2024
ТФКП, семестр 3. Преподаватель: Вакаева А.Б.

Вариант 6
Группа 23.Б16-пу

1. Написать всевозможные разложения по степеням $z - z_0$:

$$\frac{5z}{(z+2)(z-3)}.$$

Необходимые темы:

- Разложение функций в ряд Тейлора
- Ряды Лорана
- Декомпозиция дробно-рациональных функций
- Определение области сходимости ряда

2. Найти все особые точки, определить их характер, найти вычеты в изолированных особых точках, включая бесконечно удаленную точку:

$$f(z) = e^{\frac{z^2+1}{z}}.$$

Необходимые темы:

- Особые точки в комплексном анализе
- Классификация особых точек (полюса, устранимые, существенные)
- Разложение в ряд Лорана для нахождения вычетов
- Теорема о вычетах и вычисление вычетов
- Особенности бесконечно удаленной точки

3. Вычислить:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x \, dx}{a + b\cos x}, \quad a > b > 0.$$

Необходимые темы:

- Тригонометрические интегралы
- Применение комплексного анализа в вычислении интегралов
- Метод вычетов для вычисления интегралов
- Метод замены переменных в интегралах

1 Теория по задачам

1.1 1 задача

Многочлен Тейлора: (в случае если функция бесконечно диф-ма в окрестности этой точки, то тогда это **Ряд** Тейлора, иными словами это Разложение функции по положительным степеням в ряд Тейлора)

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Рис. 1: Caption for

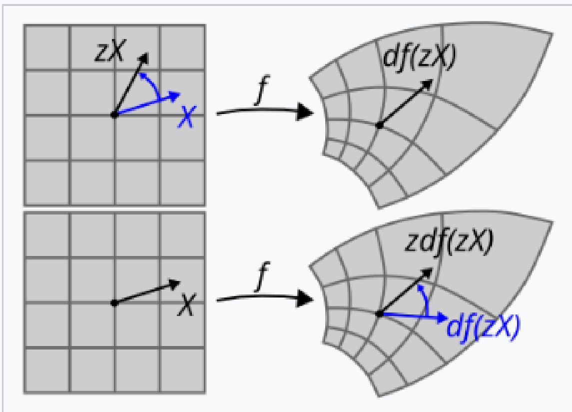
При $a = 0$ такой ряд называнется - рядом Маклорена

Рядом Тейлора в точке a функции $f(z)$ комплекной переменной z, удовлетворяющей в некоторой окрестности $U \subseteq \mathbb{C}$ условаиям Коши-Риммана, называется степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Рис. 2: Caption for

Условия Коши-Риммана в Комплексной плоскости (Эйлера-Доламбера) - это соотношения связываемые веществую часть $u = u(x, y)$ и мнимую часть $v = v(x, y)$ всякой функции комплексного переменного $w = f(z) = u + iv, \ z = x + iy$



Функция *f* является моногенной, только если d*f*(*zX*) = *z* d*f*(*X*), где *z* — любое комплексное число.

Рис. 3: Caption for

Требование, что df пропорционально dz одним и тем же комплексным числом независимо от направления приращения dz, называется **условиями Коши-Римана**.

Условия Коши-Риммана:

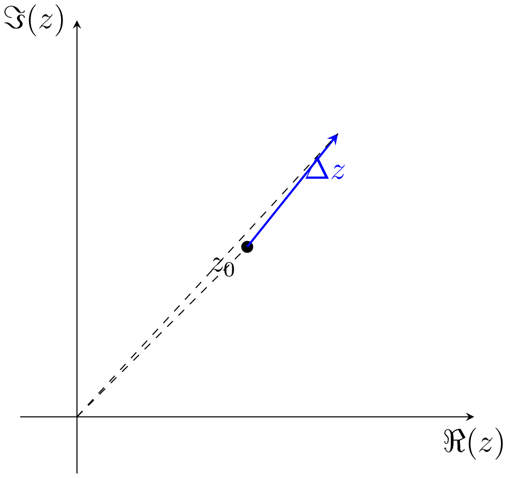
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

1.2 Конформность

Функция $f(z)$ называется конформной, если она сохраняет углы между пересекающимися кривыми. Это означает, что функция $f(z)$ сохраняет форму малых фигур при отображении.

1.3 Смысл условий Коши-Римана

Условия Коши-Римана являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы функция комплексного переменного $f(z)$ была аналитической. Они обеспечивают, что функция $f(z)$ дифференцируема в комплексном смысле и, следовательно, конформна. Эти условия связывают частные производные вещественной и мнимой частей функции, обеспечивая согласованность их изменений.



1.4 Различия комплексной дифференцируемости и дифференцируемости вещественной функции

Суть в том, что вещественная функция дифференцируема в точке, если ее приращение можно представить в виде суммы приращения функции и линейного приращения. В случае комплексной функции, дифференцируемость означает, что приращение функции можно представить в виде суммы приращения функции и линейного приращения, умноженного на комплексное число.

Формула дифференциала для комплексных чисел:

$$df = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

ЗАмечание: в комплексном дифференцировании нам не важно знать направление функции, функция может стремиться в точку с любого направления, т.к. это $\mathbf{R}^2$ пространство в переводе на вещественное пространство.

1.5 Ряд Лорана

Ряд Лорана - это разложение функции в ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные степени переменной. Ряд Лорана является обобщением ряда Тейлора.

Формула ряда Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где коэффициенты c_n определяются как:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta,$$

и γ - замкнутый контур, охватывающий точку z_0. Ряд Лорана сходится в кольце $R = \{z : r < |z - z_0| < R\}$, где r - радиус сходимости ряда Тейлора, а R - радиус сходимости ряда Лорана.

1.6 Теорема Лорана

Применение рядов Лорана основано главным образом на следующей теореме Лорана:

Теорема Лорана. Пусть функция $f(z)$ аналитическая (однозначная) в кольце

$$A = \{\, z : r < |z - z_0| < R\}.$$

Тогда она представима в этом кольце *разложением в ряд Лорана* по степеням $(z - z_0)$, сходящимся во всём кольце A:

$$f(z) \; = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, (z - z_0)^n.$$

Данное разложение служит основой для исследования поведения функции $f(z)$ в окрестности точки z_0, если эта точка является *особой* (не принадлежит области аналитичности функции).

В зависимости от типа особой точки z_0 различают:

- **Устранимая особая точка** (если часть ряда Лорана с отрицательными степенями отсутствует или может быть сведена к нулю).
- **Полюс** (если в ряде Лорана содержится конечное число членов с отрицательными степенями).
- **Существенная особая точка** (если в ряде Лорана бесконечно много членов с отрицательными степенями).

Разложение на всевозможные степени

1.7 Особые точки: исторические названия и их смысл

В комплексном анализе особые точки (или сингулярности) классифицируются на три основных типа: **устранимая особая точка**, **полюс** и **существенная особая точка**. Исторически эти названия отражают различные способы, которыми “ломается” аналитичность функции в окрестности такой точки.

1.8 Устранимая особая точка

Получила название из-за того, что "сингулярность" (нарушение аналитичности) можно *устранить* (или *исправить*) путём подходящего определения (или переопределения) значения функции в этой точке. Если в ряде Лорана отсутствуют члены с отрицательными степенями, то функцию можно аналитически продолжить на эту точку, и она перестаёт быть особой.

1.9 Полюс

Название возникло в связи с тем, что при приближении к точке модуль функции "возрастает до бесконечности". В вещественном анализе аналогом является вертикальная асимптота, напоминающая "столб" или "полюс". В ряде Лорана при полюсе появляется конечное число членов с отрицательными степенями, и поведение функции похоже на

$$\frac{1}{(z - z_0)^n},$$

что образно воспринимается как "столб", уходящий в бесконечность.

1.10 Существенная особая точка

Слово "существенная" (или "основная", "важная") подчеркивает, что такая точка даёт наиболее "сложное" поведение функции: в ряде Лорана возникает бесконечно много отрицательных степеней, и функцию нельзя свести к полюсу или устранить переопределением. Классический пример — экспонента $e^{\frac{1}{z}}$ в точке $z = 0$, у которой в разложении в ряд Тейлора по $1/z$ присутствуют все степени. Подобная "существенная" сингулярность ведёт к сильным и интересным результатам, например, к теореме Пикара: в окрестности существенной особой точки функция принимает *почти все* возможные комплексные значения.