

Vorlesungsmitschrift

Algorithmen und Berechenbarkeit

Vorlesung 01

Letztes Update: 2017/12/19 - 20:21 Uhr

Randomisierte Algorithmen

Randomisierte Algorithmen sind Algorithmen, welche unter Nutzung einer Zufallsquelle (z.B. Münzwurf, Zufallsgenerator) Probleme lösen. In manchen Fällen sind diese Algorithmen einfacher und effizienter als die entsprechenden deterministischen Algorithmen.

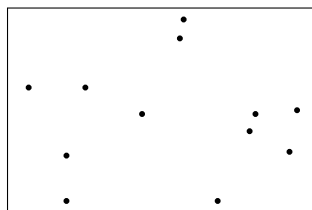
Randomisierte Algorithmen werden nach „dem Verbrauch von Zufall“ bewertet, denn Zufall zu erzeugen, ist nicht so ohne Weiteres möglich (Zufall zu „erzeugen“ ist **teuer**). Im Gegensatz dazu bewertet man „normale“ Algorithmen nach Platz- und Zeitbedarf.

Wir haben bisher die folgenden Gattungen kennengelernt:

- **Las-Vegas:** Die Laufzeit hängt vom Zufall ab, die Korrektheit nicht.
- **Monte-Carlo:** Die Laufzeit hängt nicht vom Zufall ab, die Korrektheit schon.

Closest Pair (Randomisiert, Las-Vegas)

Gegeben seien n Punkte im \mathbb{R}^2



Gegeben ist eine Menge P mit n Punkten im \mathbb{R}^2 . Gesucht sind $p, q \in P$ für die gilt: $|pq| = \min |rs|$ mit $r, s \in P$, also das Paar mit dem kleinsten Abstand zueinander.

Naiver Ansatz

- Betrachte P_1 und berechne Distanzen zu P_2, P_3, \dots, P_n
- Betrachte P_2 und berechne Distanzen zu P_3, P_4, \dots, P_n

Das würde eine Laufzeit von

$$O\left(\sum_{i=1}^{n-1}\right) = O\left(\frac{(n-1) \cdot n}{2}\right) = O(n^2)$$

ergeben. Ein Prozessor mit 1 GHz Taktfrequenz schafft 1.000.000.000 Instruktionen pro Sekunde. Das führt zu folgender Tabelle:

n	Rechnung			Ergebnis
= 100	$100^2 \cdot 10^{-9}$	= 10^{-5}		10 μ s
= 1000	$1000^2 \cdot 10^{-9}$	= 10^{-3}		1 ms
= 10000	$10000^2 \cdot 10^{-9}$	= 10		10 s
= 1000000	$1000000^2 \cdot 10^{-9}$	= 10^3		10 min

$O(n^2)$ ist für das Problem nicht praktikabel.

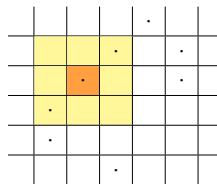
Randomisierter Algorithmus für CP

Ein randomisierter Algorithmus mit *erwarteter Laufzeit* (Varianten: Glück & Pech) hat eine Laufzeit von $O(n)$. Er wird aus folgendem inkrementellen Ansatz hergeleitet:

Zuerst wird die Datenmenge $P = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\}$ betrachtet. Sei nun δ_i die CP-Distanz in der Menge P . Es kommt nun ein weiterer Punkt P_{i+1} hinzu.

Den neuen geringsten Abstand kann man nun dadurch herausfinden, dass man die Abstände vom neuen Punkt zu allen anderen Punkten vergleicht und überprüft, ob es einen kleineren Abstand als das bisherige δ_i gibt.

Besser wäre jedoch Folgendes: Angenommen, δ_i ist bestimmt. So kann nun ein Gitter erzeugt werden, das eine Maschenweite (Breite der Zeilen/Spalten) von genau δ_i hat.



Das Einfügen folgt einem einfachen Ablauf

1. Lokalisieren P_{i+1} im Gitter (orange)
2. Inspizieren alle Punkte im Feld von P_{i+1} sowie alle Felder um P_{i+1} herum (gelb)
 - a) $\delta_{i+1} = \delta_i \rightarrow$ Nichts mehr tun $\rightarrow O(1)$
 - b) $\delta_{i+1} < \delta_i \rightarrow$ Baue Gitter mit neuer Maschenweite $\delta_{i+1} \rightarrow O(n^2)$ im schlimmsten Fall

Da es auch Fälle geben kann, in denen P_{i+1} immer einen kleineren δ hat als davor (Liste nach größtem Abstand geordnet), empfiehlt es sich, die Punkte immer in zufälliger Reihenfolge „einzufügen“. So bleibt eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{i+1}$ dafür, dass der nächste Punkt ein CP-Punkt ist.

Die erwarteten Kosten des Einfügens sind

$$\begin{aligned}
 &\leq \underbrace{\frac{2}{i+1} \cdot O(n)}_{\text{schlechter Fall}} + \underbrace{O(1)}_{\text{guter Fall}} \\
 &= O(1) + O(1) \\
 &= O(1)
 \end{aligned}$$

Damit lässt sich der Erwartungswert berechnen zu

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{i=1}^n (\text{Kosten für Einfügen von } P_i) \right] &= \sum_{i=1}^n E[\text{Kosten für Einfügen von } P_i] \\ &= \sum_{i=1}^n O(1) \\ &= O(n) \end{aligned}$$

Satz: Die Wahrscheinlichkeit, beim Einfügen von P_{i+1} das Gitter neu aufbauen zu müssen, ist $< \frac{2}{i+1}$.

Beweis: Das Gitter muss genau dann neu aufgebaut werden, wenn P_{i+1} einer der beiden Punkte ist, welche das CP in der Menge der ersten $i+1$ Punkte bestimmen. Jeder der ersten $i+1$ Punkte ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit der P_{i+1} .

Falls CP eindeutig:

$$\rightarrow \Pr(\text{Gitter muss neu aufgebaut werden}) = \frac{2}{i}$$

Wichtig: Wenn der Algorithmus länger braucht, hat das nichts mit der Eingabe zu tun. Der randomisierte Closest-Pair-Algorithmus berechnet immer ein korrektes Resultat.

Closest Pair mit deterministischem Algorithmus

Closest Pair kann in $O(n \cdot \log(n))$ berechnet werden. Es kann sogar gezeigt werden, dass CP mindestens $\Omega(n \cdot \log(n))$ braucht.

Deterministisch geht CP vergleichsbasiert nicht besser als $\Omega(n \cdot \log(n))$

n	Rechnung	Ergebnis
= 1000000	$10^6 \cdot 6 \cdot 10^{-9}$	6 ms

Beweis: Man weiß, dass Elementuniqueness (gegeben sind n Zahlen, man überprüft, ob eine Zahl doppelt vorkommt) $\Omega(n \cdot \log(n))$ braucht. Falls CP deterministisch vergleichsbasiert besser als $o(n \cdot \log(n))$ gelöst werden könnte, so könnte man auch Elementuniqueness in dieser Zeit lösen (Zahl $i \rightarrow \text{Punkt } (i, i) \in \mathbb{R}^2$). Allerdings gilt das nur in einem anderem Rechenmodell (Randomisierung und Abrundung).

Anhang

Zufallsvariable und Erwartungswert

Sei Y eine Zufallsvariable, zum Beispiel *Augenzahl beim Wurf* mit einem normalen und fairen Würfel.

Der Erwartungswert berechnet sich zu

$$E[X] = \sum \text{Ereignis} \cdot \Pr(\text{Ereignis})$$

Für Y also: $\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3,5$