Лекция 2.

Локальный минимум в $C^1[a, b]$.

Fominyh A. V. 2023

Определение пространства $C^k[a, b]$

Пространством $C^k[a, b]$ мы будем называть множество функций $x(t)$, $t \in [a, b]$ заданных на $[a, b]$, непрерывных и имеющих непрерывные производные до k-го порядка включительно. По определению считаем, что $C^0[a, b] = C[a, b]$

Метрика в пространстве $C^k[a, b]$

Норма в $C^k[a, b]$

$$\|x\|_k = \sum_{j=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |x^{(j)}(t)|.$$

Метрика в $C^k[a, b]$

$$\rho_k(x, y) = \|x - y\|_k = \sum_{j=0}^{k} \max_{t\in[a,b]} |x^{(j)}(t) - y^{(j)}(t)|.$$

Окрестность в пространстве $C^k[a, b]$

Открытая окрестность k-го порядка

Открытой ε-окрестностью k-го порядка функции $x_0(t) \in C^k[a, b]$ будем называть множество функций

$$M_\varepsilon^k(x_0) = \{x(t) \in C^k[a, b] \mid \rho_k(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Несложно убедиться в том, что

$$M_\varepsilon^k(x_0) \subset M_\varepsilon^{k-1}(x_0) \subset \ldots \subset M_\varepsilon^1(x_0) \subset M_\varepsilon^0(x_0).$$

Близость кривых

Будем говорить, что две функции $x_1(t)$ и $x_2(t) \in C^k[a, b]$ являются ε–близкими в смысле 0-го порядка, если $\rho_0(x_1, x_2) < \varepsilon$.

Будем говорить, что две функции $x_1(t)$ и $x_2(t) \in C^k[a, b]$ являются ε–близкими в смысле 1-го порядка, если $\rho_1(x_1, x_2) < \varepsilon$.

Глобальный минимум

Обычно в данном курсе будут рассматриваться функционалы на пространстве $C^k[a,b]$.

Будем говорить, что функционал $J(x)$ достигает глобального (абсолютного) минимума на множестве $G \subset C^k[a,b]$ в точке $x_0(t) \in G$, если выполняется неравенство

$$J(x) \geqslant J(x_0) \quad \forall x \in G \subset C^k[a,b].$$

Сильный локальный минимум

Множество $M_\varepsilon^0(x_0)$ называется сильной открытой ε-окрестностью точки $x_0 \in C^k[a, b]$.

Будем говорить, что функционал $J(x)$ достигает сильного локального (относительного) минимума на множестве $G \subset C^k[a, b]$
в точке $x_0(t) \in G$, если существует такое $\varepsilon > 0$,
что выполняется неравенство

$$J(x) \geqslant J(x_0) \quad \forall x \in M_\varepsilon^0(x_0) \cap G.$$

Слабый локальный минимум

Множество $M^1_\varepsilon(x_0)$ называется слабой открытой ε-окрестностью точки $x_0 \in C^k[a, b]$.

Будем говорить, что функционал $J(x)$ достигает слабого локального (относительного) минимума на множестве $G \subset C^k[a, b]$
в точке $x_0(t) \in G$, если существует такое $\varepsilon > 0$,
что выполняется неравенство

$$J(x) \geqslant J(x_0) \quad \forall x \in M^1_\varepsilon(x_0) \cap G.$$

О связи сильного и слабого локальных минимумов

По определению сильный локальный минимум является и слабым.

Говоря неформально, если точка $x_0 \in G$ “выдержала конкуренцию” среди всех тех кривых, которые близки по значениям $\left(J(x) \geqslant J(x_0) \quad \forall x \in M^0_\varepsilon(x_0) \cap G\right)$, то она “выдержала конкуренцию” в частности среди тех из них, которые близки и по значениям производных $\left(J(x) \geqslant J(x_0) \quad \forall x \in M^1_\varepsilon(x_0) \cap G\right)$.

Производная по направлению

Пусть на нормированном пространстве X задан функционал $J(x)$. Пусть x_0 и $h \in X$. Будем говорить, что $J(x)$ имеет в точке x_0 производную по направлению h, если существует предел

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{J(x_0 + \alpha h) - J(x_0)}{\alpha} =: J'(x_0, h). \tag{1}$$

Первая вариация функционала

Предположим, что в точке x_0 существуют производные функционала $J(x)$ на X по любому направлению $h \in X$. Тогда функционал

$$\delta J(x_0, h) := J'(x_0, h) \quad \forall\, h \in X \tag{2}$$

называется **(первой) вариацией функционала** $J(x)$ в точке x_0.

Замечание 1

Первая вариация $\delta J(x_0, h)$ как функция направления h является **положительно однородной**, но не обязательно **аддитивной**.

Слабая дифференцируемость (по Гато)

Дифференциал Гато

Если функционал $J(x)$ на X имеет первую вариацию в точке $x_0 \in X$, причем $\delta J(x_0, h)$ является **линейным непрерывным функционалом** по h, то будем называть ее **дифференциалом Гато**.

В этом случае говорят, что функционал $J(x)$ является **слабо дифференцируемым (дифференцируемым по Гато)** в точке x_0.

Замечание 2

Из слабой дифференцируемости функционала не следует его непрерывность.

Сильная дифференцируемость (по Фреше)

Дифференциал Фреше

Если приращение функционала $J(x)$ на X в точке x_0 можно представить в виде

$$J(x_0 + h) - J(x_0) = dJ(x_0, h) + r(x_0, h) \quad \forall\, h \in X,$$

где $dJ(x_0, h)$ — **линейный непрерывный** по h функционал,

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{r(x_0, h)}{\|h\|} = 0,$$

то будем называть (вариацию) $dJ(x_0, h)$ **дифференциалом Фреше**. В этом случае говорят, что функционал $J(x)$ является **сильно дифференцируемым (дифференцируемым по Фреше)** в точке x_0.

Связь дифференцируемости по Гато и Фреше

Теорема

Если функционал $J(x)$ на X дифференцируем по Фреше в точке $x_0 \in X$, то он непрерывен в точке x_0 и дифференцируем по Гато в точке x_0 (и производные Гато и Фреше в этой точке совпадают).

Литература.

Иглин С. П. Математические расчеты на базе MatLab. 2005. СПб.: БХВ-Петербург. 620 с.

Алексеев В. М., Тихомиров В. М. Фомин С. В. Оптимальное управление. 1979. Москва: Наука. 432 с.