Vorlesungsmitschrift

Algorithmen und Berechenbarkeit

Vorlesung 14

Letztes Update: 2018/02/25 - 11:24 Uhr

Unentscheidbarkeit der Diagonalsprache $\mathcal{D}$

Es sei die Diagonalsprache $\mathcal{D}$ folgendermaßen definiert:

$$\mathcal{D} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w = w_i \land M_i \text{ akzeptiert } w \text{ nicht}\}$$

$\mathcal{D}$ ist also so definiert, dass ein i-tes Wort genau dann enthalten ist, wenn die i-te TM es nicht akzeptiert.

Wort	ϵ	0	1	00	01	10	11	...
	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	...
$\mathcal{M}_0$	0							
$\mathcal{M}_1$		0						
$\mathcal{M}_2$			1					
$\mathcal{M}_3$				1				
$\mathcal{M}_4$					0			

Beim betrachten der Tabelle fällt auf, dass $\mathcal{D}$ auch so definiert werden kann:

$$\mathcal{D} = \{w_i \mid A_{i,i} = 0\}$$

Theorem: Die Diagonalsprache $\mathcal{D}$ ist nicht entscheidbar.

Beweis (durch Widerspruch): Sie $\mathcal{M}_j$ eine TM, die $\mathcal{D}$ entscheidet. Man lässt $\mathcal{M}_j$ auf der Eingabe w_j laufen und erhält zwei Fälle.

1. $\mathcal{M}_j$ akzeptiert w_j. Dann gilt: $w_j \in \mathcal{D}$
   Aber dadurch gilt auch $A_{j,j} = 1$. Dann gilt: $w_j \notin \mathcal{D}$

2. $\mathcal{M}_j$ verwirft w_j. Dann gilt: $w_j \notin \mathcal{D}$
   Aber dadurch gilt auch $A_{j,j} = 0$. Dann gilt: $w_j \in \mathcal{D}$

Eine solche TM kann es nicht geben. □

Satz: Sei $\mathcal{L}$ eine unentscheidbare Sprache, dann ist das Komplement $\overline{\mathcal{L}} = \Sigma^* - \mathcal{L}$ auch unentscheidbar.

Beweis: Man nutzt eine Maschine, die $\overline{\mathcal{L}}$ entscheidet, um $\mathcal{L}$ zu entscheiden, sodass man `JA` und `NEIN` vertauscht. Falls $\overline{\mathcal{L}}$ entscheidbar, so ist auch $\mathcal{L}$ entscheidbar. □

Unentscheidbarkeit des Halteproblems

Vom Halteproblem spricht man, wenn man ein gegebenes Programm samt Eingabe für dieses Programm laufen lässt und entscheiden muss, ob das Programm auf dieser Eingabe terminiert. Formal also

$$\mathcal{H} = \{< M > w \mid M \text{ hält auf } w\}$$

Um die Unentscheidbarkeit zu zeigen, sollte sich vorher klargemacht werden, was *semientscheidbar* bzw. *Akzeptieren* bedeutet: *Eine TM akzeptiert ein Wort, falls das Wort immer richtig von der TM erkannt wird. Wörter, die nicht in der Sprache sind, können von der TM jedoch nicht als solche erkannt werden.*

Auch die universelle TM $\mathcal{U}$ kann $\mathcal{H}$ nicht entscheiden. Zwar könnte für alle $< M > w \in \mathcal{H}$ die TM $\mathcal{U}$ irgendwann `JA` sagen, aber nie mit Sicherheit `NEIN`.

Theorem: Das Halteproblem bzw. die Sprache $\mathcal{H}$ ist unentscheidbar.

Beweis: Angenommen, $\mathcal{H}$ ist durch die TM $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ entscheidbar. Dann muss es möglich sein, aus $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ eine TM $\mathcal{M}_\mathcal{D}$ zu konstruieren, die $\overline{D}$ (und damit auch $\mathcal{D}$) entscheidet.
So eine TM $\mathcal{M}_\mathcal{D}$ kann es aber nicht geben, also kann es auch die TM $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ nicht geben.

$\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{D}}}$ müsste folgendermaßen aussehen:

1. Man berechnet i auf der Eingabe w sodass gilt $w = w_i$.
2. Man berechnet $< M_i >$ der i-ten TM.
3. Man startet $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ als Unterprogramm auf der Eingabe $< M_i > w$.
4. Falls $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ akzeptiert, wird w auf $\mathcal{M}_i$ simuliert und die Ausgabe übernommen.
5. Falls $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ verwirft, so wird die Eingabe verworfen.

Korrektheit von $\mathcal{M}_{\overline{\mathcal{D}}}$:

1. $w \in \overline{\mathcal{D}} \Rightarrow \mathcal{M}_\mathcal{H}$ akzeptiert $< M_i > w$ im dritten Schritt (da M_i das $w = w_i$ im vierten Schritt akzeptiert und damit auch stoppt) $\Rightarrow \mathcal{M}_{\overline{\mathcal{D}}}$ akzeptiert w.
2. $w \notin \overline{\mathcal{D}} \Rightarrow$
   - $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ verwirft $< M_i > w$ im dritten Schritt, da M_i auf w nicht hält.
     $\Rightarrow \mathcal{M}_{\overline{\mathcal{D}}}$ verwirft w.
   - $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ akzeptiert $< M_i > w$ im dritten Schritt, aber M_i verwirft w.
     $\Rightarrow \mathcal{M}_{\overline{\mathcal{D}}}$ verwirft w.

□

Das Spezielle Halteproblem

Das Spezielle Halteproblem ist definiert als

$$\mathcal{H}_\epsilon = \{< M > \ \mid M \text{ hält auf der Eingabe } \epsilon\}$$

Satz: Das Spezielle Halteproblem $\mathcal{H}_\epsilon$ ist unentscheidbar.

Beweis: Die Idee ist wieder wie vorhin: Man nimmt an, es gibt eine TM $\mathcal{M}_\epsilon$, die $\mathcal{H}_\epsilon$ entscheidet. Dann kann $\mathcal{M}_\epsilon$ als Unterprogramm einer TM genutzt werden, die $\mathcal{H}_\epsilon$ entscheidet. So eine $\mathcal{M}_\epsilon$ kann es aber nicht geben. Als Folge würde dann gelten:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \mathcal{M}_\epsilon \quad \text{kann nicht existieren.} \\ &\Rightarrow \mathcal{H}_\epsilon \qquad \text{ist unentscheidbar.} \end{aligned}$$

Die TM $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ kann beschrieben werden:

1. Falls die Eingabe mit einer Kodierung einer TM beginnt, so wird die Eingabe verworfen.
2. Falls die Eingabe $< M > w$ ist, so soll eine TM $\mathcal{M}_w$ konstruiert werden, die Folgendes macht:
   - Falls $\mathcal{M}_w$ auf keiner Eingabe startet, schreibt man w auf das Band und simuliert $\mathcal{M}$ auf w.
   - Auf anderen Eingaben kann sich $\mathcal{M}_w$ beliebig verhalten.
3. Man lässt $\mathcal{M}_\epsilon$ entscheiden, ob $\mathcal{M}_w$ auf dem leeren Wort terminiert. Falls terminiert, entscheidet man mit `JA`, sonst mit `NEIN`.

Korrektheit der Konstruktion:

- $< M > w \in \mathcal{H}$
  - $\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ hält auf w
  - $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_w$ hält auf ϵ
  - $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_\epsilon$ akzeptiert $< M_w >$
  - $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ akzeptiert $< M > w$
- $< M > w \notin \mathcal{H}$
  - $\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ hält nicht auf w
  - $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_w$ hält nicht auf ϵ
  - $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_\epsilon$ verwirft $< M_w >$
  - $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_\mathcal{H}$ verwirft $< M > w$