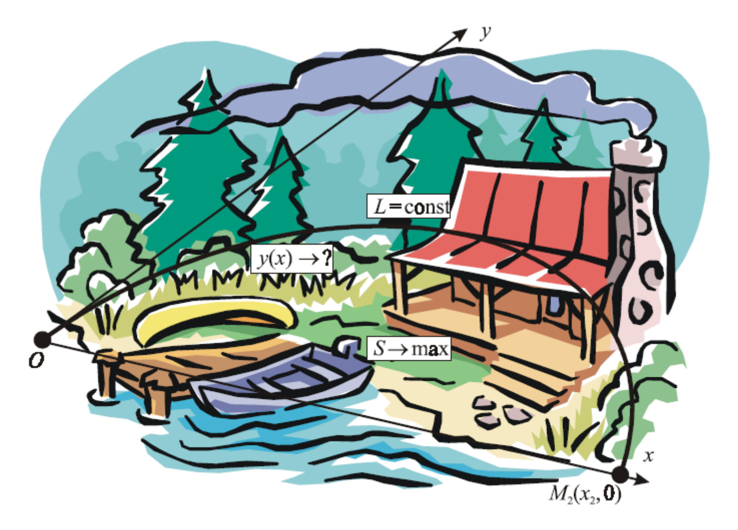
Лекция 1.

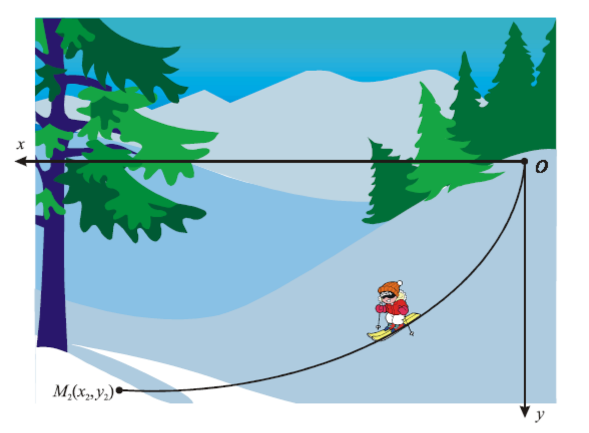
Введение в Вариационное Исчисление.

Fominyh A. V. 2023

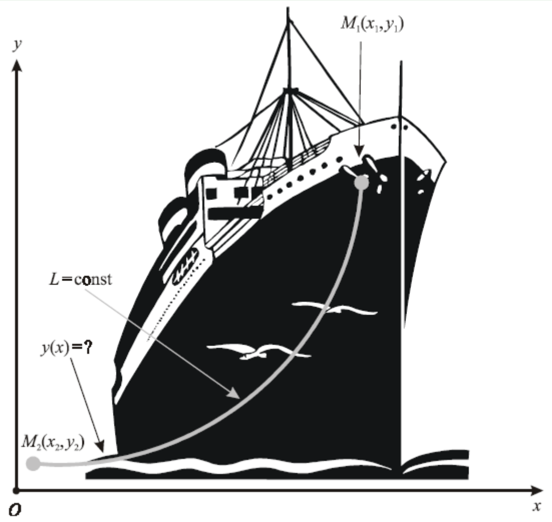
Задача Дидоны



Задача о брахистохроне



Задача о якорной цепи



Определение линейного (векторного) пространства.

Непустое множество L элементов x, y, $z, \ldots$ называется **линейным**, или **векторным**, пространством, если оно удовлетворяет следующим условиям:

Для любых двух элементов x, $y \in L$ однозначно определен третий элемент $x + y \in L$, называемый их суммой, причем

1. $x + y = y + x$,
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$,
3. в L существует такой элемент 0, что $x + 0 = x$ для всех $x \in L$,
4. для каждого $x \in L$ существует такой элемент $-x$, что $x + (-x) = 0$.

Для любого числа λ и любого элемента $x \in L$ определен элемент $\lambda x \in L$, причем

1. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,
2. $1 \cdot x = x$,
3. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
4. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Примеры линейных пространств

1. $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^n$.
3. $C[a, b]$.
4. Пространство l_2. Элементами являются последовательности чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ такие, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$.
5. Множество полиномов степень которых равна n.
6. Множество $P^1[0, T]$ непрерывных и кусочно непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, T] \to \mathbb{R}$.

Определение метрического пространства

Метрическим пространством называется пара (X, ρ), состоящее из некоторого множества X элементов и расстояния ρ, т. е. *неотрицательной, действительной функции* $\rho(x, y)$, определенной для любых $x, y \in X$ и подчиненной следующим трем аксиомам:

1. $\rho(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x).$
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$

Примеры метрических пространств

0. Пространство изолированных точек

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

1. $\mathbb{R}$: $\rho(x,y) = |x-y|$.
2. $\mathbb{R}^n$: $\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2}$.
3. $\mathbb{R}^n$: $\rho_1(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{n}|x_j - y_j|$.
4. $\mathbb{R}^n$: $\rho_\infty(x,y) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n}|x_j - y_j|$.

1. $C[a,b]$: $\rho(f,g) = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |f(t) - g(t)|$.
2. Пространство l_2 последовательностей чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$: $\rho(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{\infty} (x_j - y_j)^2}$.
3. Пространство $C_2[a,b]$ непрерывных функций с квадратичной метрикой $\rho(f,g) = \sqrt{\int\limits_a^b (f(t) - g(t))^2\, dt}$.

Определение линейного метрического пространства

Линейное пространство X на котором введена метрика инвариантная по отношению к сдвигу, т. е. $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$, будем называть **линейным метрическим пространством**.

Определение нормированного пространства

Нормированным пространством называется пара $(X, ||\cdot||)$, состоящее из некоторого линейного пространства X и нормы $||\cdot||$, т. е. *неотрицательной, действительной функции* $||x||$, определенной для любого $x \in X$ и подчиненной следующим трем аксиомам:

1. $||x|| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$
2. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \quad \forall x, y \in X.$
3. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ для любых числа λ и $x \in X$.

Связь нормированного и линейно метрического пространства

Замечание 1

Любое нормированное пространство является метрическим с метрикой

$$\rho(x, y) := \|x - y\|.$$

Замечание 2

Если речь идет об одном и том же нормированном и линейном метрическом пространстве, то по умолчанию считаем что норма и метрика в нем согласованы (метрика порождена нормой).

Шар в метрическом пространстве

Пусть задано линейное метрическое пространство X. Открытым шаром с центом в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in R$ называется множество

$$int\, B_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) < r\}.$$

Пусть задано линейное метрическое пространство X. Замкнутым шаром с центом в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in R$ называется множество

$$B_r(x_0) = \{x \in X \mid \rho(x, x_0) \leqslant r\}.$$

Шар в нормированном пространстве

Пусть задано нормированное пространство X. Открытым шаром с центом в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in R$ называется множество

$$int\, B_r(x_0) = \{x \in X \mid ||x - x_0|| < r\}.$$

Пусть задано нормированное пространство X. Замкнутым шаром с центом в точке $x_0 \in X$ радиуса $r \in R$ называется множество

$$B_r(x_0) = \{x \in X \mid ||x - x_0|| \leqslant r\}.$$

Примеры функционалов

1. $J(x) = \|x\|$.
2. $J(x) = \langle c, x \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j$ на множестве $\mathbb{R}^n$.
3. $J(x) = \int_a^b x(t)\,dt$ на множестве $C[a, b]$.
4. $J(x) = \max\limits_{t \in [a,b]} |x(t)|$ на множестве $C[a, b]$.

Линейные функционалы

Лемма.
Пусть в линейном метрическом пространстве X задан линейный функционал $J(x)$. Если этот функционал является непрерывным в точке $x_0 \in X$, то он является непрерывным на всем пространстве X.

Линейные функционалы

Теорема

Пусть в нормированном линейном метрическом пространстве X задан линейный функционал $J(x)$. Этот функционал является непрерывным на X тогда и только тогда, когда он ограничен в шаре $B_1(0)$, т. е. для всех $x \in B_1(0)$ справедливо $|J(x)| \leqslant r < \infty$ и при этом выполняется неравенство $|J(x)| \leqslant r\|x\|$ для всех $x \in X$.

Литература.

Иглин С. П. Математические расчеты на базе MatLab. 2005. СПб.: БХВ-Петербург. 620 с.

Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. 1976. Москва: Наука. 543 с.