

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Национальный исследовательский университет
"Санкт-Петербургский Государственный университет"
Кафедра прикладной математики и процессов управления

Доклад по математической физике

Уравнение переноса в сплошной среде
Распространение сигналов и связь с
электрокардиограммой

Выполнил: Шарабарин Михаил
Группа: БД116

22 сентября 2025 г.

Аннотация

В данном докладе рассматривается уравнение переноса как фундаментальное уравнение математической физики, описывающее эволюцию скалярных полей в сплошных средах. Приведён вывод уравнения из закона сохранения, проанализированы его частные случаи: адвекция, диффузия, реакция–диффузия. Особое внимание уделено применению уравнения к моделированию распространения электрического импульса в сердечной ткани. Показано, что форма электрокардиограммы может быть интерпретирована как следствие автоволновой динамики, описываемой уравнением типа ФицХью–Нагумо. Обсуждаются численные методы решения и клинические приложения, включая диагностику блокад проводящей системы сердца.

Содержание

1	Введение	3
2	Общий вид уравнения переноса	3
3	Вывод уравнения из закона сохранения	4
4	Частные случаи уравнения переноса	4
4.1	Уравнение чистой адвекции	4
4.2	Одномерный пример: перенос сигнала в проводящей системе сердца . . .	4
4.3	Адвекция с диффузией	5
4.4	Уравнение реакция–диффузия	5
5	Лагранжево и эйлерово описания	5
6	Анализ поведения решений: число Пекле	6
7	Связь с биологическими системами и ЭКГ	6
7.1	Физиология электрического импульса в сердце	6
7.2	Математическая модель возбуждения	7
7.3	Формирование электрокардиограммы	7
8	Численное моделирование	8
9	Другие медицинские приложения	9
10	Нелинейные эффекты и ударные волны	9
11	Заключение	9

1 Введение

Уравнение переноса представляет собой одно из ключевых уравнений математической физики, описывающих эволюцию распределения физических величин в пространстве и времени. Оно применяется для моделирования процессов распространения массы, энергии, импульса, концентрации веществ и других скалярных характеристик в рамках континуальной механики.

В приближении сплошной среды физические поля рассматриваются как непрерывные функции координат и времени, что позволяет использовать аппарат дифференциальных уравнений в частных производных для анализа динамики систем. Уравнение переноса находит широкое применение в гидродинамике, теории тепломассообмена, метеорологии, биофизике и медицинском моделировании.

Цель данного доклада — продемонстрировать универсальность уравнения переноса, проанализировать его математическую структуру и показать его применимость к описанию электрической активности миокарда, включая интерпретацию формы электрокардиограммы (ЭКГ) как следствия распространения волны возбуждения в сердечной ткани.

2 Общий вид уравнения переноса

Рассмотрим скалярную величину $\phi(\mathbf{x}, t)$, характеризующую состояние среды в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и момент времени t . Уравнение переноса в общем виде записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S(\mathbf{x}, t),$$

где:

$\phi(\mathbf{x}, t)$ — переносимая величина (температура, концентрация, плотность заряда и т.п.),

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — поле скорости среды,

$\nabla \cdot (\mathbf{u}\phi)$ — член, отвечающий за конвективный (адвективный) перенос,

Γ — коэффициент диффузии (может быть скаляром или тензором),

$\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi)$ — диффузионный член, описывающий процессы релаксации и выравнивания,

$S(\mathbf{x}, t)$ — плотность источников или стоков.

Данное уравнение выражает закон сохранения величины ϕ с учётом её переноса потоком и диффузионных эффектов.

3 Вывод уравнения из закона сохранения

Уравнение переноса выводится из интегрального закона сохранения. Пусть V — ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей ∂V . Тогда скорость изменения интеграла от ϕ по объёму равна потоку через границу плюс вклад источников:

$$\frac{d}{dt} \int_V \phi dV = - \int_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_V S dV,$$

где полный поток \vec{J} складывается из конвективной и диффузионной компонент:

$$\vec{J} = \mathbf{u}\phi - \Gamma \nabla \phi.$$

Применяя теорему Гаусса—Остроградского к поверхностному интегралу и переходя к дифференциальной форме, получаем:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S.$$

Таким образом, уравнение переноса является прямым следствием локального закона сохранения и декомпозиции потока на конвективную и диффузионную составляющие.

4 Частные случаи уравнения переноса

4.1 Уравнение чистой адвекции

При отсутствии диффузии и источников ($\Gamma = 0$, $S = 0$) уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0.$$

Если поле скорости \mathbf{u} постоянно, решение имеет вид бегущей волны: $\phi(\mathbf{x}, t) = \phi_0(\mathbf{x} - \mathbf{u}t)$, что соответствует переносу начального профиля без деформации.

4.2 Одномерный пример: перенос сигнала в проводящей системе сердца

Рассмотрим одномерное уравнение чистой адвекции:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,$$

где $u = \text{const}$ — скорость распространения импульса по пучку Гиса. При начальном условии $\phi(x, 0) = \phi_0(x)$, решение имеет вид:

$$\phi(x, t) = \phi_0(x - ut).$$

Это означает, что электрический импульс перемещается вдоль проводящего пути без изменения формы, что соответствует нормальной ЭКГ с узким комплексом QRS.

4.3 Адвекция с диффузией

В случае наличия диффузии при постоянном коэффициенте D :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = D \nabla^2 \phi.$$

Это уравнение используется для моделирования распространения примесей в жидкостях, тепловых возмущений в движущихся средах и переноса лекарственных веществ в кровотоке.

4.4 Уравнение реакция–диффузия

Для автоволновых процессов, характерных для активных сред, применяется уравнение реакция–диффузия:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \nabla^2 \phi + f(\phi),$$

где $f(\phi)$ — нелинейная функция, описывающая кинетику локального взаимодействия. Такие уравнения широко используются в биофизике для описания распространения возбуждения в нервных и мышечных тканях.

5 Лагранжево и эйлерово описания

В континуальной механике различают два подхода к описанию движения среды:

Эйлерово описание: наблюдение за изменением полей в фиксированных точках пространства.

Лагранжево описание: слежение за траекториями отдельных частиц среды.

Переход между ними осуществляется с помощью материальной производной:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi.$$

В лагранжевой форме уравнение переноса принимает вид:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S,$$

что подчёркивает зависимость изменения ϕ вдоль траектории от диффузии и источников. Эта форма особенно удобна при анализе процессов в движущихся средах, таких как кровоток или распространение ионов в аксонах.

6 Анализ поведения решений: число Пекле

Для количественной оценки соотношения между конвективным и диффузионным переносом вводится безразмерный параметр — число Пекле:

$$Pe = \frac{|\mathbf{u}|L}{\Gamma},$$

где L — характерный масштаб задачи.

Таблица 1: Сравнение режимов переноса по значению числа Пекле

Режим	Pe	Доминирующий процесс	Пример
Диффузионный	$Pe \ll 1$	Диффузия	Капиллярный обмен
Переходный	$Pe \sim 1$	Баланс	Мелкие сосуды
Конвективный	$Pe \gg 1$	Адвекция	Артерии, вены

При $Pe \gg 1$ доминирует конвекция, что типично для крупномасштабных течений (например, кровотока в артериях). При $Pe \ll 1$ преобладает диффузия, что характерно для микроциркуляторного русла и обменных процессов в капиллярах.

7 Связь с биологическими системами и ЭКГ

Математическое моделирование электрической активности сердца основано на описании распространения волны деполяризации в кардиомиоцитах. Этот процесс может быть представлен как автоволна в активной среде и описан с помощью уравнения типа реакция–диффузия.

7.1 Физиология электрического импульса в сердце

Электрический импульс инициируется в синусовом узле, распространяется по предсердиям, задерживается в атриовентрикулярном узле, после чего через пучок Гиса и его

ветви достигает желудочков. Последовательная активация различных отделов сердца обеспечивает синхронное сокращение миокарда.

7.2 Математическая модель возбуждения

Пусть $\phi(\mathbf{x}, t)$ — безразмерная переменная, характеризующая степень возбуждения кардиомиоцита. Одной из наиболее известных моделей является упрощённая система ФитцХью–Нагумо:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla \phi) + \phi(1 - \phi)(\phi - a),$$

где D — тензор диффузии, учитывающий анизотропию проводимости волокон миокарда, а $a \in (0, 1)$ — порог активации. Данная модель воспроизводит такие свойства, как порог чувствительности, рефрактерность и способность к распространению импульса.

7.3 Формирование электрокардиограммы

Электрокардиограмма представляет собой временную запись проекции суммарного электрического вектора сердца на различные отведения. Форма и длительность зубцов ЭКГ определяются:

скоростью и направлением распространения волны возбуждения,
анатомической последовательностью активации,
наличием патологических изменений проводимости.

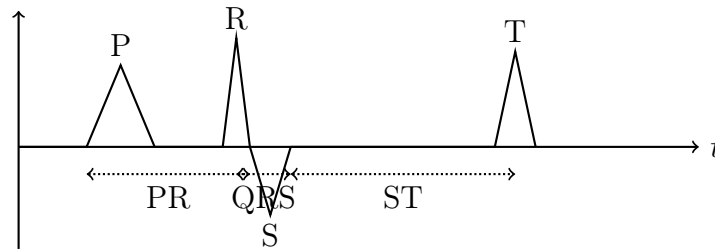


Рис. 1: Структура нормальной ЭКГ: основные зубцы и интервалы.

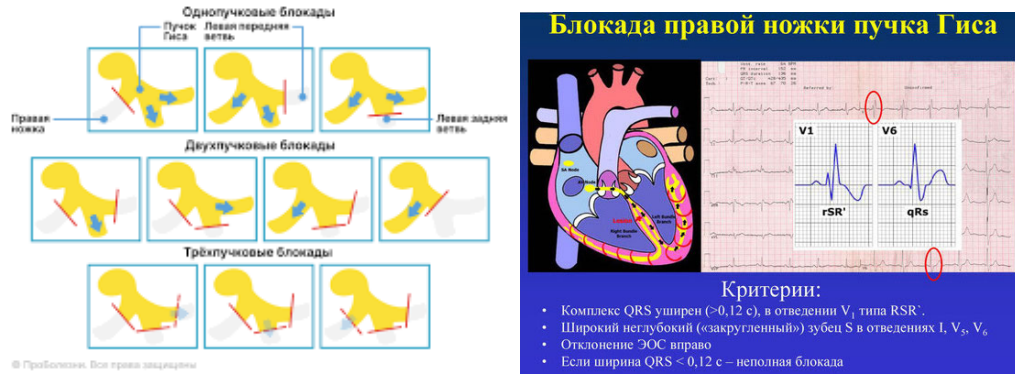


Рис. 2: Слева: виды блокад в сердце (визуализация сосудов). Справа: ЭКГ при блокаде правой ножки пучка Гиса — комплекс QRS расширен.

При блокаде ножки пучка Гиса импульс не распространяется по нормальному проводящему пути, а охватывает соответствующий желудочек через рабочий миокард, что эквивалентно снижению эффективного коэффициента диффузии D в модели. Это приводит к увеличению длительности комплекса QRS, что корректно предсказывается численными решениями уравнения реакция–диффузия.

8 Численное моделирование

Для решения уравнений переноса в реалистичных геометриях применяются численные методы, среди которых:

- метод конечных объёмов (FVM), основанный на балансе потоков в контрольных объёмах;
- явные и неявные разностные схемы для временной дискретизации.

Явные схемы подчиняются условию устойчивости Куранта—Фридрихса—Леви:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|\mathbf{u}|},$$

обеспечивающему корректное разрешение адвективных процессов.

Для моделирования электрической активности сердца используются специализированные программные платформы, такие как OpenCARP, Chaste и CardioMechanics, позволяющие проводить многомасштабное моделирование от клеточного уровня до целого органа.

9 Другие медицинские приложения

Уравнение переноса находит применение в ряде биомедицинских задач:

- моделирование переноса лекарственных препаратов в крови с учётом конвекции и тканевой диффузии;
- анализ распространения опухолевых клеток в рамках моделей метастазирования;
- расчёт тепловых полей при гипертермии и криоабляции.

Эти приложения демонстрируют значимость математической физики в развитии персонализированной медицины и индивидуального прогнозирования течения заболеваний.

10 Нелинейные эффекты и ударные волны

В случаях, когда скорость переноса зависит от самой величины ϕ , уравнение становится нелинейным:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u(\phi)\phi) = 0.$$

Такие уравнения могут порождать разрывные решения — ударные волны, которые наблюдаются в гидродинамике, акустике и сосудистой системе (например, при распространении пульсовой волны).

11 Заключение

Уравнение переноса служит универсальным инструментом для описания динамики распределённых систем в природе и технике. Его математическая структура отражает фундаментальные законы сохранения и применима к широкому классу явлений — от гидродинамических течений до биоэлектрической активности сердца.

Особую значимость уравнение переноса приобретает в медицинском моделировании, где оно позволяет количественно интерпретировать клинические данные, такие как ЭКГ, в терминах физических параметров тканей. Это открывает возможности для создания цифровых двойников сердца, диагностики нарушений проводимости и планирования терапии.

Таким образом, уравнение переноса является не только математическим объектом, но и мощным средством междисциплинарного синтеза физики, математики и медицины.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. — М.: Наука, 1986.
2. Keener J., Sneyd J. *Mathematical Physiology*. — Springer, 2009.
3. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*, 1961.
4. Роуч П. *Вычислительная гидродинамика*. — М.: Мир, 1980.
5. Clayton R.H. et al. Models of cardiac tissue electrophysiology: Progress, challenges and open questions. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 2011.