Лекция 3.

Уравнение Эйлера-Лагранжа

Fominyh A. V. 2023

Простейшая задача вариационного исчисления

Постановка задачи

$$J(x) = \int_a^b F(t, x(t), x'(t))\, dt \longrightarrow \min_x$$

$$x \in C^1[a,b] \ : \ x(a) = x_1, \quad x(b) = x_2, \qquad F \in \widetilde{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

Введем множества

$$G = \left\{ x \in C^1[a,b] \mid x(a) = x_1,\ x(b) = x_2 \right\},$$

$$G_0 = \left\{ x \in C^1[a,b] \mid x(a) = 0,\ x(b) = 0 \right\}.$$

Вариация Лагранжа

Пусть для всех $h \in X$ выполняется условие

$$\delta J(x_0, -h) = -\delta J(x_0, h).$$

Тогда (первая) вариация в точке x_0 называется **(первой) вариацией Лагранжа в точке x_0.**

Условие слабого минимума в терминах вариации

Лемма

Рассмотрим простейшую задачу ВИ. Пусть точка $x^* \in G$.

Если x^* доставляет функционалу $J(x)$ слабый локальный минимум на множестве G, то имеет место равенство

$$\delta J(x^*, h) = 0 \quad \forall h \in G_0$$

Экстремали

Стационарная точка

Элемент $x_0 \in G$ будем называть **стационарной точкой** функционала $J(x)$, если “первая вариация” этого функционала обращается в ноль в этой точке:

$$\delta J(x_0, h) = 0 \quad \forall\, h \in G_0.$$

Замечание 1

В вариационном исчислении стационарные точки также называют **экстремалями**.

Замечание 2

Точка слабого локального минимума является экстремалью.

Неконструктивность необходимого условия экстремума

$$\delta I(x_0, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial x'} h'\right] dt = 0 \quad \forall\, h \in G_0.$$

Видно, что в отличие от задач конечномерной оптимизации, условие стационарности данной точки малопригодно для применения на практике.

Лемма Лагранжа

Если для непрерывной функции $g \in C[a, b]$ выполняется условие

$$\int_a^b g(t)h(t)\,dt = 0 \qquad \forall\ h \in G_0,$$

то

$$g(t) = 0 \qquad \forall\ t \in [a, b].$$

Основные леммы вариационного исчисления

Лемма Дюбуа–Реймона

Если для непрерывной функции $g \in C[a, b]$ выполняется условие

$$\int_a^b g(t)h'(t)\,dt = 0 \qquad \forall\ h \in G_0,$$

то

$$g(t) = K = const \qquad \forall\ t \in [a, b].$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа

Теорема Эйлера-Лагранжа

Если функция $x^* \in G$ является дважды непрерывно дифференцируемой и доставляет функционалу $J(x)$ слабый локальный минимум на множестве G, то она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F(t, x^*(t), (x^*)'(t))}{\partial x'} - \frac{\partial F(t, x^*(t), (x^*)'(t))}{\partial x} = 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

Формы уравнения Эйлера-Лагранжа

Дифференциальная форма

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

или подробно

$$F''_{x'x'}x'' + F''_{x'x}x' + F''_{x't} - F'_x = 0.$$

Интегральная форма

$$\frac{\partial F}{\partial x'} - \int_a^t \frac{\partial F}{\partial x}\,dt = K,$$

где K — константа.

Частные случаи уравнения Эйлера-Лагранжа

F не зависит от x'

В этом случае имеем алгебраическое уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Если полученное x не удовлетворяет заданным краевым условиям, то исходная задача не имеет решения.

F зависит только от x'

В этом случае получаем уравнение

$$F''_{x'x'}x'' = 0,$$

которому удовлетворяют прямые и возможно еще какие-то функции.

F не зависит от x

В этом случае имеем уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x'} = 0$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = K,$$

где K - константа. Это дифференциальное уравнение первого порядка.

F не зависит от t

В этом случае получаем уравнение

$$F''_{x'x'}x'' + F''_{x'x}x' - F'_x = 0.$$

Домножив обе части на x', получаем

$$\frac{d}{dt}\left[F - F'_x x'\right] = 0$$

или

$$F - F'_x x' = K,$$

где K - константа. Это дифференциальное уравнение первого порядка.

F зависит от x' линейно

В этом случае F имеет вид

$$F = M(x,t) + N(x,t)x'.$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа принимает вид

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x} = 0.$$

Это алгебраическое уравнение. Если полученное x не удовлетворяет заданным краевым условиям, то исходная задача не имеет решения. Если последнее равенство имеет место тождественно, то выражение

$$(M(x,t) + N(x,t)x')dt = M(x,t)dt + N(x,t)dx$$

является полным дифференциалом. В этом случае функционал не зависит от пути интегрирования и его значение одно и то же для всех допустимых кривых.

Литература.

- Демьянов В. Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. 2005. Москва: Высшая школа. 335 с.
- Алексеев В. М., Тихомиров В. М. Фомин С. В. Оптимальное управление. 1979. Москва: Наука. 432 с.