $\bar{\omega} \leq 0$. Folglich, da $\text{vol}(M, g_0) > 0$ gilt

$$\int_M \omega dA_0 \leq 0. \quad (4.66)$$

Schließlich hat das Funktional $F[\omega]$ die Gestalt

$$F[\omega] = -\frac{1}{12\pi} \left\{ \int_M |\nabla_0 \omega|^2 dA_0 + 2K_0 \int_M \omega dA_0 \right\}. \quad (4.67)$$

Da nun $\int_M |\nabla_0 \omega|^2 dA_0 \geq 0$ sowie $2K_0 \int_M \omega dA_0 \geq 0$ bleibt das ursprüngliche Vorzeichen des Faktors $-\frac{1}{12\pi}$ erhalten, d.h. $F[\omega] \leq 0$. Dies bedeutet insbesondere, dass $\max F[\omega] = 0$ sowie

$$F[\omega] = 0 \Leftrightarrow \omega = 0. \quad (4.68)$$

Nach Voraussetzung entspricht $\omega = 0$ der Metrik g_0 und die zu g_0 gehörende Gauß-Krümmung K_0 war als konstant angenommen.

□

5 Trichterflächen

5.1 Hyperbolische Flächen

Die Ausführungen dieses Abschnitts sind größtenteils dem Buch [Bor07] entnommen.

Definition 5.1 Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt **hyperbolisch**, wenn g von konstanter Schnittkrümmung -1 ist.

Man betrachte die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ mit der hyperbolischen Metrik

$$g_{\text{hyp}} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \quad (5.1)$$

Die Möbiustransformationen mit reellen Koeffizienten ist isomorph zur Lie-Gruppe $PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R})/\{\pm \text{Id}\}$. Diese Möbiustransformationen sind orientierungserhaltende Isometrien bezüglich g_{hyp} .

Die obere Halbebene besitzt eine natürliche Kompaktifizierung mit

$$\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \quad (5.2)$$

Die Transformationen $\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$ können anhand ihrer Fixpunkte klassifiziert werden. Folgende Fälle können auftreten:

- (i) γ besitzt zwei Fixpunkte z_0 und z_1 , mit $z_0 \in \mathbb{H}$ und $z_1 = \overline{z_0}$. In diesem Fall wird γ **elliptisch** genannt.
- (ii) γ besitzt genau einen Fixpunkt, welcher auf dem Rand $\partial\mathbb{H}$ liegt. Dann wird γ **parabolisch** genannt. Alle parabolischen Transformationen entstehen durch Konjugation aus der Transformation $z \mapsto z + 1$. Für diese Transformation ist $z_0 = \infty$ der Fixpunkt.
- (iii) Eine Transformation γ mit zwei Fixpunkten auf $\partial\mathbb{H}$ heißt **hyperbolisch**.

Eine diskrete Untergruppe $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ heißt **Fuchssche Gruppe**. Eine solche Gruppe wirkt **eigentlich diskontinuierlich**, d.h. für $z \in \mathbb{H}$ ist jeder Orbit Γz lokal endlich.

5.2 Trichterenden

Definition 5.2 Sei M eine nichtkompakte differenzierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\dim M = 2$. M heißt **topologisch endlich**, wenn M homöomorph zu $\widetilde{M} \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$

ist, wobei \widetilde{M} eine kompakte Fläche ist und z_1, \dots, z_k voneinander isolierte Punkte aus \widetilde{M} für $k \in \mathbb{N}$ sind. Diese Menge der Ausnahmepunkte wird mit $\text{Punct}(\widetilde{M})$ notiert.

Eine derartige Fläche ist kompaktifizierbar und kann daher als das Innere einer kompakten Mannigfaltigkeit betrachtet werden. Zur differenzierbaren Struktur auf M gehört eine Menge von *randdefinierenden Funktionen*:

Definition 5.3 Eine glatte Funktion $f \in C^\infty(\overline{M})$ heißt **randdefinierende Funktion** für ∂M , falls

- (i) $f(x) \geq 0$,
- (ii) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \partial M$,
- (iii) $df_p \neq 0 \ \forall p \in \partial M$.

Bemerkung 5.1 Eigenschaft (iii) bedeutet, dass das Differential $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}$ für jeden Punkt $p \in \partial M$ nicht die Nullabbildung ist. Es gibt also für jeden solchen Punkt p einen Vektor $v \in T_p M$ mit $df_p(v) \neq 0$

Man kann auch randdefinierende Funktionen für einzelnen Zusammenhangskomponenten Y von ∂M erklären. Eine randdefinierende Funktion für den ganzen Rand heißt **totale randdefinierende Funktion**. Randdefinierende Funktionen, im Folgenden mit **rdf** abgekürzt, sind notwendig für die besprochenen Renormalisierungstechniken und werden häufig als Koordinatenabbildungen in Randnähe benutzt.

Beispiel 5.1 Man betrachte die obere Halbebene mit ihrem Rand

$$\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\} \quad \partial \mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad (5.3)$$

versehen mit der Metrik

$$g_{\text{hyp}} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}. \quad (5.4)$$

Dann ist die Projektion auf y -Koordinate eine randdefinierende Funktion für $\partial \mathbb{H}$.

Definition 5.4 (End- und Randstücke) Sei M eine topologisch endliche Fläche und g eine Riemannsche Metrik auf M . Sei also $\phi : M \rightarrow \widetilde{M} \setminus \text{Punct}(\widetilde{M})$ ein geeigneter Homöomorphismus und \widetilde{M} eine kompakte Fläche. Sei weiterhin $z \in \text{Punct}(\widetilde{M})$ fixiert und $\mathcal{U}_z \subset \widetilde{M}$ eine offene Umgebung um z . Wir nennen $E_z := \phi^{-1}(\mathcal{U}_z \setminus \{z\})$ zusammen mit der induzierten Metrik $g|_{E_z}$ ein **Ende** bzw. **Endstück** von M .

Geht man zur Kompaktifizierung \overline{M} über, so korrespondiert jeder Punkt $z \in \text{Punct}(\widetilde{M})$ zu einer Zusammenhangskomponente $Y_z \subset \partial M$. Diese Zusammenhangskomponente nennen wir das zum Ende zugehörige **Randstück**.

Satz 5.1 (Hopf, [Bor07]) *Für jede hyperbolische Fläche X existiert eine Fuchssche Gruppe $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ ohne elliptische Elemente und eine Γ -invariante Überlagerungsabbildung $\pi : \mathbb{H} \rightarrow X$ derart, dass X isometrisch zu $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ ist.*

Diese spezielle Struktur des Randes von \mathbb{H} überträgt sich auf alle Enden nichtkompakter hyperbolischen Flächen. Unter der Verwendung von rdf kann man die Endstücke anhand der von der hyperbolischen Metrik induzierten Metrik auf dem Quotienten klassifizieren. Sie unterscheiden sich grundlegend davon, welcher Teil des Randes $\{\infty\} \cup \mathbb{R}$ involviert ist. Es gibt drei verschiedene Varianten, zwei für Endstücken, die das Erreichen des “breiten” Randes \mathbb{R} beschreiben und eine dritte für den punktförmigen Rand $\{\infty\}$:

Sei (X, g) eine hyperbolische Fläche und $(E, g|_E)$ ein Ende von X . Die erste Möglichkeit ist ein **Trichter**, für welche es einen Diffeomorphismus $\psi : (0, \varepsilon) \times \mathbb{S}^1 \rightarrow (E, g)$ gibt, sodass

$$(\psi^* g|_E) = \frac{dx^2 + d\theta^2}{x^2} \quad (5.5)$$

annimmt, wobei $d\theta^2$ die runde Kreismetrik der Länge 1 auf \mathbb{S}^1 und x eine rdf für das zu E zugehörige Randstück bezeichnet.

Die zweite Variante bilden **hyperbolische Spitzen**, für welche ein Diffeomorphismus ψ wie oben existiert, sodass der Pullback von g die Form

$$(\psi^* g|_E) = x^2 d\theta^2 + \frac{dx^2}{x^2} \quad (5.6)$$

hat. Die dritte Möglichkeit ist das Ende eines **parabolischen Zylinders** $P := \mathbb{H}/\langle T \rangle$ mit $T(z) := z + 1$. Bis auf Isomorphie tritt diese Variante bei keiner anderen Fläche auf. Sie ähnelt asymptotisch einem Trichterende und wird gelegentlich in der Literatur zu den Trichterenden gezählt.

Satz 5.2 (vgl. [Bor07]) *Jede nichtkompakte hyperbolische Fläche $X = \Gamma/\mathbb{H}$ besitzt eine Zerlegung in disjunkte Teile der Form*

$$X = K \cup F_1 \cup \dots \cup F_{n_F} \cup C_1 \cup \dots \cup C_{n_C}, \quad (5.7)$$

wobei F_1, \dots, F_{n_F} Trichterenden, C_1, \dots, C_{n_C} Spitzenenden und K eine kompakte Menge bezeichnen.

Besitzt eine hyperbolische Fläche Trichterenden, so ist ihr Volumen nicht endlich. Der Gegenstand dieser Arbeit sind Flächen, deren Enden sich asymptotisch wie Trichter verhalten.

Definition 5.5 (Trichtermetrik, [AAR13]) Es sei \overline{M} eine kompakte topologische Fläche mit Rand ∂M . Eine Metrik g_F auf dem Inneren $M \subset \overline{M}$ heißt **Trichtermetrik**, wenn es für jede Zusammenhangskomponente $Y \in \partial_F$ ein geeignetes Endstücks E sowie einen

glatten Diffeomorphismus $\psi : (0, \varepsilon) \times \mathbb{S}^1 \rightarrow U$ und eine rdf x für Y gibt, so dass der Pullback von g via ψ die folgende Form annimmt:

$$\psi^*g = e^\varphi \left(\frac{dx^2 + d\theta^2}{x^2} \right) \quad (5.8)$$

für eine Funktion $\varphi \in C^\infty(\overline{M})$, welche für $x = 0$ konstant ist.

Ist (M, g_F) eine Fläche mit Trichtermetrik so nennt man (x, θ) **Trichter-Koordinaten** auf M . Oft wird (M, g_F) als **Trichterfläche** bezeichnet. Jedes der oben spezifizierten Endstücke werden wir in Anlehnung an den Fall hyperbolischer Flächen als **Trichterende** oder kurz **Trichter** bezeichnen.

Definition 5.6 Sei (M, g) eine Trichtermetrik und \mathcal{F}_i ein Trichter mit rdf x_i . Gilt für die in der Definition geforderte Funktion $\varphi \in C^\infty(\overline{M})$

$$\varphi - \varphi|_{\{x_i=0\}} = o(x_i), \quad (5.9)$$

so heißt das Trichterende **totalgeodätisch**.

Bemerkung 5.2 Sofern nicht explizit anders angemerkt, folgt diese Arbeit der Konvention aus [AAR13] und setzt die Enden einer Trichterfläche als totalgeodätisch voraus.

Bemerkung 5.3 Es wird für jede randdefinierende Funktionen x_i in der Definition der Trichtermetriken folgende Konvention gemacht: Außerhalb einer offenen Umgebung des durch sie definierten Randes gilt $x_i \equiv 1$. Diese einfache Annahme ist nicht notwendig. Es ist aber auch keine echte Einschränkung und bietet den Vorteil, dass man das Produkt aller randdefinierenden Funktionen als totale randdefinierende Funktion verwenden kann.

Analog zu den hyperbolischen Flächen lässt sich eine Trichterfläche disjunkt zerlegen in

$$M = K \cup \mathcal{F}, \quad (5.10)$$

wobei $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{n_F} \mathcal{F}_i$ die Gesamtheit aller Trichterenden bezeichnet. Die Fixierung einer Trichtermetrik ist immer mit der Wahl von Trichterkoordinaten verbunden. Diese Wahl ist nicht eindeutig durch die konforme Struktur der Metrik g festgelegt. Insbesondere induziert ein lokaler konformer Koordinatenwechsel im Allgemeinen eine andere rdf für das jeweilige Endstück.

5.3 Integration entlang Trichtern

Für eine Trichterfläche (M, g) sei $f \in C^\infty(M)$. Zur Definition einer Trichterfläche gehört die Identifikation der Trichterenden mit Umgebungen der Gestalt $U := (0, \varepsilon) \times \mathbb{S}^1$ durch einen Diffeomorphismus $\psi : U \rightarrow E$, wobei E ein Trichterende von M bezeichne.

Man konzentriere sich nun auf ein spezifisches Trichterende E und nehme o.B.d.A. an, dass es keine weiteren Trichterenden gib. Die Metrik genügt dann nach Definition der Bedingung

$$\psi^*g|_E = e^\varphi \frac{dx^2 + d\theta^2}{x^2}. \quad (5.11)$$

Das bedeutet, dass die Volumenform lokal auf den Trichterenden die Form

$$d\text{vol}_g = \frac{1}{x^2} e^\varphi dx d\theta \quad (5.12)$$

annimmt. Ferner ist eine Zerlegung $M = K \cup E$ mit einem Kompaktum K möglich. Mithilfe dieser Zerlegung kann das Integral der 2-Form $\omega := f d\text{vol}_g$ aufgeteilt werden in

$$\int_M \omega = \int_M f d\text{vol}_g = \int_K f d\text{vol}_g + \int_E f d\text{vol}_g. \quad (5.13)$$

Da f eine glatte Funktion auf der kompakten Menge $K \subset M$ ist, ist das Integral $\int_K f d\text{vol}_g$ endlich. Das Integral über den Trichterenden hat wegen (5.16) die Gestalt

$$\int_E f d\text{vol}_g = \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} f(x, \theta) \frac{1}{x^2} e^\varphi dx d\theta. \quad (5.14)$$

Letztere Gleichung zeigt auf, dass das Integral von ω entlang der Trichterenden wegen der Beteiligung des Faktors $\frac{1}{x^2}$ nicht endlich ist. Dies kann jedoch durch geeignete Zerfallseigenschaften von f ausgeglichen werden:

Angenommen es gelte $f = x^2 h$ wobei $h \in C^\infty(\overline{M})$ so erhält man

$$\int_E f d\text{vol}_g = \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} f(x, \theta) \frac{1}{x^2} e^\varphi dx d\theta \quad (5.15)$$

$$= \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} x^2 h(x, \theta) \frac{1}{x^2} e^\varphi dx d\theta \quad (5.16)$$

$$= \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} h(x, \theta) e^\varphi dx d\theta < \infty. \quad (5.17)$$

5.4 Poincaré-Einstein-Metriken

Die in diesem Abschnitt zusammengefassten Ergebnisse über Poincaré-Einstein-Mannigfaltigkeiten stammen aus den Arbeiten [Gra99] und [Alb07].

Definition 5.7 Sei \overline{X} eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand und $\dim \overline{X} = n + 1$. Eine Riemannsche Metrik g auf dem Inneren $X \subset \overline{X}$ heißt **konform-kompakt**, wenn eine randdefinierende Funktion x für $M := \partial X$ existiert, so dass sich

$\bar{g} = x^2 g$ zu einer glatten Metrik auf \bar{X} fortsetzen lässt. Die konforme Klasse $[\bar{g}|_{TM}]$ wird als **konforme Unendlichkeit** bezeichnet. $(M^n, [\bar{g}|_{TM}])$ wird auch konformer Rand genannt.

Ist für eine konform-kompakte Metrik g zudem die normalisierte Einstein-Bedingung

$$\text{Ric}(g) + ng = 0 \quad (5.18)$$

erfüllt, so nennt man g **konform-kompakte Einstein-Metrik** oder auch **Poincaré-Einstein-Metrik**.

Bemerkung 5.4 Eine konform-kompakte-Metrik (X, g) ist nach Definition automatisch vollständig und ihre Schnittkrümmung ist in der Nähe des konformen Randes asymptotisch konstant [Gra99]. Der Wert $|dx|_g^2$ ist dabei das Negative der Schnittkrümmung von g . Gilt also für eine konform-kompakte Metrik $|dx|_g^2 = 1 \ \forall p \in \partial X$ so konvergieren alle Schnittkrümmungen gegen -1 . Daher nennt man g in diesem Falle **asymptotisch hyperbolisch**.

Erfüllt eine konform-kompakte Metrik die Einstein-Bedingung (5.18), so gilt stets $|dx|_g^2 = 1$, Poincaré-Einstein-Metriken sind also asymptotisch hyperbolisch.

Bemerkung 5.5 Die konforme Klasse $[\bar{g}|_{TM}]$ ist eine Invariante von g , insbesondere also unabhängig der Wahl der randdefinierenden Funktion.

Beispiel 5.2 Die in dieser Arbeit eingeführten Trichterflächen sind nach Definition konform-kompakte Mannigfaltigkeiten. Sie sind definiert über die Gestalt der Metrik auf den Enden. Mit den Bezeichnungen aus der Definition hat eine derartige Metrik die Form:

$$\psi^* g = e^\varphi \left(\frac{dx^2 + d\theta^2}{x^2} \right), \quad (5.19)$$

wobei $\varphi \in C^\infty(\bar{M})$, welche für $x = 0$ konstant ist. Ist $\varphi \equiv 0$, so liegt eine Poincaré-Einstein-Metrik vor.

Definition 5.8 Sei (X, g) eine konform-kompakte Mannigfaltigkeit mit konformer Unendlichkeit $(M, [\bar{g}|_{TM}])$. Eine rdf x für M heißt **speziell** oder auch **geodätisch**, falls in einer Umgebung des durch sie definierten Randes gilt

$$|dx|_g^2 = 1. \quad (5.20)$$

Für eine Poincaré-Einstein-Mannigfaltigkeit (X, g_+) ermöglicht die Wahl einer speziellen rdf die Identifikation einer Umgebung des Randes ∂X mit $\partial X \times [0, \varepsilon)$ auf welcher die Metrik die Form

$$g_+ = \frac{dx^2 + g_x}{x^2} \quad (5.21)$$

annimmt, wobei g_x eine 1-Parameter-Familie von Metriken auf ∂X ist. (5.21) wird **Normalform** der Poincaré-Einstein-Metrik genannt [Gra99].

Die Familie g_x besitzt eine asymptotische Entwicklung in x . Ist die Dimension des Randes n ungerade, so gilt (vgl. [Gra99])

$$g_x = g^{(0)} + g^{(2)}x^2 + (\text{gerade Potenzen}) + g^{(n-1)}x^{n-1} + g^{(n)}x^n + \dots \quad (5.22)$$

Hier sind die Koeffizienten $g^{(j)}$ Tensoren auf dem Rand M . Ist die Randdimension gerade, so gilt hingegen

$$g_x = g^{(0)} + g^{(2)}x^2 + (\text{gerade Potenzen}) + hx^n \log x + g^{(n)}x^n + \dots \quad (5.23)$$

6 Renormalisierung auf konform-kompakten Mannigfaltigkeiten

Für eine glatte Funktion $f \in C^\infty(X)$ auf einer konform-kompakten Mannigfaltigkeit (X, g) ist das Integral $\int_X f d\text{vol}_g$ nicht endlich, insbesondere ist das Volumen $\text{vol}(X)$ nicht endlich. In diesem Kapitel werden Verfahren vorgestellt, *renormalisierte Integrale* zu definieren. Das renormalisierte Integral soll mit dem Integral selbst übereinstimmen, sofern letzteres wohldefiniert ist. Ist das konventionelle Integral nicht wohldefiniert, so soll das renormalisierte Integral dennoch einen endlichen Wert liefern.

6.1 Das renormalisierte Volumen einer Poincaré-Einstein-Mannigfaltigkeit

Sei (X, g) eine Poincaré-Einstein-Mannigfaltigkeit mit konformer Unendlichkeit $(M, [\bar{g}|_{TM}])$. Weiterhin sei $g_0 \in [\bar{g}|_{TM}]$. Die Wahl eines Repräsentanten g_0 ist verbunden mit der Wahl einer speziellen rdf x , so dass die Poincaré-Einstein-Metrik in Normalform geschrieben werden kann. Die Volumenform kann dann in der Nähe des Randes wie folgt dargestellt werden:

$$d\text{vol}_g = x^{-n-1} \left(\frac{\det g_x}{\det g_0} \right)^{1/2} d\text{vol}_{g_0} dx. \quad (6.1)$$

Die asymptotischen Entwicklungen (5.22) und (5.23) implizieren, dass

$$\left(\frac{\det g_x}{\det g_0} \right)^{1/2} = 1 + v^{(2)}x^2 + (\text{gerade Potenzen}) + v^{(n)}x^n + \dots, \quad (6.2)$$

wobei die Koeffizienten $v^{(j)}$ Funktionen auf M sind. Für die Renormalisierung betrachte man nun für $\varepsilon > 0$ Untermannigfaltigkeiten der Form

$$\{x > \varepsilon\} := \{p \in X \mid x(p) > \varepsilon\} \subset X. \quad (6.3)$$

Durch Integration der Volumenform in (6.1) unter Benutzung von (6.2) erhält man für n ungerade

$$\int_{\{x \geq \varepsilon\}} d\text{vol}_g = C_0 \varepsilon^{-n} + C_2 \varepsilon^{-n+2} + (\text{ungerade Potenzen}) + C_{n-1} \varepsilon^{-1} + V + o(1). \quad (6.4)$$

Für gerade Dimension des Randes M erhält man stattdessen:

$$\int_{\{x \geq \varepsilon\}} \mathrm{dvol}_g = C_0 \varepsilon^{-n} + C_2 \varepsilon^{-n+2} + (\text{gerade Potenzen}) + C_{n-2} \varepsilon^{-2} + L \log \frac{1}{\varepsilon} + V + o(1). \quad (6.5)$$

Dabei sind die Koeffizienten C_i und L Integrale lokaler Krümmungsgrößen von g_0 , also auf dem Rand.

Bemerkung 6.1 Es gilt $C_0 = \frac{1}{n} \mathrm{vol}(M)$ und $L = \int_M v^{(n)} \mathrm{dvol}_{g_0}$ [Gra99].

Definition 6.1 Für eine Poincaré-Einstein-Mannigfaltigkeit (X, g) heißt der konstante Term V in der Entwicklung (6.4) bzw. (6.5) das **renormalisierte Volumen von (X, g)** .

Da das Volumen einer Mannigfaltigkeit das Integral über die Volumenform ist, wurde hier implizit eine Technik eingeführt, Integrale zu renormalisieren. Sei $f \in C^\infty(X)$. Wenn man eine Entwicklung der Form

$$\int_{\{x \geq \varepsilon\}} f \mathrm{dvol}_g = \sum_{(j,k)} C_{(j,k)} \varepsilon^j (\log \varepsilon)^k \quad (6.6)$$

finden kann, so definiert man das **Hadamard-renormalisierte Integral von f** als

$$^H \int_X f \mathrm{dvol}_g := \mathrm{FP}_{\varepsilon=0} \int_{\{x \geq \varepsilon\}} f \mathrm{dvol}_g. \quad (6.7)$$

In dieser Terminologie hat man daher

$$V = ^H \int_X \mathrm{dvol}_g. \quad (6.8)$$

Nach Definition hängt das renormalisierte Volumen von der Wahl des Repräsentanten $g_0 \in [\bar{g}|_{TM}]$ ab. Wie der folgende Satz zeigt, ist V im Falle *ungerader* Randdimension unabhängig dieser Wahl und daher eine Invariante von g . Ist n gerade, so ist hingegen L unabhängig von der Wahl des Repräsentanten, im Allgemeinen nicht aber V .

Satz 6.1 ([Gra99]) *Sei (X, g) eine Poincaré-Einstein-Mannigfaltigkeit mit konformer Unendlichkeit $(M^n, [\bar{g}|_{TM}])$. Ist n ungerade, so hängt V nicht von der Wahl eines Repräsentanten $g_0 \in [\bar{g}|_{TM}]$ ab. Ist n gerade, so ist L unabhängig dieser Wahl.*

6.2 Riesz-Renormalisierung für konform-kompakte Mannigfaltigkeiten

Die Renormalisierung wie sie in [AAR13] für Metriken mit Trichterenden verwendet wird, ist nur unter bestimmten Voraussetzungen möglich. Die Forderung an den Integranden $f \mathrm{dvol}_g$ wird sein, dass er für $x \rightarrow 0$ eine asymptotische Entwicklung erlaubt, die nur aus Potenzen von x und $\log x$ multipliziert mit glatten Funktionen des zugehörigen Randstücks besteht. Die auftretenden Potenzen von x und $\log x$ werden dabei durch eine spezielle Indexmenge kontrolliert.

Definition 6.2 Eine Menge $\mathcal{I} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{N}_0$ heißt **glatte Indexmenge** wenn

- (i) $(z, k) \in \mathcal{I} \Rightarrow (z + 1, k), (z, k - 1) \in \mathcal{I}$,
- (ii) für jede Folge $\{(z_j, k_j)\}_{j=0}^\infty \subseteq \mathcal{I}$ mit $(z_i, k_i) \neq (z_j, k_j) \forall i, j \in \mathbb{N} \Rightarrow \operatorname{Re}(z_j) \rightarrow \infty$.

Definition 6.3 Sei (M, g) eine topologisch endliche Fläche und E ein Ende von M . Weiterhin sei x eine rdf für das zu E assoziierte Randstück N . $f \in C^\infty(M)$ heißt **polyhomogen bezüglich E** , wenn \exists glatte Indexmenge $\mathcal{I} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{N}_0$ und $\exists \{a_{p,q}\}_{(p,q) \in \mathcal{I}} \subset C^\infty(N)$ mit:

$$f \sim \sum_{(z,k) \in \mathcal{I}} a_{z,k} x^z (\log x)^k \quad (x \rightarrow 0). \quad (6.9)$$

Ist eine Funktion f polyhomogen bezüglich aller Enden von (M, g) , so wird die Funktion **polyhomogen** genannt. Die Gestalt der Indexmengen geht zurück auf R.MELROSE, siehe z.B. [Mel93]. Die Forderungen an die Menge \mathcal{I} basieren dabei auf den folgenden Überlegungen:

- Die Potenzen korrespondieren zu den Singularitäten der Mellin-Transformation von f , es ist daher notwendig, eine diskrete Menge zu fordern.
- Bei $x = 0$ sollen nur endlich viele Terme *nicht* verschwinden. Dies wird durch Forderung (ii) ausgedrückt
- Multiplikation von x mit einer positiven C^∞ -Funktion generiert für jede Potenz von $\log x$ die niedrigeren Potenzen bis $(\log x)^0$, daher ist es natürlich zu fordern, dass $(z, k) \in \mathcal{I} \Rightarrow (z, k - 1), \dots, (z, 0) \in \mathcal{I}$
- Die Koeffizienten sind glatte Funktionen. Die Menge der polyhomogenen Funktionen soll also unter Multiplikation mit glatten Funktionen erhalten bleiben. Daraus resultiert die Forderung $(z, k) \in \mathcal{I} \Rightarrow (z + j, k) \in \mathcal{I} \forall j \in \mathbb{N}_0$ (vgl. [Mel93]).

Die Menge der polyhomogenen Funktionen zur Indexmenge \mathcal{I} auf M wird mit $\mathcal{A}_{\text{phg}}^\mathcal{I}(M)$ bezeichnet. Weiterhin bezeichne $\mathcal{A}_{\text{phg}}(M)$ die Menge aller polyhomogenen Funktionen auf M , d.h.

$$\mathcal{A}_{\text{phg}}^*(M) := \{f \in C^\infty(M) : \exists \mathcal{I} : f \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^\mathcal{I}(M)\}. \quad (6.10)$$

MELROSE und auch die Autoren von [AAR13] unterstreichen, dass

$$f \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^*(M) \Leftrightarrow \exists \text{ glatte Indexmenge } \mathcal{I} \text{ sodass } \forall (z, k) \in \mathcal{I} : a_{z,k} \in C^\infty(N)$$

$$\text{und } \forall L \in \mathbb{N}_0 : \left(f - \sum_{(z,k) \in \mathcal{I}, \operatorname{Re}(z) \leq L} a_{z,k} x^z (\log x)^k \right) \in x^{L+\inf \mathcal{I}} C^L(\overline{M}),$$

wobei

$$\inf \mathcal{I} := \inf \{\operatorname{Re}(z) \mid (z, k) \in \mathcal{I}\}. \quad (6.11)$$

Insbesondere gibt es also ein $\gamma > 1$ derart, dass für $x \rightarrow 0$

$$f = \sum_{(z,k) \in \mathcal{I}, \operatorname{Re}(z) \leq L} a_{z,k} x^z (\log x)^k + O(x^\gamma). \quad (6.12)$$

Um die Idee der Riesz-Renormalisierung zu skizzieren betrachte man nun $f \in C^\infty(M)$ für eine Trichterfläche (M, g) mit

$$\int_M f \, d\operatorname{vol}_g < \infty.$$

Sei weiterhin x eine rdf für ∂M . Man definiere die **zu f assoziierte ζ -Funktion** durch

$$\zeta_f(z) := \int_M x^z f \, d\operatorname{vol}_g,$$

für diejenigen Werte $z \in \mathbb{C}$, für die $x^z f$ integrierbar ist. Dann gilt:

$$\zeta_f(0) := \int_M f \, d\operatorname{vol}_g.$$

Die zu f assoziierte ζ -Funktion definiert eine holomorphe Funktion auf einer Halbebene der Form $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > C\}$ für ein $C > 0$. Man nehme nun an, ζ_f sei meromorph nach \mathbb{C} fortsetzbar. Dann kann man die Laurent-Reihenentwicklung von ζ_f um $z = 0$ betrachten:

$$\zeta_f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad (6.13)$$

wobei $a_k \in \mathbb{C} \, \forall k$. Mit dieser Reihe gilt:

$$\zeta_f(0) = a_0 = \int_M f \, d\operatorname{vol}_g. \quad (6.14)$$

Die Idee der Riesz-Renormalisierung ist es nun, diesen Koeffizienten als renormalisiertes Integral zu definieren, falls das gewöhnliche Integral nicht endlich ist, die zur Ausgangsfunktion assoziierte ζ -Funktion jedoch meromorph nach \mathbb{C} fortsetzbar ist. Der Koeffizient a_0 wird als **finite part** oder auch **endlicher Teil** von ζ_f im Punkt $z = 0$ bezeichnet, was sich in folgender Notation niederschlägt:

$$\operatorname{FP}_{z=0} \zeta_f(z) := a_0. \quad (6.15)$$

Definition 6.4 Sei (M, g) eine Trichterfläche und $f \in C^\infty(M)$ derart, dass ζ_f meromorph nach \mathbb{C} fortsetzbar ist. Dann ist das **Riesz-renormalisierte** Integral von f definiert als

$${}^R \int_M f \, d\operatorname{vol}_g := \operatorname{FP}_{z=0} \zeta_f(z). \quad (6.16)$$

6.3 Mellin-Transformation und Polyhomogenität

Um die Meromorphieeigenschaften von ζ_f in Abhängigkeit von f zu studieren benötigt man eine Verbindung zwischen ζ_f als komplexe Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und f als Funktion auf M . Diese Brücke bildet die bereits eingeführte **Mellin-Transformation** einer reellen Abbildung. Es ist ein grundlegendes Prinzip, dass Polstellen der Mellin-Transformierten zur asymptotischen Entwicklung der Originalfunktion $f(x)$ für $x \rightarrow 0$ oder $x \rightarrow \infty$ korrespondieren. Die Polyhomogenität einer Funktion f sichert die meromorphe Fortsetzbarkeit von ζ_f .

Bemerkung 6.2 Die Mellin-Transformation ist nur für Funktionen der Gestalt $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt. Betrachtet man eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ für eine Trichterfläche M , so induziert die Wahl der Trichterkoordinaten (x, θ) eine Funktion $f_\theta(x) := f(x, \theta)$ mit Definitionsbereich \mathbb{R}^+ .

Der größtmögliche zusammenhängende Konvergenzbereich von \mathcal{M}_f , $D \subset \mathbb{C}$, hat die Form

$$D = \langle \alpha, \beta \rangle := \{z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \operatorname{Re}(z) < \beta\}, \quad (6.17)$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Er wird **Fundamentalstreifen** genannt. Man beachte, dass:

$$\int_0^\infty f dx = \int_0^1 f dx + \int_1^\infty f dx, \quad (6.18)$$

und daher:

$$\alpha = \inf_{A \in \mathbb{R}} \int_0^1 f x^{A-1} dx < \infty \quad (6.19)$$

und

$$\beta = \sup_{B \in \mathbb{R}} \int_1^\infty f x^{B-1} dx < \infty. \quad (6.20)$$

Satz 6.2 Sei (M, g) eine Trichterfläche und $f \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^*(M)$. Dann ist \mathcal{M}_f meromorph nach \mathbb{C} fortsetzbar.

BEWEIS Die Strategie des Beweises folgt [FGD95], Theorem 3. Betrachte die nach Annahme existente polyhomogene Entwicklung von f für $x \rightarrow 0$:

$$f(x) \sim \sum_{(v,p) \in \mathcal{I}} a_{v,p} x^v (\log x)^p, \quad (6.21)$$

wobei $a_{v,p}$ glatte Funktionen auf dem durch x definierten Rand von M sind und \mathcal{I} eine glatte Indexmenge ist. Wegen (6.12) gibt es ein $\gamma > 1$ mit

$$f(x) = \sum_{(v,p) \in \mathcal{I}} a_{v,p} x^v (\log x)^p + O(x^\gamma). \quad (6.22)$$

Mit der Gleichung definiere man

$$g(x) := f(x) - \sum_{(v,p) \in \mathcal{I}} a_{v,p} x^v (\log x)^p. \quad (6.23)$$

Es bezeichne $\langle \alpha, \beta \rangle$ den nichtleeren Fundamentalstreifen zu $\mathcal{M}_f(s)$. Sei dann $s \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_f(s) &= \int_0^1 f(x) x^{s-1} dx + \int_1^\infty f(x) x^{s-1} dx \\ &= \int_0^1 g(x) x^{s-1} dx + \int_0^1 \left\{ \sum_{(v,p) \in \mathcal{I}} a_{v,p} x^v (\log x)^p \right\} x^{s-1} dx + \int_1^\infty f(x) x^{s-1} dx. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Die Funktion g erfüllt nach Definition für $x \rightarrow 0$

$$g(x) = O(x^\gamma), \quad \gamma > 1. \quad (6.25)$$

Daher ist die Funktion $G(x) := \int_0^1 g(x) x^{s-1} dx$ analytisch auf dem Streifen $\langle -\gamma, \infty \rangle$. Das letzte Integral in (6.24) definiert eine analytische Funktion auf $\langle -\infty, \beta \rangle$. Durch Integration erhält man für das mittlere Integral eine Funktion, die meromorph nach \mathbb{C} fortgesetzt werden kann:

$$\int_0^1 \left\{ \sum_{(v,p) \in \mathcal{I}} a_{v,p} x^v (\log x)^p \right\} x^{s-1} dx = \sum_{(v,p) \in \mathcal{I}} a_{v,p} \frac{(-1)^p p!}{(s+v)^{p+1}}. \quad (6.26)$$

□

Korollar 6.1 *Ist $f \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^*(M)$, so ist ζ_f meromorph nach \mathbb{C} fortsetzbar.*

BEWEIS Sei $f \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^*(M)$, d.h. es existiert mit den Bezeichnungen von Satz 6.2 eine Entwicklung der Form

$$f(x) \sim \sum_{(v,p) \in \mathcal{I}} a_{v,p} x^v (\log x)^p. \quad (6.27)$$

Weiterhin sei $s := z - 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \zeta_f(z) &= \int_M x^z f d\text{vol}_g \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} x^z f(x, \theta) e^\varphi \frac{1}{x^2} d\theta dx \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$= \int_0^\infty x^{z-2} \int_0^{2\pi} f(x, \theta) e^\varphi d\theta dx \quad (6.29)$$

$$= \int_0^\infty x^{s-1} \int_0^{2\pi} f(x, \theta) e^\varphi d\theta dx. \quad (6.30)$$

Die ζ -Funktion zu f ist also nichts anderes als die Mellin-Transformierte von $h(x) := \int_0^{2\pi} f(x, \theta) e^\varphi d\theta$. Für $x \rightarrow 0$ gilt dann:

$$h(x) = \int_0^{2\pi} f(x, \theta) e^\varphi d\theta = \sum_{(v,p) \in \mathcal{I}} a_{v,p} x^v (\log x)^p \int_0^{2\pi} e^\varphi d\theta. \quad (6.31)$$

Insbesondere gilt also $h \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^*(M)$, also ist $\mathcal{M}_h(s)$ nach Satz 6.2 meromorph nach \mathbb{C} fortsetzbar.

□

6.4 Vergleich von Riesz- und Hadamard-Renormalisierung

Beide Ansätze zur Renormalisierung von Integralen sind nur für polyhomogene Dichten definiert. Für dieses Kapitel sei (X, g) eine Poincaré-Einstein-Mannigfaltigkeit, sodass die Volumenform in der Nähe des Randes wie in (6.1) geschrieben werden kann. Weiterhin sei f eine glatte, polyhomogene Funktion auf X . Die Normalform einer Poincaré-Einstein-Metrik ermöglicht es, in der Nähe des Randes lokale Koordinaten mit einer rdf x zu wählen, sodass gilt

$$\int_X f d\text{vol}_g = \int_0^\delta \int_{\partial X} f d\theta dx, \quad (6.32)$$

wobei $\delta > 0$. Ist das Integral entlang des Randes bereits bekannt und unproblematisch, so kann man Riesz- und Hadamard-Renormalisierung als eindimensionale Integrale leicht vergleichen. Für $k \in \mathbb{N}_0, k \neq -1$ gilt dann (vgl. [Alb07], Abschnitt 2.2):

$$^H \int_0^\delta x^k \log^p x dx = ^R \int_0^\delta x^k \log^p x dx = \delta^{k+1} \sum_{l=0}^p b_l \log^{p-l} \delta, \quad (6.33)$$

sowie für $k = -1$:

$$^H \int_0^\delta \frac{\log^p x}{x} dx = \frac{\log^{p+1} \delta}{p+1} \quad (6.34)$$

und

$$^R \int_0^\delta \frac{\log^p x}{x} dx = 0. \quad (6.35)$$

Trichtermetriken stimmen bis auf einen konformen Faktor mit Poincaré-Einstein-Metriken überein. Für Trichtermetriken sind Riesz- und Hadamard-Renormalisierung anwendbar. Im Falle dieser Trichtermetriken wurde die Konvention $x \equiv 1$ außerhalb einer offenen Umgebung des Randes festgelegt, so dass die Riesz- und Hadamard-renormalisierten Integrale in diesem Fall übereinstimmen, da für $\delta = 1$ dann auch (6.34) verschwindet.

Korollar 6.2 *Das renormalisierte Volumen einer Trichterfläche (M, g) stimmt mit dem Riesz-renormalisierten Integral der Volumenform überein:*

$${}^R \text{vol}_g(M) = \text{FP}_{\varepsilon=0} \text{vol}_g(\{x > \varepsilon\}) = {}^H \int_M \text{dvol}_g = {}^R \int_M \text{dvol}_g. \quad (6.36)$$

Das renormalisierte Volumen erhält nicht alle Eigenschaften seines klassischen Pendant. So ist es möglich, durch kompakte Störung der Metrik das renormalisierte Volumen so zu verändern, dass es einen beliebigen reellen Wert - einschließlich negativer reeller Zahlen - annimmt.

Lemma 6.1 *Sei (M, g) eine Mannigfaltigkeit mit Trichtermetrik und sei x eine totale rdf für ∂M sowie $L \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Dann gibt es eine Metrik $g_L \in [g]$, die mit g bis auf eine kompakte Menge übereinstimmt und für die gilt: ${}^R \text{vol}_{g_L} = L$*

BEWEIS Betrachte $M_\varepsilon \subset M$ definiert durch

$$M_\varepsilon := \{p \in M \mid x(p) \geq \varepsilon\}. \quad (6.37)$$

M_ε ist kompakt, insbesondere also $\text{vol}(M_\varepsilon) < \infty$ und somit ${}^R \text{vol}_g(M_\varepsilon) = \text{vol}_g(M_\varepsilon)$. Das renormalisierte Volumen bleibt nach Definition additiv. Betrachte also folgende Zerlegung:

$$\begin{aligned} {}^R \text{vol}_g(M) &= {}^R \text{vol}_g(M_\varepsilon) + {}^R \text{vol}_g\{x < \varepsilon\} \\ &= \text{vol}_g(M_\varepsilon) + {}^R \text{vol}_g\{x < \varepsilon\}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Man stellt nun fest, dass ${}^R \text{vol}_g(M)$ eine konstante Größe ist und $\text{vol}_g(M_\varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ unendlich groß wird. Das hat zur Folge, dass es ein ε gibt, sodass

$${}^R \text{vol}_g\{x < \frac{\varepsilon}{2}\} < -2|L|. \quad (6.39)$$

Man definiere nun eine glatte Familie glatter Funktionen auf $\mathbb{R}^+ \ni \alpha \mapsto \chi_\alpha(t)$ durch

$$\chi_\alpha(t) = \begin{cases} 1, & t < \frac{\varepsilon}{2} \\ \alpha, & t > \varepsilon. \end{cases} \quad (6.40)$$

Weiterhin sei $\chi_\alpha(t) \in [\alpha, 1]$ für $t \in [\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon]$. Damit gilt nun

$$(\chi_\alpha \circ x) \in C^\infty(M) \text{ mit } \alpha > 0. \quad (6.41)$$

Das bedeutet, dass

$$(\chi_\alpha \circ x)g \in [g]. \quad (6.42)$$

Die Metrik $(\chi_\alpha \circ x)g$ ist also eine zu g konform äquivalente Metrik, die mit g bis auf eine kompakte Teilmenge übereinstimmt.

Sei o.B.d.A. $L \neq {}^R \text{vol}_g(M)$. Angenommen, $L < {}^R \text{vol}_g(M)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} {}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(M) &= {}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(\{x < \frac{\varepsilon}{2}\}) + {}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(\{x \in [\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon]\}) + {}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(\{x > \varepsilon\}) \\ &= {}^R \text{vol}_g(\{x < \frac{\varepsilon}{2}\}) + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon} \chi_\alpha(x) d\text{vol}_g + \alpha \cdot \text{vol}_g(\{x > \varepsilon\}) \end{aligned} \quad (6.43)$$

Insbesondere ist hieraus ersichtlich, dass ${}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(M)$ stetig von α abhängt.

Nun gilt für $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} {}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(M) &= {}^R \text{vol}_g \\ \Rightarrow L &< {}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(M) = {}^R \text{vol}_g. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Ist $\alpha < 1$, so erhält man:

$$\begin{aligned} {}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(M) &= {}^R \text{vol}_g(\{x < \frac{\varepsilon}{2}\}) + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\varepsilon} \chi_\alpha(x) d\text{vol}_g + \alpha \cdot \text{vol}_g(\{x > \varepsilon\}) \\ &< -2|L| + \alpha \cdot \text{vol}_g(\{x > \varepsilon\}) \\ &< L. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Da jedoch Stetigkeit in α vorlag, muss es nach dem Zwischenwertsatz ein α geben mit

$$L = {}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(M). \quad (6.46)$$

Der andere Fall wird analog behandelt. Sei also $L > {}^R \text{vol}_g(M)$. Für $\alpha = 1$ hat man dann:

$$\begin{aligned} {}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(M) &= {}^R \text{vol}_g \\ \Rightarrow L &> {}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(M) = {}^R \text{vol}_g. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Mit einem $\alpha > 1$ gilt:

$$\begin{aligned} {}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(M) &= {}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(\{x < \varepsilon\}) + {}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(\{x > \varepsilon\}) \\ &> {}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(\{x < \varepsilon\}) + \alpha \cdot \text{vol}_g(\{x > \varepsilon\}) \\ &> L. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Der Zwischenwertsatz sichert die Existenz eines geeigneten α mit

$$L = {}^R \text{vol}_{\chi_\alpha(x)g}(M). \quad (6.49)$$

□

6.5 Der renormalisierte Satz von Gauß-Bonnet

Der klassische Satz von Gauß-Bonnet verbindet die Gauß- bzw. Skalkrümmung und geodätische Krümmung des Randes einer Fläche mit einer topologischen Invariante, der Euler-Charakteristik:

Satz 6.3 (Gauß-Bonnet für Flächen mit Rand) Sei $(\overline{M}, \overline{g})$ eine kompakte, orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Rand und $\dim M = 2$. Es bezeichne $K_{\overline{g}}$ die Gaußkrümmung und $k_{\overline{g}}$ die geodätische Krümmung des Randes ∂M . Dann gilt:

$$\int_M K_{\overline{g}} dA_{\overline{g}} + \int_{\partial M} k_{\overline{g}} ds = 2\pi\chi(M). \quad (6.50)$$

Für konform-kompakte Flächen ist das Integral über die Gaußkrümmung nicht endlich. Es zeigt sich jedoch, dass die Techniken zur Renormalisierung *natürlich* in dem Sinne sind, dass sie eine renormalisierte Version des Satzes ermöglichen:

Satz 6.4 (renormalisierter Satz von Gauß-Bonnet für Trichterflächen) Sei (M, g) eine Trichterfläche mit totalgeodätischen Trichterenden. Dann gilt

$${}^R \int_M R_g dA_g = 4\pi\chi(M) \quad (6.51)$$

BEWEIS Für $\varepsilon > 0$ betrachte die Fläche $M_\varepsilon := \{x \geq \varepsilon\}$. Da M_ε eine Fläche mit Rand ist, kann Satz 6.3 angewandt werden. Dann gilt

$$\int_M R_\varepsilon dA_\varepsilon + 2 \int_{\partial M} k_\varepsilon ds = 4\pi\chi(M_\varepsilon). \quad (6.52)$$

Für kleines ε stimmen $\chi(M)$ und $\chi(M_\varepsilon)$ überein. Weiterhin hat man nach Abtrennen des endlichen Teils für $\varepsilon \rightarrow 0$:

$${}^R \int_M R dA_g + \text{FP2}_{\varepsilon=0} \int_{\partial M} k_\varepsilon ds = 4\pi\chi(M). \quad (6.53)$$

In [Alb07], Theorem 4.5, wird gezeigt, dass der Randbeitrag $\text{FP2}_{\varepsilon=0} \int_{\partial M} k_\varepsilon ds$ verschwindet, wenn die Enden der Fläche totalgeodätisch sind.

□

7 Der Wärmeleitungskern von edge-Mannigfaltigkeiten

Für geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeiten wird die ζ -regularisierte Funktionaldeterminante des Laplace-Beltrami-Operators durch $\det \Delta_g := \exp(-\zeta'(0))$ definiert. Dafür wurde ausgenutzt, dass die Spur des Wärmeleitungskerns sich als Integral über den auf die Diagonale eingeschränkten Kern darstellen lässt und dass ζ -Funktion und Spur des Wärmeleitungskerns durch Mellin-Transformation miteinander in Beziehung stehen.

Auf nichtkompakten Mannigfaltigkeiten ist das nicht mehr möglich, da der Wärmeleitungskern auf der Diagonale $\text{diag}_M \subset M \times M$ bezüglich des Riemannschen Maßes im Allgemeinen nicht integrierbar ist. Um dieses Problem für konform-kompakte Mannigfaltigkeiten durch Renormalisierung zu beheben, muss nachgewiesen werden, dass der Wärmeleitungskern für derartige Mannigfaltigkeiten eine polyhomogene Entwicklung bezüglich der konformen Berandung zulässt.

In diesem Kapitel wird eine neue Klasse von Mannigfaltigkeiten eingeführt, die sogenannten edge-Mannigfaltigkeiten. Sie verallgemeinern konform-kompakte Metriken und asymptotisch zylindrische Metriken gleichermaßen. Auch ALBIN widmete sich in der Arbeit [Alb09] den edge-Mannigfaltigkeiten. Er konstruierte dort den Wärmeleitungskern einer solchen Mannigfaltigkeit. Es werden nun die Grundlagen aus [Alb09] eingeführt und einige Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst. Nützliches Material zu edge-Mannigfaltigkeiten ist auch in der Arbeit [GK12] zu finden. Die Ausführungen in diesem Kapitel sind diesen beiden Veröffentlichungen und dem Vorlesungsskript [Alb12] entnommen.

7.1 edge-Metriken

Sei M das Innere einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit \overline{M} mit Rand. Der Rand ∂M sei dabei der Totalraum einer Faserung

$$F \longrightarrow \partial M \xrightarrow{\phi} B. \quad (7.1)$$

Sei $V := \ker \phi_* \subset T\partial M$ das vertikale Vektorbündel über ∂M , welches aus den Vektoren besteht, die tangential bezüglich der Faser F sind. Das bedeutet, dass die Faser von V an $e \in F$ gegeben ist durch $T_e(F_{\phi(e)})$.

Definition 7.1 Ein Vektorfeld ξ auf M heißt **edge-Vektorfeld**, wenn $\xi|_{\partial M}$ tangential zur Faser F ist.

Es bezeichne x eine rdf für den Rand ∂M . In einer Umgebung von ∂M kann man spezielle Koordinaten (x, y^α, z^A) mit folgenden Eigenschaften wählen [GK12]:

- y^α sind Koordinaten auf M , deren Einschränkung auf ∂M Lifts lokaler Koordinaten der Basis B sind
- z^A Koordinaten auf M , deren Einschränkung jeder Faser von ∂M lokale Koordinaten auf der Faser definieren

Man stelle fest, dass die y^α auf der Faser jeweils konstant sind. In dieser Terminologie kann man nun die Menge Υ_{edge} der edge-Vektorfelder charakterisieren:

$$\Upsilon_{\text{edge}} := \text{span}_{C^\infty(M)} \{x\partial_x, x\partial_y, \partial_z\} \quad (7.2)$$

Auf M existiert ein besonderes Vektorbündel eTM , welches das **edge-Tangentialbündel** genannt wird. Es ist charakterisiert durch die Eigenschaft, dass seine glatten Schnitte genau durch die edge-Vektorfelder gegeben sind. Für Punkte im Inneren der Mannigfaltigkeit sind edge-Tangentialbündel und Tangentialbündel auf natürliche Weise isomorph, was nach Konstruktion für die Randpunkte nicht zutrifft. In lokalen Koordinaten hat man für $p \in M$ also

$${}^eT_pM = \text{span}\{x\partial_x, x\partial_y, \partial_z\} \quad (7.3)$$

Das duale Bündel, das **edge-Kotangentialbündel** ${}^eT^*M$, wird entsprechend durch die zugehörige Dualbasis $\{x\text{d}x, x\text{d}y^\alpha, \text{d}z^A\}$ aufgespannt. Mit diesen Bündeln kann nun eine edge-Metrik analog zu einer Riemannschen Metrik definiert werden:

Definition 7.2 Eine **edge-Metrik** ist eine positiv definite, symmetrische Bilinearform $g_e : {}^eT_pM \times {}^eT_pM \rightarrow \mathbb{R}$, welche glatt vom Fußpunkt $p \in M$ abhängt.

Eine edge-Metrik reduziert sich auf dem Inneren $M \setminus \partial M$ zu einer normalen Riemannschen Metrik, die sich singular bei ∂M verhält. Gilt $\dim F = 0$, so ist die edge-Metrik eine konform-kompakte Metrik ohne z -Koordinaten.

7.2 Der Wärmeleitungsraum des \mathbb{R}^m

Der Wärmeleitungskern des \mathbb{R}^m mit der euklidischen Metrik ist gegeben durch [Cha84]:

$$\mathcal{K}_{\mathbb{R}^m}(x, y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \exp\left(-\frac{|x - y|^2}{4t}\right). \quad (7.4)$$

Für $t > 0$ ist $\mathcal{K}_{\mathbb{R}^m}$ eine glatte Funktion in den Variablen x, y und t . Betrachtet man $t \rightarrow 0$ so verschwindet dieser Wärmeleitungskern außerhalb der Diagonalen $\text{diag}_{\mathbb{R}^m} := \{x = y\}$ mit

exponentieller Geschwindigkeit. Er ist jedoch singulär auf der Diagonalen für $t \rightarrow 0$. Das Ziel ist es nun, dieses singuläre Verhalten genauer zu verstehen. Dazu werden neue Koordinaten, die **parabolischen Polarkoordinaten**, eingeführt. Der Begriff *parabolisch* bezieht sich auf das unterschiedliche Verhalten der Veränderlichen t und $x - y$ unter Skalierungen. Man definiere

$$\mathbb{S}_P := \{(\theta, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \mid \theta + |\omega|^2 = 1\}. \quad (7.5)$$

Mit $r = \sqrt{t + |x - y|^2}$ kann jedes Tripel $(x, y, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$ dargestellt werden als

$$t = r^2\theta, \quad x = x, \quad y = x - r\omega \quad (7.6)$$

Die Koordinaten (r, θ, ω, x) werden als **parabolische Polarkoordinaten** für $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$ bezeichnet. In parabolischen Polarkoordinaten hat der Wärmeleitungskern folgende Gestalt:

$$\mathcal{K}_{\mathbb{R}^m} = \frac{1}{(4\pi t)^{m/2}} \exp\left(-\frac{|\omega|^2}{4\theta}\right). \quad (7.7)$$

Parabolische Polarkoordinaten können nur für $r \neq 0$ definiert werden, da $r = 0$ genau der singulären Diagonale des \mathbb{R}^m bei $\{t = 0\}$ entspricht. Eine systematischere Sichtweise auf die obige Konstruktion bieten Mannigfaltigkeiten mit Ecken. Implizit wurde eine Mannigfaltigkeit mit Ecken konstruiert, der sogenannten **Wärmeleitungsraum** des \mathbb{R}^m :

$$H\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}_P \times \mathbb{R}^+ \quad (7.8)$$

Zu diesem Wärmeleitungsraum gehört eine natürliche Abbildung β :

$$\begin{array}{ccc} \beta : & H\mathbb{R}^m & \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+ \\ & \downarrow & \downarrow \\ & (r, \theta, \omega, x) & \longmapsto (r^2\theta, x, y - r\omega) \end{array}$$

β ist ein Diffeomorphismus von $H\mathbb{R}^m \setminus \{r = 0\} \longrightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+) \setminus (\text{diag} \times \{0\})$.

Man nennt $(H\mathbb{R}^m, \beta)$ den **parabolischen Blowup** von $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+$ entlang $\text{diag} \times \{0\}$.

7.3 Der Wärmeleitungsraum einer Riemannschen Mannigfaltigkeit

Sei nun (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit ihrem Wärmeleitungskern \mathcal{K}_{Δ_g} . Analog zu den Betrachtungen für $M = \mathbb{R}^m$ muss die singuläre Untermannigfaltigkeit geeignet beschrieben werden. Betrachte dazu die Projektionen

$$\pi : TM \times \mathbb{R}^+ \rightarrow TM \rightarrow M.$$

Für jeden Punkt $p \in M$ definiere

$$\mathbb{S}_P(p) := \{(\omega, \theta) \in T_p M \times \mathbb{R}^+ \mid \theta + |\omega|_g^2 = 1\}.$$

Diese Definition führt zu einer geeigneten Verallgemeinerung von \mathbb{S}_P aus dem Fall für den \mathbb{R}^m :

$$\mathbb{S}_P(M) := \bigcup_{p \in M} \mathbb{S}_P(p).$$

Durch die Projektionsabbildung $\pi : \mathbb{S}_P(M) \rightarrow M$ erhält man eine lokal-triviale Faserung auf M mit Faser \mathbb{S}_P .

Definition 7.3 Der **Wärmeleitungsraum** einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist definiert als

$$HM := [(M \times M \times \mathbb{R}^+) \setminus (\text{diag}_M \times \{0\})] \bigcup \mathbb{S}_P M, \quad (7.9)$$

versehen mit einer glatten Struktur einer Mannigfaltigkeit mit Ecken.

Für den Wärmeleitungsraum gibt es eine natürliche **Blow-down-Abbildung**

$$\beta : HM \rightarrow M \times M \times \mathbb{R}^+ \quad (7.10)$$

mit der Eigenschaft, dass $\beta|_{\text{diag}_M \times \{0\}} = \text{id}|_{\text{diag}_M \times \{0\}}$ und $\beta = \pi$ auf $\mathbb{S}_P(M)$.

Bemerkung 7.1 Für eine ausführliche Abhandlung über glatte Strukturen für Mannigfaltigkeiten mit Ecken sowie den Blow-up von Untermannigfaltigkeiten verweisen wir auf [Mel93].

Betrachte nun ein Normalkoordinatensystem von Karten für $M \times M \times \mathbb{R}^+$. Für einen Punkt $(p, p, 0)$ und eine Umgebung $U \subset M \times M \times \mathbb{R}^+$ bedeutet die Abbildung β nun, dass man ein Koordinatensystem um $\beta^{-1}(p, p, 0)$ durch Einführung von parabolischen Polarkoordinaten (wie im Falle des \mathbb{R}^m betrachtet) erhalten hat.

Sei also $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ die Koordinaten erzeugt durch $\exp_p : T_p M \rightarrow M$. Dann kann man Punkte des Wärmeleitungsraumes durch folgende Koordinaten darstellen:

$$(\theta, \omega), \zeta, r \in \mathbb{S}_P \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^+. \quad (7.11)$$

Man nehme nun folgende Identifikationen vor: $r = 0$ entspricht $\mathbb{S}_P(\exp_p(\zeta))$ und für $r \neq 0$:

$$(\exp_p(r\omega + \zeta), \exp(\zeta), r^2\theta) \in (M^2 \times \mathbb{R}^+) \setminus [\text{diag}_M \times \{0\}]. \quad (7.12)$$

Diese Konstruktion wird als **Blow-up** des Wärmeleitungsraumes entlang $\text{diag}_M \times \{0\}$ bezeichnet. Man notiert den Blow-up einer Mannigfaltigkeit X bezüglich einer Untermannigfaltigkeit Y mit $[X; Y]$. Für den Fall oben ergibt sich also der Wärmeleitungsraum als

$$HM = [M^2 \times \mathbb{R}^+; \text{diag}_M \times \{0\}]. \quad (7.13)$$

7.4 Der Wärmeleitungsraum einer edge-Metrik

Im Folgenden wird der Wärmeleitungsraum einer edge-Metrik konstruiert. Dazu werden nun zwei Blow-ups nacheinander vollzogen. Sei also M eine edge-Mannigfaltigkeit. Man definiere

$$\begin{aligned} M_e^2 &:= [M \times M; \{\partial M \times \partial M\}_B], \\ \text{wobei } \{\partial M \times \partial M\}_B &:= \{(\xi, \xi') \in \partial M^2 : \phi(\xi) = \phi(\xi')\}, \\ \text{diag}_e &:= \overline{\beta_e^{-1}(\text{diag} \setminus \{\partial M \times \partial M\}_B)}. \end{aligned}$$

Für den Wärmeleitungsraum muss das kartesische Produkt $M_e^2 \times \mathbb{R}^+$ betrachtet werden. Der Wärmeleitungsraum ist dann definiert als der parabolische Blow-up der Diagonale bei $t = 0$, $\text{diag} \times \{0\}$, in dt -Richtung:

$$HM_e := [M_e^2 \times \mathbb{R}^+; \text{diag}_e \times \{0\}; \langle dt \rangle]. \quad (7.14)$$

Man erhält zu den Blow-ups nun zwei verschiedene Blow-down-Abbildungen:

$$M_e^2 \xrightarrow{\beta_e} M^2 \quad (7.15)$$

sowie

$$HM_e \xrightarrow{\beta_H} M_e^2 \times \mathbb{R}^+. \quad (7.16)$$

Betrachtet man für $(\xi, t) \in M_e^2 \times \mathbb{R}^+$ die von β_e induzierte Abbildung

$$\hat{\beta}_e(\xi, t) := (\beta_e(\xi), t), \quad (7.17)$$

so kann man diese mit β_H komponieren. Dann bezeichne γ die Komposition $\hat{\beta}_e \circ \beta_H$, den sogenannten **vollständigen Blow-down**:

$$\gamma : HM_e \rightarrow M_e^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow M^2 \times \mathbb{R}^+. \quad (7.18)$$

Es ist gut, sich die beiden Blow-ups und die dadurch neu entstanden Hyperflächen schematisch darzustellen (siehe Abbildung 7.1). Die Zahlenkombinationen dienen hier als Bezeichner für die Flächen. Die beiden *rundlich* dargestellten Hyperflächen sind jene, die durch die Blow-ups neu entstanden sind. Die Rand-Hyperfläche mit Bezeichner X wird im Folgenden \mathfrak{B}_X genannt. Die wichtigsten beiden von Ihnen sind $\mathfrak{B}_{00,2}$, welche als **zeitliche Frontfläche** bezeichnet wird, und $\mathfrak{B}_{11,0}$, welche auch **zeitliche Randfläche** genannt wird. Zu diesen Hyperflächen bezeichne ρ_X eine für diese Hyperfläche randdefinierende Funktion.

Sei $S \subset M$ eine Rand-Hyperfläche. Dann bezeichne $\dot{C}_S^\infty(M)$ die Menge der glatten Funktionen auf M , die die auf allen Rand-Hyperflächen außer S von unendlicher Ordnung verschwinden.

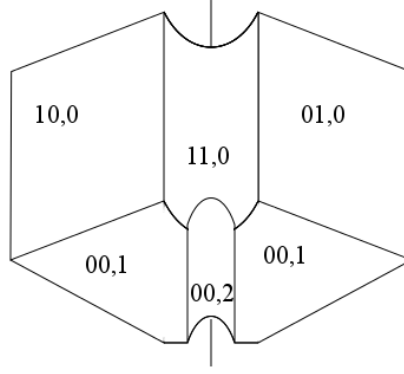


Abbildung 7.1: Schema des Wärmeleitungsraumes HM_e : Die rundlich angedeuteten Flächen sind die neu durch Blow-up entstandenen Hyperflächen.

Definition 7.4 Mit den Bezeichnungen der eben gemachten Betrachtungen definiere man wie in [Alb09] das **edge-Dichtebündel** durch

$$KD := \rho_{00,2}^{(-\frac{m+3}{2})} \rho_{11,0}^{(-\frac{b+1}{2})} \Omega^{\frac{1}{2}}(HM_e). \quad (7.19)$$

Mithilfe dieser Dichten können nun Pseudodifferentialoperatoren definiert werden. Sei dazu für $k, l > 0$ die Menge $\mathfrak{K}^{k,l}(M, KD)$, die Menge von Integralkernen der Gestalt:

$$\mathfrak{K}^{k,l}(M, KD) := \rho_{00,2}^k \rho_{11,0}^l C_{00,2;11,0}^{\infty}(HM_e; KD). \quad (7.20)$$

Definition 7.5 Der Raum der Integraloperatoren H , deren Integralkern \mathcal{K}_H ein Element von $\mathfrak{K}^{k,l}(M, KD)$ ist, bezeichnen wir mit $\Psi_{e,\text{Heat}}^{k,l}(M, E)$.

Es ist hilfreich, zu rekapitulieren, wie mit der letzten Definition gearbeitet werden kann. Für ein Element $\mathcal{K}_A \in \mathfrak{K}^{k,l}(M, KD)$ erhält man einen Operator

$$A : C^\infty(M) \rightarrow C^{-\infty}(M \times \mathbb{R}^+), \quad (7.21)$$

durch

$$A(f)(\zeta, t) := \int_M (\gamma_* \mathcal{K}_A)(\zeta, \zeta', t) f(\zeta'). \quad (7.22)$$

Von grundlegender Bedeutung für die Renormalisierung ist der folgende Satz:

Satz 7.1 ([Alb09], Theorem 5.2) *Sei g eine edge-Metrik auf M . Dann ist der zu Δ_g gehörende Wärmeleitungsoperator ein Element von $\Psi_{e,\text{Heat}}^{2,0}(M, E)$.*

Nach Definition besitzen die Elemente der Pseudodifferentialoperator-Algebren $\Psi_{e,\text{Heat}}^{k,l}(M, E)$ polyhomogene Entwicklungen für die korrespondierenden Randhyperflächen. Da jede Trichtermetrik eine konform-kompakte Metrik ist und die Menge der konform-kompakten Mannigfaltigkeiten eine Teilmenge der edge-Mannigfaltigkeiten bildet, gilt das folgende Korollar:

Korollar 7.1 *Sei (M, g) eine Fläche mit Trichterenden. Dann ist der auf die Diagonale von $M \times M$ eingeschränkte Wärmeleitungskern $\mathcal{K}|_{\text{diag}_M}$ eine glatte Funktion mit polyhomogener Asymptotik bezüglich des Randes ∂M .*

Der Wärmeleitungsoperator einer edge-Metrik g_e wird analog zum Fall kompakter Mannigfaltigkeiten mit $e^{-t\Delta_e}$ notiert. In [Alb09], Abschnitt 8.4, wird bestätigt, dass diese Sichtweise auch im Falle von edge-Mannigfaltigkeiten seine Berechtigung behält. Es wird gezeigt, dass

$$\mathcal{K}_{\Delta_e}(z, z') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-t\lambda} R(\lambda, z, z') d\lambda \quad (7.23)$$

gilt, wobei hier R den Kern des Resolventenoperators des Laplace-Operators und γ einen Weg in \mathbb{C} bezeichnet.

8 Eine Polyakov-Formel für die renormalisierte Determinante

8.1 Die renormalisierte Spur

Für eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) sei $A : L^2(M, g) \rightarrow L^2(M, g)$ ein Operator, der durch Integration gegen einen Integralkern $\mathcal{K}_A \in C^\infty(M \times M)$ wirkt, d.h. für $f \in L^2(M, g)$

$$Af(x) = \int_M \mathcal{K}_A(x, y) f(y) d\text{vol}_g(y). \quad (8.1)$$

In diesem Fall ist A von Spurklasse und es gilt

$$\text{Tr}(A) = \int_M \mathcal{K}_A(x, x) d\text{vol}_g(x). \quad (8.2)$$

Betrachtet man die Wärmeleitungsoperatoren auf nichtkompakten Mannigfaltigkeiten so ist deren Kern, der Wärmeleitungskern, für $t > 0$ eine glatte Funktion:

$$\mathcal{K}_\Delta \in C^\infty(M \times M \times (0, \infty)).$$

Der auf die Diagonale eingeschränkte Kern verhält sich unter Umständen für $t \rightarrow 0$ singular, sodass er bezüglich des Riemannschen Maßes der Metrik möglicherweise nicht integrierbar ist.

Sei (M, g) eine Trichterfläche mit ihren Trichterenden $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{n_F} \mathcal{F}_i$ und den zugehörigen Trichterkoordinaten (x_i, θ_i) . Aus der Arbeit [Alb09] geht hervor, dass der Wärmeleitungskern eine polyhomogene Entwicklung für $x_i \rightarrow 0$ zulässt, so dass sich sein Integral bezüglich des Riemannschen Maßes renormalisieren lässt.

Definition 8.1 Seien A ein Integraloperator wie in (8.1) beschrieben auf einer Trichterfläche (M, g) und $\mathcal{K}_A \in \mathcal{A}_{\text{phg}}^*(M)$ sowie x eine rdf. Dann ist die **renormalisierte Spur** von A definiert als

$${}^R \text{Tr}(A) = {}^R \int_M \mathcal{K}_A(x, x) d\text{vol}_g(x). \quad (8.3)$$

Die Renormalisierung ist nicht unabhängig von der verwendeten rdf. Die hier zur Renormalisierung herangezogene rdf ist dabei x .

8.2 Die Asymptotik der renormalisierten Spur

Die Skalarkrümmung einer hier betrachteten Trichtermetric ist nicht konstant, jedoch ist sie entlang der Trichterenden asymptotisch konstant. Der Ausgangspunkt ist nun die Arbeit [Alb09], welche Aussagen über die Asymptotik des Wärmeleitungskerns einer edge-Metric trifft. In der Arbeit wird der Wärmeleitungskern einer edge-Mannigfaltigkeit explizit iterativ konstruiert. Das Besondere an dieser Konstruktion ist, dass die Konstruktion des Kerns in einem Punkt $z \in M$ ausschließlich lokale Informationen einer offenen Umgebung $U_\varepsilon(z) \subset M$ (für ein $\varepsilon > 0$) benötigt. Der Wärmeleitungskern einer konform-kompakten Mannigfaltigkeit ist also in diesem Sinne unabhängig von der konformen Berandung. Da der Wärmeleitungskern nur aus lokalen Information gewonnen werden kann, ist es möglich, die Koeffizienten der Asymptotik bezüglich $t \rightarrow 0$ auf die gleiche Weise wie im Fall geschlossener Mannigfaltigkeiten auszurechnen. Der Wärmeleitungskern einer edge-Mannigfaltigkeit eingeschränkt auf seine Diagonale besitzt folglich in jedem Punkt für $t \rightarrow 0$ die gleiche Asymptotik, wie sie in Satz (2.2) für geschlossene Flächen formuliert wurde. Als direkte Konsequenz der Konstruktion des Wärmeleitungskerns einer edge-Metric in [Alb09] ergibt sich daher:

Korollar 8.1 *Sei (M, g) eine Trichterfläche. Dann gilt für den Wärmeleitungskern des zugehörigen Laplace-Beltrami-Operators*

$$\text{FP}_{t=0} \mathcal{K}_{\Delta_g}|_{\text{diag}} = \frac{R_g}{24\pi}. \quad (8.4)$$

Lemma 8.1 *Sei (M, g) eine Trichterfläche mit totalgeodätischen Trichterenden $\bigcup_{i=1}^{n_F} \mathcal{F}_i$. Es bezeichne x eine totale rdf. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Für $t \rightarrow 0$ gibt es $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sodass*

$${}^R \text{Tr} (e^{-t\Delta}) = (4\pi t)^{-1} \sum_{j=0}^k a_j [\Delta_g] t^j + O(t^{k+1}) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (8.5)$$

$$\text{wobei } a_0 = \text{FP}_{t=0} {}^R \text{Tr} (e^{-t\Delta_g}) = \frac{\chi(M)}{6}.$$

(ii) *Ist $\varphi = O(x_F^2)$ so ist der Operator $\int_0^t e^{-(t-s)\Delta_\tau} \varphi \Delta e^{-s\Delta_\tau} ds$ von Spurklasse.*

BEWEIS Zu (i):

Die Asymptotik von $\mathcal{K}_{\Delta_g}|_{\text{diag}}$ für $t \rightarrow 0$ ist durch die gleichen Formeln gegeben, die auch im kompakten Fall gelten:

$$\begin{aligned} {}^R \text{Tr} (e^{-t\Delta_g}) &= {}^R \int_M \mathcal{K}_{\Delta_g}|_{\text{diag}} dA_g \\ &= {}^R \int_M \left\{ \frac{1}{(4\pi t)} \sum_{j=0}^k u_j [\Delta_g] t^j + O(t^{k+1}) \right\} dA_g \quad \text{für } t \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Da die Trichterenden als totalgeodätisch vorausgesetzt waren, kann der renormalisierte Satz von Gauß-Bonnet angewandt werden:

$$\begin{aligned} \text{FP}_{t=0}^R \text{Tr} (e^{-t\Delta_g}) &= a_0 = \frac{1}{4\pi} \int_M^R u_1[\Delta_g] dA_g \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_M^R \frac{R_g}{6} dA_g \\ &= \frac{\chi(M)}{6}. \end{aligned}$$

Zu (ii):

An dieser Stelle kommen die Pseudodifferentialoperator-Algebren $\Psi_{e,\text{Heat}}^{k,l}(M, E)$ aus der Arbeit [Alb09] ins Spiel. Der Wärmeleitungsoperator ist ein Element aus $\Psi_{e,\text{Heat}}^{2,0}(M, E)$. Weiterhin gilt $\Delta e^{-t\Delta_\tau} \in \Psi_{e,\text{Heat}}^{2,0}(M, E)$ und $\varphi \in \Psi_{e,\text{Heat}}^{0,k}(M, E)$. Nach Anwendung der Kompositionsregeln aus [Alb09] ist dann $\int_0^t e^{-(t-s)\Delta_\tau} \varphi \Delta e^{-s\Delta_\tau} ds \in \Psi_{e,\text{Heat}}^{2+2,k}(M, E)$. Folglich ist dies ein Integraloperator, der durch einen Kern wirkt. Dieser Integralkern besitzt nach Definition der Algebren eine polyhomogene Asymptotik für $x \rightarrow 0$. Multiplikation mit einer $O(x^2)$ -Funktion gleicht das singuläre Verhalten der Volumenform unter Integration aus, so dass man einen Spurklasseoperator erhält.

□

Lemma 8.2 *Sei \mathcal{F} ein Trichterende einer Trichterfläche (M, g) und sei $\varphi \in C^\infty(\overline{M})$ mit $\varphi((x_F, \theta)) \sim 1$ für $x_F \rightarrow 0$. Dann gilt für die Wärmeleitungsoperatoren $e^{-t\Delta_g}$*

$$^R \text{Tr} \left([e^{-(t-s)\Delta_g}, \varphi \Delta_g e^{-s\Delta_g}] \right) = 0. \quad (8.7)$$

BEWEIS Zur Abkürzung definiere man

$$e_A := e^{-(t-s)\Delta_g} \varphi \Delta_g e^{-s\Delta_g}, \quad (8.8)$$

$$e_B := \varphi \Delta_g e^{-t\Delta_g}. \quad (8.9)$$

Diese Operatoren werden verglichen mit

$$\widetilde{e}_A := e^{-(t-s)\Delta_g} \Delta_g e^{-s\Delta_g},$$

$$\widetilde{e}_B := \Delta_g e^{-t\Delta_g}.$$

Die Integralkerne dieser Operatoren besitzen für $x_F \rightarrow 0$ eine polyhomogene Entwicklung. Der Punkt ist nun, dass die Bildung des renormalisierten Integrals nur von dieser Asymptotik abhängt und Integranden mit gleicher Asymptotik das gleiche renormalisierte Integral erzeugen. Für die Kerne gilt zunächst für $x_F \rightarrow 0$:

$$\mathcal{K}_{e_A} \sim \mathcal{K}_{\widetilde{e}_A}, \quad (8.10)$$

$$\mathcal{K}_{e_B} \sim \mathcal{K}_{\widetilde{e}_B}. \quad (8.11)$$

Damit ergibt sich in diesem Fall für die renormalisierte Spur des Kommutators:

$$\begin{aligned}
 {}^R \text{Tr} \left([e^{-(t-s)\Delta_g}, \varphi \Delta_g e^{-s\Delta_g}] \right) &= {}^R \text{Tr} \left(e^{-(t-s)\Delta_g} \varphi \Delta_g e^{-s\Delta_g} \right) - {}^R \text{Tr} \left(\varphi \Delta_g e^{-s\Delta_g} e^{-(t-s)\Delta_g} \right) \\
 &= {}^R \text{Tr} \left(e^{-(t-s)\Delta_g} \varphi \Delta_g e^{-s\Delta_g} \right) - {}^R \text{Tr} \left(\varphi \Delta_g e^{-t\Delta_g} \right) \\
 &= {}^R \text{Tr} (e_A) - {}^R \text{Tr} (e_B) \\
 &= {}^R \int_M \mathcal{K}_{e_A}|_{\text{diag}} \text{dvol}_g - {}^R \int_M \mathcal{K}_{e_B}|_{\text{diag}} \text{dvol}_g \\
 &= \text{FP}_{z=0} \int_M x^z \mathcal{K}_{e_A}|_{\text{diag}} \text{dvol}_g - \text{FP}_{z=0} \int_M x^z \mathcal{K}_{e_B}|_{\text{diag}} \text{dvol}_g \\
 &= \text{FP}_{z=0} \int_M x^z \mathcal{K}_{\tilde{e}_A}|_{\text{diag}} \text{dvol}_g - \text{FP}_{z=0} \int_M x^z \mathcal{K}_{\tilde{e}_B}|_{\text{diag}} \text{dvol}_g \text{ für } x_F \rightarrow 0 \\
 &= {}^R \int_M \mathcal{K}_{\tilde{e}_A}|_{\text{diag}} \text{dvol}_g - {}^R \int_M \mathcal{K}_{\tilde{e}_B}|_{\text{diag}} \text{dvol}_g \text{ für } x_F \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit basiert auf der obigen Bemerkung, dass die meromorphe Fortsetzung der ζ -Funktion nur von der polyhomogenen Entwicklung des Integralkerns abhängt. Diese sind nach Voraussetzung für $x_F \rightarrow 0$ aber identisch.

$$\begin{aligned}
 & {}^R \int_M \mathcal{K}_{\tilde{e}_A}|_{\text{diag}} \text{dvol}_g - {}^R \int_M \mathcal{K}_{\tilde{e}_B}|_{\text{diag}} \text{dvol}_g \\
 &= {}^R \text{Tr} (\tilde{e}_A) - {}^R \text{Tr} (\tilde{e}_B) \\
 &= {}^R \text{Tr} \left([e^{-(t-s)\Delta_g}, \Delta_g e^{-s\Delta_g}] \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

Die gleiche Argumentation führt zu folgendem Korollar:

Korollar 8.2 *Mit den Bezeichnungen aus Lemma 8.2 gilt*

$${}^R \text{Tr} ([\varphi, \Delta_g] e^{-t\Delta_g}) = 0. \quad (8.12)$$

8.3 Die renormalisierte Funktionaldeterminante

Die Funktionaldeterminante des Laplace-Beltrami-Operators Δ_h einer geschlossenen Fläche (N, h) wurde mithilfe der meromorphen Fortsetzung der spektralen ζ -Funktion definiert:

$$\det \Delta_h := \exp (\zeta'_{\text{spec}}(0)). \quad (8.13)$$

Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) > 1$ hat $\zeta_{\text{spec}}(s)$ die Darstellung:

$$\zeta_{\text{spec}}(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} (\text{Tr} (e^{-t\Delta_h} - \mathcal{P})) \text{d}t \quad (8.14)$$

Diese Definition ist möglich, weil $s = 0$ ein regulärer Punkt der meromorphen Fortsetzung von ζ_{spec} ist. Der Wärmeleitungsoperator des Laplace-Beltrami-Operators einer Trichterfläche ist nicht von Spurklasse.

Lemma 8.3 *Sei (M, g) eine Trichterfläche und Δ_g der zugehörige Laplace-Beltrami-Operator. Dann gilt für die orthogonale Projektion $\mathcal{P}_{\ker \Delta_g}$ auf den 0-Eigenraum von Δ_g*

$$\mathcal{P}_{\ker \Delta_g} \equiv 0 \quad (8.15)$$

BEWEIS Da vol_g nicht endlich ist, liegen im Gegensatz zum Fall kompakter Flächen die konstanten Funktionen nicht mehr im Raum $L^2(M, g)$. Sie sind daher keine Eigenfunktionen von Δ_g und $\lambda = 0$ ist nicht im diskreten Spektrum des Laplace-Beltrami-Operators enthalten. Trichterenden sind lokal konform äquivalent zu \mathbb{H} . Das stetige Spektrum von $\Delta_{\mathbb{H}}$ ist durch das Intervall $[\frac{1}{4}, \infty)$ gegeben ([Bor07], Theorem 4.2). Insbesondere ist $\lambda = 0$ nicht im stetigen Spektrum von Δ_g enthalten, so dass $\ker \Delta_g = \{0\}$ und die orthogonale Projektion auf $\ker \Delta_g$ identisch verschwindet.

□

Bemerkung 8.1 Um zu beweisen, dass im kompakten Fall $s = 0$ ein regulärer Wert der spektralen ζ -Funktion ist, benutzt man die asymptotische Entwicklung des Wärmeleitungskerns für $t \rightarrow 0$ und die Eigenschaft, dass der Wärmeleitungskern für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gegen die orthogonale Projektion auf $\ker \Delta$ konvergiert. Mit diesen Hilfsmitteln zeigt man, dass $s \mapsto \int_0^\infty t^{s-1} (\text{Tr}(e^{-t\Delta_h} - \mathcal{P})) dt$ einen einfachen Pol in $s = 0$ besitzt, der durch die einfache Nullstelle von $\frac{1}{\Gamma(s)}$ wieder ausgeglichen wird.

Betrachtet man Trichterflächen, so ist nach Lemma 8.1 die Asymptotik durch die gleichen Koeffizienten wie für geschlossene Flächen gegeben. In [Alb09] wird auch gezeigt, dass die Konvergenz für $t \rightarrow \infty$ erhalten bleibt. Der Beweis von Satz 4.2 bleibt also wahr, wenn man die Spur des Wärmeleitungskerns durch eine renormalisierte Spur ersetzt. Folglich ist $s = 0$ ein regulärer Punkt der meromorph fortgesetzten renormalisierten spektralen ζ -Funktion.

Ersetzt man die Spur des Wärmeleitungskerns durch eine renormalisierte Spur, wie sie gerade eingeführt wurde, so kann eine Verallgemeinerung der spektralen ζ -Funktion für Trichterflächen definiert werden. Man beachte, dass nach Lemma 8.3 für Trichterflächen die Projektion auf den Kern des Laplace-Beltrami-Operators verschwindet.

Definition 8.2 Sei Δ_g der Laplace-Beltrami-Operator einer Trichterfläche (M, g) . Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re}(s) > 1$ bezeichne

$${}^R\zeta_{\text{spec}}(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} ({}^R\text{Tr}(e^{-t\Delta_g})) dt. \quad (8.16)$$

die **renormalisierte spektrale ζ -Funktion**.

Definition 8.3 Sei ${}^R\zeta_{\text{spec}}$ die spektrale ζ -Funktion definiert durch (8.16). Die **renormalisierte Funktionaldeterminante** des Laplace-Beltrami-Operators einer Trichterfläche ist dann definiert durch

$$\det \Delta_g = \exp \left(-{}^R\zeta'_{\text{spec}}(0) \right). \quad (8.17)$$

8.4 Polyakov-Formel

Sei g_F sei eine Trichtermetrik mit Trichterenden $\bigcup_{i=1}^{n_F} \mathcal{F}_i$. Wird ein einzelnes Trichterende diskutiert, so wird dieses Ende mit \mathcal{F}_i und seine zugehörigen Trichterkoordinaten mit (x_i, θ_i) bezeichnet.

Man betrachte eine Familie von glatten Funktionen $\omega \in C^\infty(\overline{M} \times [0, T]_\tau)$, welche glatt vom Parameter $\tau \in [0, T]$ bei gegebenen $T \in \mathbb{R}^+$ abhängt. Mithilfe dieser Familie, deren Eigenschaften nun näher spezifiziert werden müssen, wird die Metrik g_F konform variiert. Lokal auf einem Trichterende \mathcal{F}_i setze

$$g(\tau) := e^{\omega(x_i, \tau)} g_F = e^{\omega(x_i, \tau)} e^\varphi \left(\frac{dx_i^2 + d\theta_i^2}{x_i^2} \right).$$

Der zur Metrik $g(\tau)$ gehörige Laplace-Beltrami-Operator wird mit Δ_τ bezeichnet. Die Variationsfamilie ω soll nun gewährleisten, dass sie sich auf dem Rand für jeden Wert von τ zu einer Konstante unabhängig von $(0, \theta) \in \partial M$ reduziert, das bedeutet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \omega(x, \tau) = \omega_F(\tau) \in \mathbb{R}. \quad (8.18)$$

Umgekehrt ist die Variation der Metrik im Inneren der Fläche noch von (x, θ) abhängig:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \omega(x, \tau) = \tilde{\omega}(\tau) \in x^2 C^\infty(\overline{M} \times [0, T]_\tau). \quad (8.19)$$

Bemerkung 8.2 Die Volumenform entlang des Trichterendes hat die Gestalt $\text{dvol}_g = \frac{1}{x^2} e^\varphi dx \wedge d\theta$. Durch den Faktor $\frac{1}{x^2}$ ist ihr Integral über dem Trichterende nicht endlich. Die Forderung $\tilde{\omega} = O(x^2)$ dient dem Ausgleich dieses Verhaltens: Multiplikation mit $\tilde{\omega}$ sichert die Existenz des Integrals, sofern der Rest des Integrandes sich mindestens stetig auf den Rand fortsetzen lässt.

Den Wechsel zwischen ω_F und $\tilde{\omega}$ realisieren Funktionen $\chi \in C_0^\infty([0, \infty]_{x_i})$ welche mithilfe der jeweiligen randdefinierenden Funktion x_i :

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x_i > \frac{3\varepsilon}{4} \\ 1, & \text{wenn } x_i < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases} \quad (8.20)$$

Zusammenfassend werden folgende Annahmen an die Familie ω gemacht:

$$\omega(\tau) = \tilde{\omega}(\tau) + \sum_{i=1}^{n_F} \omega_i(\tau) \chi(x_i) \quad \forall \tau \in [0, T]. \quad (8.21)$$

Satz 8.1 (Polyakov-Formel für Trichterflächen) *Sei (M, g_F) eine Trichterfläche. Weiterhin sei $\omega \in C^\infty(\overline{M} \times [0, T]_\tau)$ eine glatte Familie glatter Funktionen, welche die Bedingung (8.21) für ein $T \in \mathbb{R}^+$ erfüllt. Dann erfüllt die renormalisierte Funktionaldeterminante des zur Metrik $g(\tau)$ gehörenden Laplace-Beltrami-Operators folgende Gleichung:*

$$\partial_\tau \log \det \Delta_\tau = -\frac{1}{24\pi} \int_M^R \omega'(\tau) R_\tau dA_\tau. \quad (8.22)$$

Der Beweis ähnelt in seiner Struktur dem der Polyakov-Formel für geschlossene Flächen. Der erste wichtige Schritt ist, die folgende Gleichung aus der Behandlung der geschlossenen Flächen für renormalisierte Spuren zu verallgemeinern. Im kompakten Fall gilt (vgl. (4.29)):

$$\left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \text{Tr} (e^{-t\Delta_\tau}) = -t \text{Tr} \left(\left\{ \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=0} \Delta_\tau \right\} e^{-t\Delta_0} \right).$$

Es werden nun einige technische Lemmata formuliert, welche benötigt werden, um eine derartige Formel für renormalisierte Spuren auf Trichterflächen zu beweisen. Sofern nicht explizit anders angegeben, gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen von Satz 8.1.

Die Betrachtungen von Kapitel 3 werden nun angewandt. Sei $\varepsilon > 0$. Man beachte, dass nach Konstruktion gilt

$$\begin{aligned} g(\tau) &= e^{\omega(\tau)} g_F, \\ g(\tau + \varepsilon) &= e^{\omega(\tau + \varepsilon)} g_F. \end{aligned}$$

Hieraus ist der konforme Faktor, der $g(\tau)$ und $g(\tau + \varepsilon)$ unterscheidet, leicht ersichtlich:

$$g(\tau + \varepsilon) = e^{\omega(\tau + \varepsilon)} e^{-\omega(\tau)} g(\tau). \quad (8.23)$$

Man setze daher

$$H_\varepsilon := T_\varepsilon^{-1} \Delta_{(\tau + \varepsilon)} T_\varepsilon, \quad (8.24)$$

sodass $H_0 = \Delta_\tau$ wobei T_ε der Isomorphismus $T_\varepsilon : L^2(M, g_\tau) \rightarrow L^2(M, g_{\tau + \varepsilon})$ definiert durch

$$L^2(M, g(\tau)) \ni f \mapsto e^{\frac{1}{2}(-\omega(\tau + \varepsilon) + \omega(\tau))} f \in L^2(M, g(\tau + \varepsilon)) \quad (8.25)$$

ist. Zur Abkürzung setze man noch

$$\varphi_\varepsilon := \frac{1}{2} (-\omega(\tau + \varepsilon) + \omega(\tau)). \quad (8.26)$$

Lemma 8.4 *Sei $\varphi = O(x^2)$. Dann gilt*

$$\text{Tr} (\varphi \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau}) = \text{Tr} (\Delta_\tau \varphi e^{-t\Delta_\tau}). \quad (8.27)$$

BEWEIS Die Bedingung $\varphi = O(x^2)$ stellt sicher, dass die Operatoren in Gleichung (8.27) von Spurklasse sind. Da der Operator $e^{-t\Delta_\tau}\Delta_\tau$ beschränkt ist $\forall t > 0$, gilt (vgl. [Ald13], Beweis von Lemma 4.1):

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\Delta_\tau \varphi e^{-t\Delta_\tau}) &= \mathrm{Tr}\left(e^{-\frac{1}{2}t\Delta_\tau} \Delta_\tau \varphi e^{-\frac{1}{2}t\Delta_\tau}\right) \\ &= \mathrm{Tr}(\varphi e^{-t\Delta_\tau} \Delta_\tau) \\ &= \mathrm{Tr}(\varphi \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau}).\end{aligned}\tag{8.28}$$

Hier wurde noch benutzt, dass die Spur zyklische Vertauschungen zulässt und dass der Laplace-Beltrami-Operator mit den Wärmeleitungsoperatoren kommutiert.

□

Korollar 8.3

$${}^R\mathrm{Tr}\left(\int_0^t e^{-(t-s)\Delta_\tau} \{\tilde{\omega}'(\tau)\Delta_\tau - \Delta_\tau\tilde{\omega}'(\tau)\} e^{-s\Delta_\tau} ds\right) = 0.\tag{8.29}$$

BEWEIS

$$\begin{aligned}& {}^R\mathrm{Tr}\left(\int_0^t e^{-(t-s)\Delta_\tau} \{\tilde{\omega}'(\tau)\Delta_\tau - \Delta_\tau\tilde{\omega}'(\tau)\} e^{-s\Delta_\tau} ds\right) \\ &= {}^R\mathrm{Tr}\left(\int_0^t e^{-(t-s)\Delta_\tau} \tilde{\omega}'(\tau)\Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau} ds\right) - {}^R\mathrm{Tr}\left(\int_0^t e^{-(t-s)\Delta_\tau} \Delta_\tau\tilde{\omega}'(\tau) e^{-s\Delta_\tau} ds\right) \\ &= \int_0^t \mathrm{Tr}\left(e^{-(t-s)\Delta_\tau} \tilde{\omega}'(\tau)\Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau}\right) ds - \int_0^t \mathrm{Tr}\left(e^{-(t-s)\Delta_\tau} \Delta_\tau\tilde{\omega}'(\tau) e^{-s\Delta_\tau}\right) ds \\ &= t \mathrm{Tr}(\tilde{\omega}'(\tau)\Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau}) - t \mathrm{Tr}(\Delta_\tau\tilde{\omega}'(\tau) e^{-t\Delta_\tau}).\end{aligned}$$

Mit Lemma 8.4 folgt die Behauptung.

□

Das nächste Lemma ist ein im Folgenden häufig benutzter Trick: Durch Addition und Subtraktion wird ein vormals schwer zu beurteilender Operator durch einen Kommutator mit Restterm dargestellt. Diese Darstellung erweist sich dann oft als vorteilhaft.

Lemma 8.5 *Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) \geq 2$, so dass $\zeta_f(z) = \int_M x^z f d\mathrm{vol}_g$ für alle Funktionen $f \in C^\infty(M)$ wohldefiniert ist. Es gilt:*

$$\begin{aligned}& \mathrm{Tr}\left(x^z \int_0^t \left[e^{-(t-s)\Delta_\tau}, \chi(x_i)\Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau}\right] ds\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left(x^z \int_0^t e^{-(t-s)\Delta_\tau} \chi(x_i)\Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau} ds\right) - \mathrm{Tr}(x^z t \chi(x_i)\Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau}).\end{aligned}$$

BEWEIS

$$\begin{aligned}
 & \text{Tr} \left(x^z \int_0^t e^{-(t-s)\Delta_\tau} \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau} ds \right) \\
 &= \text{Tr} \left\{ x^z \int_0^t \left\{ e^{-(t-s)\Delta_\tau} \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-(t-s)\Delta_\tau} e^{-s\Delta_\tau} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-(t-s)\Delta_\tau} e^{-s\Delta_\tau} \right\} ds \right\} \\
 &= \text{Tr} \left(x^z \int_0^t \left[e^{-(t-s)\Delta_\tau}, \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau} \right] ds \right) + \text{Tr} (x^z t \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau}).
 \end{aligned}$$

□

Lemma 8.6

$${}^R \text{Tr} \left(\int_0^t e^{-(t-s)\Delta_\tau} [\omega'(\tau), \Delta_\tau] e^{-s\Delta_\tau} ds \right) = 0. \quad (8.30)$$

BEWEIS Um diese Aussage zu beweisen, müssen die vorausgesetzten Eigenschaften von ω , d.h. Gleichung (8.21) ausgenutzt werden. Differentiation bezüglich des Parameters τ ändert nichts an dieser Struktur, sodass

$$\omega'(\tau) = \tilde{\omega}'(\tau) + \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \chi(x_i) \quad \forall \tau \in [0, T]. \quad (8.31)$$

Wie bereits benutzt, kann das Integral vor die Spurbildung geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 & {}^R \text{Tr} \left(\int_0^t e^{-(t-s)\Delta_\tau} [\omega'(\tau), \Delta_\tau] e^{-s\Delta_\tau} ds \right) \\
 &= \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z \int_0^t e^{-(t-s)\Delta_\tau} [\omega'(\tau), \Delta_\tau] e^{-s\Delta_\tau} ds \right) \\
 &= \int_0^t \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z e^{-(t-s)\Delta_\tau} [\omega'(\tau), \Delta_\tau] e^{-s\Delta_\tau} \right) ds \\
 &= \int_0^t \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z e^{-(t-s)\Delta_\tau} \left[\tilde{\omega}'(\tau) + \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \chi(x_i) \right], \Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau} \right) ds \\
 &= \int_0^t \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z e^{-(t-s)\Delta_\tau} [\tilde{\omega}'(\tau), \Delta_\tau] e^{-s\Delta_\tau} \right) ds \\
 &\quad + \int_0^t \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z e^{-(t-s)\Delta_\tau} \left[\sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \chi(x_i), \Delta_\tau \right] e^{-s\Delta_\tau} \right) ds.
 \end{aligned} \quad (8.32)$$

Der erste Summand in (8.32) verschwindet, wenn man das Integral wieder unter die Spur schreibt und Korollar 8.3 anwendet. Für den restlichen Term wird nun gezeigt, dass für jedes $i \in \{1, \dots, n_F\}$ gilt:

$$\int_0^t \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z e^{-(t-s)\Delta_\tau} [\omega'_i(\tau) \chi(x_i), \Delta_\tau] e^{-s\Delta_\tau} \right) ds = 0. \quad (8.33)$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \text{FP} \text{Tr} \left(x^z e^{-(t-s)\Delta_\tau} [\omega'_i(\tau) \chi(x_i), \Delta_\tau] e^{-s\Delta_\tau} \right) ds \\
&= \omega'_i(\tau) \int_0^t \text{FP} \text{Tr} \left(x^z e^{-(t-s)\Delta_\tau} [\chi(x_i), \Delta_\tau] e^{-s\Delta_\tau} \right) ds \\
&= \omega'_i(\tau) \int_0^t \text{FP} \text{Tr} \left(x^z e^{-(t-s)\Delta_\tau} \{ \chi(x_i) \Delta_\tau - \Delta_\tau \chi(x_i) \} e^{-s\Delta_\tau} \right) ds. \tag{8.34}
\end{aligned}$$

Die Idee ist hier, durch Addition und Subtraktion wie in Lemma 8.5 den Kommutator durch Terme darzustellen, von denen man weiß, dass sie verschwinden. Der Operator unter dem Spurfunktional kann man mit dieser Idee schreiben als:

$$\begin{aligned}
& x^z e^{-(t-s)\Delta_\tau} \{ \chi(x_i) \Delta_\tau - \Delta_\tau \chi(x_i) \} e^{-s\Delta_\tau} \\
&= x^z e^{-(t-s)\Delta_\tau} \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau} - x^z e^{-(t-s)\Delta_\tau} \Delta_\tau \chi(x_i) e^{-s\Delta_\tau} \\
&= x^z e^{-(t-s)\Delta_\tau} \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau} - x^z e^{-(t-s)\Delta_\tau} \Delta_\tau \chi(x_i) e^{-s\Delta_\tau} \\
&\quad - x^z \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau} + x^z \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau} \\
&\quad + x^z \Delta_\tau \chi(x_i) e^{-t\Delta_\tau} - x^z \Delta_\tau \chi(x_i) e^{-t\Delta_\tau} \\
&= x^z e^{-(t-s)\Delta_\tau} \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau} - x^z e^{-(t-s)\Delta_\tau} \Delta_\tau \chi(x_i) e^{-s\Delta_\tau} \\
&\quad - x^z \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau} e^{-t-s\Delta_\tau} + x^z \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau} \\
&\quad + x^z \Delta_\tau \chi(x_i) e^{-s\Delta_\tau} e^{-t-s\Delta_\tau} - x^z \Delta_\tau \chi(x_i) e^{-t\Delta_\tau} \\
&= x^z [e^{-(t-s)\Delta_\tau}, \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau}] + x^z [e^{-(t-s)\Delta_\tau}, \Delta_\tau \chi(x_i) e^{-s\Delta_\tau}] \\
&\quad + x^z \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau} - x^z \Delta_\tau \chi(x_i) e^{-t\Delta_\tau}. \tag{8.35}
\end{aligned}$$

Man kann nun (8.35) in (8.34) einsetzen und erhält für (8.34):

$$\begin{aligned}
&= \omega'_i(\tau) \int_0^t \text{FP} \left(\text{Tr} \left(x^z [e^{-(t-s)\Delta_\tau}, \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau}] \right) \right. \\
&\quad \left. + \text{Tr} \left(x^z [e^{-(t-s)\Delta_\tau}, \Delta_\tau \chi(x_i) e^{-s\Delta_\tau}] \right) \right. \\
&\quad \left. + \text{Tr} \left(x^z \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau} \right) \right. \\
&\quad \left. - \text{Tr} \left(x^z \Delta_\tau \chi(x_i) e^{-t\Delta_\tau} \right) \right) ds \\
&= \omega'_i(\tau) \int_0^t \left(\begin{aligned} & {}^R \text{Tr} \left([e^{-(t-s)\Delta_\tau}, \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau}] \right) \\ & + {}^R \text{Tr} \left([e^{-(t-s)\Delta_\tau}, \Delta_\tau \chi(x_i) e^{-s\Delta_\tau}] \right) \\ & + {}^R \text{Tr} \left(\chi(x_i) \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau} \right) \end{aligned} \right) ds
\end{aligned}$$

$$- {}^R \text{Tr} \left(\Delta_\tau \chi(x_i) e^{-t\Delta_\tau} \right) ds$$

Alle renormalisierten Spuren verschwinden nach Lemma 8.2 sowie Korollar 8.2.

□

Die bisherigen Lemmata dieses Kapitels stellen Hilfsmittel für das nächste Lemma bereit, mit dem der eigentliche Beweis des Satzes 8.1 startet. Im folgenden Lemma wird gezeigt, dass in der vorliegenden Situation alle Terme, welche durch die Berücksichtigung der Hilbertraumisomorphismen zwischen den Definitionsbereichen der Wärmeleitungsoperatoren entstehen, auch wieder verschwinden.

Lemma 8.7 *Unter den Annahmen von Satz 8.1 gilt für die renormalisierte Spur des Wärmeleitungskerns:*

$$\partial_\tau {}^R \text{Tr} (e^{-t\Delta_\tau}) = \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z \left\{ \int_0^t e^{-s\Delta_\tau} (\omega'(\tau) \Delta_\tau) e^{-(t-s)\Delta_\tau} ds \right\} \right). \quad (8.36)$$

BEWEIS

$$\begin{aligned} \partial_\tau {}^R \text{Tr} (e^{-t\Delta_\tau}) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} {}^R \text{Tr} (e^{-tH_\varepsilon}) \\ &= \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} e^{-tH_\varepsilon} \right) \\ &= \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z \left\{ - \int_0^t e^{-sH_0} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} H_\varepsilon \right) e^{-(t-s)H_0} ds \right\} \right) \\ &= \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z \left\{ - \int_0^t e^{-s\Delta_\tau} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} H_\varepsilon \right) e^{-(t-s)\Delta_\tau} ds \right\} \right) \\ &= \text{FP}_{z=0} \int_0^t \text{Tr} \left(x^z \left\{ -e^{-s\Delta_\tau} \left(\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} H_\varepsilon \right) e^{-(t-s)\Delta_\tau} \right\} \right) ds. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Es wird folgende Notation zur Abkürzung eingeführt:

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} H_\varepsilon =: (H_\varepsilon)^\bullet. \quad (8.38)$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} (H_\varepsilon)^\bullet &= (T_\varepsilon^{-1} \Delta_{\tau+\varepsilon} T_\varepsilon)^\bullet \\ &= (T_\varepsilon^{-1})^\bullet \Delta_\tau T_0 + T_0^{-1} (\Delta_{\tau+\varepsilon} T_\varepsilon)^\bullet \\ &= (T_\varepsilon^{-1})^\bullet \Delta_\tau T_0 + T_0^{-1} (\Delta_{\tau+\varepsilon})^\bullet T_0 + T_0^{-1} \Delta_\tau (T_\varepsilon)^\bullet \\ &= (\varphi_\varepsilon)^\bullet T_0^{-1} \Delta_\tau T_0 + T_0^{-1} (\Delta_{\tau+\varepsilon})^\bullet T_0 - T_0^{-1} \Delta_\tau (\varphi_\varepsilon)^\bullet T_0 \\ &= (\varphi_\varepsilon)^\bullet \Delta_\tau + (\Delta_{\tau+\varepsilon})^\bullet - \Delta_\tau (\varphi_\varepsilon)^\bullet \\ &= (\varphi_\varepsilon)^\bullet \Delta_\tau + \{-\omega'(\tau)\} \Delta_\tau - \Delta_\tau (\varphi_\varepsilon)^\bullet. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Setzt man in Gleichung (8.37) ein, dass

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} H_\varepsilon = \{-\omega'(\tau)\} \Delta_\tau + [(\varphi_\varepsilon)^\bullet, \Delta_\tau], \quad (8.40)$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} (8.37) &= \text{FP} \int_0^t \text{Tr} \left(x^z \left\{ -e^{-s\Delta_\tau} \left(\{-\omega'(\tau)\} \Delta_\tau + [(\varphi_\varepsilon)^\bullet, \Delta_\tau] \right) e^{-(t-s)\Delta_\tau} \right\} \right) ds \\ &= \text{FP} \int_0^t \text{Tr} \left(x^z \left\{ -e^{-s\Delta_\tau} \{-\omega'(\tau)\} \Delta_\tau e^{-(t-s)\Delta_\tau} \right\} \right) ds \\ &\quad + \text{FP} \int_0^t \text{Tr} \left(x^z \left\{ -e^{-s\Delta_\tau} [(\varphi_\varepsilon)^\bullet, \Delta_\tau] e^{-(t-s)\Delta_\tau} \right\} \right) ds \\ &= \text{FP} \int_0^t \text{Tr} \left(x^z \left\{ -e^{-s\Delta_\tau} \{-\omega'(\tau)\} \Delta_\tau e^{-(t-s)\Delta_\tau} \right\} \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \text{FP} \text{Tr} \left(x^z \left\{ -e^{-s\Delta_\tau} \left[\frac{1}{2} \omega'(\tau), \Delta_\tau \right] e^{-(t-s)\Delta_\tau} \right\} \right) ds. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Nach Lemma 8.6 verschwindet der letzte Summand in (8.41). Es folgt die Behauptung. \square

Lemma 8.8

$$\partial_\tau {}^R \text{Tr} (e^{-t\Delta_\tau}) = -t \partial_t {}^R \text{Tr} (\omega'(\tau) e^{-t\Delta_\tau}). \quad (8.42)$$

BEWEIS Nach Lemma 8.7 gilt:

$$\partial_\tau {}^R \text{Tr} (e^{-t\Delta_\tau}) = \text{FP} \text{Tr} \left(x^z \left\{ \int_0^t e^{-s\Delta_\tau} (\omega'(\tau) \Delta_\tau) e^{-(t-s)\Delta_\tau} ds \right\} \right). \quad (8.43)$$

An dieser Stelle ist es Zeit, die vorausgesetzte Gestalt der Familie ω auszunutzen und den letzten Ausdruck in kleinere Bestandteile zu zerlegen. Nach Annahme gilt

$$\omega'(\tau) = \tilde{\omega}'(\tau) + \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \chi(x_i). \quad (8.44)$$

Einsetzen in (8.43) ergibt:

$$\begin{aligned} &\partial_\tau {}^R \text{Tr} (e^{-t\Delta_\tau}) \\ &= \text{FP} \text{Tr} \left(x^z \left\{ \int_0^t e^{-s\Delta_\tau} (\omega'(\tau) \Delta_\tau) e^{-(t-s)\Delta_\tau} ds \right\} \right) \\ &= \text{FP} \text{Tr} \left(x^z \left\{ \int_0^t e^{-s\Delta_\tau} \left(\left(\tilde{\omega}'(\tau) + \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \chi(x_i) \right) \Delta_\tau \right) e^{-(t-s)\Delta_\tau} ds \right\} \right) \\ &= \text{FP} \text{Tr} \left(x^z \left\{ \int_0^t e^{-s\Delta_\tau} (\tilde{\omega}'(\tau) \Delta_\tau) e^{-(t-s)\Delta_\tau} ds \right\} \right) \\ &\quad + \text{FP} \text{Tr} \left(x^z \left\{ \int_0^t e^{-s\Delta_\tau} \left(\sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \chi(x_i) \right) \Delta_\tau e^{-(t-s)\Delta_\tau} ds \right\} \right). \end{aligned} \quad (8.45)$$

Der Operator in Zeile (8.45) ist nach Lemma 8.1 ein Operator von Spurklasse. Konventionelle Spuren lassen zyklische Vertauschungen zu. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
 & \partial_\tau {}^R \text{Tr} (e^{-t\Delta_\tau}) \\
 &= \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z \left\{ \int_0^t e^{-s\Delta_\tau} (\tilde{\omega}'(\tau)\Delta_\tau) e^{-(t-s)\Delta_\tau} ds \right\} \right) \\
 & \quad + \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z \left\{ \int_0^t e^{-s\Delta_\tau} \left(\sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \chi(x_i) \Delta_\tau \right) e^{-(t-s)\Delta_\tau} ds \right\} \right) \\
 &= \int_0^t \text{Tr} (e^{-s\Delta_\tau} \tilde{\omega}'(\tau) \Delta_\tau e^{-(t-s)\Delta_\tau}) ds \\
 & \quad + \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z \left\{ \int_0^t e^{-s\Delta_\tau} \left(\sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \chi(x_i) \Delta_\tau \right) e^{-(t-s)\Delta_\tau} ds \right\} \right) \\
 &= \int_0^t \text{Tr} (\tilde{\omega}'(\tau) \Delta_\tau e^{-(t-s)\Delta_\tau} e^{-s\Delta_\tau}) ds \\
 & \quad + \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z \left\{ \int_0^t e^{-s\Delta_\tau} \left(\sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \chi(x_i) \Delta_\tau \right) e^{-(t-s)\Delta_\tau} ds \right\} \right) \\
 &= t \text{Tr} (\tilde{\omega}'(\tau) \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau}) \\
 & \quad + \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z \left\{ \int_0^t e^{-s\Delta_\tau} \left(\sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \chi(x_i) \Delta_\tau \right) e^{-(t-s)\Delta_\tau} ds \right\} \right). \tag{8.46}
 \end{aligned}$$

Um die Summanden in (8.46) zu vereinfachen, werden die $\omega'_i(\tau)$ aufgrund ihrer Unabhängigkeit von den Integrationsvariablen linear rausgezogen. Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
 \partial_\tau {}^R \text{Tr} (e^{-t\Delta_\tau}) &= t \text{Tr} (\tilde{\omega}'(\tau) \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau}) \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z \left\{ \int_0^t e^{-s\Delta_\tau} (\chi(x_i) \Delta_\tau) e^{-(t-s)\Delta_\tau} ds \right\} \right).
 \end{aligned}$$

Nun kann wieder Lemma 8.5 angewandt werden. Mit diesem erhält man:

$$\begin{aligned}
 & \partial_\tau {}^R \text{Tr} (e^{-t\Delta_\tau}) \\
 &= t \text{Tr} (\tilde{\omega}'(\tau) \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau}) \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \text{FP}_{z=0} \text{Tr} \left(x^z \int_0^t [e^{-(t-s)\Delta_\tau}, \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau}] ds \right) \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \text{Tr} (x^z t \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau}) \\
 &= t \text{Tr} (\tilde{\omega}'(\tau) \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau}) \\
 & \quad + \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \text{Tr} (x^z t \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau})
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \int_0^t \underbrace{{}^R \text{Tr} \left([e^{-(t-s)\Delta_\tau}, \chi(x_i) \Delta_\tau e^{-s\Delta_\tau}] \right)}_{=0 \text{ nach Lemma 8.2}}. \quad (8.47)$$

Es wurde bisher also gezeigt, dass

$$\begin{aligned} \partial_\tau {}^R \text{Tr} (e^{-t\Delta_\tau}) &= \text{Tr} (\tilde{\omega}'(\tau) \Delta_\tau t e^{-t\Delta_\tau}) + \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \text{FP}_{z=0} \text{Tr} (x^z \chi(x_i) t \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau}) \\ &= {}^R \text{Tr} (\tilde{\omega}'(\tau) \Delta_\tau t e^{-t\Delta_\tau}) + {}^R \text{Tr} \left(\left(\sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \chi(x_i) \right) t \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau} \right) \\ &= {}^R \text{Tr} (\omega'(\tau) t \Delta_\tau e^{-t\Delta_\tau}) \\ &= {}^R \text{Tr} (\omega'(\tau) (-1) \partial_t e^{-t\Delta_\tau}) \\ &= -t \partial_t {}^R \text{Tr} (\omega'(\tau) e^{-t\Delta_\tau}). \end{aligned}$$

□

Lemma 8.9

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \log \det \Delta_\tau = \text{FP}_{t=0} {}^R \text{Tr} (\omega'(\tau) e^{-t\Delta_\tau}). \quad (8.48)$$

BEWEIS Die Argumentation für diese Beziehung läuft analog zum Fall geschlossener Flächen, mit dem Unterschied, dass man renormalisierte Spuren verwendet und für diese das Lemma 8.8 statt 4.29 für die konventionelle Spur auf geschlossenen Flächen, vgl. (4.33). Zusammenfassend gilt:

$$\begin{aligned} -\partial_\tau \log \det \Delta_\tau &= \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \zeta_{e^{\omega(\tau+\varepsilon)g_F}}(s) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} {}^R \text{Tr} (e^{-t\Delta_{\tau+\varepsilon}} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_{\tau+\varepsilon}}) dt \\ &= - \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^s \partial_t {}^R \text{Tr} (\omega(e^{-t\Delta_\tau} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_\tau})) dt \end{aligned} \quad (8.49)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{s}{\Gamma(s)} \left[\int_0^\infty t^{s-1} {}^R \text{Tr} (\omega(e^{-t\Delta_\tau} - \mathcal{P}_{\ker \Delta_\tau})) dt \right] \\ &= \text{FP}_{t=0} {}^R \text{Tr} (\omega'(\tau) e^{-t\Delta_\tau}). \end{aligned} \quad (8.50)$$

□

Lemma 8.10

$$\text{FP}_{t=0} {}^R \text{Tr} (\omega'(\tau) e^{-t\Delta_\tau}) = \frac{1}{24\pi} {}^R \int_M \omega'(\tau) R_\tau \text{dvol}_g(\tau) \quad (8.51)$$

BEWEIS Die Funktionenfamilie ω hängt nicht vom Parameter t ab. Daher sind bezüglich der Asymptotik für $t \rightarrow 0$ die Funktionen $\omega(\tau)$ und $\omega'(\tau)$ wie Konstanten zu behandeln. Nach Korollar 8.1 gilt für jeden Punkt $z \in M$

$$\text{FP}_{t=0} \omega'(\tau)(z) \mathcal{K}_\tau(z, z, t) = \frac{1}{24\pi} \omega'(\tau)(z) R_\tau(z). \quad (8.52)$$

Da der Wärmeleitungskern einer Trichtermetrik eine polyhomogene Entwicklung für $x \rightarrow 0$ zulässt, kann, eingeschränkt auf seine Diagonale, sein renormalisiertes Integral gebildet werden. Insbesondere gilt

$${}^R \text{Tr} (e^{-t\Delta_\tau}) = {}^R \int_M \mathcal{K}_\tau|_{\text{diag}} d\text{vol}_g(\tau).$$

Es folgt

$$\text{FP}_{t=0} {}^R \text{Tr} (\omega'(\tau) e^{-t\Delta_\tau}) = \frac{1}{24\pi} {}^R \int_M \omega'(\tau) R_\tau d\text{vol}_g(\tau).$$

□

Die Kombination von Lemma 8.9 und Lemma 8.10 schließt den Beweis von Satz 8.1. Mit ihm ist die Polyakov-Formel für die renormalisierte Determinante des Laplace-Beltrami-Operators für Trichterflächen bewiesen. Es ist interessant zu überlegen, unter welchen Bedingungen an den konformen Faktor auf die Renormalisierung des Integrals in (8.22) verzichtet werden kann. Um diese Frage zu untersuchen, wird noch ein zweiter Beweis von Lemma 8.10 angegeben:

Zu zeigen ist also erneut

$$\text{FP}_{t=0} {}^R \text{Tr} (\omega'(x, \tau) e^{-t\Delta_\tau}) = \frac{1}{24\pi} {}^R \int_M \omega'(x, \tau) R_\tau dA_\tau.$$

Die Ableitung bezüglich τ erbt die Gestalt von ω :

$$\omega'(x, \tau) = \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \chi(x) + \tilde{\omega}'(x, \tau).$$

Hier gilt nun nach Voraussetzung $\tilde{\omega}'(x, \tau) = O(x^2)$. Damit hat man

$$\begin{aligned} \text{FP}_{t=0} {}^R \text{Tr} (\omega'(x, \tau) e^{-t\Delta_\tau}) &= \text{FP}_{t=0} {}^R \text{Tr} \left(\left(\sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \chi(x) + \tilde{\omega}'(x, \tau) \right) e^{-t\Delta_\tau} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \text{FP}_{t=0} {}^R \text{Tr} (\chi(x) e^{-t\Delta_\tau}) + \text{FP}_{t=0} {}^R \text{Tr} (\tilde{\omega}'(x, \tau) e^{-t\Delta_\tau}). \end{aligned} \quad (8.53)$$

Nach Lemma 8.1 gilt wegen ${}^R\text{Tr}(\chi(x)e^{-t\Delta_\tau}) = {}^R\text{Tr}(e^{-t\Delta_\tau})$ für $t \rightarrow 0$:

$$\sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \text{FP}_{t=0} {}^R\text{Tr}(\chi(x)e^{-t\Delta_\tau}) = \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \text{FP}_{t=0} {}^R\text{Tr}(e^{-t\Delta_\tau}) = \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \frac{1}{6} \chi(M).$$

Wegen $\tilde{\omega} = \omega'(\tau) - \omega'_i(\tau) = O(x^2)$ ist der übrige Term von Spurklasse, d.h.

$$\text{FP}_{t=0} {}^R\text{Tr}(\tilde{\omega}'(x, \tau)e^{-t\Delta_\tau}) = \text{FP}_{t=0} \text{Tr}(\tilde{\omega}'(x, \tau)e^{-t\Delta_\tau}).$$

Nun kann der renormalisierte Satz von Gauß-Bonnet angewandt werden:

$$\begin{aligned} & \text{FP}_{t=0} {}^R\text{Tr} \left(\sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(x, \tau) e^{-t\Delta_\tau} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \frac{1}{6} \chi(M) + \text{FP}_{t=0} \text{Tr}(\tilde{\omega}'(x, \tau) e^{-t\Delta_\tau}) \\ &= \sum_{i=1}^{n_F} \omega'_i(\tau) \frac{1}{24\pi} {}^R \int_M R_\tau dA_\tau + \frac{1}{24\pi} \int_M \tilde{\omega}'(x, \tau) R_\tau dA_\tau. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Hier kann die ursprüngliche Gestalt von ω wieder eingesetzt werden. Zusammen mit dem Fakt, dass Integrale mit renormalisierten Integralen übereinstimmen, sofern sie endlich sind, erhält man wie gewünscht

$$\text{FP}_{t=0} {}^R\text{Tr}(\omega'(x, \tau) e^{-t\Delta_\tau}) = \frac{1}{24\pi} {}^R \int_M \omega'(x, \tau) R_\tau dA_\tau.$$

□

Aus Gleichung (8.54) folgt unmittelbar:

Korollar 8.4 *Gilt für jedes Trichterende \mathcal{F} , dass $\omega'_\mathcal{F} = 0$, so kommt die Polyakov-Formel ohne renormalisiertes Integral aus und es gilt*

$$\partial_\tau \log \det \Delta_\tau = \frac{1}{24\pi} \int_M \omega' R_\tau dA_\tau. \quad (8.55)$$

Literaturverzeichnis

- [AAR13] Pierre Albin, Clara L. Aldana, and Frédéric Rochon, *Ricci Flow and the Determinant of the Laplacian on Non-Compact Surfaces*, Communications in Partial Differential Equations **38** (2013), no. 4, 711–749.
- [Alb07] Pierre Albin, *A renormalized index theorem for some complete asymptotically regular metrics: the Gauss-Bonnet theorem*, Adv. Math. **213** (2007), no. 1, 1–52.
- [Alb09] ———, *Renormalizing curvature integrals on Poincaré-Einstein manifolds*, Adv. Math. **221** (2009), no. 1, 140–169.
- [Alb12] ———, *Math 524 - Linear Analysis on Manifolds*, Lecture Notes at University of Illinois (2012).
- [Ald13] Clara L. Aldana, *Asymptotics of relative heat traces and determinants on open surfaces of finite area*, Annals of Global Analysis and Geometry (2013), 1–48.
- [Alv83] Orlando Alvarez, *Theory of strings with boundaries: fluctuations, topology and quantum geometry*, Nuclear Phys. B **216** (1983), no. 1, 125–184.
- [AR09] Pierre Albin and Frédéric Rochon, *A local families index formula for $\bar{\partial}$ -operators on punctured Riemann surfaces*, Comm. Math. Phys. **289** (2009), no. 2, 483–527.
- [AR13] ———, *Some index formulae on the moduli space of stable parabolic vector bundles*, Journal of the Australian Mathematical Society **FirstView** (2013), 1–37.
- [BJP03] David Borthwick, Chris Judge, and Peter A. Perry, *Determinants of Laplacians and isopolar metrics on surfaces of infinite area*, Duke Math. J. **118** (2003), no. 1, 61–102.
- [BØ86] Thomas P. Branson and Bent Ørsted, *Conformal indices of Riemannian manifolds*, Compositio Mathematica **60** (1986), 261–293.
- [BØ91] ———, *Explicit functional determinants in four dimensions*, Proceedings of the American Mathematical Society **113** (1991), no. 3.
- [Bor07] David Borthwick, *Spectral Theory of Infinite-Area Hyperbolic Surfaces*, Progress in Mathematics Series, Birkhäuser Verlag AG, 2007.

- [Bor12] ———, *Sharp geometric upper bounds on resonances for surfaces with hyperbolic ends*, Analysis & PDE **5** (2012), no. 3, 513–552.
- [Bra93] Thomas P. Branson, *The functional determinant*, Lecture Notes Series, vol. 4, Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center, Seoul, 1993.
- [Bra07] ———, *Q-curvature, spectral invariants, and representation theory*, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **3** (2007), 090.
- [Cha84] Isaac Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Pure and Applied Mathematics, Elsevier Science, 1984.
- [Cha97] Sun-Yung A. Chang, *On Zeta functional determinant*, CRM Proceedings and Lecture notes: Partial differential equations and their applications **12** (1997).
- [Cha05] ———, *Conformal invariants and partial differential equations*, Bulletin of the American Mathematical Society **42** (2005), no. 03, 365–394.
- [CLN06] Bennet Chow, Peng Lu, and Lei Ni, *Hamilton’s Ricci flow*, Graduate Studies in Mathematics Series, American Mathematical Society/Science Press, 2006.
- [DGH08] Zindine Djadli, Colin Guillarmou, and Marc Herzlich, *Opérateurs géométriques, invariants conformes et variétés asymptotiquement hyperboliques*, Panoramas et synthèses, Société Mathématique de France, 2008.
- [DP86] Eric D’Hoker and Duong H. Phong, *On determinants of Laplacians on Riemann surfaces*, Communications in Mathematical Physics **104** (1986), no. 4, 537–545.
- [Dun09] Gerald Dunne, *Functional Determinants in Quantum Field Theory*, Lecture notes at the 14th WE Heraeus Saalburg summer school in Wolfersdorf, Thuringia (2009).
- [FGD95] P. Flajolet, X. Gourdon, and P. Dumas, *Mellin Transforms and Asymptotics : Harmonic Sums*, Theoretical Computer Science **144** (1995), no. 1–2, 3–58.
- [Gil84] Peter B. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, Mathematics Lecture Series, vol. 11, Publish or Perish Inc., 1984.
- [GJMS92] C. Robin Graham, Ralph Jenne, Lionel J. Mason, and George A. J. Sparling, *Conformally invariant powers of the Laplacian. I. Existence*, J. London Math. Soc. (2) **46** (1992), no. 3, 557–565.
- [GK12] C. Robin Graham and Joshua M. Kantor, *Normal Form for Edge Metrics*, arXiv e-prints (2012), no. arXiv:1207.1343.

- [GM12] Matthew Gursky and Andrea Malchiodi, *Non-uniqueness results for critical metrics of regularized determinants in four dimensions*, Commun. Math. Phys. **315** (2012), no. 1, 1–37 (English).
- [Gra99] C. Robin Graham, *Volume and area renormalizations for conformally compact Einstein metrics*, arXiv e-prints (1999), no. 9909042v1, 1–15.
- [Haw77] Stephen W. Hawking, *Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime*, Communications in Mathematical Physics **55** (1977), no. 2, 133–148.
- [Jos08] Jürgen Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, Universitext (En ligne), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [Juh09] Andreas Juhl, *Families of conformally covariant differential operators, Q -curvature and holography*, Progress in Mathematics, vol. 275, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [Maz91] Rafe Mazzeo, *Elliptic theory of differential edge operators. I*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), no. 10, 1615–1664.
- [Mel93] Richard B. Melrose, *The Atiyah-Patodi-Singer Index Theorem*, A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1993.
- [MP49] Subbaramiah Minakshisundaram and Åke Pleijel, *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds*, Canadian Journal of Mathematics **1** (1949), 242–256.
- [OPS88] Brad Osgood, Ralph Phillips, and Peter Sarnak, *Extremals of Determinants of Laplacians*, J. Funct. Anal **211** (1988), 148–211.
- [Pay03] Sylvie Paycha, *From heat-operators to anomalies; a walk through various regularization techniques in mathematics and physics*, Emmy Nöther Lectures, Göttingen (2003), 1–63.
- [Pol81] Alexander M. Polyakov, *Quantum geometry of bosonic strings*, Physics Letters B **103** (1981), 207–210.
- [Ros97] Steven Rosenberg, *The Laplacian on a Riemannian Manifold*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 1997.
- [RS71] D.B. Ray and Isadore M. Singer, *R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds*, Adv. Math. **7** (1971), 145–210.
- [Sar87] Peter Sarnak, *Determinants of Laplacians*, Communications in Mathematical Physics **110** (1987), no. 1, 113–120.

- [Tay10] Michael E. Taylor, *Partial Differential Equations I: Basic Theory*, Applied Mathematical Sciences, Springer, 2010.
- [Vas03] Dmitri V. Vassilevich, *Heat kernel expansion: user's manual*, Phys. Rep. **388** (2003), no. 5-6, 279–360.
- [YQC06] Paul C.-P. Yang, Jie Qing, and Sun-Yung A. Chang, *Renormalized volumes for conformally compact Einstein manifolds*, Sovrem. Mat. Fundam. Napravl. **17** (2006).

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe. Weiterhin erkläre ich, eine Diplomarbeit in diesem Studienggebiet erstmalig einzureichen.

Berlin, den 24. August 2016

.....