Vorlesungsmitschrift

Algorithmen und Berechenbarkeit

Vorlesung 16

Letztes Update: 2018/01/19 - 20:54 Uhr

Das Allgemeine Halteproblem: Die Sprache $\mathcal{H}_{all}$

Die Sprache $\mathcal{H}_{all}$ ist definiert als

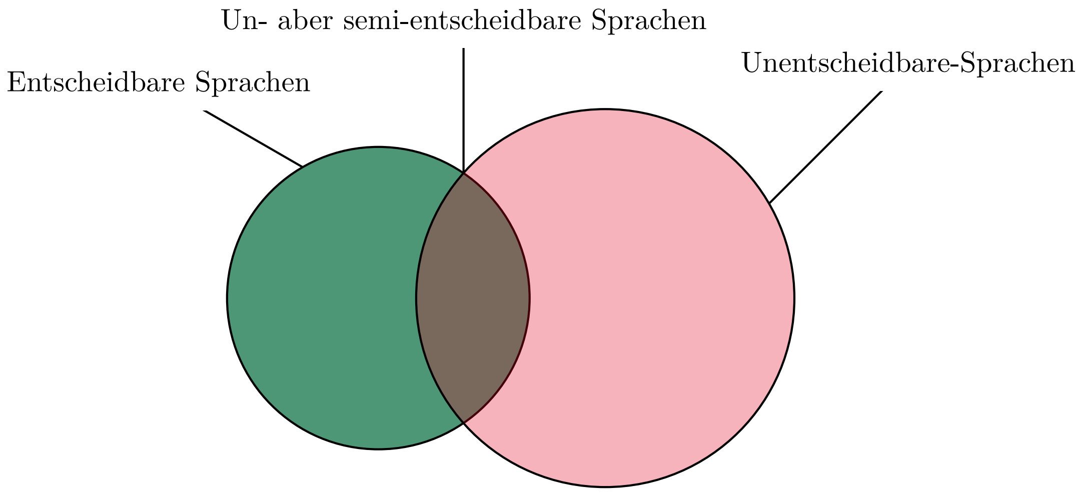
$$\mathcal{H}_{all} = \{<\text{M}> \mid \; \text{M hält auf allen Eingaben}\}$$

Das Allgemeine Halteproblem besteht aus den beiden Teilsätzen, dass sowohl $\mathcal{H}_{all}$ als auch $\overline{\mathcal{H}_{all}}$ nicht semi-entscheidbar sind.

Satz: $\overline{\mathcal{H}_{all}}$ ist nicht semi-entscheidbar.

Beweis: Für den Beweis wird eine Sprache $\mathcal{X}$ gesucht, die nicht semi-entscheidbar ist. Anschließend wird $\mathcal{X} \leq \overline{\mathcal{H}_{all}}$.
Für $\mathcal{X}$ eignen sich einige Sprachen: Es wurde bereits gezeigt, dass $\mathcal{H}_\epsilon$ semi-entscheidbar aber nicht entscheidbar ist ($\mathcal{H}_\epsilon$ ist unentscheidbar und semi-entscheidbar). Deshalb ist auch bekannt, dass $\overline{\mathcal{H}_\epsilon}$ nicht semi-entscheidbar ist.

Einschub: Entscheidbarkeit/Unentscheidbarkeit - Semi-entscheidbar



Daraus ergeben sich beispielhaft die folgenden Zusammenhänge

$\rightarrow$ Wenn entscheidbar $\Rightarrow$ auch semi-entscheidbar

$\rightarrow$ Wenn semi-entscheidbar $\Rightarrow$ entscheidbar

$\rightarrow$ Wenn unentscheidbar $\Rightarrow$ semi-entscheidbar

$\rightarrow$ Wenn nicht semi-entscheidbar $\Rightarrow$ unentscheidbar

Beweis-Fortführung: Wählt man nun $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{H}_\epsilon}$ (man zeigt also $\overline{\mathcal{H}_\epsilon} \leq \overline{\mathcal{X}_{all}}$) wird eine Funktion f' benötigt, sodass gilt

$$x \in \overline{\mathcal{H}_\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in \overline{\mathcal{H}_{all}}$$

oder äquivalent

$$x \in \mathcal{H}_\epsilon \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in \mathcal{H}_{all}$$

und damit

$$\mathcal{H}_\epsilon \leq \mathcal{H}_{all}$$

Die Funktion f wird wie folgt definiert bzw. berechnet: Sei w die Eingabe für $\mathcal{H}_\epsilon$.

- Falls w keine gültige TM-Kodierung, dann setzt man $f(w) = w$.
- Falls w eine gültige TM-Kodierung $<\mathrm{M}>$, dann setzt man $f(w) = <\mathrm{M}_\epsilon^*>$ mit der folgenden Eigenschaft: $<\mathrm{M}_\epsilon^*>$ ignoriert und simuliert $\mathcal{M}$ mit der Eingabe ϵ.

Korrektheit der Konstruktion:

Falls w keine TM-Kodierung $\Rightarrow w \notin \mathcal{H}_\epsilon$ und $f(w) \notin \mathcal{H}_{all}$.
Andernfalls gilt $w = <\mathrm{M}>$ und $f(w) = <\mathrm{M}_\epsilon^*>$.

- $w \in \mathcal{H}_\epsilon$
  - $\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ hält auf der Eingabe ϵ
  - $\Rightarrow$ $<\mathrm{M}_\epsilon^*>$ hält auf allen Eingaben
  - $\Rightarrow$ $f(w) \in \mathcal{H}_{all}$
- $w \notin \mathcal{H}_\epsilon$
  - $\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ hält nicht auf der Eingabe ϵ
  - $\Rightarrow$ $<\mathrm{M}_\epsilon^*>$ hält nie
  - $\Rightarrow$ $f(w) \notin \mathcal{H}_{all}$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} w \in \mathcal{H}_\epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad f(w) \in \mathcal{H}_{all}, \text{ also ist} \\ \mathcal{H}_\epsilon \leq \mathcal{H}_{all} \quad &\Rightarrow \quad \overline{\mathcal{H}_\epsilon} \leq \overline{\mathcal{H}_{all}} \\ &\Rightarrow \quad \overline{\mathcal{H}_{all}} \text{ nicht entscheidbar} \end{aligned}$$

$\square$

Satz: $\mathcal{H}_{all}$ ist nicht semi-entscheidbar.

Beweis: Es wird wieder mit $\overline{\mathcal{H}_\epsilon} \leq \mathcal{H}_{all}$ argumentiert. Man konstruiert eine Funktion f, die `JA`-Instanzen von $\overline{\mathcal{H}_\epsilon}$ auf `JA`-Instanzen von $\mathcal{H}_{all}$ und `NEIN`-Instanzen von $\overline{\mathcal{H}_\epsilon}$ auf `NEIN`-Instanzen von $\mathcal{H}_{all}$ abbildet.
Sei w die Eingabe für $\overline{\mathcal{H}_\epsilon}$

- Falls w keine gültige TM-Kodierung, dann gilt $w \in \overline{\mathcal{H}_\epsilon}$.
  Außerdem wird $f(w) =$ Kodierung einer TM in $\mathcal{H}_{all}$.
- Falls w eine gültige TM-Kodierung <M>, dann berechnet man eine Kodierung $<\mathrm{M}'_{\mathcal{M}}>$ einer TM $\mathcal{M}'_{\mathcal{M}}$, die auf der Eingabe x Folgendes tut: Falls $|x| = i$, simuliert sie die ersten i-Schritte von $\mathcal{M}$ auf der Eingabe ϵ. Wenn $\mathcal{M}$ dabei hält, geht sie in eine Endlosschleife, ansonsten hält sie an: $f(w) = <\mathrm{M}'_{\mathcal{M}}>$

Korrektheit der Konstruktion:

- $w \in \overline{\mathcal{H}_\epsilon}$
  - $\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ hält nicht auf der Eingabe ϵ
  - $\Rightarrow$ $\neg\exists i : \mathcal{M}$ hält innerhalb der ersten i-Schritte auf ϵ
  - $\Rightarrow$ $\forall i : <\mathrm{M}'_{\mathcal{M}}>$ hält auf der Eingabe der Länge i
  - $\Rightarrow$ $f(w) = <\mathrm{M}'_{\mathcal{M}}> \in \mathcal{H}_{all}$
- $w \notin \overline{\mathcal{H}_\epsilon}$
  - $\Rightarrow$ $\mathcal{M}$ hält auf der Eingabe ϵ
  - $\Rightarrow$ $\exists i : \mathcal{M}$ hält innerhalb der ersten i-Schritte auf ϵ
  - $\Rightarrow$ $\exists i : <\mathrm{M}'_{\mathcal{M}}>$ loopt auf Eingaben der Länge i
  - $\Rightarrow$ $f(w) = <\mathrm{M}'_{\mathcal{M}}> \notin \mathcal{H}_{all}$

Somit gilt:

$$w \in \overline{\mathcal{H}_\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad f(w) \in \mathcal{H}_{all}$$

$\square$

Es wurde also gezeigt, dass sowohl $\mathcal{H}_{all}$ als auch $\overline{\mathcal{H}_{all}}$ nicht semi-entscheidbar bzw. rekursiv aufzählbar sind.

Weitere unentscheidbare Probleme

Hilberts zehntes Problem

Gegeben sei ein multivariates Polynom p (also ein Polynom mit mehreren Variablen z.B. $x, y, z, a \dots$). Es kann die Frage gestellt werden, ob p eine ganzzahlige Nullstelle besitzt.

In der Tat gilt: Die Sprache

$$N = \{\ p \mid p \text{ ist Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und ganzzahliger Nullstelle}\ \}$$

ist unentscheidbar.

Postsche Korrespondenzproblem

Gegeben seien z.B. die Kärtchen

$$K = \left\{ \underbrace{\left[\frac{b}{ca}\right]}_{1}, \underbrace{\left[\frac{a}{ab}\right]}_{2}, \underbrace{\left[\frac{ca}{a}\right]}_{3}, \underbrace{\left[\frac{abc}{c}\right]}_{4} \right\}$$

Man kann nun beliebig viele Kärtchen beliebig oft aneinanderreihen. Reiht man die Kärtchen 1+2+1 aneinander, so erhält man zwei Zeichenketten: Einmal die Zeichenkette oben und einmal die Zeichenkette unten. Im Beispiel also oben: `bab` und unten: `caabca`.

Nun kann die Frage gestellt werden, ob man bei einem gegebenen Kartenset K die Karten so anordnen kann, dass die obere Zeichenkette genau der unteren Zeichenkette entspricht. Für das obige Beispiel ist das möglich, dort liefert die Kombination $2 + 1 + 3 + 2 + 4$ sowohl oben als auch unten dieselbe Zeichenkette.

Im Allgemeinen gilt aber: Die Sprache

$$PKP = \{\ \text{Kärtchenset } K \text{ mit Lösung}\ \}$$

ist unentscheidbar (aber semi-entscheidbar).

Im Skript weiter informieren, eine Klausuraufgabe hierzu ist sehr gut möglich.