Pontszerű testek kinematikája

(Fizika informatikusoknak változat)

Dr. Horváth András
Széchenyi István Egyetem, Fizika és Kémia Tanszék

v2026/0.96

Alapfogalmak a középiskolából

A középiskolai tudás felelevenítése hasznos lehet!

A legfontosabb tárgyalt témakörök:

- hely, elmozdulás, távolság és megtett út
- átlagsebesség és átlaggyorsulás
- pillanatnyi sebesség és gyorsulás
- mozgásegyenletek állandó sebességű és állandó gyorsulású mozgásra
- szabadesés, ferde hajítás
- körmozgás, centripetális és tangenciális gyorsulás

Kinematika és dinamika

A mechanika ágakra osztásának egyik lehetséges módja:

Kinematika

Dinamika

Kinematika és dinamika

A mechanika ágakra osztásának egyik lehetséges módja:

Kinematika

A mozgás leírása.

„Hogyan mozognak a dolgok?”

Dinamika

Kinematika és dinamika

A mechanika ágakra osztásának egyik lehetséges módja:

Kinematika

A mozgás leírása.

„Hogyan mozognak a dolgok?”

Dinamika

A mozgás okai.

„Miért mozognak a dolgok?”

Kinematika és dinamika

A mechanika ágakra osztásának egyik lehetséges módja:

Kinematika

A mozgás leírása.
„Hogyan mozognak a dolgok?”

Dinamika

A mozgás okai.
„Miért mozognak a dolgok?”

Jellemző fogalmak:

hely, elmozdulás
sebesség, gyorsulás

Kinematika és dinamika

A mechanika ágakra osztásának egyik lehetséges módja:

Kinematika	Dinamika
A mozgás leírása.	A mozgás okai.
„Hogyan mozognak a dolgok?”	„Miért mozognak a dolgok?”
Jellemző fogalmak:	
hely, elmozdulás	erő, impulzus, energia
sebesség, gyorsulás	Newton törvényei

Kinematika és dinamika

A mechanika ágakra osztásának egyik lehetséges módja:

Kinematika	Dinamika
A mozgás leírása.	A mozgás okai.
„Hogyan mozognak a dolgok?”	„Miért mozognak a dolgok?”
Jellemző fogalmak:	
hely, elmozdulás	erő, impulzus, energia
sebesség, gyorsulás	Newton törvényei

Más lehetséges ágak: statika – kinetika.

Összetett mozgások leírása

Valós testek: általában összetett mozgás! Példa: egy sétáló ember.

Összetett mozgások leírása

Valós testek: általában összetett mozgás! Példa: egy sétáló ember.

Ötlet a leírásra: néhány pont kiválasztása és követése.

(Tudományos kutatás, filmgyártás, ...)

Összetett mozgások leírása

Valós testek: általában összetett mozgás! Példa: egy sétáló ember.

Ötlet a leírásra: néhány pont kiválasztása és követése.

(Tudományos kutatás, filmgyártás, ...)

Néha egy 1-pontos közelítés is elegendő:

- egy molekula mozgása egy edényben
- egy lövedék mozgása
- a Föld keringése a Nap körül

Tömegpont (pontszerű test)

Egy testet „tömegpontnak” (pontszerű testnek) tekinthetünk, ha mérete sokkal kisebb, mint a pálya jellemző mérete, és a belső folyamatok nem befolyásolják a mozgást.

Tömegpont (pontszerű test)

Egy testet „tömegpontnak” (pontszerű testnek) tekinthetünk, ha mérete sokkal kisebb, mint a pálya jellemző mérete, és a belső folyamatok nem befolyásolják a mozgást.

Ez egy idealizáció!

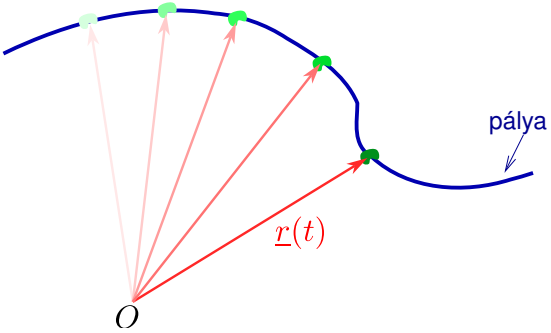
- A valóságban nincsenek ideális tömegpontok.
- A helyzettől függően ugyanazt a testet hol tömegpontnak tekinthetjük, hol nem.

Vonatkoztatási/viszonyítási pont, helyvektor

A mozgás leírása:

- Vonatkoztatási- vagy viszonyítási pont: O pont
  Mihez viszonyítjuk a mozgást.
  (pl. a terem egyik sarka, a 0-s kilométerkő, a Föld tömegközéppontja, ...)
- Helyvektor: $\underline{r}$ vektor
  A vonatkoztatási pontból a test helyére mutató vektor.
  (rajzzal vagy koordinátákkal)

Ez egy időpontra vonatkozik.
Mozgás: $\underline{r}(t)$ hely-idő függvény.



Pálya: azon pontok halmaza, ahova a test a mozgása során valaha eljut.

Kinematikai alapfogalmak

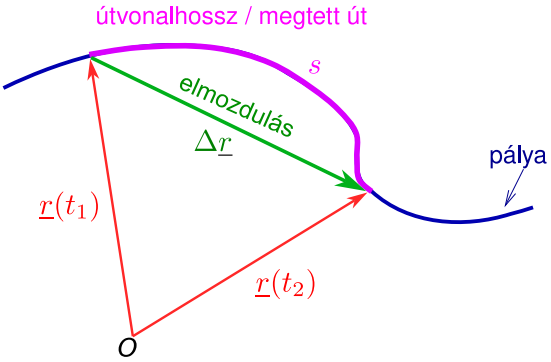
Elmozdulás: vektormennyiség

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)$$

Út: skalár mennyiség
A befutott pályadarab hossza.
Szemléletes, de matematikailag bonyolult!

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\underline{r}'(t)| dt$$

Analitikusan számolni bonyolult. (Nem fogunk ezen a kurzuson.)
Numerikusan: ha valamilyen formában adott $\underline{r}(t)$, akkor jól közelíthető.



További alapfogalmak

Átlagsebesség: vektormennyiség

$$\underline{v}(t_1,t_2) = \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$$

További alapfogalmak

Átlagsebesség: vektormennyiség

$$\underline{\overline{v}}(t_1,t_2) = \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$$

Átlagos sebességnagyság: skalár mennyiség
Az út és az idő hányadosa.

$$\frac{s(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

Nincs is külön jele, mert gyakran nem hordoz fizikailag használható információt.
(A köznyelv ezt nevezi átlagsebességnek!)

További alapfogalmak

Átlagsebesség: vektormennyiség

$$\underline{v}(t_1,t_2) = \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$$

Átlagos sebességnagyság: skalár mennyiség
Az út és az idő hányadosa.

$$\frac{s(t_1, t_2)}{t_2 - t_1}$$

Nincs is külön jele, mert gyakran nem hordoz fizikailag használható információt.
(A köznyelv ezt nevezi átlagsebességnek!)

A fogalmak pontos használata kötelező!!!
Köznapi értelemben sokszor keverednek ezek, de ezt fizikában nem szabad.

Komponensenkénti számolás

Vektorokat szerkeszteni tudunk. Számolás: vektor koordináták alapján.

- Origó: viszonyítási pont.
- Tengelyek: definiálni kell őket.
  Szabad választás $\Rightarrow$ egyszerűsítési lehetőségek.

$$\underline{r}(t) \qquad \text{helyett} \qquad (x(t), y(t), z(t))$$

Komponensenkénti számolás

Vektorokat szerkeszteni tudunk. Számolás: vektor koordináták alapján.

- Origó: viszonyítási pont.
- Tengelyek: definiálni kell őket.
  Szabad választás $\Rightarrow$ egyszerűsítési lehetőségek.

$$\underline{r}(t) \qquad \text{helyett} \qquad (x(t), y(t), z(t))$$

Koordináta-geometria: minden kiszámolható a komponensekből.

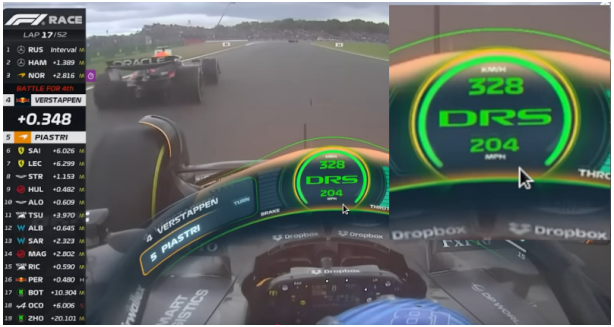
$$\text{Elmozdulás:} \qquad \Delta\underline{r} = \underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1) = (x(t_2) - x(t_1); y(t_2) - y(t_1); z(t_2) - z(t_1))$$

$$\text{Elmozdulás nagysága:} \quad |\Delta\underline{r}| = \Delta r = \sqrt{(x(t_2) - x(t_1))^2 + (y(t_2) - y(t_1))^2 + (z(t_2) - z(t_1))^2}$$

Jelölés: vektor abszolút értéke = vektor jele aláhúzás nélkül.

Sebesség egy adott pillanatban?

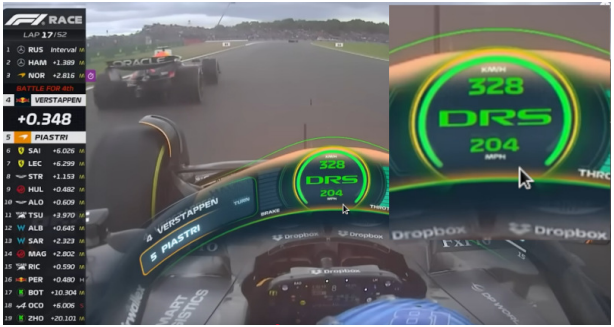
Mit jelent a „328 km/h” ezen a sebességmérőn? Sebesség egy adott időpontban? A $\overline{v} = \Delta x / \Delta t$ értelmetlen $\Delta t = 0$ esetén!



328 km távolság 1 óra alatt? Nem!
$\Delta t = 1\,\mathrm{h}$ több mint egy fél verseny!

Sebesség egy adott pillanatban?

Mit jelent a „328 km/h” ezen a sebességmérőn? Sebesség egy adott időpontban? A $\overline{v} = \Delta x/\Delta t$ értelmetlen $\Delta t = 0$ esetén!

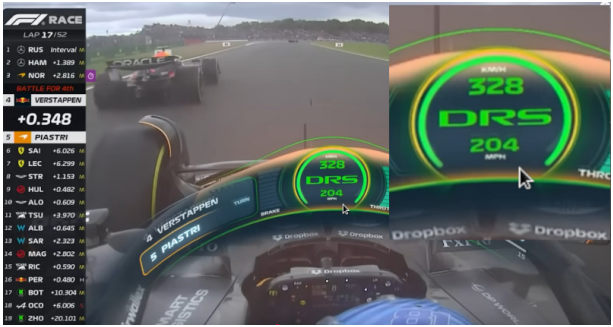


328 km távolság 1 óra alatt? Nem!
$\Delta t = 1\,\mathrm{h}$ több mint egy fél verseny!

$\Delta x = 91{,}1\,\mathrm{m}$ 1 s alatt? Majdnem.
$\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ alatt sok minden történhet a Forma-1-ben.

Sebesség egy adott pillanatban?

Mit jelent a „328 km/h” ezen a sebességmérőn? Sebesség egy adott időpontban? A $\overline{v} = \Delta x/\Delta t$ értelmetlen $\Delta t = 0$ esetén!



328 km távolság 1 óra alatt? Nem!
$\Delta t = 1\,\mathrm{h}$ több mint egy fél verseny!

$\Delta x = 91{,}1\,\mathrm{m}$ 1 s alatt? Majdnem.
$\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ alatt sok minden történhet a Forma-1-ben.

$\Delta x = 91{,}1\,\mathrm{mm}$ 0,001 s alatt? Jó tipp.
$\Delta t = 0{,}001\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{ms}$ alatt nem történnek jelentős változások.

A telemetriai adatok tipikus időlépése a Forma-1-ben: 2–5 ms a mozgási paraméterekre.

A pillanatnyi sebesség származása

Fizikai, közelítő meghatározás:

Pillanatnyi sebesség alatt egy olyan rövid idő átlagsebességét értjük, mely alatt a mozgás nem változik meg lényegesen.

A pillanatnyi sebesség származása

Fizikai, közelítő meghatározás:

Pillanatnyi sebesség alatt egy olyan rövid idő átlagsebességét értjük, mely alatt a mozgás nem változik meg lényegesen.

Matematika:

- Átlagsebesség: a hely-idő függvény differenciahányadosa.

$$\underline{\overline{v}}(t_1,t_2) = \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$$

A pillanatnyi sebesség származása

Fizikai, közelítő meghatározás:

Pillanatnyi sebesség alatt egy olyan rövid idő átlagsebességét értjük, mely alatt a mozgás nem változik meg lényegesen.

Matematika:

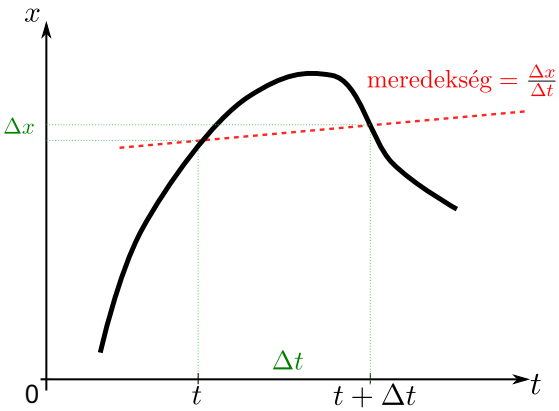
- Átlagsebesség: a hely-idő függvény differenciahányadosa.

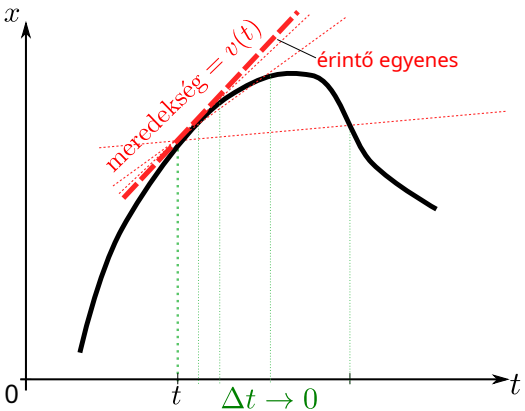
$$\underline{\overline{v}}(t_1,t_2) = \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t}$$

- Pillanatnyi sebesség: a hely-idő függvény differenciálhányadosa vagy idő szerinti deriváltja.

$$\underline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \underline{r}}{\Delta t} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{r}'$$

A pillanatnyi sebesség grafikonokon egy komponensre

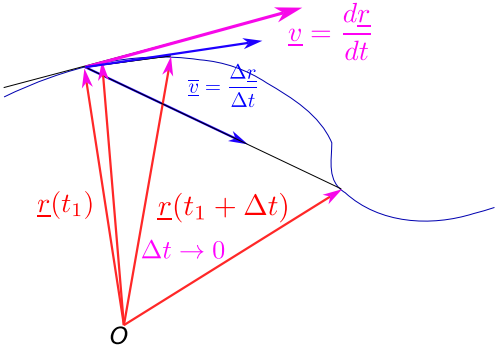




Ahogy Δt a 0-hoz közelít, a szelő egyenes az érintő egyeneshez közelít.

Az érintő egyenes meredeksége az $x(t)$ grafikonon a pillanatnyi sebesség értékét mutatja.

A pillanatnyi sebesség vektor ábrázolása

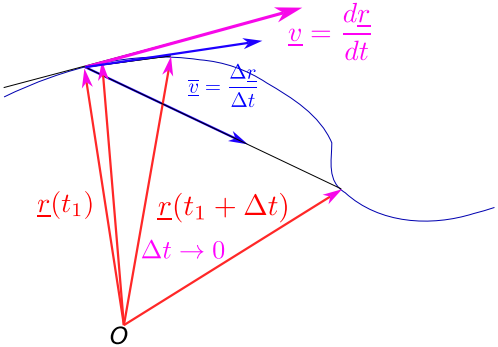


Átlagsebesség: $\Delta \underline{r}$ irányú.

Pillanatnyi sebesség: érintő irányú.

Indoklás: ahogy egyre rövidebb időre számoljuk az átlagsebességet, úgy lesz az elmozdulás egyre jobban érintő-irányú.

A pillanatnyi sebesség vektor ábrázolása



Átlagsebesség: $\Delta \underline{r}$ irányú.
Pillanatnyi sebesség: érintő irányú.
Indoklás: ahogy egyre rövidebb időre számoljuk az átlagsebességet, úgy lesz az elmozdulás egyre jobban érintő-irányú.

A pálya vonalából csak a sebességvektor iránya (érintő) következik!
A nagysága a test haladási ütemétől függ.
(Azonos pályán más-más ütemben is végighaladhatunk.)

A gyorsulás fogalma

Az előzőekhez hasonlóan:

Átlagos gyorsulás:

$$\overline{\underline{a}}(t_1,t_2) = \frac{\underline{v}(t_2) - \underline{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t}$$

A gyorsulás fogalma

Az előzőekhez hasonlóan:

Átlagos gyorsulás:

$$\overline{\underline{a}}(t_1,t_2) = \frac{\underline{v}(t_2) - \underline{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t}$$

Pillanatnyi gyorsulás:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{v}'$$

A gyorsulás fogalma

Az előzőekhez hasonlóan:

Átlagos gyorsulás:

$$\overline{\underline{a}}(t_1,t_2) = \frac{\underline{v}(t_2) - \underline{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \underline{v}}{\Delta t}$$

Pillanatnyi gyorsulás:

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{v}'$$

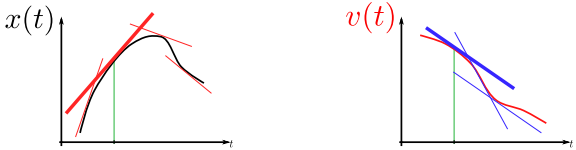
A sebesség a hely idő szerinti deriváltja, a gyorsulás a sebesség idő szerinti deriváltja.

$\Rightarrow$ A gyorsulás a hely idő szerinti második deriváltja.

$$\underline{a} = \frac{d^2\underline{r}}{dt^2} = \underline{r}''$$

Gyorsulás: megjegyzések

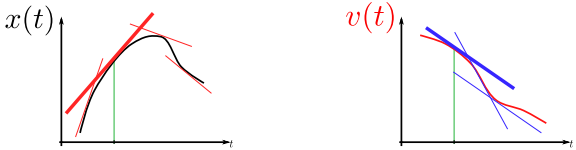
Grafikus jelentés: a gyorsulás az érintő meredeksége a $v(t)$ grafikonon.



$$x(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} v(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} a(t)$$

Gyorsulás: megjegyzések

Grafikus jelentés: a gyorsulás az érintő meredeksége a $v(t)$ grafikonon.



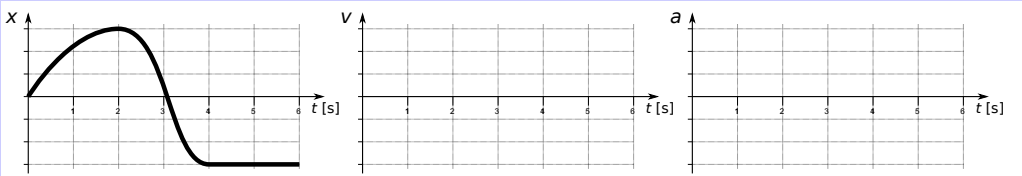
$$x(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} v(t) \xrightarrow{\frac{d}{dt}} a(t)$$

Mértékegységek:

$$[x] = \mathrm{m} \qquad [v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad [a] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Példa kvalitatív $v(t)$ és $a(t)$ grafikon rajzolásra.

Egy test hely-idő grafikonja adott az ábrán.

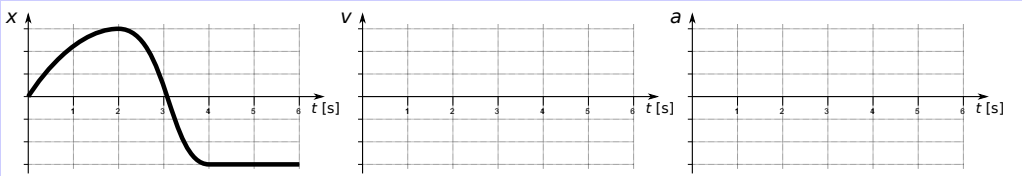


Vázolja fel közelítőleg a sebesség-idő és gyorsulás-idő grafikonokat!

- *Mely időpontokban lesz a test sebessége 0?*
- *Kb. mikor a legnagyobb a pillanatnyi sebesség abszolút értéke?*
- *Milyen időintervallumban negatív a gyorsulása?*

Példa kvalitatív $v(t)$ és $a(t)$ grafikon rajzolásra.

Egy test hely-idő grafikonja adott az ábrán.

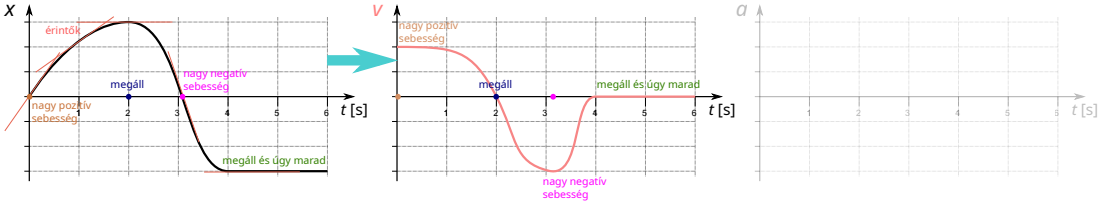


Vázolja fel közelítőleg a sebesség-idő és gyorsulás-idő grafikonokat!

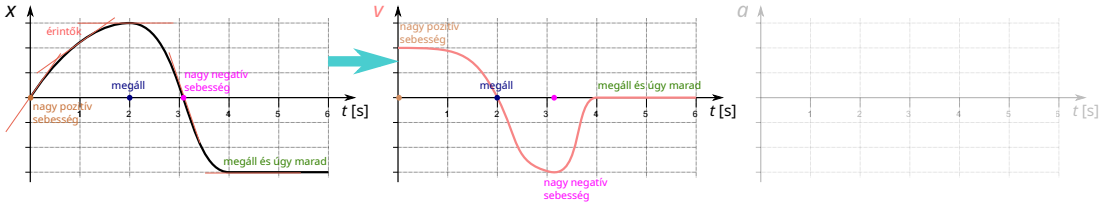
- *Mely időpontokban lesz a test sebessége 0?*
- *Kb. mikor a legnagyobb a pillanatnyi sebesség abszolút értéke?*
- *Milyen időintervallumban negatív a gyorsulása?*

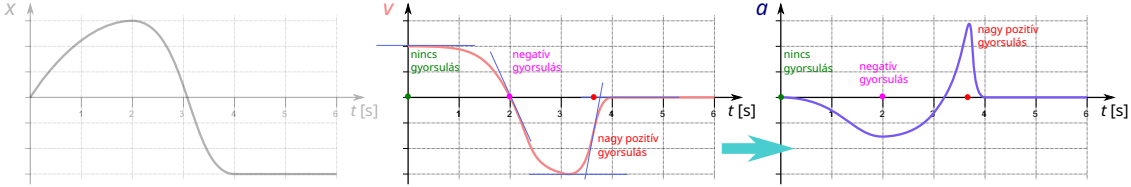
Megoldás: A helyi érintők meredekségének becslésével. (Nehezen adható vissza prezentációban a rajzolás menete.)

Példa kvalitatív $v(t)$ és $a(t)$ grafikon rajzolásra: folytatás.



Példa kvalitatív $v(t)$ és $a(t)$ grafikon rajzolásra: folytatás.





Példa kvalitatív $v(t)$ és $a(t)$ grafikon rajzolásra: folytatás.

- *Mely időpontokban lesz a test sebessége 0?* $t = 2$-kor és $t \geq 4$-re végig.
- *Kb. mikor a legnagyobb a pillanatnyi sebesség abszolút értéke?* $t = 3$ körül. (Itt a legnagyobb a meredekség abszolút értéke)
- *Milyen időintervallumban negatív a gyorsulása?* Kb. 0 és 3 s között.

Speciális 1D mozgás

Egy test hely-idő függvénye:

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

Adja meg a sebességét és a gyorsulását!

Speciális 1D mozgás

Egy test hely-idő függvénye:

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

Adja meg a sebességét és a gyorsulását!

Megoldás: A sebesség a hely idő szerinti deriváltja:

$$v(t) = (x(t))' = \frac{dx}{dt} = \frac{a}{2}2t + v_0 + 0 = at + v_0$$

A gyorsulás pedig a sebesség deriváltja:

$$a(t) = (v(t))' = a + 0 = a$$

Ez tehát az egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás.

2D mozgás leírása

Egy xy-síkban mozgó test koordinátái az idő függvényében:

$$x(t) = 6t \qquad y(t) = 5 - 3t - 5t^2$$

Adja meg sebességének nagyságát az idő függvényében!

2D mozgás leírása

Egy xy-síkban mozgó test koordinátái az idő függvényében:

$$x(t) = 6t \qquad y(t) = 5 - 3t - 5t^2$$

Adja meg sebességének nagyságát az idő függvényében!

Megoldás: Külön-külön ki kell számolni a sebesség komponenseit:

$$v_x(t) = (x(t))' = (6t)' = 6$$

$$v_y(t) = (y(t))' = (5 - 3t - 5t^2)' = 0 - 3 - 10t$$

A Pithagorasz-tétel szerint:

$$|\underline{v}(t)| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{6^2 + (-3 - 10t)^2} =$$

$$= \sqrt{100t^2 + 60t + 45}$$

FIGYELEM! Gyakori hibák!!

Hallgatók tipikus hibái: régen tanult mondókákat mondogatnak és rosszul alkalmazzák.
Pl. egy tipikus rossz mondóka: „A sebesség az út és az idő hányadosa: $v = x/t$".
Egy csak és kizárólag az origóból induló egyenes vonalú egyenletes mozgásra igaz! általános alkalmazása téves!

FIGYELEM! Gyakori hibák!!

Hallgatók tipikus hibái: régen tanult mondókákat mondogatnak és rosszul alkalmazzák.
Pl. egy tipikus rossz mondóka: „A sebesség az út és az idő hányadosa: $v = x/t$".
Egy csak és kizárólag az origóból induló egyenes vonalú egyenletes mozgásra igaz! általános alkalmazása téves!
Másik változat: „A gyorsulás a sebesség és az idő hányadosa: $a = v/t$"

FIGYELEM! Gyakori hibák!!

Hallgatók tipikus hibái: régen tanult mondókákat mondogatnak és rosszul alkalmazzák.
Pl. egy tipikus rossz mondóka: „A sebesség az út és az idő hányadosa: $v = x/t$".
Egy csak és kizárólag az origóból induló egyenes vonalú egyenletes mozgásra igaz! általános alkalmazása téves!
Másik változat: „A gyorsulás a sebesség és az idő hányadosa: $a = v/t$"
Ne is vesztegessük rá a szót: felejtsük el!

FIGYELEM! Gyakori hibák!!

Hallgatók tipikus hibái: régen tanult mondókákat mondogatnak és rosszul alkalmazzák.
Pl. egy tipikus rossz mondóka: „A sebesség az út és az idő hányadosa: $v = x/t$".
Egy csak és kizárólag az origóból induló egyenes vonalú egyenletes mozgásra igaz! általános alkalmazása téves!
Másik változat: „A gyorsulás a sebesség és az idő hányadosa: $a = v/t$"
Ne is vesztegessük rá a szót: felejtsük el!

Aki akarja, alkalmazza ezeket a képleteket az előző feladatokra, és meglátja a különbséget.

A fordított irány

$\underline{r}(t)$-ből $\underline{v}(t)$: deriválással. (Egyértelmű művelet.)
$\underline{v}(t)$-ből $\underline{r}(t)$: ???

A fordított irány

$\underline{r}(t)$-ből $\underline{v}(t)$: deriválással. (Egyértelmű művelet.)
$\underline{v}(t)$-ből $\underline{r}(t)$: ???

Matematika nélkül: nem lehet a helyet megkapni, ha csak a sebességet ismerjük!
Pl: „Egy autó az M1-esen fél óráig egyenletesen 90 km/h-val megy. Hol van most?”

A fordított irány

$\underline{r}(t)$-ből $\underline{v}(t)$: deriválással. (Egyértelmű művelet.)
$\underline{v}(t)$-ből $\underline{r}(t)$: ???

Matematika nélkül: nem lehet a helyet megkapni, ha csak a sebességet ismerjük!
Pl: „Egy autó az M1-esen fél óráig egyenletesen 90 km/h-val megy. Hol van most?"

- Nyilván 45 km utat tett meg.
- Ha nem tudjuk, honnan indult, nem tudjuk hol van most.

A fordított irány

$\underline{r}(t)$-ből $\underline{v}(t)$: deriválással. (Egyértelmű művelet.)
$\underline{v}(t)$-ből $\underline{r}(t)$: ???

Matematika nélkül: nem lehet a helyet megkapni, ha csak a sebességet ismerjük!
Pl: „Egy autó az M1-esen fél óráig egyenletesen 90 km/h-val megy. Hol van most?"

- Nyilván 45 km utat tett meg.
- Ha nem tudjuk, honnan indult, nem tudjuk hol van most.

Matematikailag: a deriválás fordítottja nem egyértelmű!
Végtelen sok hely-idő függvény deriváltja lehet ugyanaz a sebesség-idő függvény. Ok: Ha egy függvényhez bármilyen konstanst adunk, a deriváltja nem változik.
Pl.: $(5t+3)' = (5t)' = (5t+\pi^2)' = \cdots = 5$

Matematikailag

A sebesség-idő függvény határozatlan integrálja a hely, de ez egy integrációs állandó erejéig bizonytalan:

$$\underline{r}(t) = \int \underline{v}(t)dt + C$$

A sebesség-idő függvény határozott integrálja az elmozdulás:

$$\Delta\underline{r} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{v}(t)dt$$

(Lásd a kamionos példát.)

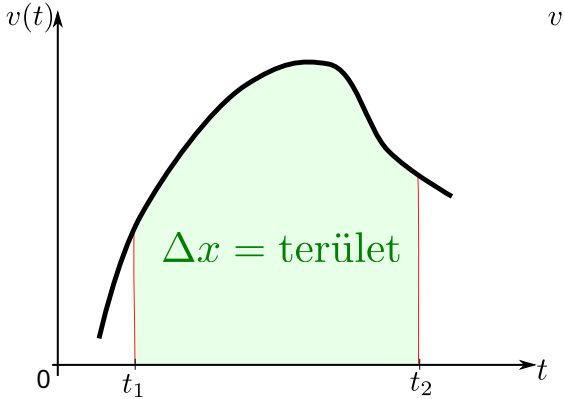
Ha ismerjük a helyet kezdetben, akkor megkapható a hely-idő függvény:

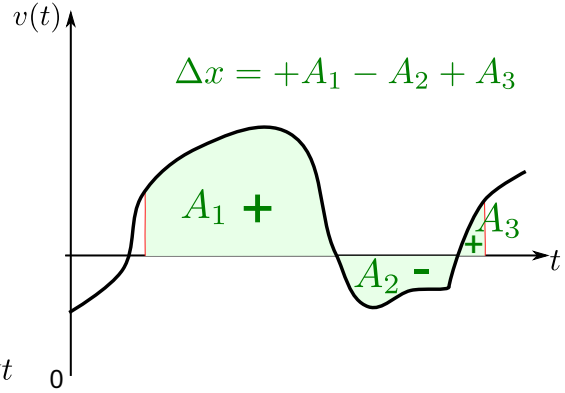
$$\underline{r}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \underline{v}(t)dt + \underline{r}(t_0)$$

(Számítások: komponensenként.)

Grafikus jelentés

Az elmozdulás a t-tengely és a $v(t)$ grafikonja közötti előjeles terület.





A negatív előjel oka: ahol $v(t) < 0$, ott a test a negatív irányba mozog, ezért az elmozdulás negatív.

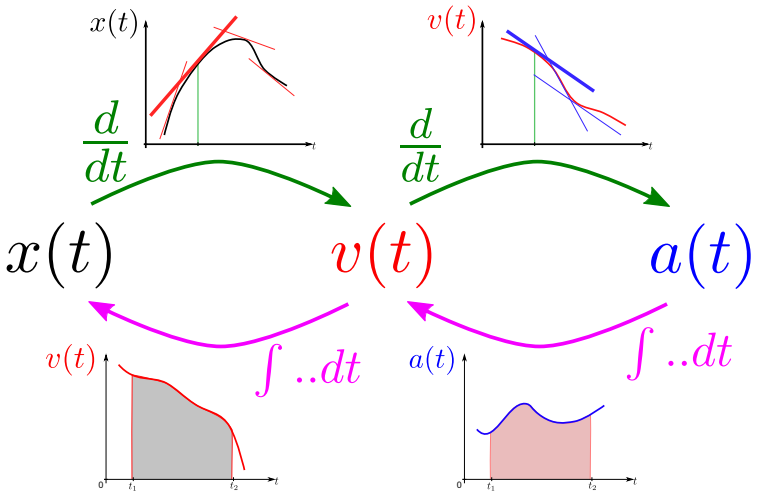
Gyorsulásból sebesség számolása

Hasonló a kapcsolat, mint a hely és a sebesség közt:
A sebesség deriváltja a gyorsulás⇒ a gyorsulás határozott integrálja a sebesség-változás lesz.

$$\Delta \underline{v} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{a}(t)dt; \qquad \underline{v}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \underline{a}(t)dt + \underline{v}(t_0)$$

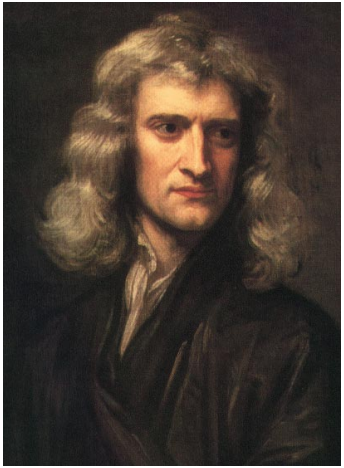
Továbbá: $a(t)$ grafikonja alatti előjeles terület-összeg megadja Δv-t.

Grafikus összefoglalás



Segítség a memorizálásban: mértékegységek.
Például: $[dv/dt] = [v]/[t] = (\mathrm{m/s})/\mathrm{s} = \mathrm{m/s}^2$
$\Rightarrow$ a sebesség deriváltja a gyorsulás.

Történeti kitérő



A mechanika alapfogalmai csak a differenciálszámítás segítségével érthetők meg.

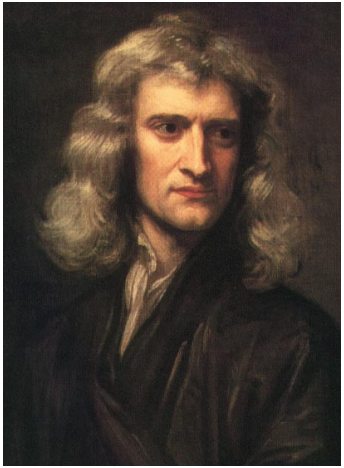
Ezek kifejlődése egymással párhuzamosan történt.

Egyik jelentős tudós: Sir Isaac Newton (1643–1727)

Többek között a differenciál- és integrálszámítás egyik fő megalapozója és a modern mechanika megalapozója.

Fizikatörténet: Már az 1300-as években megvoltak a mechanika alapgondolatai (Jean Buridan, Nicole d'Oresme).

Történeti kitérő



A mechanika alapfogalmai csak a differenciálszámítás segítségével érthetők meg.
Ezek kifejlődése egymással párhuzamosan történt.
Egyik jelentős tudós: Sir Isaac Newton (1643–1727)
Többek között a differenciál- és integrálszámítás egyik fő megalapozója és a modern mechanika megalapozója.
Fizikatörténet: Már az 1300-as években megvoltak a mechanika alapgondolatai (Jean Buridan, Nicole d'Oresme).

Differenciál- és integrálszámítás: Sok más területen is fontos!
Analitikusan: deriválni könnyű, integrálni nehéz.
Numerikusan: mindegyikre kész eljárások vannak kifejlesztve.
Amit mindenképp tudni kell: Mikor melyiket kell alkalmazni?

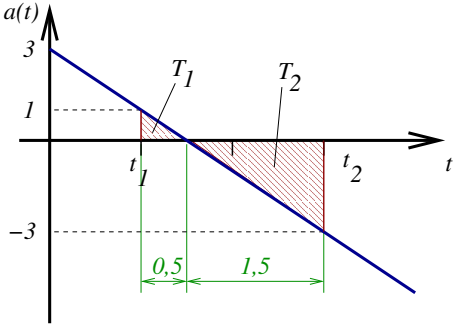
Példa

Egy test gyorsulás-idő függvénye SI-egységekben a következő: $a(t) = 3 - 2t$. *Tudjuk, hogy a test* $t_1 = 1$*-kor* $5\,m/s$ *sebességgel mozgott. Mekkora a sebessége* $t_2 = 3$*-kor?*

Példa

Egy test gyorsulás-idő függvénye SI-egységekben a következő: $a(t) = 3 - 2t$. Tudjuk, hogy a test $t_1 = 1$-kor $5\,m/s$ sebességgel mozgott. Mekkora a sebessége $t_2 = 3$-kor?

Megoldás:



A grafikon alatti terület két háromszögre bomlik:

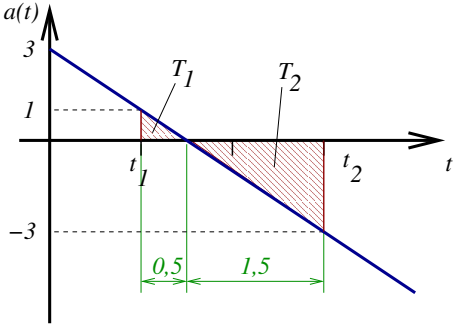
T_1: Alap: $1{,}5 - 1 = 0{,}5$, magasság: 1

T_2: Alap: $3 - 1{,}5 = 1{,}5$, magasság: 3

Példa

Egy test gyorsulás-idő függvénye SI-egységekben a következő: $a(t) = 3 - 2t$. Tudjuk, hogy a test $t_1 = 1$-kor $5\,m/s$ sebességgel mozgott. Mekkora a sebessége $t_2 = 3$-kor?

Megoldás:



A grafikon alatti terület két háromszögre bomlik:

T_1: Alap: $1{,}5 - 1 = 0{,}5$, magasság: 1

T_2: Alap: $3 - 1{,}5 = 1{,}5$, magasság: 3

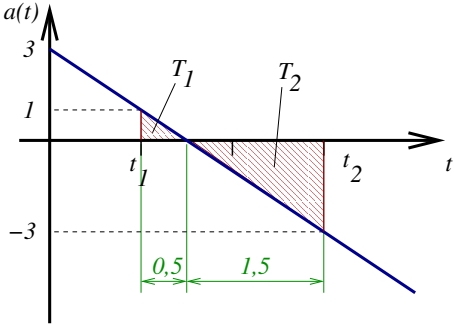
Előjel-helyesen:

$$\Delta v = T_1 - T_2 = \frac{0{,}5 \cdot 1}{2} - \frac{1{,}5 \cdot 3}{2} = -2$$

Példa

Egy test gyorsulás-idő függvénye SI-egységekben a következő: $a(t) = 3 - 2t$. Tudjuk, hogy a test $t_1 = 1$-kor 5 m/s sebességgel mozgott. Mekkora a sebessége $t_2 = 3$-kor?

Megoldás:



A grafikon alatti terület két háromszögre bomlik:

T_1: Alap: $1{,}5 - 1 = 0{,}5$, magasság: 1

T_2: Alap: $3 - 1{,}5 = 1{,}5$, magasság: 3

Előjel-helyesen:

$$\Delta v = T_1 - T_2 = \frac{0{,}5 \cdot 1}{2} - \frac{1{,}5 \cdot 3}{2} = -2$$

Mivel $v(t_1) = 5\,\mathrm{m/s}$, ezért:

$$v(t_2) = v(t_1) + \Delta v = 3\,\mathrm{m/s}.$$

Példamegoldás integrálással

Az előző feladat megoldása integrálással:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt =$$

Példamegoldás integrálással

Az előző feladat megoldása integrálással:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = \int_1^3 (3-2t)dt = \left[3t - t^2\right]_1^3 = 3\cdot 3 - 3^2 - (3\cdot 1 - 1^2) = -2$$

Példamegoldás integrálással

Az előző feladat megoldása integrálással:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = \int_1^3 (3-2t)dt = \left[3t - t^2\right]_1^3 = 3\cdot 3 - 3^2 - (3\cdot 1 - 1^2) = -2$$

Mivel $v(t_1) = 5\,\mathrm{m/s}$, ezért nyilván: $v(t_2) = v(t_1) + \Delta v = 3\,\mathrm{m/s}$.

Példamegoldás integrálással

Az előző feladat megoldása integrálással:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = \int_1^3 (3-2t)dt = \left[3t - t^2\right]_1^3 = 3\cdot 3 - 3^2 - (3\cdot 1 - 1^2) = -2$$

Mivel $v(t_1) = 5\,\mathrm{m/s}$, ezért nyilván: $v(t_2) = v(t_1) + \Delta v = 3\,\mathrm{m/s}$.

Példamegoldás integrálással

Az előző feladat megoldása integrálással:

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = \int_1^3 (3-2t)dt = \left[3t - t^2\right]_1^3 = 3\cdot 3 - 3^2 - (3\cdot 1 - 1^2) = -2$$

Mivel $v(t_1) = 5\,\mathrm{m/s}$, ezért nyilván: $v(t_2) = v(t_1) + \Delta v = 3\,\mathrm{m/s}$.

Az integrál-számításos módszer gyorsabb!

A grafikonoshoz sok idő elmegy a pontos grafikon-rajzolásra, a zérushely megkeresésére, stb. És ha nem egyenes darabokból áll a grafikon, akkor a terület-képlet sem ismert.

Egy analitikusan megoldható példa

Egy egyenes mentén mozgó test sebesség-idő függvénye: $v(t) = 4t^2 - 1{,}5t$ *és* $t = 0$*-kor az origóban van.*

- *Milyen időpontokban 0 a sebessége?*
- *Mikor 0 a gyorsulása?*
- *Mikor lesz újra az origóban?*

Egy analitikusan megoldható példa

Egy egyenes mentén mozgó test sebesség-idő függvénye: $v(t) = 4t^2 - 1{,}5t$ *és* $t = 0$*-kor az origóban van.*

- *Milyen időpontokban 0 a sebessége?*
- *Mikor 0 a gyorsulása?*
- *Mikor lesz újra az origóban?*

Megoldás: A sebesség akkor 0, ha $v(t) = 4t^2 - 1{,}5t = 0$.

- triviális megoldás: $t_1 = 0$
- másik megoldás: $t \neq 0$-val való osztás után:

$$4t_2 - 1{,}5 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = 1{,}5/4 = 0{,}375\,\mathrm{s}.$$

A test sebessége tehát a $t_1 = 0$ és a $t_2 = 0{,}375\,\mathrm{s}$ időpontokban 0.

Egy analitikusan megoldható példa: folytatás

Gyorsulás = a sebesség deriváltja:

$$a(t) = v'(t) = 4 \cdot 2t - 1{,}5$$

Ha ez 0, akkor $8t_3 - 1{,}5 = 0$, azaz $t_3 = 1{,}5/8 = 0{,}1875\,\mathrm{s}$.
A test gyorsulása tehát a $t_3 = 0{,}1875\,\mathrm{s}$ időpontban 0.

Egy analitikusan megoldható példa: folytatás

Gyorsulás = a sebesség deriváltja:

$$a(t) = v'(t) = 4 \cdot 2t - 1{,}5$$

Ha ez 0, akkor $8t_3 - 1{,}5 = 0$, azaz $t_3 = 1{,}5/8 = 0{,}1875\,\mathrm{s}$.
A test gyorsulása tehát a $t_3 = 0{,}1875\,\mathrm{s}$ időpontban 0.

Hely-idő függvény: sebesség-idő függvény integrálásával. Origóból indult a test: $x(0) = 0$.

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')dt' = 0 + \left[4 \cdot \frac{t'^3}{3} - 1{,}5 \cdot \frac{t'^2}{2}\right]_0^t = \frac{4}{3}t^3 - \frac{1{,}5}{2}t^2.$$

Origóba visszaérés: $x(t_4) = (4/3)t_4^3 - (1{,}5/2)t_4^2 = 0$, (a triviális $t_4 = 0$-n kívül:)
$\Rightarrow t_4 = (1{,}5/2) \cdot (3/4) = 0{,}5625$.
A test tehát $t_4 = 0{,}5625\,\mathrm{s}$-kor ér vissza az origóba.

Mozgás-adatok megadása táblázatokkal

A gyakorlatban sokszor nem ismerjük a hely-, sebesség-, gyorsulás-függvények formuláját, hanem bizonyos időbeli gyakorisággal mérési adataink vannak.

- Mobil telefon GPS egysége $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$-onként rögzíti a földrajzi koordinátákat.
  $\Rightarrow$ $1\,\mathrm{s}$-onként x, y és z számolható.
- Mobil telefon gyorsulásmérője $\Delta t = 0{,}01\,\mathrm{s}$-onként rögzíti a gyorsulás-adatokat.
  $\Rightarrow$ $0{,}01\,\mathrm{s}$-onként a_x, a_y, a_z mérhető.

Mozgás-adatok megadása táblázatokkal

A gyakorlatban sokszor nem ismerjük a hely-, sebesség-, gyorsulás-függvények formuláját, hanem bizonyos időbeli gyakorisággal mérési adataink vannak.

- Mobil telefon GPS egysége $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$-onként rögzíti a földrajzi koordinátákat.
  $\Rightarrow$ $1\,\mathrm{s}$-onként x, y és z számolható.
- Mobil telefon gyorsulásmérője $\Delta t = 0{,}01\,\mathrm{s}$-onként rögzíti a gyorsulás-adatokat.
  $\Rightarrow$ $0{,}01\,\mathrm{s}$-onként a_x, a_y, a_z mérhető.

Numerikus közelítés: a bemenő függvények túl bonyolultak, ezért nem tudjuk őket deriválni/integrálni.
$\Rightarrow$ Adott Δt-vel táblázatot generálunk a függvény-értékekből és ebből számolunk.

Mozgás-adatok megadása táblázatokkal

A gyakorlatban sokszor nem ismerjük a hely-, sebesség-, gyorsulás-függvények formuláját, hanem bizonyos időbeli gyakorisággal mérési adataink vannak.

- Mobil telefon GPS egysége $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$-onként rögzíti a földrajzi koordinátákat.
  $\Rightarrow$ $1\,\mathrm{s}$-onként x, y és z számolható.
- Mobil telefon gyorsulásmérője $\Delta t = 0{,}01\,\mathrm{s}$-onként rögzíti a gyorsulás-adatokat.
  $\Rightarrow$ $0{,}01\,\mathrm{s}$-onként a_x, a_y, a_z mérhető.

Numerikus közelítés: a bemenő függvények túl bonyolultak, ezért nem tudjuk őket deriválni/integrálni.
$\Rightarrow$ Adott Δt-vel táblázatot generálunk a függvény-értékekből és ebből számolunk.

Hogyan lehet pl. táblázattal adott hely-koordinátákból sebességet számolni?
(közelítőleg)

Probléma felvetés

Adott egy táblázat idő- és koordináta-adatokkal: t_i, x_i adatok $i = 0, 1, ..., n$.

i	0	1	2	3	...	n
t_i [s]	0.0	0.1	0.2	0.3	...	10.0
x_i [m]	3.65	4.86	5.12	5.1	...	2.34

Hogyan lesznek ebből közelítő v_i és a_i adataink?

Vagy: Hogyan lesznek a_i adatokból v_i, majd x_i adatok?

Ha ezt tisztázzuk, akkor már 3 komponenssel is menni fog.

Numerikus deriválás: legegyszerűbb módszer

Numerikus deriválás: $$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Elmélet: ez a módszer a legpontosabban az időszakasz közepén közelíti a deriváltat.

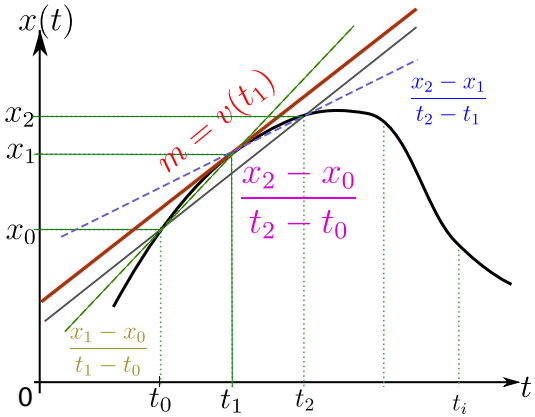
$\Rightarrow$ Az idősor közepén

$v_i \approx (x_{i+1} - x_{i-1})/(t_{i+1} - t_{i-1})$.

A széleken pontatlanabb közelítés. Pl.

$v_0 \approx (x_1 - x_0)/(t_1 - t_0)$.

Hasonlóan lehet v_i-kből a_i-ket számolni.



Numerikus deriválás: legegyszerűbb módszer

Numerikus deriválás: $\dfrac{dx}{dt} \approx \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Elmélet: ez a módszer a legpontosabban az időszakasz közepén közelíti a deriváltat.

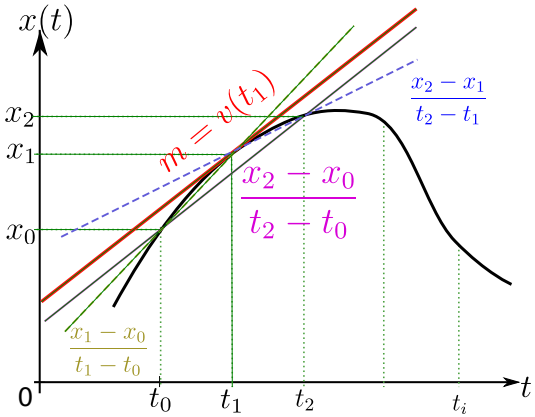
$\Rightarrow$ Az idősor közepén

$v_i \approx (x_{i+1} - x_{i-1})/(t_{i+1} - t_{i-1})$.

A széleken pontatlanabb közelítés. Pl.

$v_0 \approx (x_1 - x_0)/(t_1 - t_0)$.

Hasonlóan lehet v_i-kből a_i-ket számolni.



Pontosság növelése: sűrűbb időmérések, kisebb Δt_i.

Vigyázat! Nem szabad túlzásba vinni ezt, mert a kerekítési hibák hatása megnőhet!

Numerikus integrálás: legegyszerűbb módszer

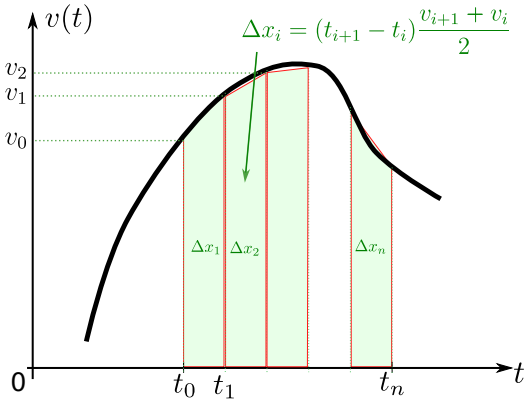
Közelítés alapja: a görbe alatti terület trapézokkal való közelítése. t_1 és t_{i+1} közti trapéz területe:

$$T_i = (t_{i+1} - t_i)\frac{v_{i+1} + v_i}{2}$$

Teljes integrál közelítése:

$$x(t_n) = x_0 + \int_{t_0}^{t_n} v(t)dt \approx$$

$$x_0 + \approx \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i)\frac{v_{i+1} + v_i}{2}$$



$\Rightarrow$ t_i, v_i adatok + x_0 (kezdőpont) $\Rightarrow$ x_n

Hasonlóan: t_i, a_i adatok + v_0 (kezdőseb.) $\Rightarrow$ v_i

Megtett út közelítése

A megtett út közelítős számítását nem bonthatjuk komponensekre!
Két, egymást követő időpont közt.

Elmozdulásvektor: $\Delta \underline{r}_i = (x_{i+1} - x_i;\ y_{i+1} - y_i;\ z_{i+1} - z_i)$

Út hossza közelítőleg: $s_i \approx |\Delta \underline{r}_i| = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}$

A közelítés jó, ha az egyes szakaszokon a pálya közel egyenes.
Teljes úthossz közelítése: (az előzőek összegzése)

$$s(t_0, t_n) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}$$

Pontosabb módszerek

A numerikus deriválásra és integrálásra sokkal jobb módszerek is léteznek.

- több alappont felhasználásával készülő közelítések
- a mérési adatokra függvény illesztése, majd ebből való számolás

Pontosabb módszerek

A numerikus deriválásra és integrálásra sokkal jobb módszerek is léteznek.

- több alappont felhasználásával készülő közelítések
- a mérési adatokra függvény illesztése, majd ebből való számolás

---

Az ebben a tárgyban alkalmazott módszerek:

- függvénnyel adott bemenet esetén kis Δt-re a fenti módszerek
- mérési adatokkal adott bemenet esetén függvényillesztés (simítással) és ebből való számolás

A számításokat a NumPy rutinjaival fogjuk végeztetni.

Egyenes vonalú egyenletes mozgás

Állandó sebességgel haladó test mozgása.
1D-ben:

$$x(t) = x_0 + v \cdot t$$

$$v(t) = v = \text{áll.}$$

$$a(t) = 0.$$

Térben: hasonlóan a többi irányban is.

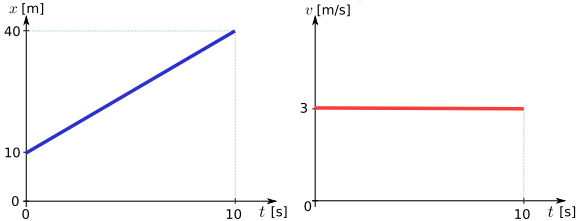
Elmozdulás:

$$\Delta(x) = x(t_2) - x(t_1) = v(t_2 - t_1)$$

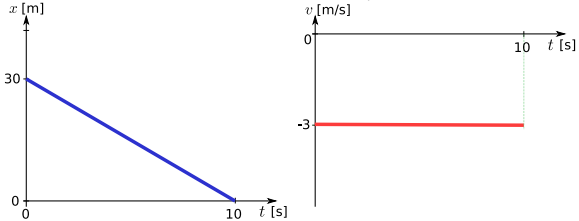
Átlagsebesség:

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v.$$

$x_0 = 10\,\text{m},\ v = 3\,\text{m/s}.$



$x_0 = 30\,\text{m},\ v = -3\,\text{m/s}.$



Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás

Például: szabadon eső test. (ha a közegellenállás elhanyagolható)
Általában: állandó erő hatásának kitett test.

1D-ben:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2}t^2$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

$$a(t) = a = \text{áll.}$$

Bebizonyítható, hogy ebben az esetben egy tetszőleges időszakasz átlagsebessége egyenlő az időszakasz közepi sebességgel:

$$\overline{v}(t_1, t_2) = v\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right)$$

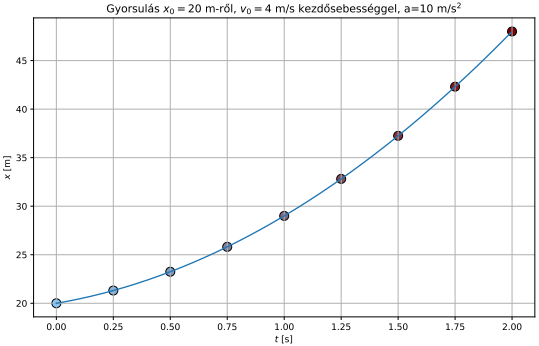
továbbá az intervallum eleji és végi sebességek átlagával:

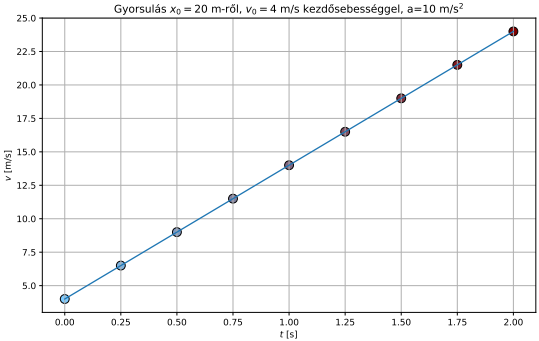
$$\overline{v}(t_1, t_2) = \frac{v(t_1) + v(t_2)}{2}$$

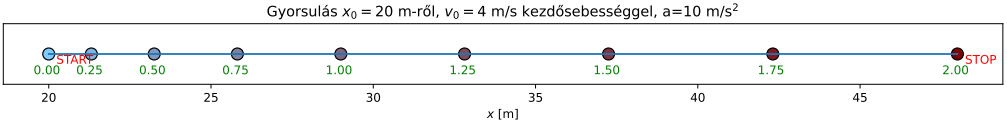
Figyelem! Ezek az egyenletek csak állandó gyorsulás esetén teljesülnek!

Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás: példa

$$x_0 = 20\,\mathrm{m},\ v_0 = 4\,\mathrm{m/s},\ a = 10\,\mathrm{m/s^2}$$

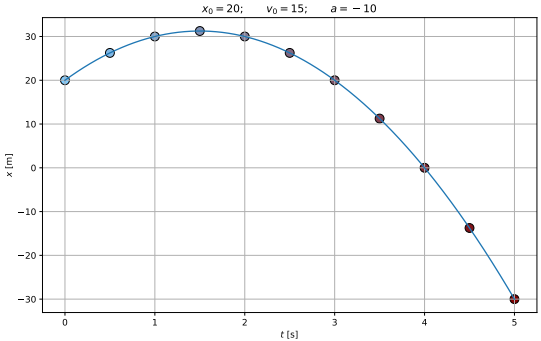


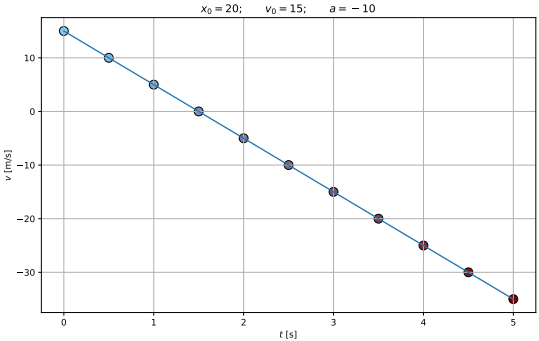


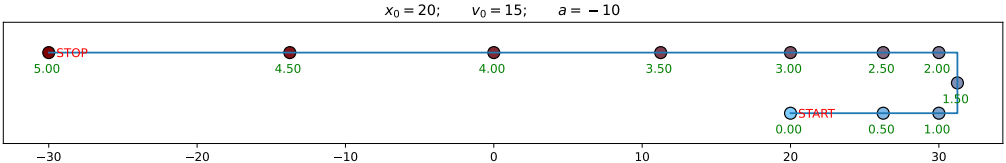


Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás: másik példa

$$x_0 = 20\,\mathrm{m},\ v_0 = 15\,\mathrm{m/s},\ a = -10\,\mathrm{m/s^2}$$







Ferde hajítás

Eldobott test, elhanyagolható közegellenállás mellett:

Vízszintes (x) komponens: állandó sebesség.

$$x(t) = x_0 + v_{x,0}t$$

$$v_x(t) = v_{x,0}$$

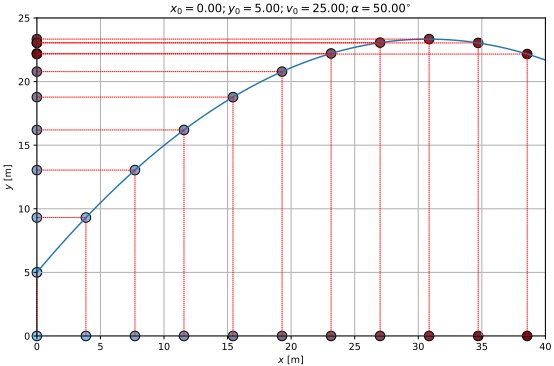
Függőleges (y) komponens: állandó gyorsulás.

Gyorsulás: lefele mutat, $g = 9{,}81 \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$.

$$y(t) = y_0 + v_{y,0} \cdot t - \frac{g}{2}t^2$$

$$v_y(t) = v_{y,0} - g \cdot t$$

$$a_y(t) = -g = \text{áll.}$$



Ferde hajítás

Eldobott test, elhanyagolható közegellenállás mellett:

Vízszintes (x) komponens: állandó sebesség.

$$x(t) = x_0 + v_{x,0}t$$

$$v_x(t) = v_{x,0}$$

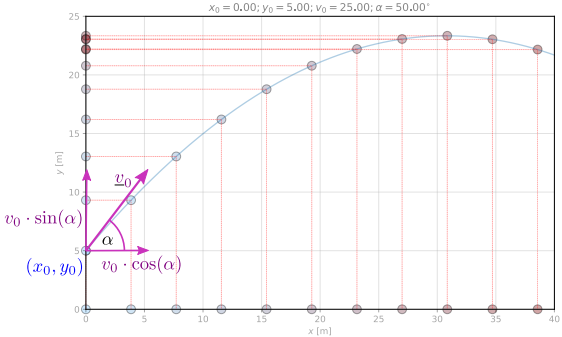
Függőleges (y) komponens: állandó gyorsulás.

Gyorsulás: lefele mutat, $g = 9{,}81 \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$.

$$y(t) = y_0 + v_{y,0} \cdot t - \frac{g}{2}t^2$$

$$v_y(t) = v_{y,0} - g \cdot t$$

$$a_y(t) = -g = \text{áll.}$$



Gyakori eset: nem $v_{x,0}$ és $v_{y,0}$ adott, hanem v_0 és α:

$$v_{x,0} = v_0 \cos\alpha; \quad v_{y,0} = v_0 \sin\alpha$$

Ferde hajítás: példamegoldás alapjai

1. Rögzítsük az origót és a tengelyeket. (Vázlat.)
2. Írjuk fel, mit tudunk. v_0 és α vagy a kezdeti sebesség? ...
3. Írjuk fel az általános egyenleteket, beírva az előző pontban leírt értékeket.

$$x(t) = x_0 + v_{x,0}t; \qquad v_x(t) = v_{x,0}$$

$$y(t) = y_0 + v_{y,0} \cdot t - \frac{g}{2}t^2; \qquad v_y(t) = v_{y,0} - g \cdot t$$

4. Fogalmazzuk meg a kérdést a koordináta-rendszerünkben. Példák:
   - talajba csapódás: $y(t) = 0$, ha az origó a talajon van
   - legmagasabb pont: $v_y(t) = 0$
5. Oldjuk meg az adódó egyenleteket.
6. Zárjuk ki a fizikailag nem reális megoldásokat.
7. Értelmezzük a matematikai választ.

Ez egy jó edzőterep minden kinematika-példára.

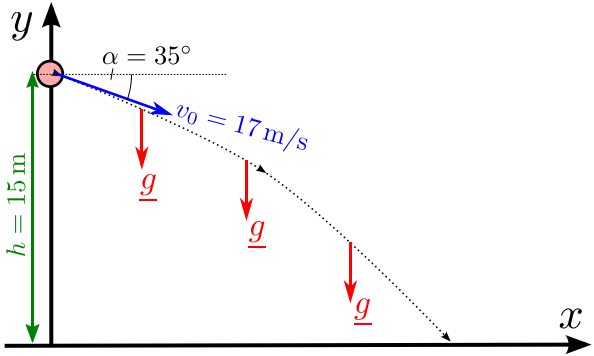
Példa ferde hajításra

Barbár Barnabás, a környék réme, egy $h = 15\,m$ magasan levő ablakból egy nagyobb kavicsot hajít ki $v_0 = 17\,m/s$ sebességgel, a vízszinteshez képes lefelé $\alpha = 35°$-nyira.
Hol és mikor csapódik be a kavics a földbe?
A számolás során g-t vegye $10\,m/s^2$-nek, a légellenállást hanyagolja el.

Példa ferde hajításra

Barbár Barnabás, a környék réme, egy $h = 15$ m magasan levő ablakból egy nagyobb kavicsot hajít ki $v_0 = 17$ m/s sebességgel, a vízszinteshez képes lefelé $\alpha = 35°$-nyira.
Hol és mikor csapódik be a kavics a földbe?
A számolás során g-t vegye 10 m/s^2-nek, a légellenállást hanyagolja el.

Megoldás: Vázlat:



Példa ferde hajításra, folytatás

$$v_{x,0} = v_0 \cdot \cos(\alpha) = 13{,}93\,\mathrm{m/s}, \qquad v_{y,0} = v_0 \cdot (-\sin(\alpha)) = -9{,}75\,\mathrm{m/s}.$$

(előjel: <u>lefelé</u> dobtuk α szöggel.)

Példa ferde hajításra, folytatás

$$v_{x,0} = v_0 \cdot \cos(\alpha) = 13{,}93\,\mathrm{m/s}, \qquad v_{y,0} = v_0 \cdot (-\sin(\alpha)) = -9{,}75\,\mathrm{m/s}.$$

(előjel: <u>lefelé</u> dobtuk α szöggel.) Mozgásegyenletek:

$$x(t) = x_0 + v_{x,0}t = 0 + v_{x,0} \cdot t = 13{,}93 \cdot t$$

$$y(t) = y_0 + v_{y,0}t + \frac{a_y}{2}t^2 = h + v_{y,0}t - \frac{g}{2}t^2 = 15 - 9{,}75 \cdot t - 5t^2.$$

($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$-tel számolva.)

Ezekből minden kiszámolható!

Csak le kell fordítani a kérdést az egyenletek nyelvére...

Példa ferde hajításra, folytatás

Becsapódás ideje: t_b:

$$y(t_b) = 0, \qquad 15 - 9{,}75 \cdot t_b - 5t_b^2 = 0$$

Példa ferde hajításra, folytatás

Becsapódás ideje: t_b:

$$y(t_b) = 0, \qquad 15 - 9{,}75 \cdot t_b - 5t_b^2 = 0$$

$$t_b = \frac{+9{,}75 \pm \sqrt{(-9{,}75)^2 + 4 \cdot 15 \cdot 5}}{-2 \cdot 5} = \frac{-9{,}75 \mp 19{,}88}{10}.$$

A $-$ előjeles megoldáskor $t_b < 0$, ami fizikailag értelmetlen:

$$t_b = \frac{-9{,}75 + 19{,}88}{10} = 1{,}01\,\mathrm{s}.$$

Példa ferde hajításra, folytatás

Becsapódás ideje: t_b:

$$y(t_b) = 0, \qquad 15 - 9{,}75 \cdot t_b - 5t_b^2 = 0$$

$$t_b = \frac{+9{,}75 \pm \sqrt{(-9{,}75)^2 + 4 \cdot 15 \cdot 5}}{-2 \cdot 5} = \frac{-9{,}75 \mp 19{,}88}{10}.$$

A $-$ előjeles megoldáskor $t_b < 0$, ami fizikailag értelmetlen:

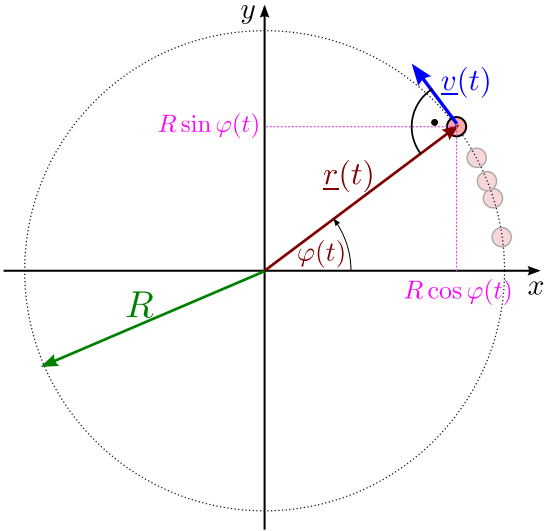
$$t_b = \frac{-9{,}75 + 19{,}88}{10} = 1{,}01\,\mathrm{s}.$$

A becsapódás helye:

$$x(t_b) = 13{,}93 \cdot 1{,}01 = 14{,}1\,\mathrm{m}.$$

A kő az épület tövétől 14,1 m-re csapódik be az eldobás után 1,01 másodperccel.

A körmozgás



Alkalmazások szempontjából fontos!

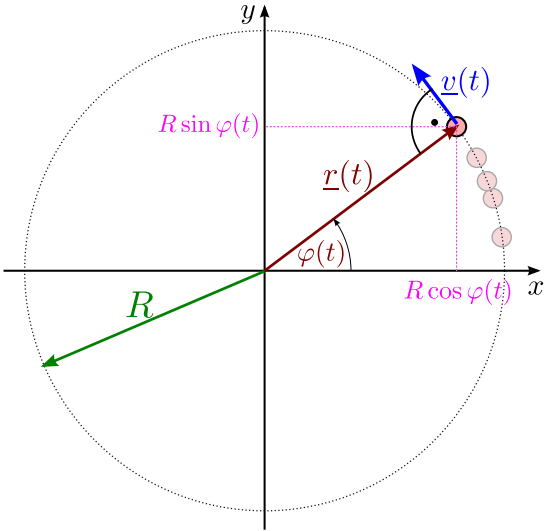
Szokásos leírás:

- origó: kör középpontja
- sugár: R
- test irányszöge: $\varphi(t)$

Nyilvánvaló:

$$x(t) = R\cos\varphi(t); \qquad y(t) = R\sin\varphi(t)$$

A körmozgás



Alkalmazások szempontjából fontos!

Szokásos leírás:

- origó: kör középpontja
- sugár: R
- test irányszöge: $\varphi(t)$

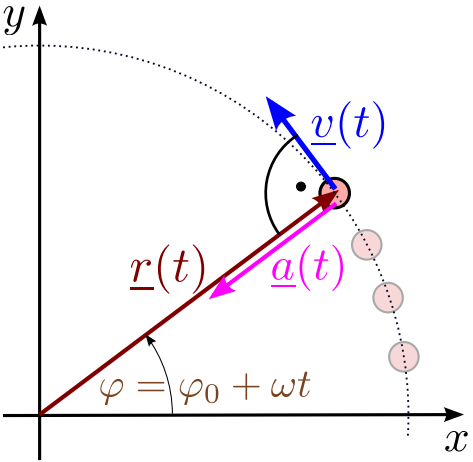
Nyilvánvaló:

$$x(t) = R\cos\varphi(t); \qquad y(t) = R\sin\varphi(t)$$

Belátható: $\underline{v}$ mindig érintő irányú, azaz merőleges $\underline{r}$-re. Nagysága:

$$|\underline{v}(t)| = R\frac{d\varphi}{dt}$$

Az egyenletes körmozgás



Fontos speciális eset!

Egyenletes körmozgás: $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega \cdot t$.

- φ_0: kezdő irány
- ω: szögsebesség

$d\varphi/dt = \omega$, ezért

$$|\underline{v}(t)| = v = R\omega = \text{áll.}$$

A gyorsulás mindig a középpont felé mutat:

$$a_{cp} = R\omega^2 = R \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{v^2}{R}.$$

Elnevezés: centripetális gyorsulás.

Az egyenletes körmozgás periódusideje és frekvenciája

Szögelfordulás Δt idő alatt:

$$\Delta\varphi = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t) =$$

$$= \varphi_0 + \omega\cdot(t+\Delta t) - (\varphi_0 + \omega\cdot t) = \omega\Delta t.$$

Teljes körbefordulás alatt: $\Delta\varphi = 2\pi$.
Ennek idejét T-vel jelölve:

$$2\pi = \omega T$$

Elnevezések:

- T: periódusidő
  ennyi ideig tart egy kör
- $f = 1/T$: frekvencia vagy fordulatszám
  másodpercenként ennyi kört tesz meg

Egyenletes körmozgás egyenletek összefoglalva:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$$

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

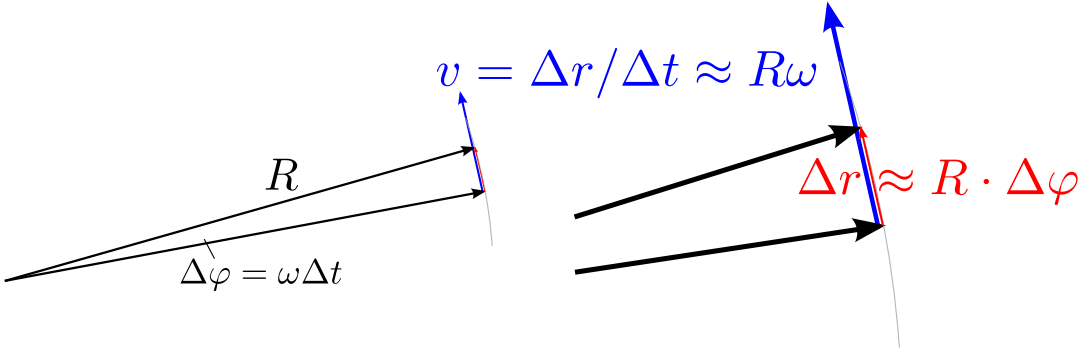
$$v = R\omega = \frac{2\pi R}{T}$$

$$a_{cp} = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

$\underline{v}$: érintő irányú
$\underline{a}$: középpont felé mutat

Az egyenletes körmozgás sebességének szemléltetése

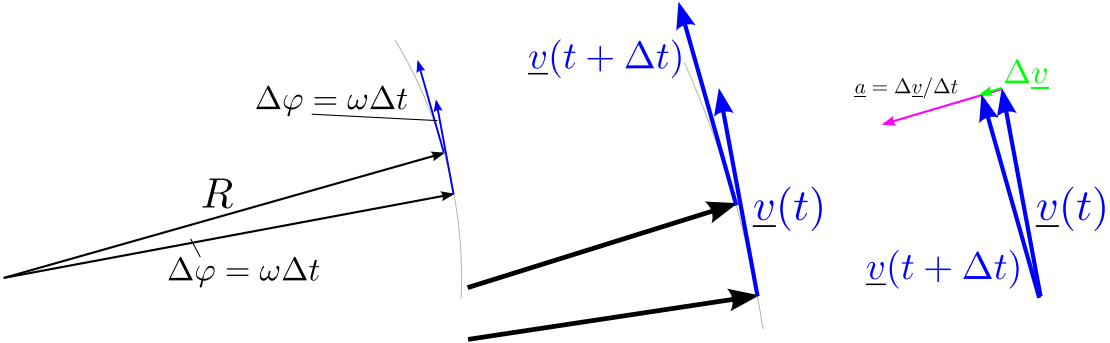
Az előbbi összefüggéseket nem bizonyítottuk.
Szemléltetés: kis idő alatti elmozdulással.



Nagyon kicsi elfordulásnál $\Delta \underline{r}$ merőleges a sugárra $\Rightarrow$ $\underline{v}$ merőleges a sugárra.

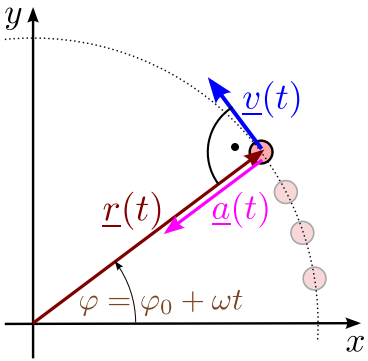
Az egyenletes körmozgás gyorsulásának szemléltetése

Az előzőekhez hasonlóan: mennyit változik kis idő alatt a sebességvektor?
Gyorsulás = sebességváltozás / idő.



Nagyon kicsi elfordulásnál $\Delta\underline{v}$ merőleges a sebességre $\Rightarrow$ $\underline{a}$ sugárirányú.

Az egyenletes körmozgás összefoglalása



$\underline{v}$: „kerületi sebesség”: érintő irányú, állandó nagyságú

$\underline{a}$: „centripetális gyorsulás”: középpont felé mutat, állandó nagyságú

Egyenletek:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t; \qquad \Delta\varphi = \omega \Delta t$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

$$v = R\omega = \frac{2\pi R}{T}; \qquad a_{cp} = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}$$

Első hallásra fura: A sebesség nagysága állandó, mégis van gyorsulás!

Ok: a sebességvektor változik, ezért van gyorsulás.

Példa egyenletes körmozgásra

Egy versenypályán egy kanyar sugara 85 m. Ha állandó sebességgel kell végigmenni rajta, akkor mekkora lehet ez a sebesség legfeljebb, hogy az oldalirányú gyorsulás ne érje el a 4g értéket?

Példa egyenletes körmozgásra

Egy versenypályán egy kanyar sugara 85 m. Ha állandó sebességgel kell végigmenni rajta, akkor mekkora lehet ez a sebesség legfeljebb, hogy az oldalirányú gyorsulás ne érje el a 4g értéket?

Megoldás: v sebesség, R sugarú pálya$\Rightarrow$ $a_{cp} = v^2/R$.
Maximális sebességnél $a_{cp} = 4g$, azaz

$$4g = \frac{v_m^2}{R}$$

ahonnan a maximális sebesség:

$$v_m = \sqrt{4gR} = \sqrt{4 \cdot 9{,}81 \cdot 85} = 57{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \left(= 208\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right).$$

Példa egyenletes körmozgásra

Egy versenypályán egy kanyar sugara 85 m. Ha állandó sebességgel kell végigmenni rajta, akkor mekkora lehet ez a sebesség legfeljebb, hogy az oldalirányú gyorsulás ne érje el a 4g értéket?

Megoldás: v sebesség, R sugarú pálya$\Rightarrow$ $a_{cp} = v^2/R$.
Maximális sebességnél $a_{cp} = 4g$, azaz

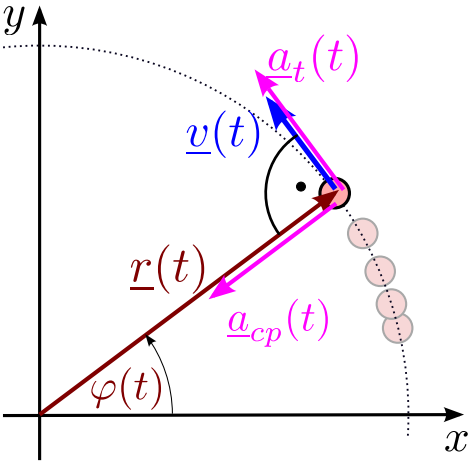
$$4g = \frac{v_m^2}{R}$$

ahonnan a maximális sebesség:

$$v_m = \sqrt{4gR} = \sqrt{4 \cdot 9{,}81 \cdot 85} = 57{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \left(= 208\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right).$$

Megjegyzés: Látható, hogy kisebb kanyarsugárhoz kisebb max. sebesség tartozik. Ez megfelel a hétköznapi tapasztalatnak. Plusz információ: fele akkora sugárhoz <u>nem</u> fele akkora a maximális sebesség!

A változó sebességű körmozgás



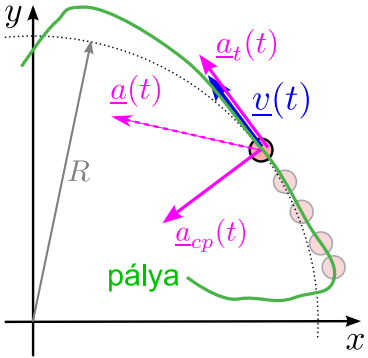
Ha a test szögsebessége változik,akkor a kerületi sebessége is változik.

$$|\underline{v}(t)| = R\frac{d\varphi}{dt}$$

A gyorsulás nem lesz sugár-irányú! Két komponens:

- $a_{cp} = R\omega^2$: centripetális gyorsulás
- $a_t = R \cdot (d^2\varphi/dt^2)$: tangenciális gyorsulás

A tangenciális és centripetális gyorsulás általában



- a_t, azaz tangenciális gyorsulás: mennyire „gyorsít" vagy „lassít" a test
  A sebesség nagyságának változását jellemzi.
- a_{cp}, azaz centripetális gyorsulás: mennyire „kanyarodik" a test
  A sebesség irányának változását jellemzi.
- $R = v^2/a_{cp}$: a pálya helyi görbületi sugara.
  (Lehet „végtelen" is, ha egyenes a mozgás.)

Autó vezetés:

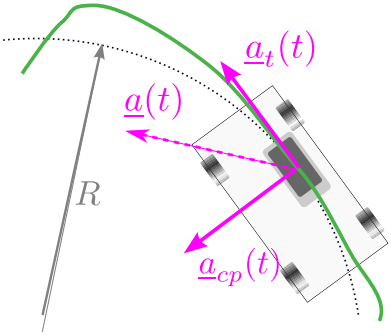
- a_t: gázadás-fékezés, előre-hátra dőlő utasok
- a_{cp}: kormányzás, oldalra dőlő utasok
- R: pálya görbületi sugara

A tangenciális és centripetális gyorsulás mérése

Gyorsulásmérő eszköz: pl. mobil telefonokban.

Ha az eszköz egy járműhöz van rögzítve, akkor vele együtt fordul.

Autó belsejében rögzített telefon: a_t-t és a_{cp}-t mér!



A tangenciális és centripetális gyorsulás mérése

$a_t(t)$ mérése $\Rightarrow$ sebesség nagysága:

$$v(t_1) = v_0 + \int_0^{t_1} a_t(t)\,dt$$

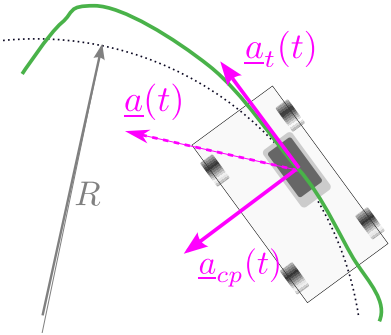
$a_{cp}(t)$ mérése + $v(t)$ $\Rightarrow$ szögsebesség, pályagörbület

$$\omega(t) = \frac{a_{cp}(t)}{v(t)}$$

$$R(t) = v(t)^2/a_{cp}(t)$$

Szögsebesség + kezdő irány $\Rightarrow$ irányszög

$$\varphi(t_1) = \varphi_0 + \int_0^{t_1} \omega(t)\,dt$$

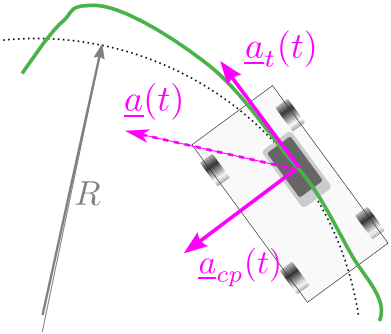


A tangenciális és centripetális gyorsulás mérése

$a_t(t)$ mérése $\Rightarrow$ sebesség nagysága.
$a_{cp}(t)$ mérése + $v(t)$ $\Rightarrow$ szögsebesség, pályagörbület
Szögsebesség + kezdő irány $\Rightarrow$ irányszög

Ezekből elvben rekonstruálható a mozgás, de:

- A mérési hibák hamar felszaporodnak.
- Néha „újra kell 0-zni”: v, φ független mérése szükséges, és ezentúl ezek lesznek v_0 és φ_0.
- Egyik megoldás: giroszkóp. (Irányérzékelő.)

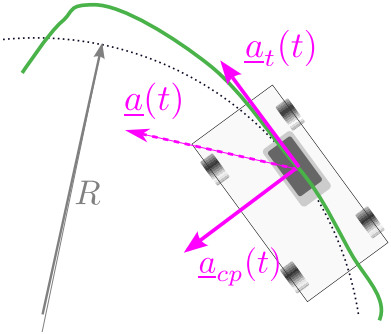


A tangenciális és centripetális gyorsulás mérése

$a_t(t)$ mérése $\Rightarrow$ sebesség nagysága.
$a_{cp}(t)$ mérése + $v(t)$ $\Rightarrow$ szögsebesség, pályagörbület
Szögsebesség + kezdő irány $\Rightarrow$ irányszög

Ezekből elvben rekonstruálható a mozgás, de:

- A mérési hibák hamar felszaporodnak.
- Néha „újra kell 0-zni”: v, φ független mérése szükséges, és ezentúl ezek lesznek v_0 és φ_0.
- Egyik megoldás: giroszkóp. (Irányérzékelő.)



Érdekesség: az ember a fülében levő „gyorsulásmérő” alapján hasonlóan korlátozott tájékozódásra képes. (Bekötött szemmel csak egy ideig tudjuk jól tippelni, hova is gyalogoltunk.)