1 Garanties statistiques

La section précédente été dédiée à l'approche algorithmique du problème : comment, donnés un ensemble d'entraînement et un espace de décision $\boldsymbol{Q}$, une fonction de décision $\hat{q} : \boldsymbol{Q} \to \mathscr{R}$ permettant de prescrire un investissment pouvait être déterminée. Cette section sera consacrée aux garanties statistiques de cette solution. Dans un premier temps, une étude de la stabilité de l'algorithme d'optimisation permettra de dériver une borne de généralisation sur la performance hors-échantillon (Section **??**). Par la suite, le problème sera approché d'un point probabiliste (en terme de variables aléatoires) afin de comparer les performances de la décision optimale d'investissement sur M par rapport à la décision empirique (Section **??**). Enfin, la Section **??** portera sur l'influence de la dimensionalité de l'espace $\boldsymbol{Q}$ sur la qualité des bornes alors obtenues, et don

Les bornes qui seront dérivées n'auront de signification qu'en terme d'*util*, c'est à dire la dimension de $u(r)$ pour un certain rendement. Comme cette notion n'a en soi aucune signification tangible, un théorème sera finalement introduit afin d'obtenir pour chacune des bornes une version sous forme de rendement équivalent.

Hypothèses et discussion Certaines hypothèses devront d'abord être formulées afin d'être en mesure d'obtenir des résultats pertinents : ce sera en fait le prix à payer pour l'absence de contraintes sur la forme de la distribution M, notamment concernant par exemple sa covariance ou la forme de ses moments d'ordre supérieurs.

Hypothèse 1. *L'amplitude de similarité d'une observation est bornée : pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, $\kappa(x, x) \leq \xi^2$.*

Hypothèse 2. *Le rendement aléatoire est borné : $|R| \leq \bar{r}$.*

Hypothèse 3. *Un investisseur est doté d'une fonction d'utilité u concave, monotone et standardisée, c'est-à-dire que $u(0) = 0$ et $\partial u(0) \ni 1$*[1]*. De plus, u est défini sur l'ensemble de $\mathscr{R}$. Enfin, u est γ-Lipschitz, c'est-à-dire que pour tout $r_1, r_2 \in \mathscr{R}$, $|u(r_1) - u(r_2)| \leq \gamma |r_1 - r_2|$.*

Avant d'aller plus loin, il convient toutefois de discuter de la plausiblité de ces contraintes. Cependant, compte tenu de l'aspect central de la première hypothèse, une discussion approfondie ne sera abordée qu'à la section **??**.

Pour ce qui est de la seconde hypothèse, si on définit les rendements selon l'interprétation usuelle d'un changement de prix p, *i.e.*, $r = \Delta p / p$, on constatera que r est nécessairement borné par 0. De plus, selon la période de temps pendant laquelle Δp est mesuré, il y a forcément moyen de limiter l'accroissement dans le prix, pour autant que Δt soit suffisament court.

1. Ici, $\partial u(r)$ signifie l'ensemble des sur-gradients de u. Dans le cas dérivable, cela revient à la notion de dérivée. Dans le cas simplement continu, $\partial u(r)$ est l'ensemble des fonctions affines "touchant" à $u(r)$ et supérieures à $u(r)$ pour tout r du domaine). Bien qu'il s'agisse d'un ensemble, la situation désigne souvent un sur-gradient optimal par rapport aux autres.

La troisième hypothèse est davantage contraignante. Elle exclut d'emblée plusieurs fonctions d'utilité courantes ; par exemple l'utilité logarithmique et racine carrée puisqu'elles ne sont définies que pour $\mathscr{R}_+$. Une utilité quadratique, comme celle de Markowitz est également inadmissible puisqu'elle est non-monotone. Les utilités de forme exponentielle inverse $u(r) = \mu(-\exp(-r/\mu) + 1)$ quant à elles violent la condition Lipschitz. On peut cependant définir une utilité exponentielle *à pente contrôlée*, c'est à dire dont la pente devient constante lorsque $r \leq r_0$. Par contre, une utilité qui serait définie par morceaux linéaires est parfaitement acceptable. Par ailleurs, on considérera souvent l'utilité *neutre au risque **1*** : $r \mapsto r$ comme un cas limite à l'ensemble des fonctions d'utilité admissibles.