Теория функции комплексной переменной

Шарабарин Михаил

26.01.2025

Содержание

1 Вопрос 1. Определения и формы комплексных чисел и действия над ними

Комплексные числа — это числа, представляемые в виде:

$$z = a + bi,$$

где a — действительная часть, b — мнимая часть, а i ($i = \sqrt{-1}$) — мнимая единица.

Основные представления комплексных чисел:

- Алгебраическая форма: $z = a + bi$,
- Тригонометрическая форма: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,
- Экспоненциальная форма: $z = re^{i\varphi}$,

где $r = |z|$ — модуль числа, $\varphi = \arg z$ — аргумент числа.

1.1 Действия с комплексными числами

- **Сложение**: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$,
- **Умножение**: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$,
- **Деление**:
$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}.$$

Представления комплексных чисел:

- $\mathfrak{Re}(a + b\mathbf{i}) = a$
- $\mathfrak{Im}(a + b\mathbf{i}) = b$
- $$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2, \quad \overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Комплексное число - это число z вида $a + b\mathbf{i}$, где a - вещественная часть, а b - мнимая. Символ $\mathbf{i^2} = -1$ называется мнимой единицей.
Сопряженное число - $\overline{z}$ называется сопряженным числом и записывается как $a - b\mathbf{i}$. Свойства сопряженны чисел:

$$\overline{z * z} = \overline{z} * \overline{z}, \quad \overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}}$$

В полярных координатах точка m имеет коодинаты r, φ, (мы рассматриваем) комплексные числа как вектора + их нельзя сравнить). Иногда говорят что вектор и комплексное число это тоже самое. Здесь расстояние от центра координат до этой точки будет равно модулю вектора

$$r = \overline{OM} = |z| = \sqrt{z * \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

в это время φ является углом между вектором $\overline{OM}$ и вектором $\overline{OX}$ (направлением оси X) и обозначается как $\varphi = \text{Arg } z$

1.2 Особый разговор об аргументе

Аргумент - бесконечен т.к. все его значения отдаляются от истенных (в нап равлении от оси $\overline{OX}$ в противоположном направлении до 2π).
Аргумент определяется в виде формулы

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ x = r\sin\varphi \end{cases} \tag{1}$$

С точностью до слагаемого $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,.$
Из всех главных значений особо выделяются $-\pi < \arg z < \pi$. При этом полезны формулы:

$$\begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{если} x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{если} x < 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & \text{если} x > 0, y < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Условия сопряжения двух чисел z и $\overline{z}$:

$$\arg z = -\arg \overline{z}, \quad |z| = |\overline{z}|$$

Некоторые свойства модуля:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||, \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

1.3 Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = i(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$$

Формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi$$

Показательная форма числа:

$$z = re^{i\varphi}$$

1.4 Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической или показательной формах

Пусть даны два комплексных числа:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathbf{i}\sin\varphi_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathbf{i}\sin\varphi_2).$$

Выведем формулу произвеения:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathbf{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big) = r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathbf{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big).$$

Деление:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathbf{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right) =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathbf{i}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\right) =$$

1.5 Возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа

$$z^n = (x + \mathbf{i}y)^n = \big(r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)\big)^n = \big(re^{\mathbf{i}\varphi}\big)^n = r^n e^{\mathbf{i}n\varphi} = r^n(\cos n\varphi + \mathbf{i}\sin n\varphi).$$

Формула Муавра:

$$\cos n\varphi + \mathbf{i}\sin n\varphi$$

Нахождение корня

$$w_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right).$$