

Теория функции комплексной переменной

Шарабарин Михаил

26.01.2025

Содержание

1	Вопрос 1. Определения и формы комплексных чисел и действия над ними	2
1.1	Действия с комплексными числами	2
1.2	Особый разговор об аргументе	2
1.3	Тригонометрическая форма комплексного числа	3
1.4	Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической или показательной формах	3
1.5	Возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа	3
2	Комплексные числа	4
2.1	Алгебраическая форма	4
2.2	Свойства сопряжения	4
2.3	Производные	4
2.4	Для любых чисел	4
2.5	Полярные координаты	4
2.6	Формула Эйлера	4
2.7	Формула Муавра	4
3	Множества комплексных чисел	4
3.1	Определения	4
3.2	Внутренность и граница	5

1 Вопрос 1. Определения и формы комплексных чисел и действия над ними

Комплексные числа — это числа, представляемые в виде:

$$z = a + bi,$$

где a — действительная часть, b — мнимая часть, а i ($i = \sqrt{-1}$) — мнимая единица.

Основные представления комплексных чисел:

- Алгебраическая форма: $z = a + bi$,
- Тригонометрическая форма: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,
- Экспоненциальная форма: $z = re^{i\varphi}$,

где $r = |z|$ — модуль числа, $\varphi = \arg z$ — аргумент числа.

1.1 Действия с комплексными числами

- Сложение: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$,
- Умножение: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$,
- Деление:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}.$$

Представления комплексных чисел:

- $\Re(a + bi) = a$
- $\Im(a + bi) = b$
-

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{\bar{z}}_1}{\bar{z}_2}.$$

Комплексное число - это число z вида $a + bi$, где a - вещественная часть, а b - мнимая. Символ $i^2 = -1$ называется мнимой единицей.

Сопряженное число - \bar{z} называется сопряженным числом и записывается как $a - bi$. Свойства сопряженных чисел:

$$\overline{z * \bar{z}} = \bar{z} * z, \quad \overline{\bar{z}} = z, \quad \frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{\bar{z}}_1}{\bar{z}_2}.$$

В полярных координатах точка m имеет координаты r, φ , (мы рассматриваем комплексные числа как вектора + их нельзя сравнить). Иногда говорят что вектор и комплексное число это тоже самое. Здесь расстояние от центра координат до этой точки будет равно модулю вектора

$$r = \overline{OM} = |z| = \sqrt{z * \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

в это время φ является углом между вектором \overline{OM} и вектором \overline{OX} (направлением оси X) и обозначается как $\varphi = \arg z$

1.2 Особый разговор об аргументе

Аргумент - бесконечен т.к. все его значения отдаляются от истинных (в направлении от оси \overline{OX} в противоположном направлении до 2π).

Аргумент определяется в виде формулы

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad (1)$$

С точностью до слагаемого $\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.
Из всех главных значений особо выделяются $-\pi < \arg z < \pi$. При этом полезны формулы:

$$\begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{если } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & \text{если } x < 0, y < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Условия сопряжения двух чисел z и \bar{z} :

$$\arg z = -\arg \bar{z}, \quad |z| = |\bar{z}|$$

Некоторые свойства модуля:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||, \quad |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

1.3 Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = i(\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi)$$

Формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi$$

Показательная форма числа:

$$z = r e^{i\varphi}$$

1.4 Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической или показательной формах

Пусть даны два комплексных числа:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1(\cos \varphi_1 + \mathbf{i} \sin \varphi_1), \\ z_2 &= r_2(\cos \varphi_2 + \mathbf{i} \sin \varphi_2). \end{aligned}$$

Выведем формулу произведения:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \mathbf{i}(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{i} \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Деление:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + \mathbf{i} \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + \mathbf{i} \sin \varphi_2)} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + \mathbf{i} \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - \mathbf{i} \sin \varphi_2)}{r_2(\cos \varphi_2 + \mathbf{i} \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - \mathbf{i} \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \mathbf{i}(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \mathbf{i}(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \end{aligned}$$

1.5 Возведение в степень и извлечение корня из комплексного числа

$$z^n = (x + \mathbf{i}y)^n = (r(\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi))^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + \mathbf{i} \sin n\varphi).$$

Формула Муавра:

$$\cos n\varphi + \mathbf{i} \sin n\varphi$$

Нахождение корня

$$w_k = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + \mathbf{i} \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + \mathbf{i} \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right).$$

2 Комплексные числа

2.1 Алгебраическая форма

Комплексное число представляется в виде:

$$z = x + iy$$

Где $\operatorname{Re}(z) = x$, $\operatorname{Im}(z) = y$.

2.2 Свойства сопряжения

$$\begin{aligned}\bar{z} &= x - iy \\ \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\end{aligned}$$

2.3 Производные

$$\frac{d}{dz}(x - iy)$$

2.4 Для любых чисел

1. Коммутативность: $a + b = b + a$
2. Ассоциативность: $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. Дистрибутивность: $a(b + c) = ab + ac$

2.5 Полярные координаты

Комплексное число можно записать в полярных координатах (r, φ) :

$$\begin{aligned}z &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arg z\end{aligned}$$

2.6 Формула Эйлера

$$\begin{aligned}e^{i\varphi} &= \cos \varphi + i \sin \varphi \\ z &= r e^{i\varphi}\end{aligned}$$

2.7 Формула Муавра

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

3 Множества комплексных чисел

3.1 Определения

- Диск: $|z - z_0| < R$
- Круг: $|z - z_0| \leq R$

3.2 Внутренность и граница

Множество D :

- Внутренние точки: все точки, принадлежащие D и содержащие окрестность, полностью лежащую в D .
- Граница: множество всех граничных точек.
- Открытое множество: если все его точки являются внутренними.
- Связное множество: если любые две точки можно соединить ломаной, лежащей в D .