Complessità di algoritmi e problemi

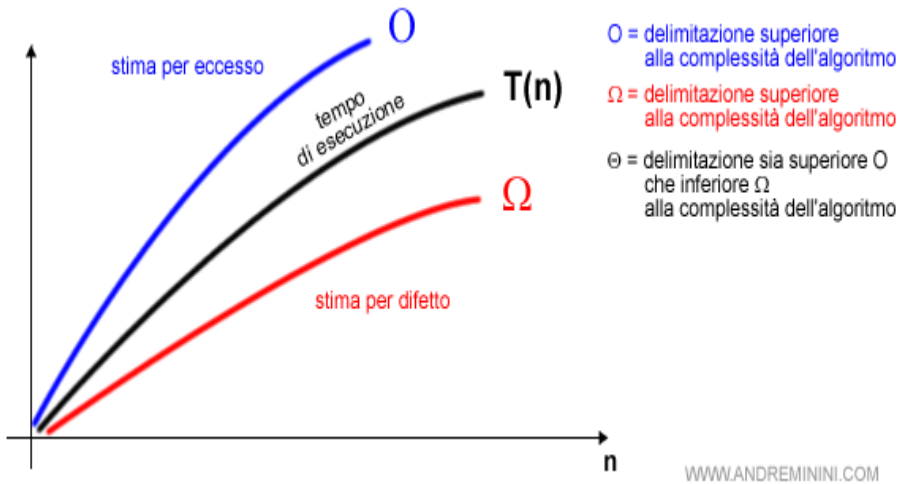
Francesco Pugliese, PhD

neural1977@gmail.com

Complessità di algoritmi e problemi

- ✓ Con **complessità di un algoritmo** o **efficienza di un algoritmo** ci si riferisce dunque alle risorse di calcolo richieste. I problemi sono classificati in **differenti classi di complessità**, in base all'efficienza del migliore algoritmo noto in grado di risolvere quello specifico problema.

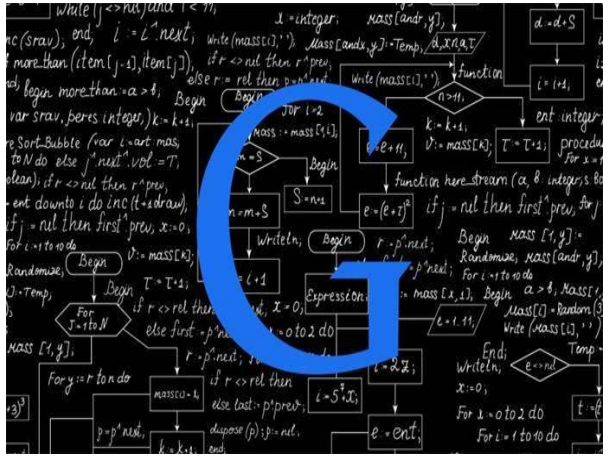
- ✓ Una distinzione informale, ma di grande rilievo, è quella posta tra i cosiddetti problemi facili, di cui si conoscono **algoritmi di risoluzione efficienti**, e difficili, di cui gli unici algoritmi noti non sono efficienti.



Complessità di algoritmi e problemi

- ✓ Ad esempio la maggior parte della **crittografia moderna** si fonda sull'esistenza di **problemi ritenuti difficili**.

- ✓ Ha enorme rilevanza lo studio di tali problemi, poiché, qualora si dimostrasse l'esistenza di un **algoritmo efficiente** per un problema ritenuto difficile, i sistemi crittografici basati su di esso non sarebbero più sicuri.



- ✓ L'esecuzione di un **programma** implica un **costo economico**, dovuto all'utilizzo delle **risorse** (memoria, traffico sulla rete, spazio su disco, ecc.) e di **tempo** di elaborazione.

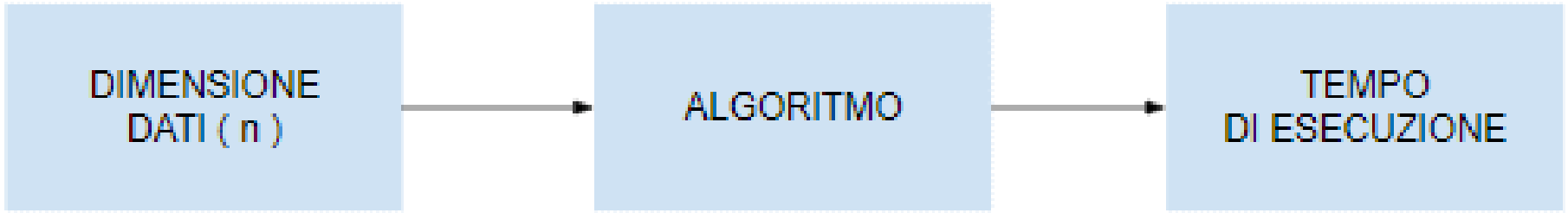
Complessità di algoritmi e problemi

- ✓ **Complessità spaziale:** riguarda l'utilizzo delle risorse da parte di un programma.
- ✓ **Complessità temporale:** riguarda il tempo di esecuzione di un programma.
- ✓ Nello sviluppo di un algoritmo è particolarmente importante la **complessità temporale**. La **complessità spaziale** è meno importante, in quanto spesso compensata dai **progressi tecnologici** sui componenti hardware del computer (es. hard disk e memorie ram più capienti).

Complessità Temporale

- La **complessità temporale** cresce al crescere della **dimensione n dei dati in input**. Per dimensione dell'input intendiamo la quantità dei dati in input di un algoritmo.

- Il **tempo di esecuzione** di un algoritmo è strettamente legato al funzionamento di un algoritmo. Per **raggiungere un obiettivo** esistono algoritmi più efficienti di altri.



Complessità Temporale

- ✓ Esistono anche altri fattori che possono influenzare il tempo di esecuzione ma in un'**analisi dell'algoritmo** non vanno considerati.

- ✓ **Esempio**. Nel computo della **complessità** di un algoritmo non vanno considerati gli aspetti hardware, **la velocità del processore (cpu)**, né le tecniche di compilazione, il compilatore o il linguaggi di programmazione utilizzato.

- ✓ In informatica per calcolare la complessità computazionale di un algoritmo si utilizza **l'analisi asintotica.** Tuttavia, l'analisi asintotica è uno **strumento della matematica** che si applica alle funzioni, mentre il tempo di esecuzione non lo è.

Complessità Temporale

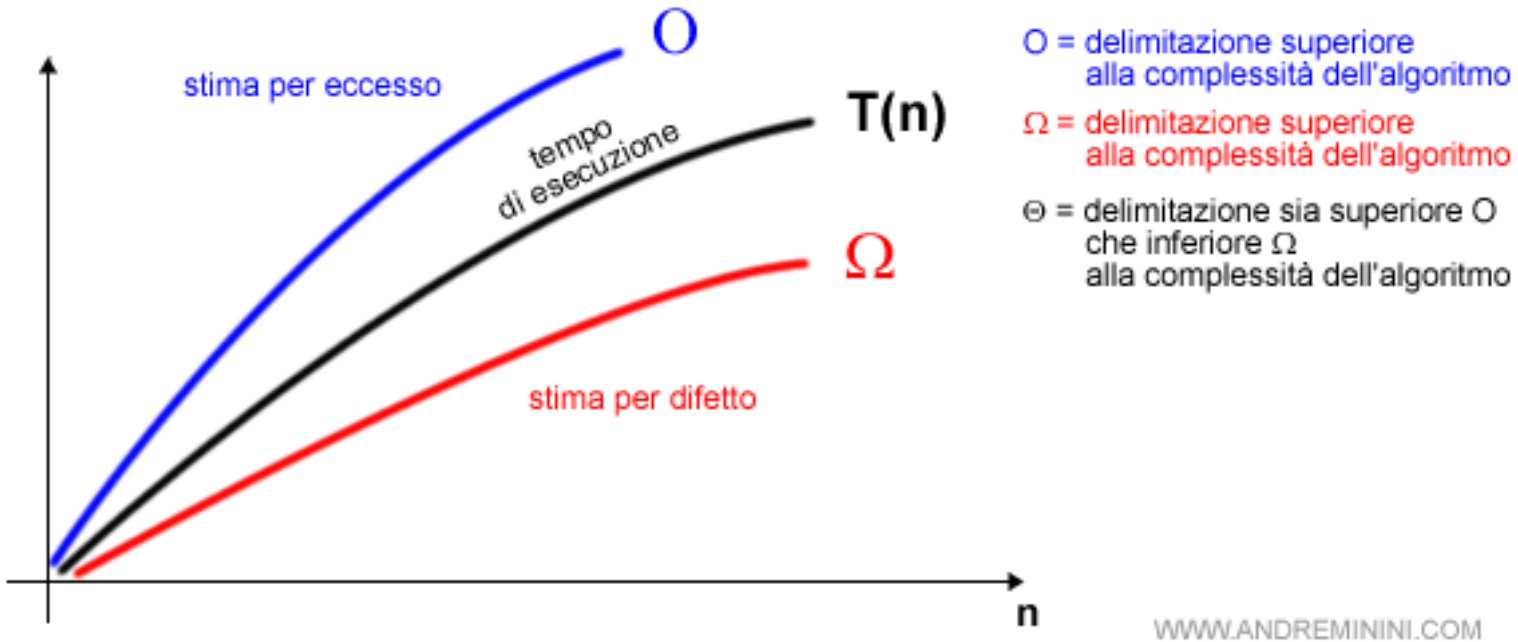
- Quindi, per usare l'analisi asintotica devo **trasformare il tempo di esecuzione dell'algoritmo in una funzione T(n)** in funzione della dimensione n dei dati input. In genere la funzione T(n) misura il numero di comandi eseguiti dall'algoritmo.

- Data **un'istanza di dimensione n**, nel caso peggiore l'algoritmo ha una complessità temporale **O(f(n)) se T(n)=O(f(n)).**

- Dove n è il **numero delle righe eseguite** (dimensione n dei dati) mentre **f(n)** è un limite superiore del tempo di esecuzione dell'algoritmo nell'ipotesi peggiore.

Complessità Temporale

- Oltre a **O** grande si utilizzano anche le altre notazioni del **calcolo asintotico**, ossia omega **(Ω)** e theta **(θ)**. Qui ci limitiamo ad accennare la loro esistenza per non appesantire la spiegazione. La differenza tra O, Ω e θ è la delimitazione superiore, inferiore o media della funzione T(n). Per approfondire la differenza rimando alla lettura del **calcolo asintotico**.



Complessità Temporale

- ✓ In ogni caso, per valutare la **complessità di un algoritmo** si utilizza sempre l'ipotesi del **caso peggiore**.

- ✓ **Perché si utilizza il caso peggiore?** Facciamo un esempio pratico, un algoritmo cerca sequenzialmente un **dato X** in un file composto da **1000 record**, partendo dal primo all'ultimo.

Complessità Temporale

- ✓ Possono verificarsi tre casi:
  - **Caso migliore**. Il **dato X** si trova al primo record (1 iterazione).
  - **Caso intermedio**. Il **dato X** si trova alla metà del file (500 iterazioni).
  - **Caso peggiore**. Il **dato X** si trova alla fine del file (1000 iterazioni). Per arrivarci l'algoritmo deve leggere tutto il file.
- ✓ Nell'**analisi di un algoritmo** si utilizza il caso peggiore, perché è quello che ne misura meglio l'efficienza dal punto di vista tecnico.

Complessità Temporale

- ✓ Viceversa, il caso migliore non permette di distinguere un algoritmo inefficiente da uno efficiente.

Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- ✓ A volte il caso medio è utile se l'algoritmo deve essere eseguito **moltissime volte** perché il caso peggiore e quello migliore si compensano tra loro nel corso del tempo. E' comunque preferibile analizzare sempre anche il caso peggiore, perlomeno per evitare il rischio di sviluppare un **"algoritmo eterno"**.

```
1   output=false
2   for (i=0 to M.length-2)
3       for (j=i+1 to M.length-1)
4           if (M[i]==M[j])
5               output=true
6   return output
```

	costo	num. esecuzione
	c	
	c	
	c	
	c	
	c	
	c	

Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- ✓ Per semplicità usiamo lo stesso **costo c** per ogni istruzione. In realtà, il **costo computazionale** varia a seconda se si tratta di un'assegnazione, di un confronto, ecc.
- ✓ Inoltre, per semplicità sto utilizzando uno **pseudocodice**. Un algoritmo scritto in pseudocodice può comunque essere implementato in un **programma** utilizzando qualsiasi linguaggio di programmazione.
- ✓ L'algoritmo di sopra prende in input un **vettore M** composto da **5 elementi (length=5)**.
- ✓ La prima **linea (1)** e **l'ultima (2)** sono eseguite una sola volta durante l'esecuzione del **programma (n=1)**.

Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

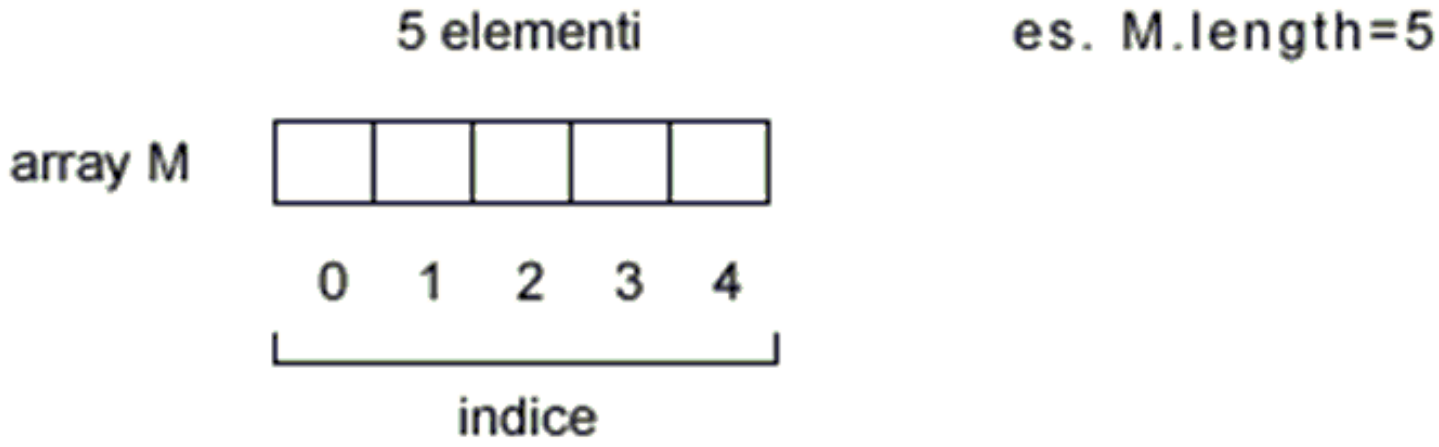
- ✓ Viceversa, il caso migliore non permette di distinguere un algoritmo inefficiente da uno efficiente.

```
1   output=false
2   for (i=0 to M.length-2)
3       for (j=i+1 to M.length-1)
4           if (M[i]==M[j])
5               output=true
6   return output
```

	costo	num. esecuzione
1	c	1
2	c	
3	c	
4	c	
5	c	
6	c	1

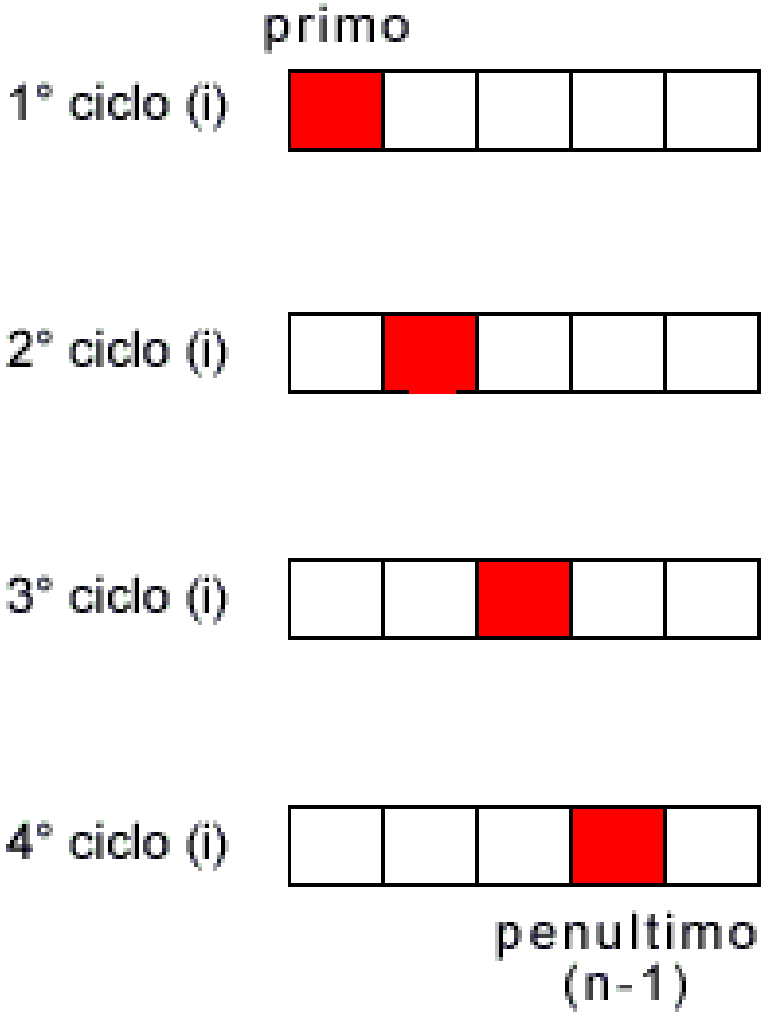
Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- ✓ Il calcolo si complica un po' quando devo analizzare i cicli.
- ✓ **Il ciclo esterno:** la seconda linea del codice è un'iterazione **for** che va dal primo elemento del vettore (i=0) al penultimo (i=length-2) ossia 5-2=3 (incluso).
- ✓ Negli **array** il primo elemento dell'array ha sempre l'indice uguale a 0. Quindi l'ultimo elemento del vettore **M** non è **M[5]** ma M**[4]**. E' opportuno non confondersi.



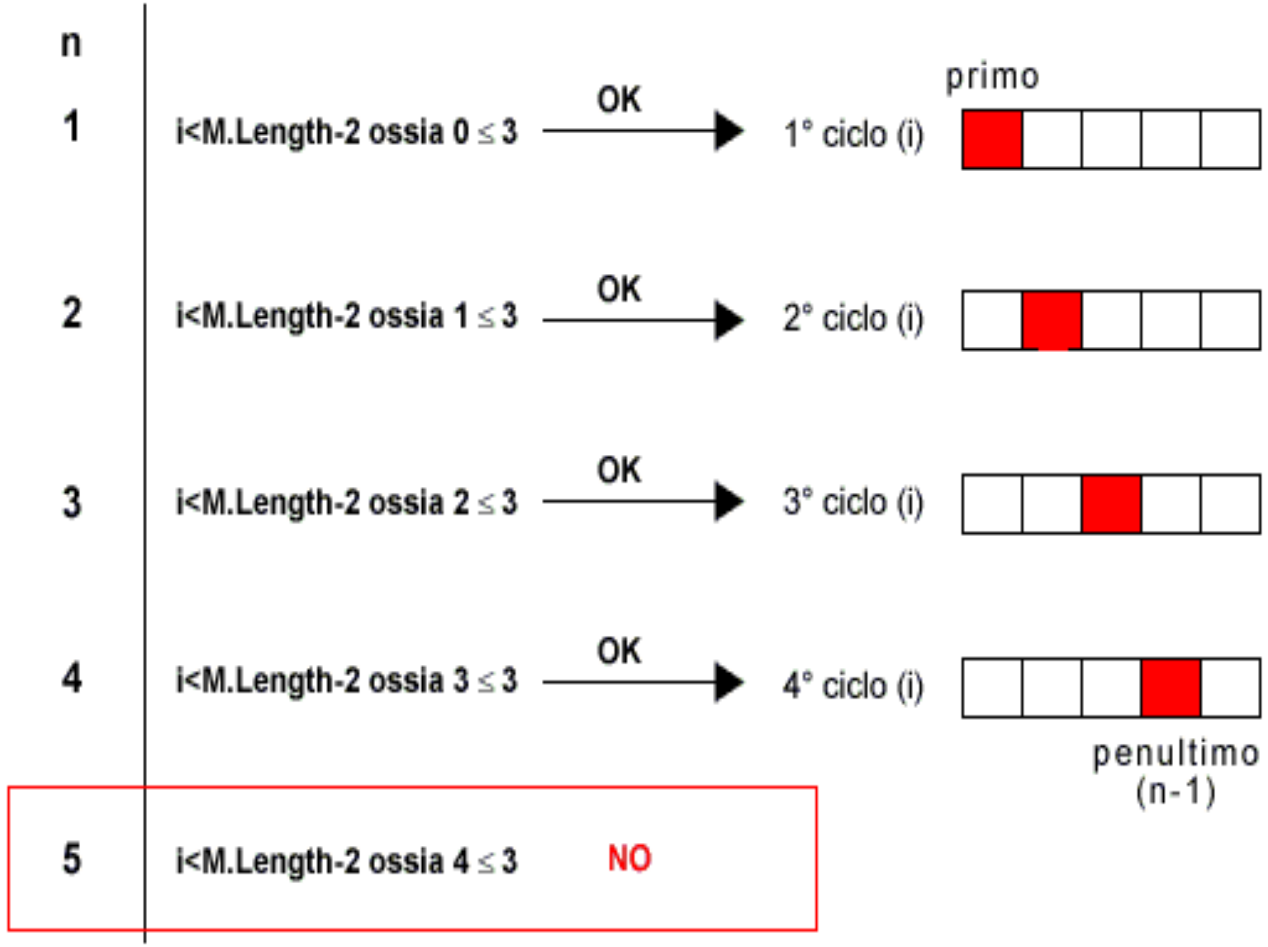
Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- ✓ Quindi, **il ciclo compie n-1 iterazioni** dove n=5.
- ✓ Tuttavia, per calcolare la complessità devo considerare anche **il test di chiusura** del ciclo.
- ✓ La riga di codice viene eseguita anche quando la condizione (i≤M.length) non viene soddisfatta e il programma esce dall'iterazione.



Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- ✓ Quindi, **il ciclo compie n-1 iterazioni** dove n=5.
- ✓ Pertanto, la seconda linea del codice viene eseguita (n-1)+1 volte ossia **n volte**.
- ✓ A questo punto scrivo n nella colonna vicino alla riga di codice.



Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

```
1   output=false
2   for (i=0 to M.length-2)
3       for (j=i+1 to M.length-1)
4           if (M[i]==M[j])
5               output=true
6   return output
```

	costo	num. esecuzione
1	c	1
2	c	n
3	c	
4	c	
5	c	
6	c	1

Bibliografia

https://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_della_complessit%C3%A0_computazionale

https://www.andreaminini.com/informatica/algoritmo/complessita-algoritmo