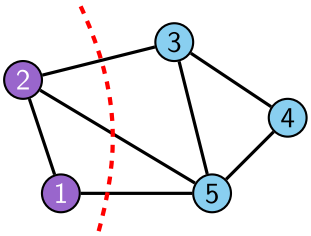
Algorithmen und Berechenbarkeit: Vorlesung 02 - Mitschrift

Letztes Update: 2018/03/10 - 11:40 Uhr

Min-Cut

Definition: *Ein* **Cut** *unterteilt einen Graphen in zwei Hälften. Das heißt, es gibt Kanten, bei denen ein Knoten in einer Hälfte und bei denen der andere Knoten in der anderen Hälfte ist. Der* Wert des Cuts *ist die* Anzahl geschnittener Kanten.



Cut $\{1, 2\}$ bzw. $\{3, 4, 5\}$ mit Wert 3

Definition: *Der* **Min-Cut** *beschreibt den Cut, bei dem am wenigsten Kanten* geschnitten *werden müssen, um den Graphen in zwei Hälften zu teilen. Ein Min-Cut muss nicht eindeutig sein.*

Formal: *Sei* $G = (V, E)$ *ein ungewichteter und ungerichteter Multigraph,* $A \subset V$ *und* $cut(A, G)$ *ein Cut. Finde* $A \subset V$ *mit* $|cut(A, G)|$ *minimal.*

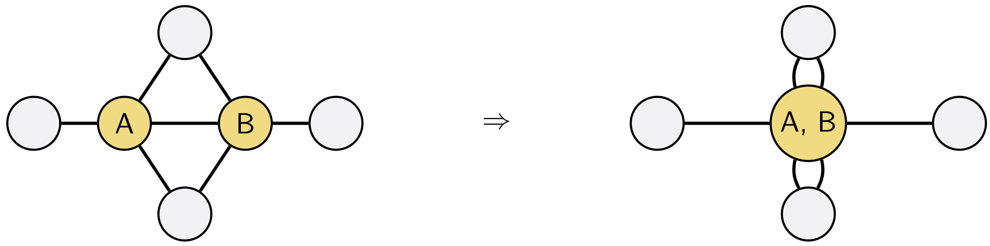
Min-Cut links $\{4\}$ bzw. rechts $\{1\}$ mit Wert 2

Min-Cut-Algorithmus von Karger

Kargers-Min-Cut-Algorithmus beschreibt einen randomisierten Algorithmus, der mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{n^2}$ das richtige Ergebnis berechnet. Die zentrale Operation des Algorithmus ist die *Kantenkontraktion*. Der Algorithmus lässt sich wie folgt beschreiben:

for $i = 1$ **to** $n - 2$ **do**
    Kontrahiere zufällige Kante
end for

return Kantenmenge zwischen den beiden verbleibenden Knoten



Kantenkontraktion der Kante zwischen den Knoten A und B

Nach dem Ausführen des Algorithmus bleiben genau zwei Knoten übrig. Der Min-Cut ist die Anzahl der Kanten zwischen diesen Knoten.

Min-Cut-Algorithmus von Karger: Analyse

- **Annahme:** Der Min-Cut ist eindeutig.
- **Beobachtung:**
  1. Der Algorithmus berechnet genau dann das richtige Ergebnis, wenn er nie eine der Min-Cut-Kanten kontrahiert.
  2. Sei k die Größe des Min-Cuts und m die Anzahl der Kanten. Die Wahrscheinlichkeit im ersten Kontraktionsschritt einen Fehler zu machen, beträgt $\frac{k}{m}$, die Wahrscheinlichkeit keinen Fehler zu machen $1 - \frac{k}{m}$.

Satz: *Betrachte einen Multigraphen $G(V, E)$ mit einem Min-Cut-Wert k. Dann hat G mindestens $\frac{k \cdot n}{2}$ Kanten.*

Beweis: Sei $d_G(v)$ der Knotengrad von v. Jeder Knoten hat $d_G(v) \geq k$. Die Anzahl der Kanten ergibt sich somit zu

$$\frac{\sum(d_G(v))}{2} \geq \frac{k \cdot n}{2}$$

□

Sei E_i das Ereignis, dass im i-ten Kontraktionsschritt keine Min-Cut-Kante erwischt wurde. Für $m \geq \frac{k \cdot n}{2}$ beträgt die Wahrscheinlichkeit wie bekannt

$$1 - \frac{k}{m} \geq 1 - \frac{2}{n}$$

Falls E_1 eingetroffen ist, existieren vor dem zweiten Schritt mindestens $\frac{k \cdot (n-1)}{2}$ Kanten. Sei $\Pr(E_2 | E_1)$ die Wahrscheinlichkeit, im zweiten Schritt keinen Fehler zu machen, falls E_1 eingetreten ist. $\Pr(E_2 | E_1)$ beträgt

$$1 - \frac{k}{m} \geq 1 - \frac{2}{n-1}$$

Falls $E_1, E_2, \ldots, E_i$ eingetroffen sind, existieren vor dem $i+1$-Schritt mindestens $\frac{k \cdot (n-i)}{2}$ Kanten. Sei $\Pr(\bigwedge_1^i E_i | E_{i+1})$ die Wahrscheinlichkeit, im $i+1$-Schritt keinen Fehler zu machen, falls $E_1 \ldots E_i$ eingetreten ist. $\Pr(\bigwedge_1^i E_i | E_{i+1})$ beträgt

$$1 - \frac{k}{m} \geq 1 - \frac{2}{n-i}$$

Sei $\Pr_{correct}(\bigcap_{i+1}^{n-2})$ die Wahrscheinlichkeit, dass der Algorithmus korrekt arbeitet. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\Pr_{correct}(\bigcap_{i+1}^{n-2}) &= \Pr(E_1) \ \cdot\ \Pr(E_2|E_1) \ \cdot\ \Pr(E_3|E_1 \wedge E_2) \ \cdot\ \ldots \ \cdot\ \Pr(\bigwedge_{1}^{i} E_i|E_{i+1}) \\
&\geq \prod_{i=1}^{n-2} 1 - \frac{2}{n-(i+1)} \\
&= \prod_{i=1}^{n-2} \frac{n-i+1-2}{n-i+1} \\
&= \prod_{i=1}^{n-2} \frac{n-i-1}{n-i+1} \\
&= \frac{\cancel{n-2}}{n} \cdot \frac{\cancel{n-3}}{n-1} \cdot \frac{n-4}{\cancel{n-2}} \cdot \frac{n-5}{\cancel{n-3}} \quad \ldots \\
&= \frac{2}{n \cdot (n-1)}
\end{aligned}$$

$$\Pr_{correct}(\bigcap_{i+1}^{n-2}) \geq \frac{2}{n \cdot (n-1)}$$

Die Erfolgswahrscheinlichkeit kann beliebig erhöht werden. Dafür muss der Algorithmus so oft wie gewünscht wiederholt werden. Der kleinste Wert, der in Folge dieser Wiederholungen herauskommt, ist der Min-Cut.

Sei r die Anzahl der Versuche. Die Wahrscheinlichkeit, **nicht** den Min-Cut zu finden, ist

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \frac{2}{n \cdot (n-1)})^r \\
&\leq e^{-\frac{2}{n \cdot (n-1)}} = e^{\frac{-2r}{n \cdot (n-1)}}
\end{aligned}$$

Sei $r = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit, einen falschen Min-Cut zu erhalten, ist

$$\leq \frac{1}{e} \approx 0,36$$

Sei $r \approx n^2$. Es stellt sich eine **nahezu konstante** Erfolgswahrscheinlichkeit ein.

Sei $r \approx n^2 \cdot n \cdot \log(n)$. Das Ergebnis ist mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit korrekt. Die Wahrscheinlichkeit, jetzt noch einen falschen Min-Cut zu haben, ist

$$\leq \frac{1}{n^2}$$