Pontszerű testek dinamikája – a Newton-törvények
Fizika informatikusoknak változat

Dr. Horváth András és Dr. Dömötör Piroska
Széchenyi István Egyetem, Matematika és Fizika Tanszék

v 2026/0.9

Bevezetés

Dinamika: „Miért mozognak a testek?”

Szükséges előismeret: kinematika.

Plusz információ: mi a kapcsolat adott rendszerekben a kinematikai mennyiségek között?

Bevezetés

Dinamika: „Miért mozognak a testek?”
Szükséges előismeret: kinematika.
Plusz információ: mi a kapcsolat adott rendszerekben a kinematikai mennyiségek között?

Dinamika alaptörvényei: Isaac Newton, 1600-as évek vége.
Ezért ezeket „Newton-törvényeknek” nevezzük, bár ma már más alakban írjuk fel, mint Newton tette.
(⇒ Lehet, hogy a középiskolás könyvben máshogy voltak kimondva ezek.)

Newton I. törvénye (a tehetetlenség törvénye)

Található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyből nézve minden magára hagyott test állandó sebességvektorral mozog.

Newton I. törvénye (a tehetetlenség törvénye)

Található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyből nézve minden magára hagyott test állandó sebességvektorral mozog.

Megjegyzések:

- Az ilyen rendszert inerciarendszernek nevezzük.

Newton I. törvénye (a tehetetlenség törvénye)

Található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyből nézve minden magára hagyott test állandó sebességvektorral mozog.

Megjegyzések:

- Az ilyen rendszert inerciarendszernek nevezzük.
- Nem minden vonatkoztatási rendszer inerciarendszer!

Newton I. törvénye (a tehetetlenség törvénye)

Található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyből nézve minden magára hagyott test állandó sebességvektorral mozog.

Megjegyzések:

- Az ilyen rendszert inerciarendszernek nevezzük.
- Nem minden vonatkoztatási rendszer inerciarendszer!
- Sok könyv elfelejti, hogy a Newton-törvények csak inerciarendszerekben teljesülnek.

Newton I. törvénye (a tehetetlenség törvénye)

Található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyből nézve minden magára hagyott test állandó sebességvektorral mozog.

Megjegyzések:

- Az ilyen rendszert inerciarendszernek nevezzük.
- Nem minden vonatkoztatási rendszer inerciarendszer!
- Sok könyv elfelejti, hogy a Newton-törvények csak inerciarendszerekben teljesülnek.
- Magára hagyott test: nincs kölcsönhatásban más testekkel.

Newton I. törvénye (a tehetetlenség törvénye)

Található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyből nézve minden magára hagyott test állandó sebességvektorral mozog.

Megjegyzések:

- Az ilyen rendszert inerciarendszernek nevezzük.
- Nem minden vonatkoztatási rendszer inerciarendszer!
- Sok könyv elfelejti, hogy a Newton-törvények csak inerciarendszerekben teljesülnek.
- Magára hagyott test: nincs kölcsönhatásban más testekkel.
- „Állandó sebességvektor”: nyugalom vagy egyenes vonalú egyenletes mozgás tömörebben.

Newton I. törvénye (a tehetetlenség törvénye)

Található olyan vonatkoztatási rendszer, amelyből nézve minden magára hagyott test állandó sebességvektorral mozog.

Megjegyzések:

- Az ilyen rendszert inerciarendszernek nevezzük.
- Nem minden vonatkoztatási rendszer inerciarendszer!
- Sok könyv elfelejti, hogy a Newton-törvények csak inerciarendszerekben teljesülnek.
- Magára hagyott test: nincs kölcsönhatásban más testekkel.
- „Állandó sebességvektor”: nyugalom vagy egyenes vonalú egyenletes mozgás tömörebben.

Miért hibás ez a mém?

Newton II. törvénye

Minden testhez található egy olyan állandó m mennyiség, amit a test tömegének nevezünk, és a többi test hatása a vizsgált testre jellemezhető egy $\underline{F}$ úgynevezett erőfüggvénnyel, ami csak a test tömegétől, helyétől sebességétől függ, úgy, hogy

$$\underline{F} = m \cdot \underline{a}$$

ahol $\underline{a}$ a test gyorsulása.

Newton II. törvénye

Minden testhez található egy olyan állandó m mennyiség, amit a test tömegének nevezünk, és a többi test hatása a vizsgált testre jellemezhető egy $\underline{F}$ úgynevezett erőfüggvénnyel, ami csak a test tömegétől, helyétől sebességétől függ, úgy, hogy

$$\underline{F} = m \cdot \underline{a}$$

ahol $\underline{a}$ a test gyorsulása.

Tömeg állandósága:

- nem függ a test sebességétől
- nem függ attól, milyen kölcsönhatásban vesz részt a test

Erő reprodukálhatósága: Az erő mindig ugyanaz, ha azonos körülmények közt megismétlek egy kísérletet.

Newton II. törvényének jelentősége

1. egyszer lemérem az $\underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, m)$ erőtörvényt és az m tömeget
2. bármilyen helyzetben megkapom a gyorsulást: $\underline{a} = \underline{F}/m$
3. az egyenletből megkapom a mozgást, hisz ismert a kapcsolat a hely, sebesség és gyorsulás közt

Ez alapján megérthető: bolygók mozgása, lövedék röppálya, gépek tervezési kérdései, ...

Newton II. törvényének jelentősége

1. egyszer lemérem az $\underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, m)$ erőtörvényt és az m tömeget
2. bármilyen helyzetben megkapom a gyorsulást: $\underline{a} = \underline{F}/m$
3. az egyenletből megkapom a mozgást, hisz ismert a kapcsolat a hely, sebesség és gyorsulás közt

Ez alapján megérthető: bolygók mozgása, lövedék röppálya, gépek tervezési kérdései, ...

Nehézség: a hely-idő függvény deriváltjai lépnek fel mindenütt:

$$\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{1}{m} \cdot \underline{F}\left(\underline{r}, \frac{d\underline{r}}{dt}, m\right)$$

$\Rightarrow$ Általában bonyolult differenciál-egyenletet kapok $\underline{r}(t)$ meghatározására.

Newton II. törvényének jelentősége

1. egyszer lemérem az $\underline{F}(\underline{r}, \underline{v}, m)$ erőtörvényt és az m tömeget
2. bármilyen helyzetben megkapom a gyorsulást: $\underline{a} = \underline{F}/m$
3. az egyenletből megkapom a mozgást, hisz ismert a kapcsolat a hely, sebesség és gyorsulás közt

Ez alapján megérthető: bolygók mozgása, lövedék röppálya, gépek tervezési kérdései, ...

Nehézség: a hely-idő függvény deriváltjai lépnek fel mindenütt:

$$\frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \frac{1}{m} \cdot \underline{F}\left(\underline{r}, \frac{d\underline{r}}{dt}, m\right)$$

$\Rightarrow$ Általában bonyolult differenciál-egyenletet kapok $\underline{r}(t)$ meghatározására.

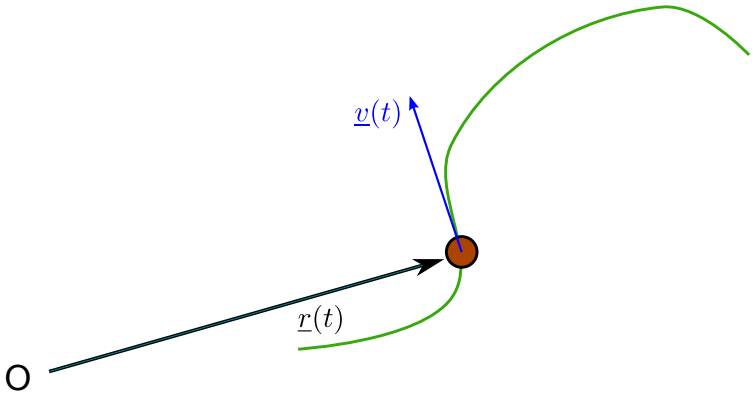
Megoldási módszerek:

- Analitikus: egyszerű esetekre kevés, bonyolult esetekre sok matematikával.
- Numerikus: konkrét kezdőfeltételekkel bármilyen erőfüggvénnyel jó közelítéssel

Newton II. törvényének működése

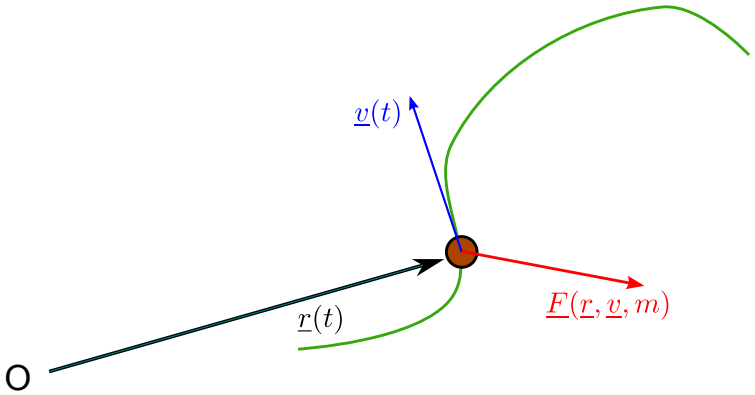
Közelítő, józan eszes mozgásegyenlet-megoldás: Δt lépésenként követjük a mozgást, az időszakaszok alatt konstans sebességet és erőt feltételezve.

Kiindulás: ismerjük a helyet és a sebességet egy pillanatban.



Newton II. törvényének működése

Közelítő, józan eszes mozgásegyenlet-megoldás: Δt lépésenként követjük a mozgást, az időszakaszok alatt konstans sebességet és erőt feltételezve.

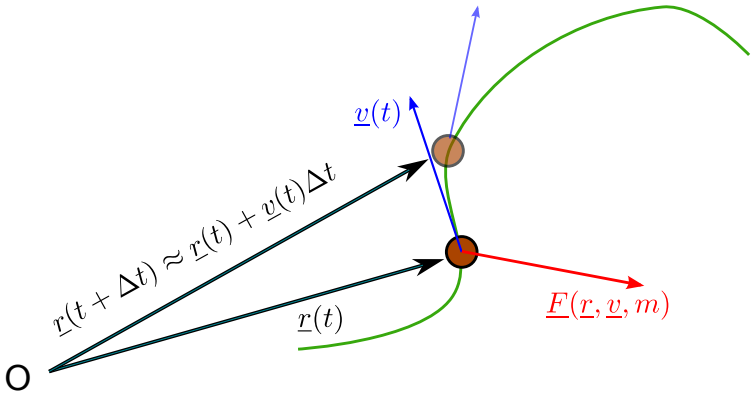


Kiszámítjuk az erőt a kölcsönhatások ismeretében az adott pillanatban.

Newton II. törvényének működése

Közelítő, józan eszes mozgásegyenlet-megoldás: Δt lépésenként követjük a mozgást, az időszakaszok alatt konstans sebességet és erőt feltételezve.

$$\underline{v}(t+\Delta t) \approx \underline{v}(t) + (\underline{F}(t)/m)\cdot\Delta t$$



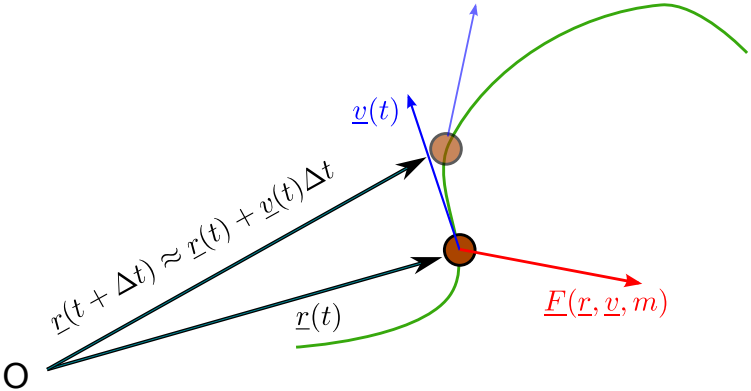
A helyet a sebesség, a sebességet a gyorsulás alapján frissítjük.

Ez után az új helyről kezdjük ugyanezt.

Newton II. törvényének működése

Közelítő, józan eszes mozgásegyenlet-megoldás: Δt lépésenként követjük a mozgást, az időszakaszok alatt konstans sebességet és erőt feltételezve.

$$\underline{v}(t+\Delta t) \approx \underline{v}(t) + (\underline{F}(t)/m)\cdot\Delta t$$



A helyet a sebesség, a sebességet a gyorsulás alapján frissítjük.

Ez után az új helyről kezdjük ugyanezt.

Elvileg ha $\Delta t \to 0$, akkor megkapjuk a pontos megoldást.

Gyakorlat: léteznek ennél sokkal jobb közelítő módszerek.

Newton II. törvényének jellege

Legnagyobb ötlet: a kölcsönhatás a test gyorsulását határozza meg.
Régi gondolat: a kölcsönhatás a sebességet határozza meg.

- „Ha nem húzok valamit, akkor az megáll."
- „Ha valamit kétszer akkora erővel húzok, az kétszer nagyobb sebességgel halad."

Tévedés oka: a hétköznapokban mindig több erő hat egyszerre. A közegellenállás, súrlódás fékezi a mozgást.

Newton II. törvényének jellege

Legnagyobb ötlet: a kölcsönhatás a test gyorsulását határozza meg.
Régi gondolat: a kölcsönhatás a sebességet határozza meg.

- „Ha nem húzok valamit, akkor az megáll."
- „Ha valamit kétszer akkora erővel húzok, az kétszer nagyobb sebességgel halad."

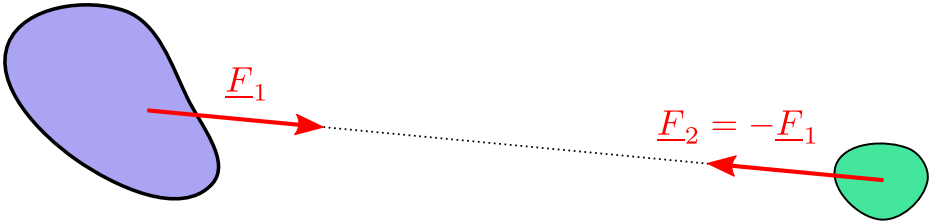
Tévedés oka: a hétköznapokban mindig több erő hat egyszerre. A közegellenállás, súrlódás fékezi a mozgást.

Newton II. törvénye megtapasztalható:

- közel súrlódásmentes felületeken
- világűrben
- szimulációs játékokban („Asteroid" típus, pl. https://freeasteroids.org/)

Newton III. törvénye (hatás-ellenhatás törvénye)

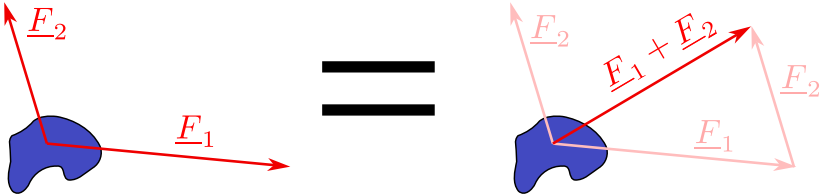
Ha csak két test van egymással kölcsönhatásban, akkor ha az egyikre $\underline{F}_1$ erő hat, akkor a másikra ható erő $\underline{F}_2 = -\underline{F}_1$.



Fontos! Ez mindig igaz, ami sokszor ellentmond a józan észnek.
Pl. egy kő ugyanakkora erővel vonzza a Földet, mint a Föld a követ.

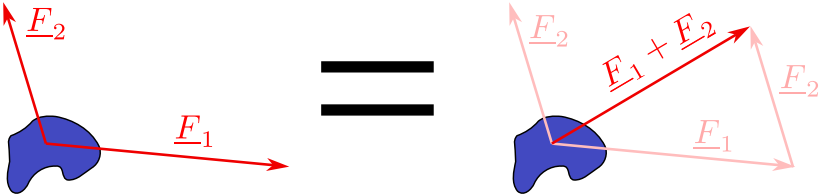
Newton IV. törvénye (az erők vektori összeadásának törvénye)

Két vagy több erő hatására mozgó test úgy mozog, mintha egyetlen eredő erő, ami az erők vektori összege hatna rá.



Newton IV. törvénye (az erők vektori összeadásának törvénye)

Két vagy több erő hatására mozgó test úgy mozog, mintha egyetlen eredő erő, ami az erők vektori összege hatna rá.



Az erők tehát vektori módon összeadhatók.
Hasonlóan: a két erőhöz egy harmadikat, negyediket, ... adhatunk. $\Rightarrow$ Eredő erő.

$$F_{\text{eredő}} = \underline{F}_1 + \underline{F}_2 + \cdots + \underline{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i$$

Newton II és IV. törvénye együtt

Több kölcsönhatás esetére Newton II. törvényét szokás az alábbi alakokban felírni:

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{F}_{\text{eredő}} = m\underline{a}$$

(Sok tankönyv ebben az alakban írja fel Newton II. törvényét és nem említ külön IV. törvényt.)

Newton II és IV. törvénye együtt

Több kölcsönhatás esetére Newton II. törvényét szokás az alábbi alakokban felírni:

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{F}_{\text{eredő}} = m\underline{a}$$

(Sok tankönyv ebben az alakban írja fel Newton II. törvényét és nem említ külön IV. törvényt.)

Speciális eset: erők egyensúlya, statika.

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{F}_i = \underline{F}_{\text{eredő}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{a} = 0$$

Ha a test kezdetben áll, és a rá ható erők eredője 0, akkor nem fog megmozdulni.
Sok esetben ez a kívánatos állapot.

Nem érezzük a nagy sebességet, csak a nagy gyorsulást

Ha a vonat 160 km/h-val egyenletesen halad sima pályán, nem érezzük.

Nem érezzük a nagy sebességet, csak a nagy gyorsulást

Ha a vonat 160 km/h-val egyenletesen halad sima pályán, nem érezzük.

A Föld forgása miatt nagy a sebességünk, de kicsi a gyorsulásunk ⇒ nem érezzük.

Egyenlítő sugara: $R = 6370\,\mathrm{km}$. Körbefordulás ideje: $T = 24\,\mathrm{h} = 24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400\,\mathrm{s}$.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

$$v = R\omega = 463\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1670\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

$$a = r\omega^2 = 0{,}034\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Nem érezzük, mert:

- sokkal kisebb, mint g
- állandóan hat és „beleépül” g-be.

Egy elméleti példa

Kis tömegű személyautó nagy tömegű kamionnal ütközik. Az ütközés miatt:

- *Melyikre hat nagyobb erő?*
- *Melyiknek lesz nagyobb a gyorsulása?*

Egy elméleti példa

Kis tömegű személyautó nagy tömegű kamionnal ütközik. Az ütközés miatt:

- *Melyikre hat nagyobb erő?*
- *Melyiknek lesz nagyobb a gyorsulása?*

Megoldás:

- Newton III. tv: A két autó egyforma nagyságú erővel hat egymásra.
  Nem ezt sugallja a józan ész!
  Ebben nem számít, melyiknek „erősebb” a karosszériája.
  (Az azért fontos, hogy az utasig ne jusson el a gyűrődés.)
- Newton II. tv: $a = F/m \Rightarrow$ A kisebb tömegűnek lesz nagyobb a gyorsulása.
  $\Rightarrow$ A személyautóban rosszabb ülni ilyenkor.

Egy számolási példa

Egy 70 kg tömegű ember 20 m/s sebességű autóban ül. Az autó ütközik, ezért az ember 0,8 m távolságon lefékeződik. Mekkora átlagos erő hatott rá, ha feltesszük, hogy a gyorsulása állandó volt?

Egy számolási példa

Egy 70 kg tömegű ember 20 m/s sebességű autóban ül. Az autó ütközik, ezért az ember 0,8 m távolságon lefékeződik. Mekkora átlagos erő hatott rá, ha feltesszük, hogy a gyorsulása állandó volt?

Megoldás: Számoljuk ki előbb az állandó a gyorsulást!
Ha a fékezés ideje t_f, akkor tudjuk, hogy:

$$v(t_f) = 20 + a \cdot t_f = 0; \qquad x(t_f) = 20t_f + \frac{a}{2}t_f^2 = 0{,}8$$

(Tengely: mozgás irányában; origó: a fékezés kezdő helye.)

Egy számolási példa

Egy 70 kg tömegű ember 20 m/s sebességű autóban ül. Az autó ütközik, ezért az ember 0,8 m távolságon lefékeződik. Mekkora átlagos erő hatott rá, ha feltesszük, hogy a gyorsulása állandó volt?

Megoldás: Számoljuk ki előbb az állandó a gyorsulást!
Ha a fékezés ideje t_f, akkor tudjuk, hogy:

$$v(t_f) = 20 + a \cdot t_f = 0; \qquad x(t_f) = 20t_f + \frac{a}{2}t_f^2 = 0{,}8$$

(Tengely: mozgás irányában; origó: a fékezés kezdő helye.)
Az elsőből: $t_f = -20/a$, amit a másodikba írva:

$$20\left(\frac{-20}{a}\right) + \frac{a}{2}\left(\frac{-20}{a}\right)^2 = 0{,}8$$

Egy számolási példa (folyt)

$$\frac{-400}{a} + \frac{400}{2a} = 0{,}8 \qquad \Rightarrow \qquad -800 + 400 = 0{,}8 \cdot 2a$$

Egy számolási példa (folyt)

$$\frac{-400}{a} + \frac{400}{2a} = 0{,}8 \qquad \Rightarrow \qquad -800 + 400 = 0{,}8 \cdot 2a$$

$$a = -250\,\mathrm{m/s^2}.$$

Az ember gyorsulása tehát negatív (fékeződik) és kb. $25g$ nagyságú.
Az emberre ható erő nagysága:

$$|F| = m|a| = 70 \cdot 250 = 17\,500\,\mathrm{N}.$$

Ekkora erő könnyen okoz sérülést.

Egy számolási példa (folyt)

$$\frac{-400}{a} + \frac{400}{2a} = 0{,}8 \qquad \Rightarrow \qquad -800 + 400 = 0{,}8 \cdot 2a$$

$$a = -250\,\mathrm{m/s^2}.$$

Az ember gyorsulása tehát negatív (fékeződik) és kb. $25g$ nagyságú.
Az emberre ható erő nagysága:

$$|F| = m|a| = 70 \cdot 250 = 17\,500\,\mathrm{N}.$$

Ekkora erő könnyen okoz sérülést.

Általában: v_0 sebességről d út alatt megállás $\Rightarrow |a| = v_0^2/(2d)$ nagyságú gyorsulás.
Gyorsulás mérséklése = fékút növelése.

Gyakorlat: Sérülési veszélyt a gyorsulással jellemzik.

A tömeggel szorozva erőt kapunk, de nagyobb tömegű test általában nagyobb erőt is visel el.

- Emberi szervezet közelítő értékei: (Sok függ a körülményektől.)
  - 5–10 g: Rövid időre elviselhető.
  - 20 g körül: Valószínűek a csonttörések.
  - 50 g felett: Súlyos, életveszélyes sérülések, belső szervek károsodása.
- Mobil telefonok tűréshatára: 100–200 g.
- Merevlemezek tűréshatára: 3–10 g.

Gyakorlat: Sérülési veszélyt a gyorsulással jellemzik.

A tömeggel szorozva erőt kapunk, de nagyobb tömegű test általában nagyobb erőt is visel el.

- Emberi szervezet közelítő értékei: (Sok függ a körülményektől.)
  - 5–10 g: Rövid időre elviselhető.
  - 20 g körül: Valószínűek a csonttörések.
  - 50 g felett: Súlyos, életveszélyes sérülések, belső szervek károsodása.
- Mobil telefonok tűréshatára: 100–200 g.
- Merevlemezek tűréshatára: 3–10 g.

Mi történik a következő pillanatban?

Gravitációs erő

Felszín közelében: $\underline{F} = m \cdot \underline{g}$

$\underline{g}$: lefelé mutató vektor. Nagysága a Föld felszínén $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Következmény: $\underline{a} = \underline{F}/m = \underline{g}$.

Ha csak a gravitációs erő hat, akkor minden test azonos gyorsulással esik.

Gravitációs erő

Felszín közelében: $\underline{F} = m \cdot \underline{g}$

$\underline{g}$: lefelé mutató vektor. Nagysága a Föld felszínén $9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$.

Következmény: $\underline{a} = \underline{F}/m = \underline{g}$.

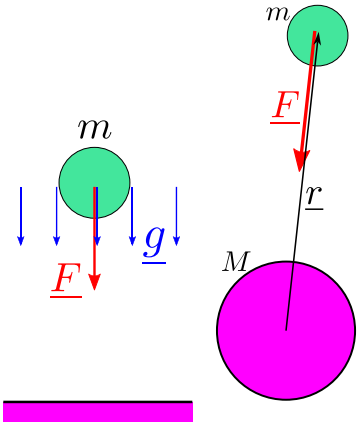
Ha csak a gravitációs erő hat, akkor minden test azonos gyorsulással esik.

Két test között: (kicsi vagy gömb alakú testekre)

$$\underline{F} = -\gamma \frac{Mm}{r^2} \frac{\underline{r}}{r}$$

$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ SI-egység (univerzális gravitációs állandó)

A gravitációs erő mindig vonzó, nagysága arányos a tömegekkel és fordítva arányos a távolság négyzetével.

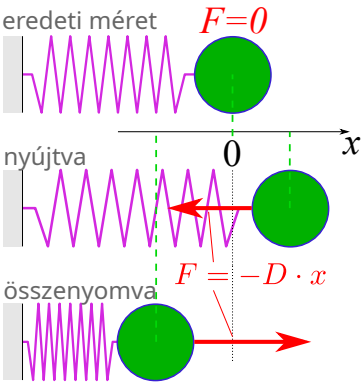


Rugalmas erő

Gyakori helyzet: egy rugalmas testhez van egy másik test csatolva.
Kis kitérésre a kitérés nagyságával egyenesen arányos, azzal ellentétes irányú erő ébred:

$$\underline{F} = -D \cdot \underline{r}$$

ahol D a „rugóállandó”.
(origó az egyensúlyi helyzetben)
Gyakran egyenes menti mozgásra írják fel: $F = -D \cdot x$.
Tipikus példa: drótból készült rugó esete.
Sok más geometria is lehetséges: laprugó, torziós rugó, ...

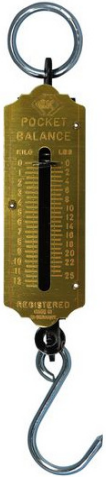


A rugós mérleg

Gyakori alkalmazás: erőmérés, súlymérés.
Egyensúlyban egy rugó megnyúlása egyenesen arányos az őt megfeszítő erővel $\Rightarrow$ a megnyúlásból az erőre lehet következtetni.
Egyszerű alkalmazás: rugós mérleg. (lásd a jobb oldalon)

Mivel a hétköznapokban g állandó, ezért egy test mg súlyából a tömegére lehet következtetni: a rugós mérlegen „kg" a skála.

Sok más mérleg belsejében is rugók vannak és ezek alakváltozásából következtetünk az erőre, abból a tömegre.



Közegellenállási erő

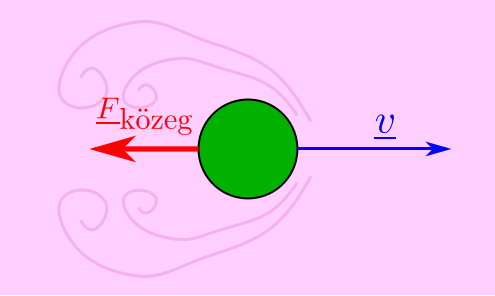
Hétköznapok: minden mozgás egy közegben (levegő, víz, ...) történik.

Közegellenállás: Mindig fékezi a test közeghez képesti sebességét.

Okok:

- A test előtt „szét kell tolni” a közeget.
- A test oldalán súrlódik a közeg a testhez.
- A test mögött örvények keletkeznek.

Közelítő leírás: kis sebességnél v-vel, nagyobbnál v^2-tel arányos erő.



Közegellenállási erő nagy sebesség esetén

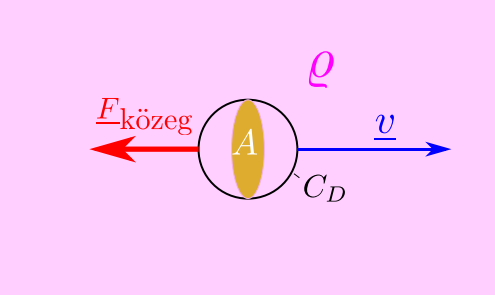
„Nagy” sebességek: amikor az örvények hatása dominál.

$$\underline{F}_k = -\frac{1}{2} C_D \cdot A \cdot \varrho \cdot v^2 \cdot \frac{\underline{v}}{v}.$$

ahol:

- C_D: a test alaktényezője („drag coefficient”)
- A: a test mozgásirányú keresztmetszete
- ϱ: a közeg sűrűsége
- $\underline{v}$: a test közeghez képesti sebessége

Megjegyzés: $\underline{v}/v$ egy sebesség-irányú egységvektor, csak az irányt mutatja.



alak	gömb	kocka	autó	„csepp”
C_D	0,47	1,05	0,25–0,6	0,04

(közelítő értékek!)

Esés közegellenállás jelenlétében

Két erő:

- Gravitációs erő: konstans, mg nagyságú, lefelé.
- Közegellenállási erő: v^2-tel arányos, felfelé.

Esés közegellenállás jelenlétében

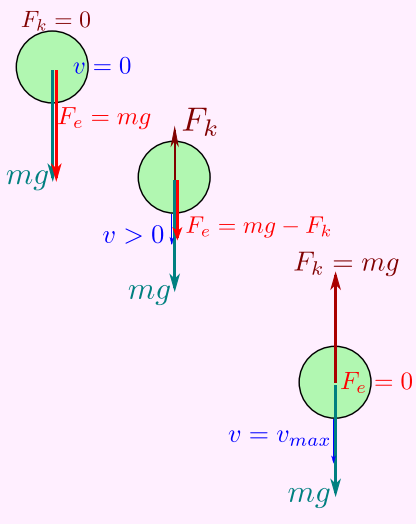
Két erő:

- Gravitációs erő: konstans, mg nagyságú, lefelé.
- Közegellenállási erő: v^2-tel arányos, felfelé.

Mozgás fázisai:

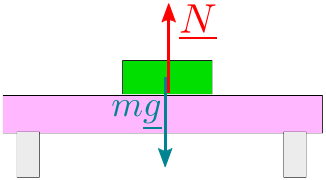
1. Indulás: $v = 0 \Rightarrow F_k = 0 \Rightarrow F_e = mg$
   $\Rightarrow g$ gyorsulással esik.
2. Gyorsítás: $v > 0 \Rightarrow F_k > 0 \Rightarrow F_e = mg - F_k$
   $\Rightarrow g - F_k/m$ gyorsulással esik.
3. Állandó sebesség: $F_k = mg \Rightarrow F_e = 0$
   $\Rightarrow 0$ gyorsulással esik. ($v = v_{max}$.)

$$mg = \frac{1}{2} C_D A \varrho v_{max}^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_{max} = \sqrt{\frac{2mg}{C_D A \varrho}}$$



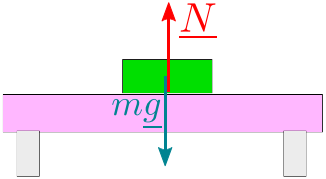
Szilárd felület kényszerereje, a „normálerő”

Példa: asztal ereje a rátett testre.
Az asztallap kényszerereje megakadályozza, hogy az asztallapba hatoljon a test.
Csak szöveges leírása van!
Vízszintes, nyugvó asztalon nyilván $N = mg$.

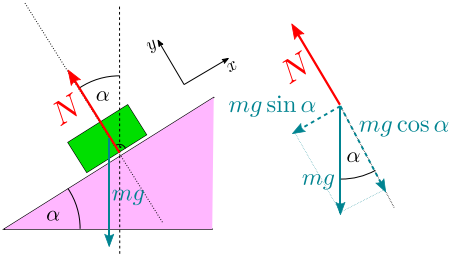


Szilárd felület kényszerereje, a „normálerő”

Példa: asztal ereje a rátett testre.
Az asztallap kényszerereje megakadályozza, hogy az asztallapba hatoljon a test.
Csak szöveges leírása van!
Vízszintes, nyugvó asztalon nyilván $N = mg$.

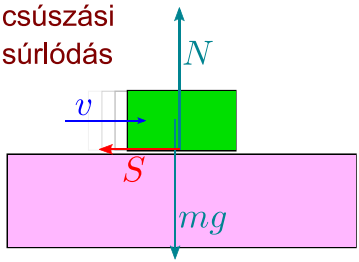


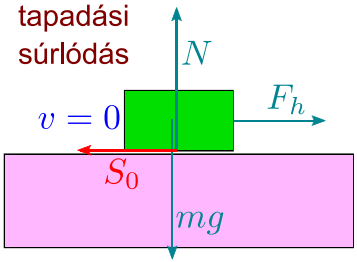
Ferde felületen: csak $\underline{mg}$ felületre merőleges komponensét semlegesíti.
Marad egy lejtővel párhozamos, $mg\sin(\alpha)$ nagyságú eredő erő.
$\Rightarrow$ A test lecsúszik. (Ha nem fogja meg más erő, pl. a súrlódás.)



A súrlódási erő

Szilárd felületek egymáshoz képesti elcsúszását fékezi.





Ha a testek már mozognak egymáson:
Az $\underline{S}$ súrlódási erő ellentétes irányú $\underline{v}$-vel.

Ha a testek még állnak egymáshoz képest:
Az $\underline{S}_0$ súrlódási erő ellentétes irányú $\underline{F}_h$-val.
F_h: húzóerő, ami el akarja csúsztatni a testeket egymáson.

A súrlódási erő

Csúszási súrlódás

$$\underline{S} = -\mu N \cdot \underline{v}/v$$

μ: csúszási súrlódási együttható.

Tapadási súrlódás

Elvi maximális nagyság: $S_{0,max} = \mu_0 \cdot N$

μ_0: tapadási súrlódási együttható.

- Ha $F_h \leq S_{0,max}$, akkor $\underline{S}_0 = -\underline{F}_h$.
  Ekkor a test állva marad.
- Ha $F_h > S_{0,max}$, akkor $\underline{S}_0 = -S_{0,max} \cdot \underline{F}_h/F_h$.
  A test elindul $(F_h - S_{0,max})$ nagyságú eredő erő hatására.

A súrlódási erő

Csúszási súrlódás

$$\underline{S} = -\mu N \cdot \underline{v}/v$$

μ: csúszási súrlódási együttható.

Tapadási súrlódás

Elvi maximális nagyság: $S_{0,max} = \mu_0 \cdot N$

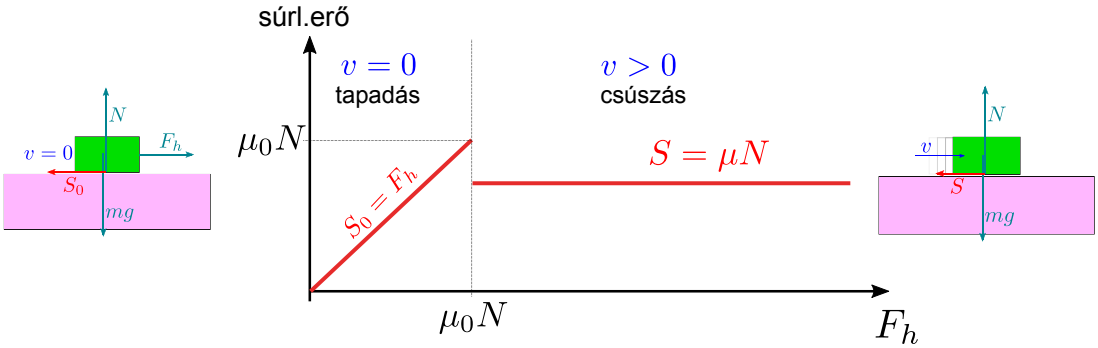
μ_0: tapadási súrlódási együttható.

- Ha $F_h \leq S_{0,max}$, akkor $\underline{S}_0 = -\underline{F}_h$.
  Ekkor a test állva marad.
- Ha $F_h > S_{0,max}$, akkor $\underline{S}_0 = -S_{0,max} \cdot \underline{F}_h/F_h$.
  A test elindul $(F_h - S_{0,max})$ nagyságú eredő erő hatására.

μ és μ_0: dimenziótlan számok. A felületpár határozza meg. Tájékoztató értékek:

	acél-acél	gumi-aszfalt	fa-kő	jég-jég
μ	0,06–0,20	0,8	0,3	0,02–0,09
μ_0	0,08–0,25	0,9	0,7	0,02–0,09

A súrlódási erő



Test indulása álló helyzetből növekvő F_h hatására:

- Amíg $F_h \leq \mu_0 N$, addig a test állva marad.
- Amikor $F_h > \mu_0 N$ lesz, a test elindul $(F_h - \mu N)/m$ gyorsulással.

A súly és a súlytalanság

(Forrás: WikiPedia)

Gyakori, nem pontos meghatározás: „A súly megegyezik a testre ható gravitációs erővel.”

Kérdés: a Nemzetközi Űrállomáson nincs gravitáció?

A súly és a súlytalanság

(Forrás: WikiPedia)

Gyakori, nem pontos meghatározás: „A súly megegyezik a testre ható gravitációs erővel.”

Kérdés: a Nemzetközi Űrállomáson nincs gravitáció?

Ott is van gravitáció! (Csak 300–500 km-re van a felszíntől!)

Magyarázat: Gyorsuló rendszerekben a „látszólagos súly” eltér a gravitációs erőtől.

Precíz definíció: A test látszólagos súlyának nevezzük azt az erőt, amivel a test az alátámasztást nyomja vagy a felfüggesztést húzza.

Konvenciók:

- Magyarul: „súly”=„látszólagos súly”
- Angolul: „weight”=„gravity force”$\neq$„apparent weight”

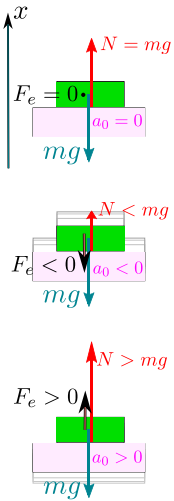
Gyorsulás függőleges irányban

Vizsgált test egy vízszintes felületen (pl. asztallapon):

$\Rightarrow$ látszólagos súly = normálerő (ezzel az erővel nyomja az alátámasztást)

Mozogjon a felület függőleges irányban a_0 gyorsulással.

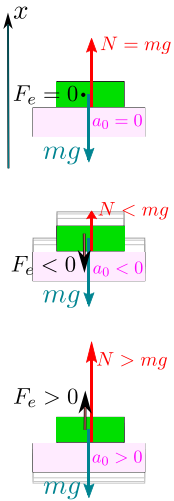
Az x tengely pozitív iránya mutasson felfelé.



Gyorsulás függőleges irányban

Ha a test együtt mozog az alátámasztással, akkor az ő gyorsulása is a_0. Newton II. törvénye alapján:

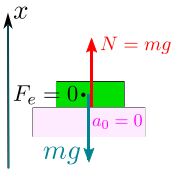
$$ma_0 = N - mg \qquad \Rightarrow \qquad N = mg + ma_0$$



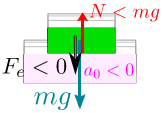
Gyorsulás függőleges irányban

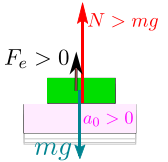
Ha a test együtt mozog az alátámasztással, akkor az ő gyorsulása is a_0. Newton II. törvénye alapján:

$$ma_0 = N - mg \qquad \Rightarrow \qquad N = mg + ma_0$$



- Nyugalom: $a_0 = 0 \Rightarrow N = mg$
  A látszólagos súly a testre ható gravitációs erővel egyezik meg.
- Gyorsulás lefele: $a_0 < 0 \Rightarrow N < mg$
  A látszólagos súly lecsökken.
  „Súlytalanság:" $a_0 = -g \Rightarrow N = 0$!
- Gyorsulás felfele: $a_0 > 0 \Rightarrow N > mg$
  A látszólagos súly megnövekszik.

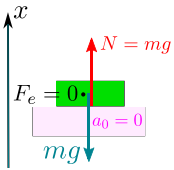




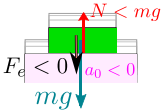
Gyorsulás függőleges irányban

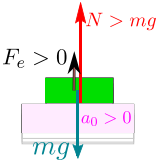
Ha a test együtt mozog az alátámasztással, akkor az ő gyorsulása is a_0. Newton II. törvénye alapján:

$$ma_0 = N - mg \qquad \Rightarrow \qquad N = mg + ma_0$$



- Nyugalom: $a_0 = 0 \Rightarrow N = mg$
  A látszólagos súly a testre ható gravitációs erővel egyezik meg.
- Gyorsulás lefele: $a_0 < 0 \Rightarrow N < mg$
  A látszólagos súly lecsökken.
  „Súlytalanság:" $a_0 = -g \Rightarrow N = 0$!
- Gyorsulás felfele: $a_0 > 0 \Rightarrow N > mg$
  A látszólagos súly megnövekszik.





Ugyanígy tárgyalható a felfüggesztés esete is.

Súlytalanság a gyakorlatban

Ha a vonatkoztatási rendszerünk g gyorsulással esik, akkor a (látszólagos) súly 0!

Példák:

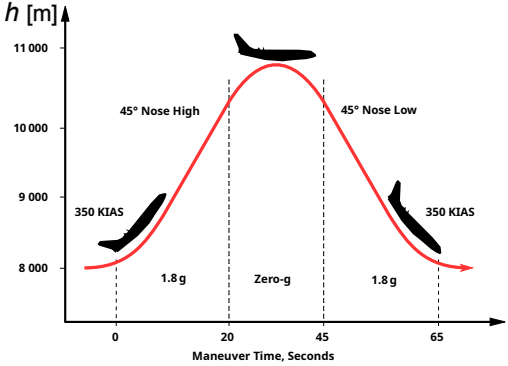
- Két tégla között vékony papír.
  - Álló helyzetben nem tudjuk kihúzni, mert a papír elszakad. (Súrlódási erő.)
  - Amíg esik a két tégla, a papír kihúzható, mert a téglák nem nyomják egymást.

Súlytalanság a gyakorlatban

Ha a vonatkoztatási rendszerünk g gyorsulással esik, akkor a (látszólagos) súly 0!

Példák:

- Két tégla között vékony papír.
  - Álló helyzetben nem tudjuk kihúzni, mert a papír elszakad. (Súrlódási erő.)
  - Amíg esik a két tégla, a papír kihúzható, mert a téglák nem nyomják egymást.
- Súlytalanság gyakorló repülőgép. Fel-le hullámzó pálya, bizonyos szakaszokon g nagyságú gyorsulással lefelé.



(Forrás: WikiPedia)

Súlytalanság a gyakorlatban

- Gravitációs pályán mozgó űrhajó.
  Ha magára az űrhajóra is csak a gravitáció hat, akkor együtt gyorsul a benne levő testekkel.
  Pl. Föld körüli pályán $a_{cp} = g_l$. (g_l a helyi gravitációs gyorsulás)

Súlytalanság a gyakorlatban

- Gravitációs pályán mozgó űrhajó.
  Ha magára az űrhajóra is csak a gravitáció hat, akkor együtt gyorsul a benne levő testekkel.
  Pl. Föld körüli pályán $a_{cp} = g_l$. (g_l a helyi gravitációs gyorsulás)
- Bukkanón nagy sebességgel áthaladó autó.
  Ha a görbe pálya miatt épp g nagyságú a gyorsulása lefelé.

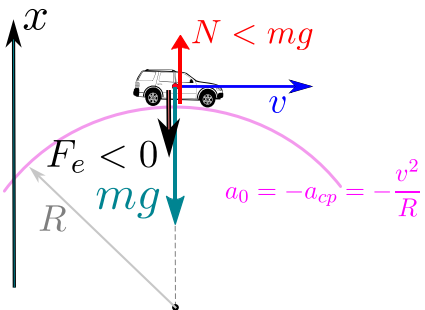
Példa

Feladat: *Egy 800 kg tömegű autó áthajt egy bukkanón, melynek görbületi sugara a tetején 70 m.*

a) *Mekkora erővel nyomja az utat a felső ponton, ha sebessége 50 km/h?*

b) *Mekkora sebességgel kellene mennie, hogy ne nyomja az utat?*

Megoldás:

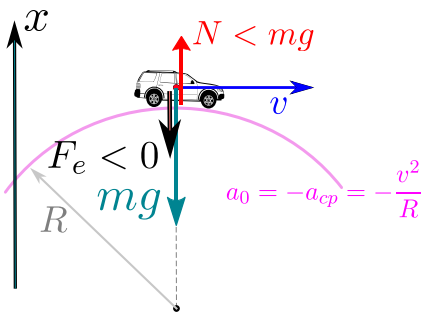


Az utat követő autó lefelé gyorsul a centripetális gyorsulással.
Newton II. törvénye függőleges irányban:

$$ma = -m\frac{v^2}{R} = N - mg$$

$$\Rightarrow \qquad N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$$

Példa



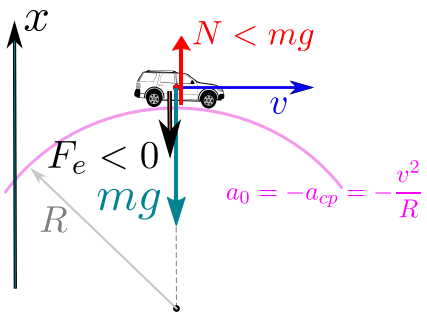
$$N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$$

a) eset: $v_a = 50\,\mathrm{km/h}$=13,89 m/s.

$$N_a = 800\left(9{,}81 - \frac{13{,}89^2}{70}\right) = 800(9{,}81 - 2{,}76) = 5640\,\mathrm{N}.$$

Már ilyen sebességnél is érezhető a „súlycsökkenés”.

Példa



$$N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$$

a) eset: $v_a = 50\,\mathrm{km/h}$=13,89 m/s.

$$N_a = 800\left(9{,}81 - \frac{13{,}89^2}{70}\right) = 800(9{,}81 - 2{,}76) = 5640\,\mathrm{N}.$$

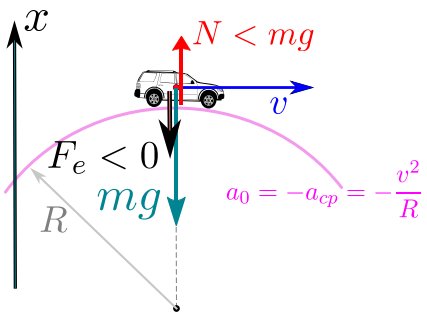
Már ilyen sebességnél is érezhető a „súlycsökkenés”.

b) eset: $N_b = 0$. (nem nyomja az utat az autó)

$$0 = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right) \qquad \Rightarrow \qquad g = \frac{v_b^2}{R}$$

$$v_b = \sqrt{gR} = 26{,}2\,\mathrm{m/s} \approx 94\,\mathrm{km/h}.$$

Példa



$$N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$$

a) eset: $v_a = 50\,\mathrm{km/h}$=13,89 m/s.

$$N_a = 800\left(9{,}81 - \frac{13{,}89^2}{70}\right) = 800(9{,}81 - 2{,}76) = 5640\,\mathrm{N}.$$

Már ilyen sebességnél is érezhető a „súlycsökkenés”.

b) eset: $N_b = 0$. (nem nyomja az utat az autó)

$$0 = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right) \qquad \Rightarrow \qquad g = \frac{v_b^2}{R}$$

$$v_b = \sqrt{gR} = 26{,}2\,\mathrm{m/s} \approx 94\,\mathrm{km/h}.$$

(Mit kapunk, ha a Föld sugarát (6370 km) írjuk be?)

Súly és tömeg különbsége

A hétköznapi életben a „súly” és „tömeg” szavak szinonímák, de a fizikában nem!

- Tömeg: Mennyire nehéz gyorsítani a testet?
  Ez mindig megmarad!
  A Nemzetközi Űrállomáson is erő kell ahhoz, hogy egy nyugvó testet felgyorsítsunk.
- Súly: Mennyire nyomja a test az alátámasztást vagy húzza a felfüggesztést?
  Ez függ a környező gravitációs gyorsulástól, az alátámasztás mozgásától, ...

Súly és tömeg különbsége

A hétköznapi életben a „súly” és „tömeg” szavak szinonímák, de a fizikában nem!

- Tömeg: Mennyire nehéz gyorsítani a testet?
  Ez mindig megmarad!
  A Nemzetközi Űrállomáson is erő kell ahhoz, hogy egy nyugvó testet felgyorsítsunk.
- Súly: Mennyire nyomja a test az alátámasztást vagy húzza a felfüggesztést?
  Ez függ a környező gravitációs gyorsulástól, az alátámasztás mozgásától, ...

Példa: 100 kg-os test, súrlódásmentes, vízszintes felületen.

a) Hány N erővel nyomja a felületet?

b) Mekkora a gyorsulása, ha 1 N erővel toljuk?

	a)	b)
Föld	1000 N	0,01 m/s^2
Hold	163 N	0,01 m/s^2
Keringő űrállomás	0 N	0,01 m/s^2