Ajout d'information

Thierry Bazier-Matte

29 mars 2017

1 Ajout d'information

Cette section cherche à déterminer de quelle façon se comporte les erreurs de généralisation et de sous-optimalité lorsque p et n augmentent.

On rappelle tout d'abord que dans un contexte risque neutre, on a l'identité suivante

$$\lambda \left| q_\lambda^\star \right\rangle = \begin{pmatrix} \rho_1 \sqrt{\textbf{\textit{Var}} \left| T_1 \right\rangle} \\ \vdots \\ \rho_p \sqrt{\textbf{\textit{Var}} \left| T_j \right\rangle} \end{pmatrix} \tag{1}$$

et que de plus, par propriété de la corrélation,

$$\|\rho\| \leq 1. \tag{2}$$

On supposera de plus que $\|T_j\| \leq \nu_j$, ce qui entraîne également que $\textbf{\textit{Var}} \left| T_j \right\rangle \leq \nu_j^2$. Ainsi,

$$\|q_\lambda^\star\|^2 = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{p} \rho_j^2 \, \textbf{\textit{Var}} \left| T_j \right\rangle \leq \frac{p\|\rho\|^2 \|\nu\|_\infty^2}{\lambda^2} \tag{3}$$

ou encore

$$\|\rho\|^2 \geq \frac{\lambda^2 \|q_\lambda^\star\|^2}{p\|\nu\|_\infty^2}. \tag{4}$$

Or, si on considère l'ajout d'information de manière à obtenir une nouvelle décision optimale $\left| \tilde{q}_\lambda^\star \right\rangle$ dans un espace à $\tilde{p} = p + p^+$ dimensions, il faut réaliser que la corrélation *totale* ne peut pas changer, c'est-à-dire que l'information déjà obtenue ne peut être dupliquée. Autrement dit, en posant $\tilde{\rho} = \rho + \rho^+$,

$$\|\rho^+\|^2 \leq 1 - \|\rho\|^2. \tag{5}$$

Donc,

$$\|\tilde{q}_\lambda^\star\|^2 - \|q_\lambda^\star\|^2 = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{\tilde{p}} \rho_j^2 \, \textbf{\textit{Var}} \left| T_j \right\rangle - \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{p} \rho_j^2 \, \textbf{\textit{Var}} \left| T_j \right\rangle \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=p+1}^{\tilde{p}} \rho_j^2 \,\boldsymbol{Var}\, |T_j\rangle && (7)\\
&\leq \frac{p^+ \|\nu^+\|_\infty^2}{\lambda^2} \|\rho^+\|^2 && (8)\\
&\leq \frac{p^+ \|\nu^+\|_\infty^2}{\lambda^2} (1 - \|\rho\|^2) && (9)\\
&\leq \frac{p^+ \|\nu^+\|_\infty^2}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda^2 \|q_\lambda^\star\|^2}{p\|\nu\|_\infty^2}\right) && (10)\\
&\leq \frac{p^+ \|\nu^+\|_\infty^2}{\lambda^2} - \frac{p^+}{p} \frac{\|\nu^+\|_\infty^2}{\|\nu\|_\infty^2} \|q_\lambda^\star\|^2 && (11)
\end{aligned}
$$

Ce qui entraîne

$$
\|\tilde{q}_\lambda^\star\|^2 \leq \frac{p^+ \|\nu^+\|_\infty^2}{\lambda^2} + \left(1 - \frac{p^+}{p} \frac{\|\nu^+\|_\infty^2}{\|\nu\|_\infty^2}\right) \|q_\lambda^\star\|^2. \tag{12}
$$

Par exemple, si on suppose M formée de variables d'information bornées par 1 (pour que $\|\nu\|_\infty = 1$) alors en ajoutant une seule variable d'information ($p^+ = 1$), on aura

$$
\|\tilde{q}_\lambda^\star\|^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} + \frac{p-1}{p} \|q_\lambda^\star\|^2. \tag{13}
$$