Complessità di algoritmi e problemi

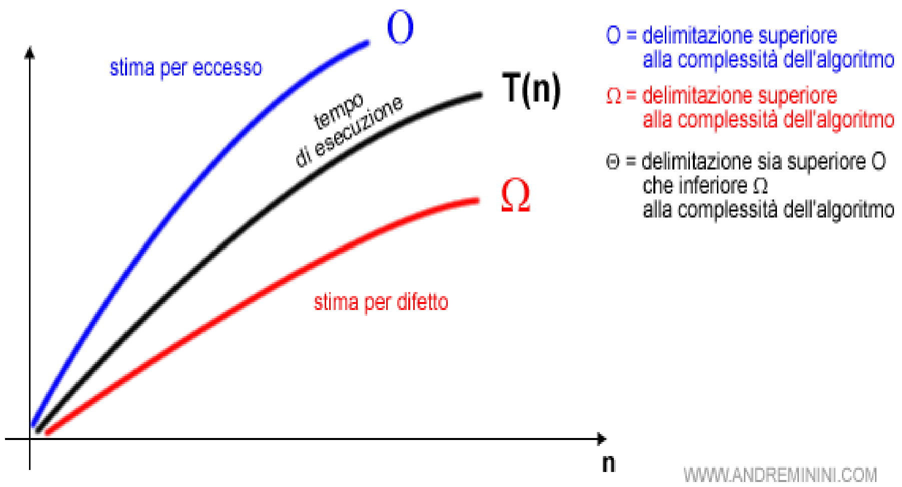
Francesco Pugliese, PhD

[*neural1977@gmail.com*](mailto:neural1977@gmail.com)

Complessità di algoritmi e problemi

- Con **complessità di un algoritmo** o **efficienza di un algoritmo** ci si riferisce dunque alle risorse di calcolo richieste. I problemi sono classificati in **differenti classi di complessità**, in base all'efficienza del migliore algoritmo noto in grado di risolvere quello specifico problema.

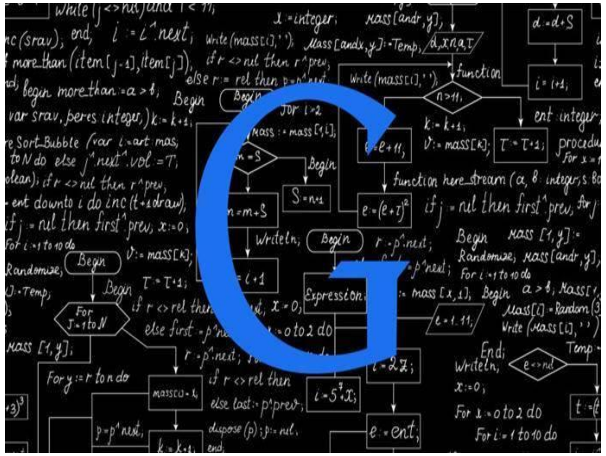
- Una distinzione informale, ma di grande rilievo, è quella posta tra i cosiddetti problemi facili, di cui si conoscono **algoritmi di risoluzione efficienti**, e difficili, di cui gli unici algoritmi noti non sono efficienti.



Complessità di algoritmi e problemi

- Ad esempio la maggior parte della **crittografia moderna** si fonda sull'esistenza di **problemi ritenuti difficili**.

- Ha enorme rilevanza lo studio di tali problemi, poiché, qualora si dimostrasse l'esistenza di un **algoritmo efficiente** per un problema ritenuto difficile, i sistemi crittografici basati su di esso non sarebbero più sicuri.



- L'esecuzione di un **programma** implica un **costo economico**, dovuto all'utilizzo delle **risorse** (memoria, traffico sulla rete, spazio su disco, ecc.) e di **tempo** di elaborazione.

Complessità di algoritmi e problemi

- **Complessità spaziale:** riguarda l'utilizzo delle risorse da parte di un programma.

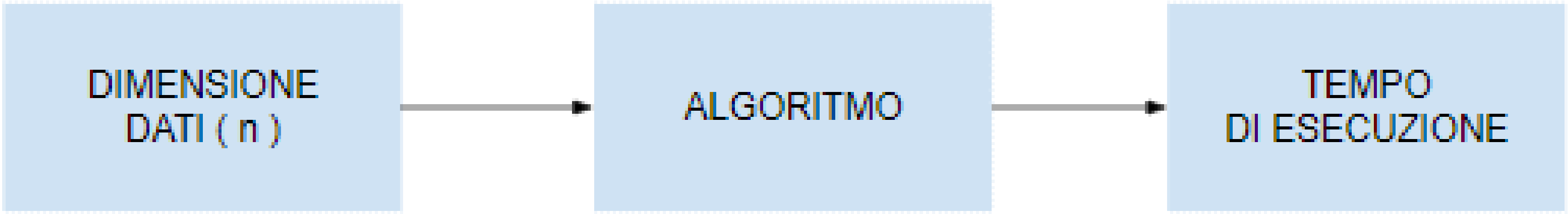
- **Complessità temporale:** riguarda il tempo di esecuzione di un programma.

- Nello sviluppo di un algoritmo è particolarmente importante la **complessità temporale**. La **complessità spaziale** è meno importante, in quanto spesso compensata dai **progressi tecnologici** sui componenti hardware del computer (es. hard disk e memorie ram più capienti).

Complessità Temporale

- La **complessità temporale** cresce al crescere della **dimensione n dei dati in input**. Per dimensione dell'input intendiamo la quantità dei dati in input di un algoritmo.

- Il **tempo di esecuzione** di un algoritmo è strettamente legato al funzionamento di un algoritmo. Per **raggiungere un obiettivo** esistono algoritmi più efficienti di altri.



Complessità Temporale

- ✓ Esistono anche altri fattori che possono influenzare il tempo di esecuzione ma in un'**analisi dell'algoritmo** non vanno considerati.

- ✓ **Esempio**. Nel computo della **complessità** di un algoritmo non vanno considerati gli aspetti hardware, **la velocità del processore (cpu)**, né le tecniche di compilazione, il compilatore o il linguaggi di programmazione utilizzato.

- ✓ In informatica per calcolare la complessità computazionale di un algoritmo si utilizza **l'analisi asintotica.** Tuttavia, l'analisi asintotica è uno **strumento della matematica** che si applica alle funzioni, mentre il tempo di esecuzione non lo è.

Complessità Temporale

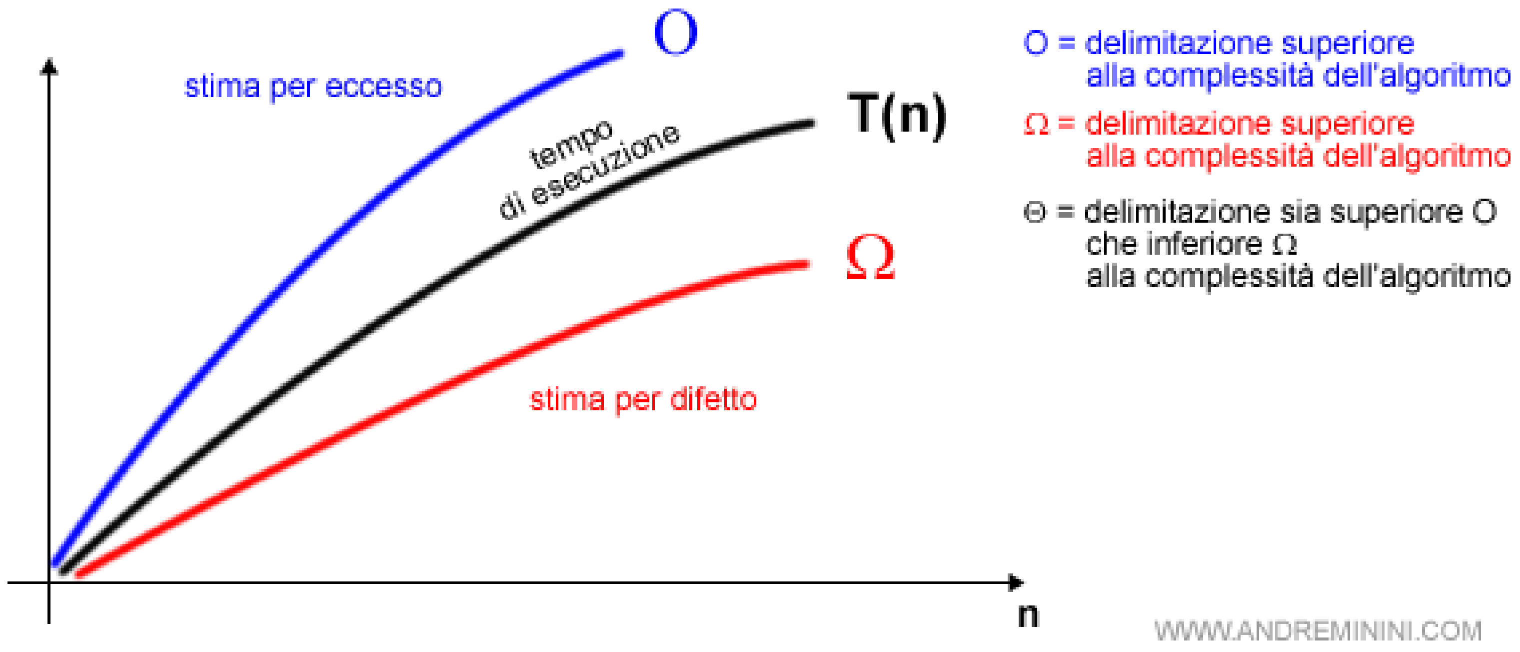
- Quindi, per usare l'analisi asintotica devo **trasformare il tempo di esecuzione dell'algoritmo in una funzione T(n)** in funzione della dimensione n dei dati input. In genere la funzione T(n) misura il numero di comandi eseguiti dall'algoritmo.

- Data **un'istanza di dimensione n**, nel caso peggiore l'algoritmo ha una complessità temporale **O(f(n)) se T(n)=O(f(n)).**

- Dove n è il **numero delle righe eseguite** (dimensione n dei dati) mentre **f(n)** è un limite superiore del tempo di esecuzione dell'algoritmo nell'ipotesi peggiore.

Complessità Temporale

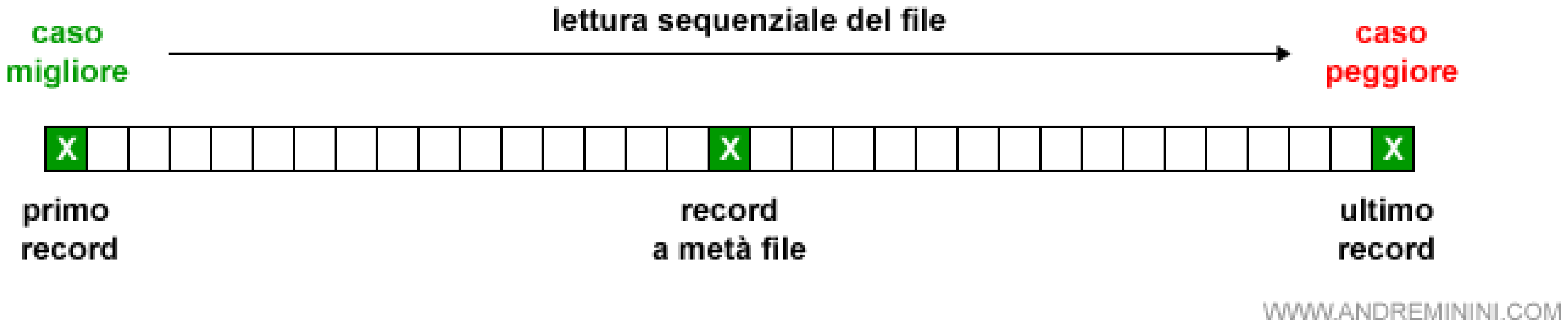
✓ Oltre a **O** grande si utilizzano anche le altre notazioni del **calcolo asintotico**, ossia omega **(Ω)** e theta **(θ)**. Qui ci limitiamo ad accennare la loro esistenza per non appesantire la spiegazione. La differenza tra O, Ω e θ è la delimitazione superiore, inferiore o media della funzione T(n). Per approfondire la differenza rimando alla lettura del **calcolo asintotico**.



Complessità Temporale

- In ogni caso, per valutare la **complessità di un algoritmo** si utilizza sempre l'ipotesi del **caso peggiore**.

- **Perché si utilizza il caso peggiore?** Facciamo un esempio pratico, un algoritmo cerca sequenzialmente un **dato X** in un file composto da **1000 record**, partendo dal primo all'ultimo.

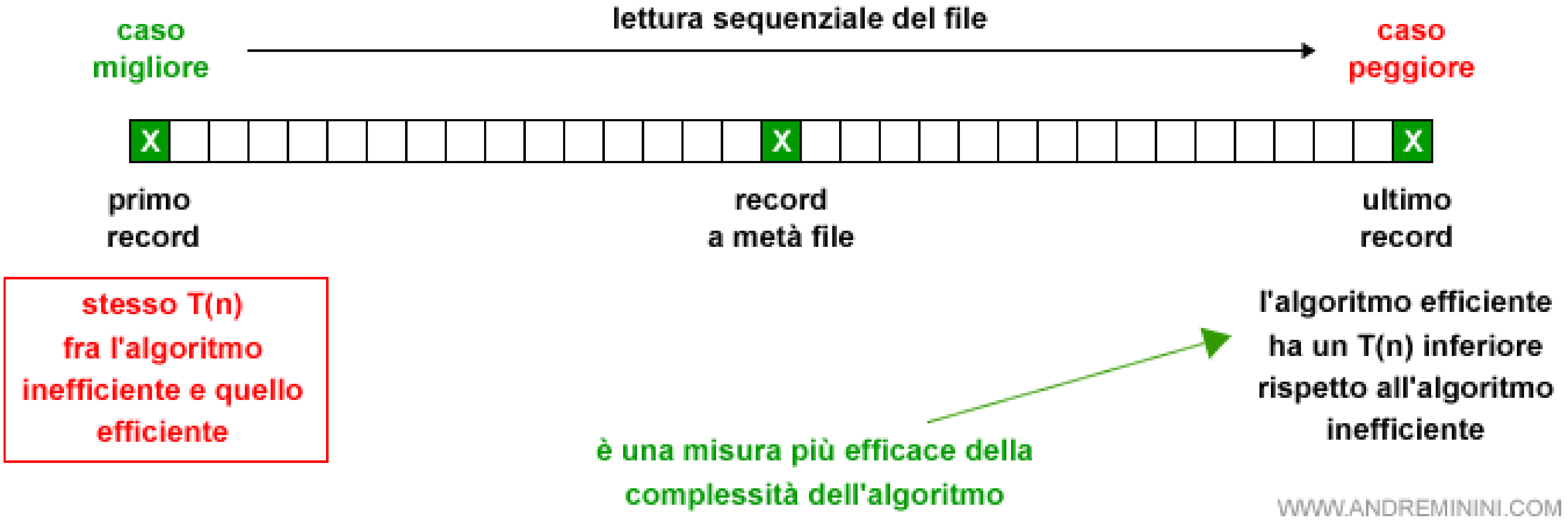


Complessità Temporale

- Possono verificarsi tre casi:
  - **Caso migliore**. Il **dato X** si trova al primo record (1 iterazione).
  - **Caso intermedio**. Il **dato X** si trova alla metà del file (500 iterazioni).
  - **Caso peggiore**. Il **dato X** si trova alla fine del file (1000 iterazioni). Per arrivarci l'algoritmo deve leggere tutto il file.
- Nell'**analisi di un algoritmo** si utilizza il caso peggiore, perché è quello che ne misura meglio l'efficienza dal punto di vista tecnico.

Complessità Temporale

✓ Viceversa, il caso migliore non permette di distinguere un algoritmo inefficiente da uno efficiente.



Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- ✓ A volte il caso medio è utile se l'algoritmo deve essere eseguito **moltissime volte** perché il caso peggiore e quello migliore si compensano tra loro nel corso del tempo. E' comunque preferibile analizzare sempre anche il caso peggiore, perlomeno per evitare il rischio di sviluppare un **"algoritmo eterno"**.

```
output=false
for (i=0 to M.length-2)
    for (j=i+1 to M.length-1)
        if (M[i]==M[j])
            output=true
return output
```

costo	num. esecuzione
c	
c	
c	
c	
c	
c	

Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- ✓ Per semplicità usiamo lo stesso **costo c** per ogni istruzione. In realtà, il **costo computazionale** varia a seconda se si tratta di un'assegnazione, di un confronto, ecc.
- ✓ Inoltre, per semplicità sto utilizzando uno **pseudocodice**. Un algoritmo scritto in pseudocodice può comunque essere implementato in un **programma** utilizzando qualsiasi linguaggio di programmazione.
- ✓ L'algoritmo di sopra prende in input un **vettore M** composto da **5 elementi (length=5)**.
- ✓ La prima **linea (1)** e **l'ultima (2)** sono eseguite una sola volta durante l'esecuzione del **programma (n=1)**.

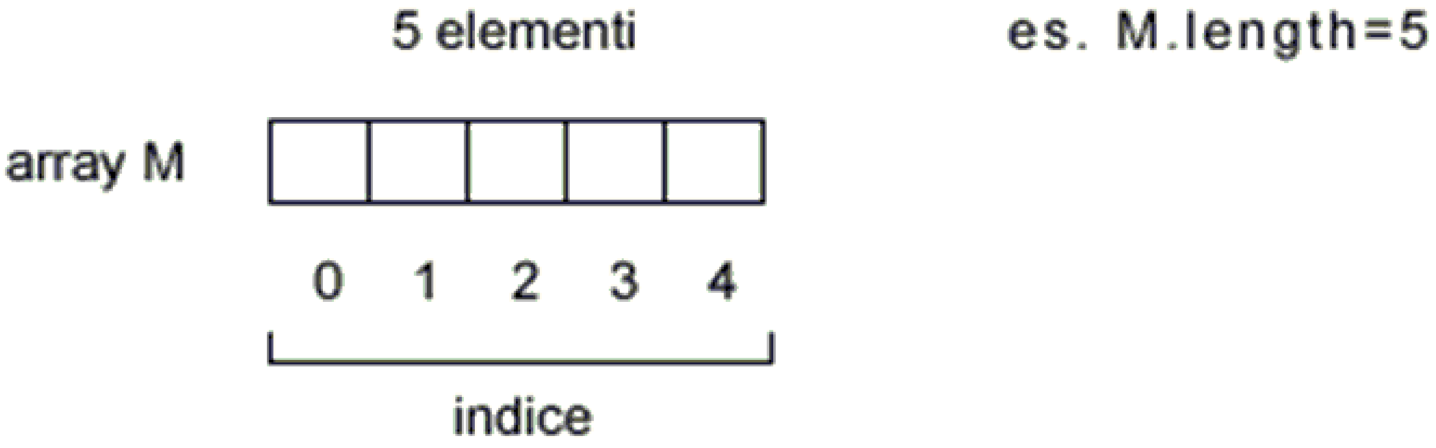
Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- ✓ Viceversa, il caso migliore non permette di distinguere un algoritmo inefficiente da uno efficiente.

	costo	num. esecuzione
`output=false`	c	1
`for (i=0 to M.length-2)`	c	
`    for (j=i+1 to M.length-1)`	c	
`        if (M[i]==M[j])`	c	
`            output=true`	c	
`return output`	c	1

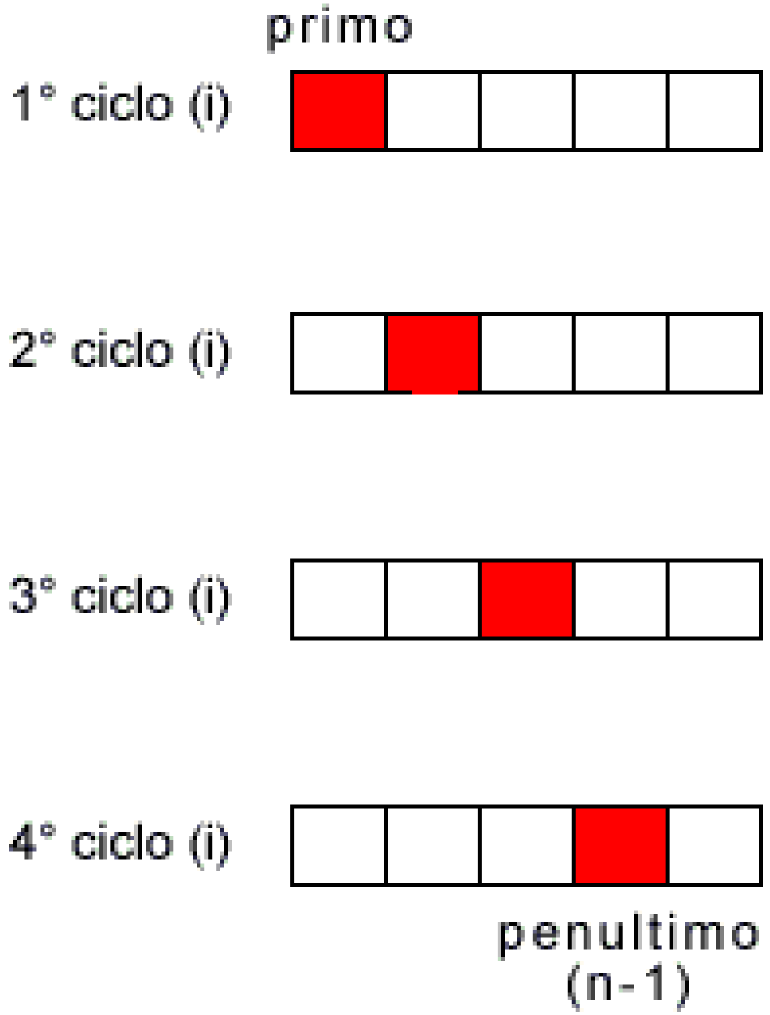
Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- Il calcolo si complica un po' quando devo analizzare i cicli.
- **Il ciclo esterno:** la seconda linea del codice è un'iterazione **for** che va dal primo elemento del vettore (i=0) al penultimo (i=length-2) ossia 5-2=3 (incluso).
- Negli **array** il primo elemento dell'array ha sempre l'indice uguale a 0. Quindi l'ultimo elemento del vettore **M** non è **M[5]** ma M**[4]**. E' opportuno non confondersi.



Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- Quindi, **il ciclo compie n-1 iterazioni** dove n=5.
- Tuttavia, per calcolare la complessità devo considerare anche **il test di chiusura** del ciclo.
- La riga di codice viene eseguita anche quando la condizione (i≤M.length) non viene soddisfatta e il programma esce dall'iterazione.

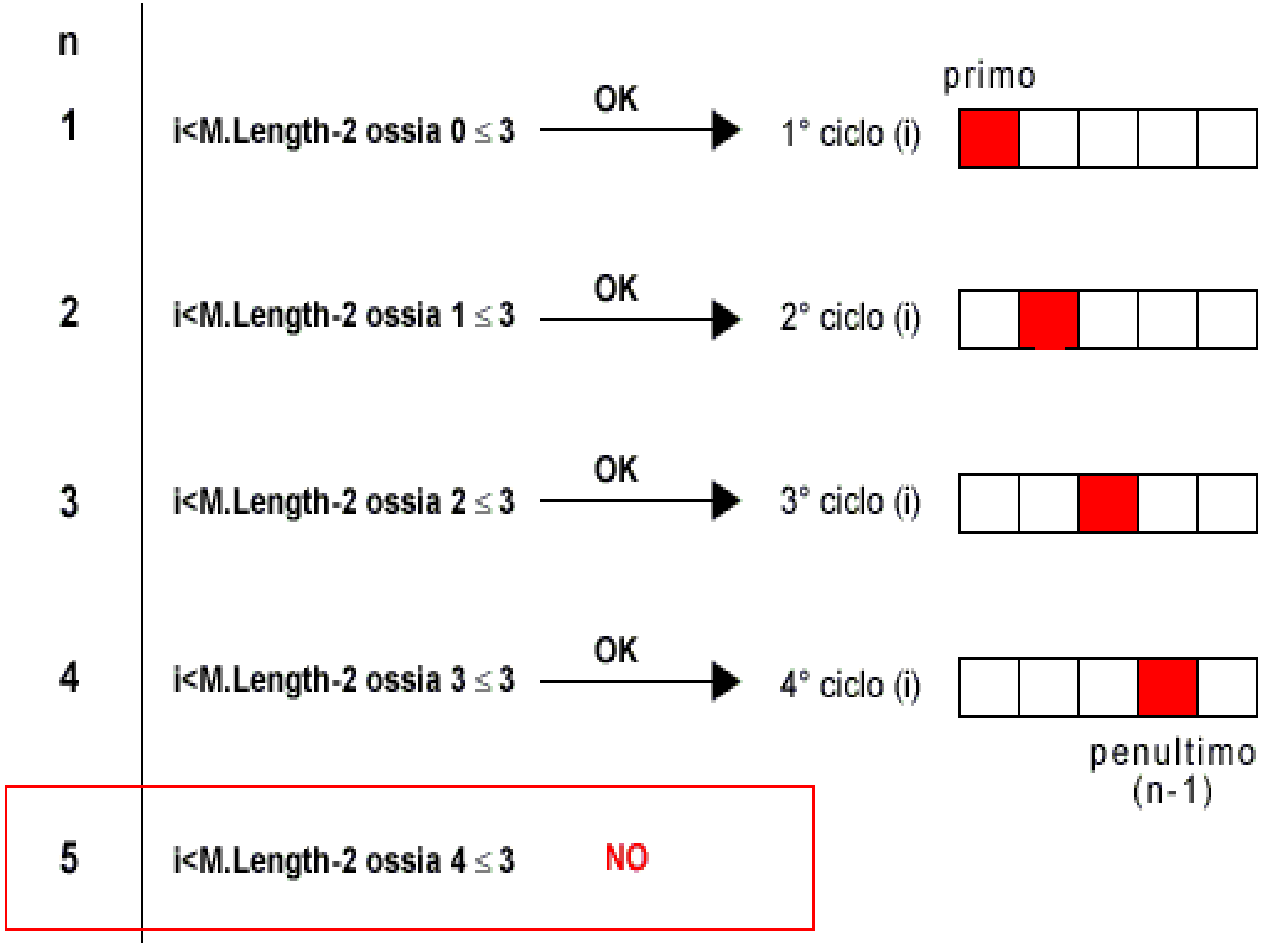


Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- Quindi, **il ciclo compie n-1 iterazioni** dove n=5.

- Pertanto, la seconda linea del codice viene eseguita (n-1)+1 volte ossia **n volte**.

- A questo punto scrivo n nella colonna vicino alla riga di codice.



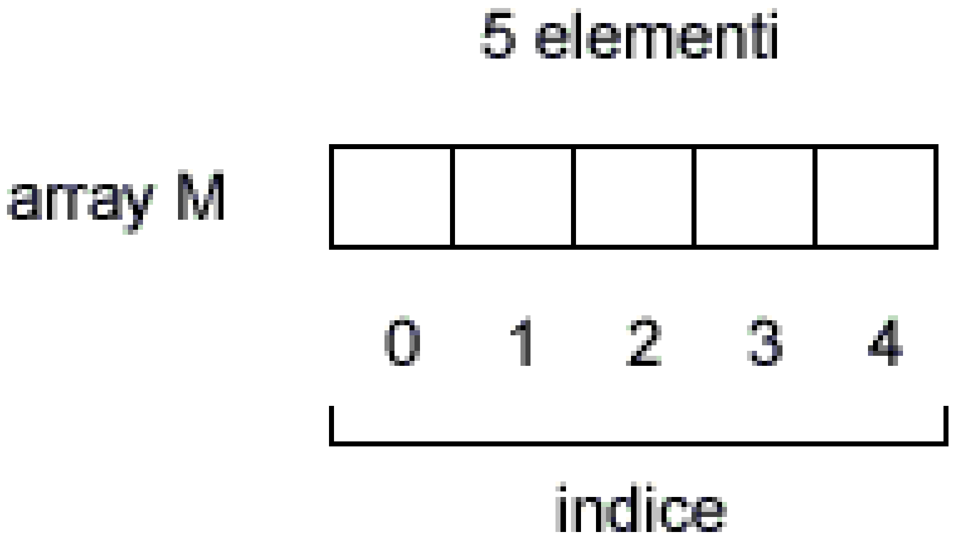
Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

		costo	num. esecuzione
1	`output=false`	c	1
2	`for (i=0 to M.length-2)`	c	n
3	`    for (j=i+1 to M.length-1)`	c	
4	`        if (M[i]==M[j])`	c	
5	`            output=true`	c	
6	`return output`	c	1

✓ **Il ciclo interno:** Nella linea 3 c'è il secondo ciclo interno (j) che analizza gli elementi del vettore a partire dalla posizione i+1 fino all'ultimo length-1 (compreso) ossia n-1.

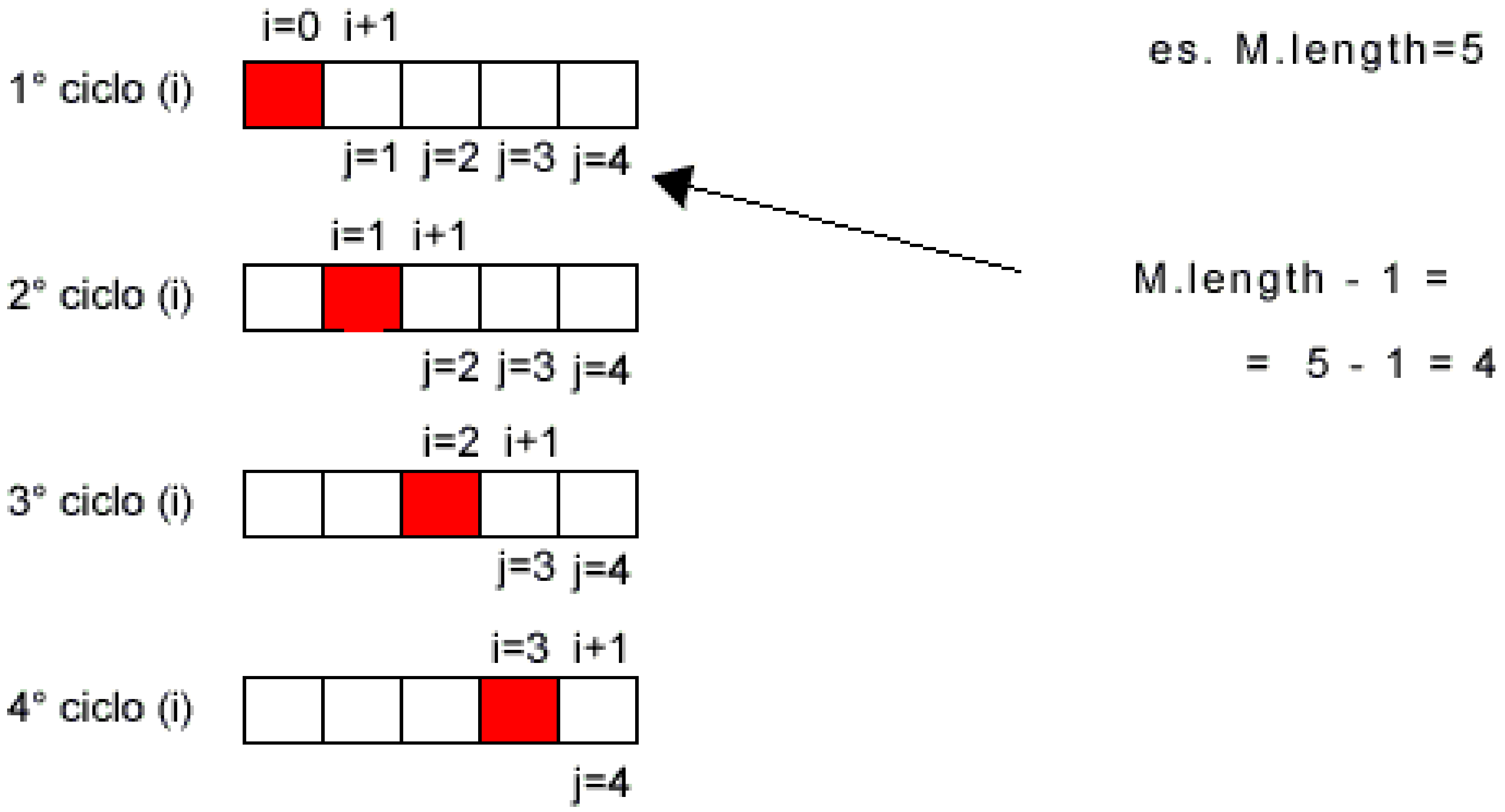
Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- **Attenzione.** Come nel precedente caso n-1 indica l'ultimo elemento dell'array. L'array è composto da 5 elementi (n=5) ma il primo elemento parte dalla posizione zero (M[0]). Pertanto l'ultimo elemento è M[4] ossia n-1=4.
- Quindi, compie **n-(i+1)** iterazioni ossia **n-i-1** uterazioni per ogni **i** dove **n=5**.



Es. M.length = 5

Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo



Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- Pertanto, la terza riga del codice viene eseguita (n-i-1)+1 volte ossia **n-i volte** per ogni i.
- Ma quante volte varia i?
- Guardando il ciclo esterno l'indice i varia da 0 a n-2.
- Quindi per calcolare il numero di volte che viene eseguito il ciclo interno devo calcolare la seguente sommatoria.

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n-i)$$

Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- Per semplificare il calcolo scorporo la sommatoria in tre distinti elementi.
- A questo punto risolvo le tre sommatorie singolarmente, generalizzando il numero delle esecuzioni per n.
- La prima componente viene eseguita **n(n-1) volte**.

$$\sum_{i=0}^{n-2}(n) - \sum_{i=0}^{n-2}(i)$$

Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n)$$

i	
0	n
1	n + n
2	n + n + n
n - 2 = 5 - 2 = 3	n + n + n + n = 4n

poiché n=5 $\longrightarrow$ 4n = (n-1)n

Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- La seconda componente viene eseguita **(n-2)(n-1)/2 volte** secondo la formula di Gauss delle serie divergenti.

$$\sum_{i=0}^{n-2} (i)$$

i	
0	i
1	i + i
2	i + i + i
n - 2 = 5 - 2 = 3	i + i + i + i = 4i

è una serie divergente

secondo la formula di Gauss

$$P(n) \equiv 0+1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

poiché la serie arriva fino a (n-2)

$$= \frac{(n-2)((n-2)+1)}{2}$$

$$= \frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

✓ Poi sommo tutte le componenti tra loro e svolgo i relativi passaggi algebrici.

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n) - \sum_{i=0}^{n-2} (i)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$[\ n(n-1)\ ] - \left[\frac{(n-2)(n-1)}{2} \right]$$

$$= n^2 - n - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \frac{2n}{2} - \frac{2}{2}$$

$$= n^2 \cancel{- n} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + \cancel{n} - 1$$

$$= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1$$

Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- La linea 3 del ciclo interno viene eseguita **$0.5n^2$ + 0.5n - 1 volte**
- Ma anche in questo caso devo aggiungere l'ultimo confronto di uscita della **for**.
- Quindi, la linea 3 viene eseguita **$0.5n^2$ + 0.5n volte**

	codice	costo	num. esecuzione
1	`output=false`	c	1
2	`for (i=0 to M.length-2)`	c	n
3	`    for (j=i+1 to M.length-1)`	c	$0.5n^2+0.5n$
4	`        if (M[i]==M[j])`	c	
5	`            output=true`	c	
6	`return output`	c	1

Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- La linea 4 viene eseguita ogni iterazione del ciclo interno (salvo il confronto finale di uscita).
- Quindi la linea 4 viene eseguita **$0.5n^2$ + 0.5n - 1 volte**.

		costo	num. esecuzione
1	`output=false`	c	1
2	`for (i=0 to M.length-2)`	c	n
3	`    for (j=i+1 to M.length-1)`	c	$0.5n^2+0.5n$
4	`        if (M[i]==M[j])`	c	$0.5n^2+0.5n-1$
5	`            output=true`	c	
6	`return output`	c	1

Calcolare la Complessità Temporale di un Algoritmo

- ✓ La linea 4 viene eseguita ogni iterazione del ciclo interno (salvo il confronto finale di uscita).
- ✓ Quindi la linea 4 viene eseguita **$0.5n^2$ + 0.5n - 1 volte**.

		costo	num. esecuzione
1	`output=false`	c	1
2	`for (i=0 to M.length-2)`	c	n
3	`    for (j=i+1 to M.length-1)`	c	$0.5n^2+0.5n$
4	`        if (M[i]==M[j])`	c	$0.5n^2+0.5n-1$
5	`            output=true`	c	
6	`return output`	c	1

Bibliografia

https://it.wikipedia.org/wiki/Teoria_della_complessit%C3%A0_computazionale

https://www.andreaminini.com/informatica/algoritmo/complessita-algoritmo