

Algorithmen und Berechenbarkeit

Vorlesung 07

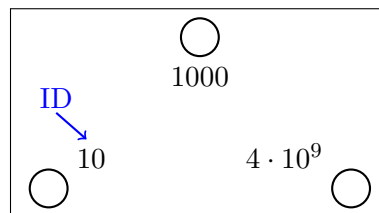
Letztes Update: 2018/01/28 - 01:07 Uhr

Hashing

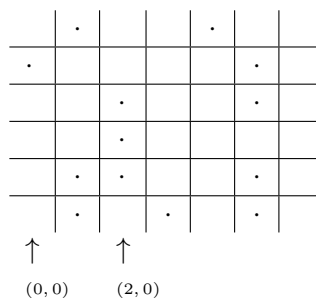
Einleitung

Bei der Implementierung des Algorithmus vom Closest-Pair Problem wird üblicherweise auf Hashing zurückgegriffen. Hashing beschreibt dabei eine Funktion bzw. Abbildung, *die eine große Eingabemenge (die Schlüssel) auf eine kleinere Zielmenge (die Hashwerte) abbildet*¹.

Auch bei Telefon- und Wörterbüchern (vgl. dazu *Wörterbuchproblem*) oder für Anwendungen, die OpenStreetMap-Daten verwenden, wird oft auf Hashing zurückgegriffen.



Beim Closest-Pair-Algorithmus kann mittels Hashing die Gitterzelle errechnet werden. Jede Gitterzelle erhält Koordinaten.



Die Maschenweite des Gitters sei w . Dann fällt ein Punkt $P(p_x, p_y)$ in die Gitterzelle

$$\left(\left\lfloor \frac{p_x}{w} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{p_y}{w} \right\rfloor \right)$$

↙
abgerundet

¹<https://de.wikipedia.org/wiki/Hashfunktion>

Beispiel

Sie $w = \frac{1}{2}$ und $P(p_x, p_y) = \left(\frac{15}{10}, \frac{7}{10}\right)$. Man erhält für das Gitter die Koordinaten

$$\left(\left\lfloor \frac{P_x}{w} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{P_y}{w} \right\rfloor\right) = \left(\left\lfloor \frac{15}{\frac{1}{2}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{7}{\frac{1}{2}} \right\rfloor\right) = (3, 1)$$

Diese Koordinaten müssen noch ghasht werden.

Hashing formal

Gegeben sei **erstens** das *Universum* U , das immer sehr groß gewählt wird und typischerweise eine Teilmenge der natürlichen Zahlen darstellt, **zweitens** sei auch die vergleichsweise kleine Menge $S \subseteq U$ gegeben. Daraus folgt **drittens** $n = |S|$, also die Anzahl der Elemente in S .

Das Ziel ist nun

$$\text{Finde } h : U \rightarrow \{0, 1, \dots, m-1\}$$

$$\text{sodass } \forall 0 \leq i < m : \left| \{x \in S \mid h(x) = i\} \right| \leq \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$$

Man sucht also eine Funktion h , sodass keine zwei Elemente aus S auf dieselbe Zahl zeigen.

Beispiel

Seien $U = \mathbb{N}$, $S = \{1, 7, 23, 99\}$, $n = 4$ und $m = 5$ gegeben. Dann ist die Funktion

$$h(x) = x \bmod 5$$

eine sehr gute Hashfunktion für S .

$$\rightarrow h(1) = 1$$

$$\rightarrow h(7) = 2$$

$$\rightarrow h(23) = 3$$

$$\rightarrow h(99) = 4$$

Für die Menge $S' = \{2, 17, 22, 32\}$ ist $h(x)$ aber eine sehr schlechte Hashfunktion.

$$\rightarrow h(2) = 2$$

$$\rightarrow h(17) = 2$$

$$\rightarrow h(22) = 2$$

$$\rightarrow h(32) = 2$$

Satz: Seien U, m und h gegeben, und sei $k = |U|$ sowie $n = |S| \Rightarrow S \in \binom{U}{n}$. Dann gibt es für jedes n mit $1 \leq n \leq \frac{k}{m}$ ein S , sodass alle Elemente aus S von h auf denselben Wert in $\{0, 1, \dots, m-1\}$ abgebildet werden.

Beweis: Nach Schubfachsystem existiert ein i mit $0 \leq i < m$, sodass $\underbrace{|\{x \in U \mid h(x) = i\}|}_{\geq \frac{|U|}{m}} \geq \frac{|U|}{m} = \frac{k}{m}$.

Nach Annahme ist $\frac{k}{m} \geq n$. Man kann nun $S \subseteq \{x \in U \mid h(x) = i\}$ mit $|S| = n$ wählen für ein beliebiges i mit $|\{x \in U \mid h(x) = i\}| \geq \frac{k}{m}$. \square

Um eine gute Hashfunktion zu finden, müssen also immer auch die Daten betrachtet werden, die mit dieser Funktion ghasht werden.

Datenstruktur

Man betrachte die Datenstruktur *Wörterbuch*, die folgende Operationen unterstützt.

| | |
|---------------------------|--|
| <code>makeset()</code> | Erzeugt ein leeres Wörterbuch |
| <code>insert(x, S)</code> | Fügt $\underbrace{\text{Item } x}_{\substack{\text{Key} + \\ \text{Information}}}$ in Wörterbuch ein, überschreibt falls vorhanden |
| <code>delete(x, S)</code> | Löscht Item x aus S |
| <code>lookup(x, S)</code> | Gibt Item $x = \underbrace{(x, \text{Info})}_{\text{Paar}}$ aus, falls vorhanden |

Man sucht eine Datenstruktur, die Zugriffe in $\mathcal{O}(1)$ erlaubt und dabei nicht mehr als $\mathcal{O}(n)$ Platz verbraucht.

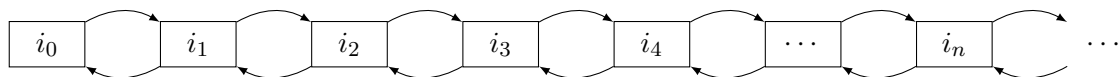
Implementierungsansatz 1: Array für Items, Zähler für $|S|$

| | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|---------|-------|
| i_0 | i_1 | i_2 | i_3 | i_4 | \dots | i_n |
|-------|-------|-------|-------|-------|---------|-------|

- `makeset()` Diese Operation gelingt in $\mathcal{O}(1)$.
- `insert(x, S)` kostet $\mathcal{O}(1)$, falls bekannt ist, dass noch kein Item mit demselben Schlüssel in S existiert. Ansonsten muss zuerst in $\mathcal{O}(n)$ geprüft werden, ob der Schlüssel bereits enthalten ist, bevor das Item in $\mathcal{O}(1)$ eingefügt werden kann.
- `delete(x, S)` Da nicht mithilfe des Index gelöscht wird, müssen die Einträge von S durchlaufen werden, um das Item zu löschen. Das braucht $\mathcal{O}(n)$.
- `lookup(x, S)` Es müssen wie bei `delete(x, S)` die Einträge durchlaufen werden, um das gesuchte Element zu finden. Das braucht ebenfalls $\mathcal{O}(n)$.

| Vorteile | Nachteile |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Einfach • Platzsparend | <ul style="list-style-type: none"> • Performance bei <code>delete(x, S)</code> • Performance bei <code>lookup(x, S)</code> |

Implementierungsansatz 2: Einfach/doppelt verkettete Listen



Im Allgemeinen verhält sich diese Datenstruktur für den Wörterbuchansatz recht ähnlich wie das Array aus dem ersten Ansatz.

Implementierungsansatz 3: Direkte Adressierung

Für diese Datenstruktur wird angenommen, dass das Schlüsseluniversum endlich und nicht zu groß ist:

$$U := \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Man legt nun wie im ersten Ansatz ein Array an, diesmal mit der Größe k . An Position i steht die Information für Schlüssel i , falls eine Information für diesen Schlüssel abgelegt wurde. Ansonsten erhält man NIL.

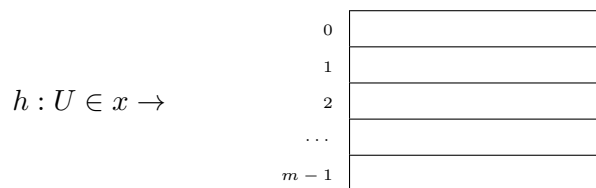
| Vorteil | Nachteil |
|---|--|
| • Alle Operationen bis auf <code>makeset()</code> in $\mathcal{O}(1)$ | • Platz und Größe des Schlüsseluniversums (nicht der Menge S) |

Implementierungsansatz 4: Suchstrukturen wie (2,3,4)-, AVL- oder RS-Bäume

| Vorteil | Nachteil |
|---|--|
| • Platzverbrauch tatsächlich $\mathcal{O}(n)$ | • Zugriffszeit nur in $\mathcal{O}(\log(n))$ |

Hashing mit Verkettung

Angenommen, ein gewähltes h ist nicht injektiv für S , das bedeutet, es gibt mehrere Elemente in $x, y \in S$ für die gilt $h(x) = h(y)$. Man kann damit dennoch eine Hashdatenstruktur bauen:



Jeder Hasheintrag ist Kopf einer einfach verketteten Liste, $x \in S$ wird in der $h(x)$ -ten verketteten Liste gespeichert.

- **Platzbedarf:**

$$\mathcal{O}(m + n) = \mathcal{O}\left(n \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)$$

$\beta = \frac{n}{m}$ ist der *Belegungsfaktor*. Je kleiner β , desto ineffizienter ist die Datenstruktur, aber möglicherweise ist es dann einfacher, eine *gute* Hashfunktion zu finden.

- **Zugriffszeit:** Man nimmt an, $h(x)$ kann in $\mathcal{O}(1)$ ausgewertet werden. Dann ist der Zugriff $x \in S$ in

$$\mathcal{O}(1 + \text{Position von } x \text{ in Liste } L_{h(x)})$$

und der Zugriff auf $x \in U \setminus S$ in

$$\mathcal{O}(1 + \text{Länge von } L_{h(x)})$$

Erwartete Suchzeit

Man nimmt an, h verteilt U gleichmäßig über $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, das bedeutet

$$\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\} : |\{k \in U \mid h(k) = i\}| \leq \left\lceil \frac{|U|}{m} \right\rceil$$

Zum Beispiel $h(x) = x \bmod m$

Satz: Sei x ein zufälliges (gleichverteiltes) Element aus $U \setminus S$ und $h \leq \frac{|U|}{2}$. Die erwartete Suchzeit nach Element x ist dann $\mathcal{O}(1 + \beta)$

Beweis (erster Teil): Sei l_i die Anzahl der Elemente aus S , die in L_i gespeichert wurde $= |L_i|$. Es gilt $\sum_{i=0}^{m-1} l_i = n = |S|$. Die erwartete Suchzeit ist damit

$$E := \left(\sum_{i=0}^{m-1} \underbrace{\Pr(h(i) = i)}_{\text{Beweis-Einschub}} \cdot l_i \right) + 1$$

Beweis (Einschub):

Hierbei sind die Elemente U_i diejenigen Elemente aus U , welche auf i gehasht werden.

$$\begin{aligned}
 \Pr(h(x) = i) &= \frac{|U_i \setminus S|}{|U \setminus S|} \\
 &\leq \frac{|U_i|}{\underbrace{|U \setminus S|}_U} \\
 &\geq \frac{2}{2} \\
 &\leq \frac{\left\lceil \frac{|U|}{m} \right\rceil}{\frac{|U|}{2}} \\
 &\leq \frac{\frac{|U|}{m} + 1}{\frac{|U|}{2}} \\
 &= \frac{2}{m} + \underbrace{\frac{2}{|U|}}_{n \leq \frac{|U|}{2}} \leq \underbrace{\frac{2}{m} + \frac{1}{n}}_{\substack{\text{Im zwei-} \\ \text{ten Teil} \\ \text{einsetzen}}}
 \end{aligned}$$

Beweis (zweiter Teil):

$$\begin{aligned}
 E &:= \left(\sum_{i=0}^{m-1} \Pr(h(i) = i) \cdot l_i \right) + 1 \\
 &\leq \left(\sum_{i=0}^{m-1} \left(\frac{2}{m} + \frac{1}{n} \right) \cdot l_i \right) + 1 \\
 &= 1 + \frac{2}{m} \underbrace{\sum_{i=0}^{m-1} l_i}_n + \frac{1}{n} \underbrace{\sum_{i=0}^{m-1} l_i}_n \\
 &= 1 + \frac{2n}{m} + 1 \\
 &= 2 + \frac{2n}{m} \\
 &= \mathcal{O}(1 + \beta)
 \end{aligned}$$

□