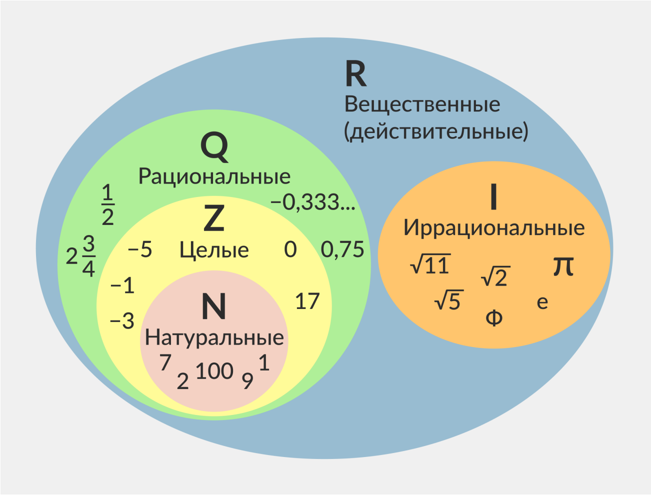
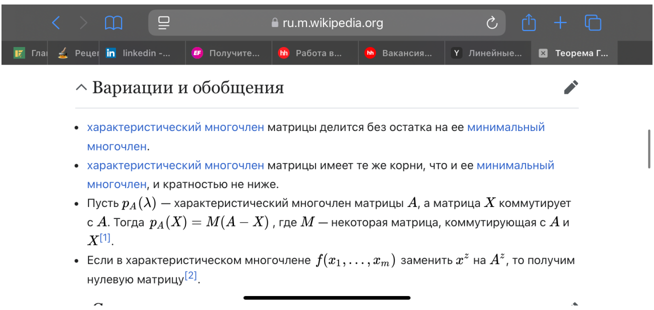
База



[Множество](#) - набор каких то элементов. 2 мн-ва = if содержат одинаковые элементы.
[Поле](#) - множество, на котором определены операции сложения, взятия противоположного значения, умножения и деления (кроме деления на 0). Простейшим полем является поле рациональных чисел (дробей).
Радикал - символ ([знак корня](#)) в правой части называется **радикалом**

[Теоре́ма Га́мильтона — Кэ́ли](#) — классическая теорема [линейной алгебры](#), утверждает, что любая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению



[Аннули́рующий многочле́н для ма́трицы](#) — [многочлен](#) , значение которого для данной квадратной матрицы равно нулевой матрице. По т Гамильтона Келли - существует как минимум 1 аннулирующий полином.

Пусть X и Y — линейные пространства над полем F. Отображение $A:X\to Y$ называется линейным оператором, если $\forall\ x1,x2\in X,\ \forall\lambda\in F$:

- $A(x1+x2)=A(x1)+A(x2)$
- $A(\lambda\cdot x1)=\lambda\cdot A(x1)$

> Множество $\boldsymbol{L}$ называется *линейным* или *векторным пространством*, если для всех элементов (векторов) этого множества определены операции сложения и умножения на число и справедливо:
>
> 1. Каждой паре элементов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\boldsymbol{L}$ отвечает элемент $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ из $\boldsymbol{L}$, называемый *суммой* $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, причём:
>
> $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ − сложение коммутативно;
>
> $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$ − сложение ассоциативно;
>
> $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ − существует единственный *нулевой* элемент $\mathbf{0}$ ($\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}$ из $\boldsymbol{L}$);
>
> $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$ − для каждого элемента $\mathbf{x}$ из $\boldsymbol{L}$ существует единственный *противоположный* элемент $-\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$ для любого $\mathbf{x}$ из $\boldsymbol{L}$).
>
> 2. Каждой паре $\mathbf{x}$ и α, где α − число, а $\mathbf{x}$ элемент из $\boldsymbol{L}$, отвечает элемент $\alpha\cdot\mathbf{x}$, наываемый *произведением* α *и* $\mathbf{x}$, причём:
>
> $\alpha\cdot(\beta\cdot\mathbf{x})=(\alpha\cdot\beta)\cdot\mathbf{x}$ − умножнение на число ассоциативно: ;
>
> $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$ − для любого элемента $\mathbf{x}$ из $\boldsymbol{L}$.
>
> 3. Операции сложения и умножения на число связаны соотношениями:
>
> $\alpha\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\cdot\mathbf{x}+\alpha\cdot\mathbf{y}$ − умножнение на число дистрибутивно относительно сложения элементов;
>
> $(\alpha+\beta)\cdot\mathbf{x}=\alpha\cdot\mathbf{x}+\beta\cdot\mathbf{x}$ − умножнение на вектор дистрибутивно относительно сложения чисел.

Линейный оператор $A:X\to X$ называется автоморфизмом (или гомоморфизмом).
!!!просто запись такая $A(x)=Ax$!!!

Ядро и образ линейного оператора

Определение:

Пусть $\mathcal{A} : X \to Y$ — линейный оператор.
Ядром линейного оператора $\mathcal{A}$ называется множество $Ker\mathcal{A} = \{x \in X \mid \mathcal{A}x = 0\}$

Определение:

Пусть $\mathcal{A} : X \to Y$ — линейный оператор.
Образом линейного оператора $\mathcal{A}$ называется множество $Im\mathcal{A} = \{y \in Y \mid y = \mathcal{A}x\}$
(множество значений)

Лемма:

Ядро и образ линейного оператора являются подпространствами линейных пространств X и Y соответственно.

Теорема (О ядре и базисе):

$$\dim Ker\mathcal{A} + \dim Im\mathcal{A} = n = \dim X$$

Линейная форма (линейный функционал,1ая форма, ковектор, ковариантный вектор) - линейное отображение действующее из линейного пространства L над полем K в поле K:

Лине́йная форма, лине́йный функционал (также используются термины **1-форма**, **ковектор**, **ковариантный вектор**) — линейное отображение, действующее из векторного пространства L над полем K в поле K. Условие линейности заключается в выполнении следующих двух свойств:

$$\Phi(f+g)=\Phi(f)+\Phi(g),$$
$$\Phi(\alpha f)=\alpha\,\Phi(f)$$

для любых двух векторов $f, g \in L$ и любого $\alpha \in K$. Таким образом, линейная форма (линейный функционал) является частным случаем понятия линейного оператора, действующего из одного векторного пространства в другое векторное пространство: $L_K \to M_K$, рассматриваемых над одним и тем же полем K. Именно, в случае линейной формы (линейного функционала) векторное пространство $M_K = K$.

Функционал - функция, заданная на произвольном множестве и имеющая **числовую** область значений. В более широком смысле функционалом называют отображение из произвольной области в произвольное (не обязательно числовую) кольцо.

Кольцо — множество R, на котором заданы две бинарные операции: $+$ и $\times$ (называемые **сложение** и **умножение**), со следующими свойствами, выполняющимися для любых $a, b, c \in R$:

1. $a + b = b + a$ — коммутативность сложения;
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативность сложения;
3. $\exists 0 \in R:\ a + 0 = 0 + a = a$ — существование нейтрального элемента относительно сложения;
4. $\forall a \in R\ \exists (-a) \in R:\ a + (-a) = (-a) + a =$ — существование противоположного (обратного) элемента относительно сложения;
5. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ — ассоциативность умножения;
6. $\begin{cases} a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \\ (b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a) \end{cases}$ — дистрибутивность.

Иными словами, кольцо — универсальная алгебра $(R, +, \times)$, являющаяся абелевой группой относительно сложения $+$, полугруппой относительно умножения $\times$ и обладающая двусторонней дистрибутивностью $\times$ относительно $+$.

Группа, кольцо, поле:

	Группа G		Кольцо К		Поле П
1я бинарная операция	a & b ∈ G	Абелева группа по сложению	a + b ∈ К	Абелева группа по сложению	a + b ∈ П
нейтральный элемент	e & a = a		0 + a = a		0 + a = a
обратный элемент	a & a' = e		a + (-a) = 0		a + (-a) = 0
ассоциативность	(a & b) & c = a & (b & c)		(a + b) + c = a + (b + c)		(a + b) + c = a + (b + c)
коммутативность	если есть - Абелева группа		a + b = b + a		a + b = b + a
2я бинарная операция	нет		a * b ∈ К	Абелева группа по умножению	a * b ∈ П
нейтральный элемент			если есть - кольцо с единицей		1 * a = a
обратный элемент			нет		a * a^{-1} = 1
ассоциативность			(a * b) * c = a * (b * c)		(a * b) * c = a * (b * c)
коммутативность			если есть - коммутативное кольцо		a * b = b * a
дистрибутивность			a * (b + c) = a * b + a * c		a * (b + c) = a * b + a * c

Лине́йное отображе́ние — обобщение линейной числовой функции (точнее, функции y=kx) с вещественных чисел на евклидовы пространства более высокой размерности, а также на произвольные векторные пространства. Является центральным понятием линейной алгебры.

Линейные отображения из пространства в себя обычно называются ***линейными операторами*** или ***линейными преобразованиями***

Норма - функционал, определенный в векторном пространстве и обобщающий понятие длины вектора или абсолютного значения числа (расстояние)

Общая формула для **L_p norm**:

$$\|x\|_p = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$$

L_1 norm / [Расстояние городских кварталов]:

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

L_2 norm / [Евклидова метрика]:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2}$$

Для регуляризации к формуле ошибки добавляется соответствующая норма - при **L_1 regularization** добавляется **L_1 norm** и **L_2 norm** в случае **L_2 regularization**:

L1 Regularization

$$\text{Cost} = \sum_{i=0}^{N} (y_i - \sum_{j=0}^{M} x_{ij} W_j)^2 + \lambda \sum_{j=0}^{M} |W_j|$$

L2 Regularization

$$\text{Cost} = \underbrace{\sum_{i=0}^{N} (y_i - \sum_{j=0}^{M} x_{ij} W_j)^2}_{\text{Loss function}} + \lambda \underbrace{\sum_{j=0}^{M} W_j^2}_{\text{Regularization Term}}$$

2 191 вкустер
Первого мая 3а