Лекция 4.

Квадратичная вариационная задача

Fominyh A. V. 2023

Квадратичная задача вариационного исчисления

Постановка задачи

Зафиксируем функции p, q и f из класса $C^1[a, b]$.

Рассмотрим на $C^1[a, b]$ интегральный квадратичный функционал в следующей форме:

$$Q(x) = \int_a^b p(t)(x'(t))^2 + q(t)(x(t))^2 - 2f(t)x(t)\,dt.$$

Рассмотрим следующую задачу

$$Q(x) \longrightarrow \min_{x \in G},$$

где

$$G = \left\{x \in C^1[a, b] \mid x(a) = x_1,\ x(b) = x_2\right\}.$$

Множество вариаций

Запишем множество

$$G_0 = \left\{x \in C^1[a,b] \mid x(a) = 0,\ x(b) = 0\right\}.$$

Очевидно, что из условий $x \in G$, $h \in G_0$ следует, что

$$x + \alpha h \in G \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Разложение функционала $Q(x)$

Запишем разложение

$$Q(x+\alpha h) =$$

$$= Q(x)+2\alpha \int_a^b \left\{p\ x' h' + (qx - f)\ h\right\}\, dt + \alpha^2 \int_a^b \left\{p\ (h')^2 + q\ h^2\right\}\, dt.$$

Обозначим

$$\ell(x,h) = \int_a^b \left\{p\ x' h' + (qx - f)\ h\right\}\, dt,$$

$$D(h) = \int_a^b \left\{p\ (h')^2 + q\ h^2\right\}\, dt.$$

Тогда

$$Q(x+\alpha h) = Q(x) + 2\alpha\ell(x,h) + \alpha^2 D(h).$$

Условие неотрицательности на $D(h)$

Лемма 1

Если существует допустимая вариация h_0, для которой $D(h_0) < 0$, то

$$\inf_{x \in G} Q(x) = -\infty.$$

Следствие

Рассматриваемая квадратичная вариационная задача содержательна только при условии

$$D(h) \geqslant 0 \quad \forall\, h \in G_0.$$

Критерий оптимальности в терминах вариации

Лемма 2

Пусть $D(h) \geqslant 0 \ \forall\, h \in G_0$. Для того чтобы точка $x_* \in G$ доставляла минимум функционалу $Q(x)$ на множестве G необходимо и достаточно, чтобы “первая вариация”

$$\ell(x_*, h) = 0 \quad \forall\, h \in G_0.$$

Теорема (уравнение Эйлера–Лагранжа)

Пусть $D(h) \geqslant 0 \ \forall \ h \in G_0$. Пусть функция $x^* \in G$ является дважды непрерывно дифференцируемой. Для того чтобы точка $x^* \in G$ доставляла минимум функционалу $Q(x)$ на множестве G, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\ (x^*)'(t)\right) - q(t)\ x^*(t) + f(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

Задача Штурма–Лиувилля

Таким образом, решение задачи сводится к решению краевой задачи

$$\mathcal{L}(x,t) \quad := -\tfrac{d}{dt}\left(p\tfrac{dx}{dt}\right) + qx = f,$$
$$x(a) = x_1, \qquad x(b) = x_2.$$

Оператор Штурма–Лиувилля

Дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x,t)$ называется ***оператором Штурма–Лиувилля***.

Неравенство Лежандра

Напомним, что в рассматриваемой задаче существенно предположение следующего условия:

$$\int_a^b \left\{ p\,(h')^2 + q\,h^2 \right\} dt \geqslant 0 \quad \forall\, h \in G_0.$$

Замечание 1

Это неравенство очевидно выполняется, если функции $p(t)$ и $q(t)$ неотрицательны на $[a, b]$.

Теорема (неравенство Лежандра)

Если $D(h) \geqslant 0$ на G_0, то необходимо

$$p(t) \geqslant 0 \text{ на } [a, b].$$

Усиленное неравенство Лежандра

Замечание 2

Даже ***усиленного условия Лежандра***

$$p(t) > 0 \text{ на } [a, b]$$

не достаточно для неотрицательности $D(h)$ на G_0.

Рассмотрим пример

$$D_\lambda(h) = \int_0^\pi \left\{ (h')^2 - \lambda h^2 \right\} dt, \qquad h \in G_0,$$

с вариацией $h_0(t) = \sin(t)$ и числом $\lambda > 1$.

Критерий неотрицательности $D(h)$

Рассмотрим интегральную квадратичную форму

$$D(h) = \int_a^b \left\{ p\,(h')^2 + q\,h^2 \right\} dt, \qquad h \in G_0,$$

при следующих предположениях

$$p, q \in C^1[a, b], \qquad p(t) > 0 \text{ на } [a, b]. \tag{1}$$

Уравнение Якоби

Рассмотрим на $[a, b]$ дифференциальное уравнение

$$(ph')' - qh = 0$$

или подробнее

$$h'' + \frac{p'}{p}h' - \frac{q}{p}h = 0.$$

Это дифференциально уравнение называется ***уравнением Якоби***.

$$h'' + \frac{p'}{p} h' - \frac{q}{p} h = 0.$$

Определение

Назовем ***главным решением уравнения Якоби*** его решение $h_0(t)$ с начальными условиями

$$h_0(a) = 0, \qquad h_0'(a) = 1.$$

Теорема Якоби

Для того чтобы квадратичная форма

$$D(h) = \int_a^b \left\{p\ (h')^2 + q\ h^2\right\}\ dt$$

была **неотрицательной** на G_0, необходимо и достаточно, чтобы **главное решение уравнения Якоби** $h_0(t)$ было положительным на интервале (a, b).

Об условиях Лежандра–Клебша и Якоби

Замечание 3

Теоремы, аналогичные условиям Лежандра и Якоби имеют место и в общей (нелинейной) простейшей задаче вариационного исчисления. В общем случае они носят названия условий Лежандра-Клебша и Якоби соответственно.

Литература

Малоземов В. Н. Квадратичные вариационные задачи // Вестник молодых ученых. Прикладная матем. и мех. 2000. N 3. С. 12–22.

Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. 1969. Москва: Наука. 425 с.