

Gestion algorithmique de portefeuille par apprentissage de marché

Quelques notes sur les propriétés algorithmiques et statistiques d'une politique
d'investissement obtenue par maximisation d'utilité espérée régularisée

Thierry BAZIER-MATTE

Mémoire complété pour répondre aux exigences nécessaires à l'obtention du grade
Maître ès sciences
avec spécialisation en
INGÉNIERIE FINANCIÈRE

HEC MONTRÉAL
Montréal, Canada
Avril 2017

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Remerciements | 3 |
| Notation | 4 |
| 1 Introduction | 6 |
| 1.1 Avant propos | 6 |
| 1.2 Exposition du problème et hypothèses | 6 |
| 1.2.1 Modélisation du marché | 6 |
| 1.2.2 Décision d'investissement | 7 |
| 1.2.3 Risques de généralisation | 8 |
| 1.3 Dimensionnalité de l'information | 12 |
| 1.4 Risque et garanties statistiques sur la décision | 12 |
| 1.5 Interprétations | 12 |
| 1.6 Objectifs et contributions | 12 |
| 2 Optimisation moderne de portefeuille | 14 |
| 2.1 Approche statistique | 14 |
| 2.2 Approche régularisée | 15 |
| 2.3 Conclusion | 17 |
| 3 Algorithme d'apprentissage | 18 |
| 3.1 Formulations primale et duale | 18 |
| 3.2 Transformations non linéaires | 19 |
| 3.3 Fonctions de noyau | 20 |
| 3.4 Espace de décision vectoriel | 21 |
| 4 Garanties statistiques | 22 |
| 4.1 Bornes de généralisation | 23 |
| 4.2 Bornes de sous optimalité | 26 |
| 4.3 Garanties et dimensionnalité du problème | 29 |
| 4.4 Note bibliographique | 32 |
| 5 Expériences empiriques | 33 |
| 5.1 Méthodologie | 33 |
| 5.2 n variable, p constant | 39 |
| 5.2.1 Erreur de généralisation | 39 |
| 5.2.2 Erreur de sous optimalité | 45 |
| 5.3 n constant, p variable | 48 |
| 5.3.1 Erreur de généralisation | 48 |
| 5.3.2 Sous optimalité | 49 |
| 5.4 n et p variables | 55 |
| 5.4.1 Erreur de généralisation | 56 |
| 5.4.2 Erreur de sous optimalité | 56 |
| 5.5 Conclusion | 57 |

| | |
|--|-----------|
| 6 Conclusion | 61 |
| A Démonstrations | 64 |
| A.1 Lemmes | 64 |
| A.2 Théorèmes 1 et 2 | 68 |
| B Conjecture sur l'erreur de généralisation | 70 |

Remerciements

Je tiens d'abord à exprimer toute ma gratitude pour le professeur Erick Delage. Lorsque j'ai décidé qu'il était temps pour moi de me remettre aux études, j'avais déjà parcouru la liste des professeurs de HEC avec le simple mot clé `machine learning hec` et à l'époque c'était sa page personnelle qui arrivait en tête des résultats d'un populaire moteur de recherche. Je n'ai donc pas hésité et dès le début du mois de septembre je l'ai contacté.

J'ai apprécié toute sa rigueur, sa vaste expérience mais aussi et surtout son point de vue différent de ce que j'avais pu connaître jusqu'alors. La lecture du *Convex Optimization*, cet excellent livre de Boyd a été une révélation. Écrire cet article pour NIPS a aussi été une expérience des plus enrichissantes. Un jour peut être cet article verra-t-il le jour.

J'aimerais également remercier le professeur Bruno Rémillard. Son cours de statistiques a été la deuxième révélation pour moi. Plusieurs méthodes d'apprentissage machine me paraissent encore un peu *ad hoc*, alors que les statistiques offrent de véritables garanties probabilistes sur les résultats. À n'en point douter, si doctorat un jour il y a, ce sera dans le domaine des statistiques.

Maintenant, pour des remerciements plus personnels : d'abord mes parents, Denise et Jean-François. De mon père je tiens son esprit scientifique et généraliste. À ce jour, il demeure un homme dont la culture générale et scientifique ne cessera jamais de m'étonner, du grec ancien à la biologie moderne, des systèmes électroniques à la guerre auto-prussienne de 1866. De ma mère je tiens le goût des mathématiques, des problèmes d'esprit et de la programmation. À tous les deux, je veux leur exprimer mon immense gratitude de m'avoir supporté sans réserve dans mon choix de laisser là "un bon salaire" pour continuer mes études. Véronique et Xavier ont aussi toute mon admiration, ce sont tous deux d'excellents scientifiques destinés, j'en suis certain, à de brillantes carrières.

À Ariadne aussi, je veux lui exprimer une reconnaissance toute particulière de m'avoir encouragé au cours des derniers mois. Espérons qu'on puisse enfin boire un honnête Medoro en écoutant un film de quatre heures sans être tracassés. Ça y est, on y est on se dirige vers le *bliss*, les belles randonnées, le jardinage en paix et la lecture de Proust jusqu'à notre mort à l'âge vénérable de 105 ans.

Et finalement à mes amis. Noé bien sûr, nos discussions inébrées sur des napkins au plan B au sujet d'espaces de Hilbert, de probabilité et de logique formelle. À François, nos discussions inébrées sur le travail, l'argent et la vieillesse. À Manu, nos discussions inébrées de philo cosmique. À Patricia, nos discussions inébrées sur la vie. À Max, nos joutes de tennis et les appels à 19h moins €. À Simon, nos discussions inébrées et enfumées sur la musique et la politique. À Edith nos discussions sur la finance, le networking et la programmation fonctionnelle. À Alex nos discussions inébrées sur la musique et les films. À Nidhal et JS les discussions inébrées aux 5à7. Et aux autres que je vois moins souvent, mais dont les discussions n'en demeurent pas moins inébrées.

Merci à tous et maintenant au travail.

Notation

| Objet | Notation |
|---|---|
| <i>Espaces</i> | |
| Réels | \mathcal{R} |
| Espace des rendements | $\mathbf{R} \subseteq \mathcal{R}$ |
| Espace des variables de marché | $\mathbf{X} \subseteq \mathcal{R}^p$ |
| Espace de décision | \mathbf{Q} |
| Facteur de régularisation | λ |
| Fonction d'utilité | $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{R}$ |
| <i>Variables aléatoires et réalisation</i> | |
| Variables de marché | $X \in \mathbf{X}$ $x \sim X$ |
| Rendement | $R \in \mathbf{R}$ $r \sim R$ |
| Loi de marché | $(X, R) = M \in \mathbf{M}$ $(x, r) \sim M$ |
| <i>Décisions, transformation ϕ ou induite par noyau</i> | |
| Décision | $q : \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{R}$ $q(x) = \langle q x \rangle$ |
| Transformation non linéaire | $\phi : \mathbf{X} \rightarrow \phi(\mathbf{X})$ |
| Noyau | $\kappa : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{R}$ $\kappa(x_i, x_j) = \langle \phi(x_i), \phi(x_j) \rangle$ $= \langle x_i x_j \rangle$ |
| <i>Algorithme et mesure de performance</i> | |
| Ensemble d'entraînement | $\mathcal{S}_n = \{(x_1, r_1), \dots, (x_n, r_n)\}$ $\mathcal{S}_n \sim M^n$ |
| Algorithme d'apprentissage | $\mathcal{Q} : M^n \rightarrow \mathbf{Q}$ |
| Utilité espérée | $\mathbf{EU} : \mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{R}$ $\mathbf{EU}(q) = \mathbf{E} u(R \cdot q(X))$ |
| Utilité espérée en échantillon | $\widehat{\mathbf{EU}} : M^n \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{R}$ $\widehat{\mathbf{EU}}(\mathcal{S}_n, q) = n^{-1} \sum_{i=1}^n u(r_i q(x_i))$ |
| Rendement espéré | $\mathbf{EI} : \mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{R}$ $\mathbf{EI}(q) = \mathbf{E}(R \cdot q(X))$ |
| Rendement espéré en échantillon | $\widehat{\mathbf{EI}} : \mathbf{Q} \rightarrow \mathcal{R}$ $\widehat{\mathbf{EI}}(q) = n^{-1} \sum_{i=1}^n r_i q(x_i)$ |
| Erreur de généralisation (utilité) | $\zeta_u : M^n \rightarrow \mathbf{U}$ $\zeta_u(\mathcal{S}_n) = \widehat{\mathbf{EU}}(\mathcal{S}_n, \mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)) - \mathbf{EU}(\mathcal{Q}(\mathcal{S}_n))$ |

1 Introduction

1.1 Avant propos

Ce mémoire aborde les choses différemment. Il n'est plus question de *tarifer* un instrument financier par hypothèse d'absence d'arbitrage, mais plutôt de déterminer dans quelle mesure un investissement devrait être considéré en supposant la présence d'arbitrage dans le marché. La différence est ici

D'autre part, la théorie moderne de portefeuille, introduite par Markowitz,

[**Todo:** Discuter du rôle croissant que jouent l'informatique et les statistiques dans la construction de portefeuille. Contraster avec les math. stochastiques. Citer Simons et cet article de Quandt selon lequel data is the new shit.]

1.2 Exposition du problème et hypothèses

Ce mémoire vise donc à établir clairement et rigoureusement comment un investisseur averse au risque disposant d'*information complémentaire* au *marché* peut utiliser cette information pour accroître son *utilité espérée* ou, de façon équivalente, son *rendement équivalent certain*.

1.2.1 Modélisation du marché

Nous entendrons ici par *marché* n'importe quel type d'actif financier ou spéculatif dans lequel on peut investir une partie de sa fortune dans l'espoir de la voir fructifier au cours d'une période de temps arbitraire. Ainsi, tout au long de l'exposé théorique qui suivra, il peut être pertinent d'avoir en tête les rendements quotidiens issus des grands indices boursiers (par exemple les 500 plus grandes capitalisations américaines). Cependant, le traitement qui sera développé pourrait tout aussi bien s'appliquer à une action cotée en bourse dont on considère les rendements mensuels. Mathématiquement, l'idée de marché peut ainsi être réduite à celle d'une variable aléatoire $R(t)$ décrivant l'évolution du rendement de l'actif en question.

Relativement à l'idée de marché, nous ferons également l'hypothèse que l'univers a une influence sur ces rendements. Il serait par exemple raisonnable de croire que le prix du pétrole a une influence sur l'évolution du rendement du marché américain. De la même façon, l'annonce d'un scandale aura à son tour des répercussions sur la valeur du titre de la compagnie dont il est l'objet. En outre, il a été montré par Fama et French que le rendement d'une action pouvait s'expliquer comme une combinaison de quelques facteurs fondamentaux (la taille de l'entreprise, le risque de marché et le ratio cours/valeur). On peut alors considérer un vecteur d'information $\vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots)$ dont chaque composante représente une information particulière qu'on appellera *variable de marché*. En outre, comme pour le rendement $R(t)$, $\vec{X}(t)$ peut être également

conçu comme une variable aléatoire multidimensionnelle. D'un point de vue probabiliste, il est donc naturel de considérer la loi jointe entre les rendements $R(t)$ d'une part et $\{\vec{X}(\tau) \mid \tau < t\}$ l'ensemble des réalisations des événements antérieurs à t d'autre part. Le processus joint de ces deux événements sera désormais défini comme *la loi de marché*, ou simplement le marché et sera noté $M(t)$.

Bien qu'un tel modèle permette de représenter de façon très générale l'évolution d'un marché, une hypothèse supplémentaire sera formulée : la *stationarité de la loi de marché*.

C'est une hypothèse contraignante qui évacue complètement la notion de temporalité. Les réalisations antérieures de M n'ont donc plus aucune influence sur ses réalisations futures. Dans un cadre appliqué, il serait toutefois possible de modifier le vecteur aléatoire d'information X afin de lui incorporer, par exemple, les réalisations des τ périodes de temps précédentes. En choisissant adéquatement τ , un processus saisonnier pourrait donc être modifié pour respecter les hypothèses de stationarité.

La stationarité de M implique également l'absence de probabilité de faillite, puisqu'elle exclut d'emblée la présence d'un temps d'arrêt. De plus, le marché ne peut pas non plus être conçu comme un environnement adversarial qui réagirait aux décisions de l'investisseur. Ceci vient notamment mettre en cause la théorie des marchés efficients selon laquelle une brèche dans l'absence d'arbitrage serait colmatée par des agents du marché par effet d'auto-régulation. Nous aurons toutefois l'occasion de revenir plus en détail sur les liens à faire entre cet exposé et l'efficacité des marchés.

Dans ce qui suit, nous supposons que le vecteur d'information X est formé de p variables aléatoires réelles (X_1, \dots, X_p) et est supporté par un domaine $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}^p$. Les réalisations de X seront notées $x \sim X$. La variable de rendement aléatoire R sera supportée par $\mathbf{R} \subseteq \mathbb{R}$ et une réalisation particulière sera notée $r_i \sim R$. La loi de marché sera donc supporté par $\mathbf{M} := \mathbf{R} \times \mathbf{X}$ et pourra être exprimée par

$$M = (R, X_1, \dots, X_m). \quad (1)$$

On fera également l'hypothèse qu'on possède un jeu de données $S_n \sim M^n$ formé de n réalisations de M . Ce jeu de données, aussi appelé *ensemble d'entraînement*, sera composé d'une matrice d'information $\Xi \sim X^n$ telle que $\Xi \in \mathbf{X}^n \subseteq \mathbb{R}^{p \times n}$ et d'un vecteur de rendement $r \sim R^n$ tel que $r \in \mathbf{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n$.

1.2.2 Décision d'investissement

Un investisseur souhaitant investir dans le marché pourrait donc procéder de la façon suivante. Dans un premier temps, il prend connaissance des réalisations des diverses variables de marché $x \sim X$. À partir de cette information, il décide d'investir une fraction $q(x)$ de sa fortune dans le marché. Puis, le marché réalise un rendement $r \sim R$. L'investisseur a ainsi réalisé un rendement $r q(x)$. *A priori*, l'investisseur peut donc espérer réaliser un rendement égal à $E_M R \cdot q(X)$.

L'investisseur peut cependant disposer d'une *aversion au risque* qui lui fait préférer des rendements plus modestes mais sûrs à des rendements en moyenne plus élevés, mais affichant une variance élevée. On supposera donc que l'investisseur est doté d'une *fonction d'utilité* $u : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{U}$ dont le rôle est d'attribuer une valeur numérique exprimant la satisfaction d'un investisseur à l'égard d'un certain rendement $r \in \mathbf{R}$.

En elle même, une utilité de $u(r)$ n'a aucune signification et c'est à l'investisseur de déterminer une échelle (exprimée en *utils*). Par exemple, s'il est averse au risque, il pourrait accorder à un rendement de -2% une satisfaction de -10 utils et à un rendement de 10% une satisfaction que de 2 utils. De façon absolument équivalente, son utilité pourrait être calibrée de façon à avoir $u(-2\%) = -1$ et $u(10\%) = 0.2$. L'utilité est donc une notion foncièrement affine (deux fonctions d'utilité u et u' sont équivalentes si $u'(r) = ku(r) + b$).

Doté d'une telle fonction, on supposera alors que l'objectif de l'investisseur sera de *maximiser son utilité espérée*. Autrement dit, sa fonction de décision q devrait être choisie de façon à

$$\text{maximiser } \mathbf{EU}(q) := \mathbf{E}_M u(\mathbf{R} \cdot q(X)). \quad (2)$$

En faisant l'hypothèse qu'à toute valeur d'utilité $v \in \mathbf{U}$ il n'existe qu'un et un seul rendement $r \in \mathbf{R}$ tel que $u(r) = v$, et vice versa, un investisseur disposant d'une fonction de décision q peut alors espérer réaliser un *rendement équivalent* de $u^{-1}(\mathbf{EU}(q))$, où u^{-1} est la fonction *d'utilité inverse*.

Par contre, étant donné que la forme précise de M n'est pas connue, le problème (2) ne peut pas être résolu. Il peut néanmoins être approximé en utilisant un ensemble d'entraînement $\mathcal{S}_n = \{(r_1, x_1), \dots, (r_n, x_n)\}$ constitué de n observations du marché. L'investisseur cherchera alors à *maximiser son utilité espérée en échantillon* :

$$\text{maximiser } \widehat{\mathbf{EU}}(q) := n^{-1} \sum_{i=1}^n u(r_i q(x_i)). \quad (3)$$

En notant $q^* = \arg \max \mathbf{EU}(q)$ la *décision optimale hors échantillon* et $\hat{q} = \arg \max \widehat{\mathbf{EU}}(q)$ la *décision optimale en échantillon*, l'investisseur s'assure alors que $\hat{q} \rightsquigarrow q^*$, à mesure que l'investisseur recueille de nouvelles observations sur le marché [SDR09].

1.2.3 Risques de généralisation

L'ennui avec la décision optimale en échantillon, c'est qu'elle souffre d'un important *risque de généralisation* $\hat{\zeta}$ défini par

$$\hat{\zeta} = \widehat{\mathbf{EU}}(\hat{q}) - \mathbf{EU}(\hat{q}). \quad (4)$$

Autrement dit, \hat{q} peut mener à un utilité espérée hors échantillon beaucoup plus faible qu'anticipé par l'utilité en échantillon.

Considérons par exemple la situation illustrée à la Figure 1 où à partir d'un ensemble d'entraînement \mathcal{S}_n on peut construire une fonction de décision "dictionnaire" dont l'utilité espérée en échantillon et le risque de généralisation sont arbitrairement élevés. Pour ce faire, supposons d'abord que l'utilité de l'investisseur ne soit pas bornée et qu'elle soit calibrée de façon à ce que $u(r) \geq 0$ si $r \geq 0$ et $u(r) < 0$ si $r < 0$. Il suffit alors de définir q par

$$q(x) = \begin{cases} \alpha & \exists x_i \in \mathcal{S}_n : [x_i == x \wedge r_i \geq 0] \\ -\alpha & \exists x_i \in \mathcal{S}_n : [x_i == x \wedge r_i < 0] \\ 0 & x \notin \mathcal{S}_n \end{cases} . \quad (5)$$

Chacun des n termes $u(r_i q(x_i))$ de l'utilité espérée en échantillon est alors positif et puisque u est monotone, $\widehat{EU}(q) \rightarrow \infty$ lorsque $\alpha \rightarrow \infty$.

Par contre, si \mathbf{X} le support de X est dense dans \mathcal{R}^p , alors l'utilité hors échantillon sera simplement $EU(q) = u(0)$. Le risque de généralisation $\hat{\zeta}$ de q est alors arbitrairement grand.

On peut alors faire appel au principe du *rasoir d'Occam* pour éviter que des fonctions de décision comme celle-ci ne soient favorisées. Ce principe suggère en effet qu'une hypothèse trop complexe devrait être découragée au profit d'une hypothèse plus simple (voir [Vap98] pour une discussion approfondie). Intuitivement, si $\mathcal{C}(q) \in \mathcal{R}$ permettait de mesurer la complexité d'une fonction de décision q , on pourrait *régulariser* l'objectif pour que l'investisseur cherche plutôt à

$$\text{maximiser } \widehat{EU}(q) - \lambda \mathcal{C}(q). \quad (6)$$

Différentes valeurs de λ favorisent alors des solutions plus ou moins complexes. En utilisant une technique de *validation croisée*, il y a alors moyen de déterminer le niveau de complexité permettant de minimiser le risque de généralisation.

On verra en outre aux Sections 3 et 4 qu'il existe pour certaines classes de fonctions de décision une mesure de complexité particulière qui permet d'établir des garanties statistiques sur le risque de généralisation.

Risque in-échantillon et hors échantillon une telle fonction q est qu'elle se généralise très mal. En effet pour toute observation x qui ne figurerait dans l'ensemble d'entraînement, q prescrirait alors un investissement nul. Il y a alors une énorme différence entre l'utilité observée au sein de notre échantillon et l'utilité hors échantillon.

Donnée une fonction de décision $q \in \mathcal{Q}$ et un échantillon de M , on définit le *risque in-échantillon* ou *risque empirique* par

$$\hat{R}(q) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \ell(r_i q(x_i)), \quad (7)$$

où $\ell = -u$. De la même façon, on définit le *risque hors-échantillon* ou *erreur de généralisation* par

$$R(q) = \mathbf{E} \ell(R \cdot q(X)). \quad (8)$$

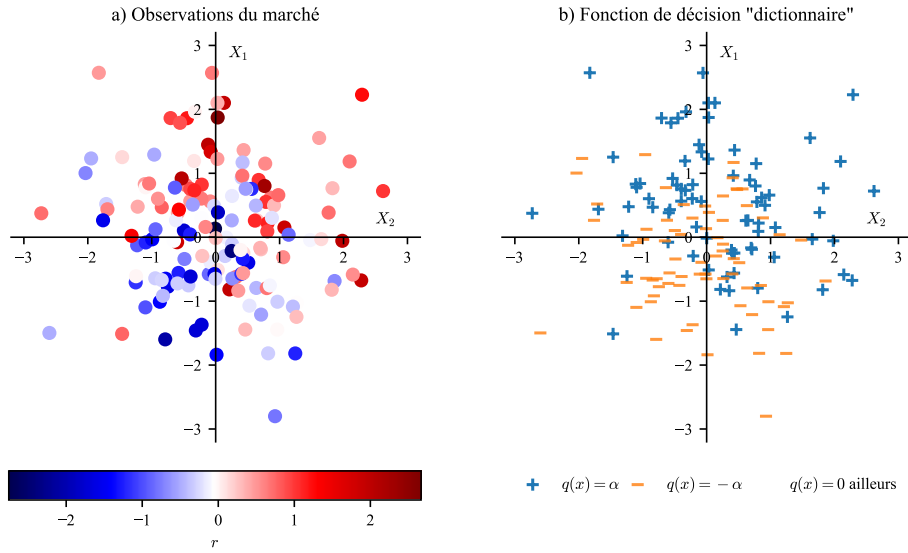


FIGURE 1 – Illustration d’une fonction de décision “dictionnaire” dont le risque de généralisation est arbitrairement élevé. Le marché est ici constitué de deux variables X_1 et X_2 (l’abscisse et l’ordonnée des deux figures). Le panneau a) présente un ensemble d’entraînement \mathcal{S}_n ($n = 150$) où le gradient de couleur indique l’intensité du rendement associé à chaque observation. Le panneau b) présente la fonction de décision “dictionnaire” construite à partir de \mathcal{S}_n . L’investissement préconisé par q suite à une observation $x \in \mathbf{X}$ sera nul si x ne figure pas dans l’ensemble d’entraînement, mais sera positif ($+\alpha$) si son rendement associé est positif et négatif ($-\alpha$) dans le cas contraire. L’utilité espérée en échantillon $\widehat{EU}(q)$ est arbitrairement élevée à mesure que $\alpha \rightarrow \infty$, mais si \mathbf{X} est dense dans \mathcal{R}^2 , alors $\widehat{EU}(q) = u(0)$. Le risque de généralisation de la décision q est donc à son tour arbitrairement élevé.

On peut souhaiter d'une bonne fonction de décision qu'elle performe bien hors échantillon, aussi la quantité $R(q) - \hat{R}(q)$ sera-t-elle primordiale et beaucoup d'attention lui sera consacrée dans les prochaines sections. Notons que le risque hors-échantillon étant théoriquement impossible à calculer, en pratique on segmentera l'ensemble d'échantillonnage en deux parties, l'une dédiée à l'apprentissage, l'autre à évaluer la performance hors échantillon.

Régularisation Afin de contrecarrer le risque hors échantillon, la solution est en fait de pénaliser la complexité de la fonction de décision q (rasoir d'Occam). Ainsi, on étudiera en profondeur le choix d'une fonctionnelle $R : Q \rightarrow \mathcal{R}$ permettant de quantifier la complexité de q . L'objectif serait alors

$$\underset{q \in Q}{\text{maximiser}} \quad n^{-1} \sum_{i=1}^n u(r_i q(x_i)) - R(q). \quad (9)$$

Par exemple, comme les mesures sur x peuvent comporter de l'incertitude ou du bruit, il serait souhaitable que la décision $q(x_1)$ soit proche de $q(x_2)$, si x_1 et x_2 sont eux même proches dans l'espace X . Si R encodait une telle préférence, une fonction discontinue comme le dictionnaire présenté plus haut sera alors hautement défavorisée, et une fonction plus lisse y serait préférée.

[**Todo:** Introduire la validation croisée ainsi que le paramètre λ dans l'objectif.]

Espaces de décision En pratique, ce mémoire ne considérera que des espaces de Hilbert pour Q . Un des avantages des espaces de Hilbert, c'est qu'ils induisent naturellement une notion de norme $\|\cdot\|_H$, qu'on peut intuitivement relier au concept de complexité. Nous nous intéresserons donc aux propriétés induites par $R(q) = \|q\|_H^2 = \langle q, q \rangle$. Il y a aussi moyen, sous des conditions assez techniques (théorème de la représentation) de généraliser la norme L_2 de q à une norme L_p général. En particulier, nous verrons qu'une régularisation donnée par norme L_1 induit certaines propriétés d'éparsité dans la solution.

Décisions linéaires De façon générale, la forme de décision la plus simple est celle qui combine linéairement les p observations de $x \in X \subseteq \mathcal{R}^p$; autrement dit lorsque qu'on contraint $Q = X^*$, i.e., à l'espace dual de X . En langage plus clair, à toute fonction $q \in Q$ il existe un vecteur de dimension p tel que la décision dérivée de l'observation x sera donnée par $q(x) = \langle q, x \rangle = q^T x$.

La régularisation L_2 de q devient alors tout simplement $R(q) = q^T q = \|q\|^2$ et la fonction optimale de décision q^* sera alors déterminée en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\underset{q \in \mathcal{R}^p}{\text{maximiser}} \quad n^{-1} \sum_{i=1}^n u(r_i q^T x_i) - \lambda \|q\|^2. \quad (10)$$

1.3 Dimensionnalité de l'information

[**Todo:** Discussion du phénomène big data, de l'importance de p]

1.4 Risque et garanties statistiques sur la décision

[**Todo:** Discussion sur les méthodes de risques hors échantillon, complexité de l'échantillonnage, mesure Rademacher, distance par rapport à la "meilleure" décision]

1.5 Interprétations

Interprétation géométrique dans l'espace X

Interprétation statistique (avec matrix covariance)

Autre ?

1.6 Objectifs et contributions

Ce mémoire cherche donc à dégager les principales caractéristiques de cet algorithme d'apprentissage appliqué à la gestion de portefeuille. Les contributions apportées sont nombreuses.

D'abord, et c'est son but, cette méthode est parfaitement adaptée pour tenir en compte des informations de marché dont la valeur ajoutée est *a priori* inconnue. Une analyse de covariance entre ces variables d'information et les réalisations du rendement permet naturellement d'en avoir une certaine idée, mais une telle analyse ne tient pas compte de l'utilité de l'investisseur et n'est pas régularisée. De plus une simple analyse en covariance présuppose une dépendance *linéaire* entre les rendements et les variables de marché. La méthode par noyaux proposée à la Section 3 offre au contraire une richesse supplémentaire au modèle permettant d'exprimer des situations non linéaires.

En fait, le faible nombre d'hypothèses sur la loi de marché (voir Section 4) permet à ce modèle de s'éloigner radicalement de l'approche couramment employée en tarification d'instruments financiers où les rendements sont modélisés selon une distribution particulière : on peut penser par exemple à l'exemple classique du modèle Black Scholes où le rendement est donné par une simple loi normale (voir [Shr04]), ou à des modèles plus sophistiqués de tarification d'option qui incluraient des processus à saut (voir par exemple [MCC98]).

De plus, ce modèle est d'une grande flexibilité puisqu'il accepte toute forme d'utilité monotone concave et fournit à l'investisseur des garanties probabilistes exprimées en rendement équivalent sur les erreurs de généralisation et de sous optimalité encourues.

En fait, non seulement ces erreurs sont connues, mais leurs ordres de convergence le sont elles aussi. Ainsi, un investisseur est en mesure de prédire de combien peut décroître ou augmenter l'erreur maximale hors échantillon lorsque de nouveaux échantillons ou de nouvelles variables de marché sont ajoutés pour la prise de décision.

Notons par ailleurs que ce mémoire a aussi le mérite de s'inscrire dans la recherche en apprentissage statistique en explorant de nouvelles formes de fonction de perte. Deux classes de problèmes sont traditionnellement considérées : la régression et la classification. Or, d'une certaine façon, notre problème emprunte des éléments propres à ces deux classes de problèmes. D'abord avec la régression puisqu'on cherche dans les deux cas à obtenir une quantité scalaire. Notre problème en diffère toutefois puisque, contrairement à la régression où on cherche à *minimiser* la distance entre un estimateur et les données du problème, l'algorithme d'investissement proposé ici cherche plutôt à *amplifier* (positivement ou négativement selon le cas) les valeurs (les rendements) du problème.

On se rapproche également des problèmes de classification puisque leur objectif (non régularisé) y sont de la forme

$$\underset{q}{\text{minimiser}} \quad n^{-1} \sum_{i=1}^n \ell(y_i q^T x_i) \quad (11)$$

où $y_i \in \{-1, +1\}$ est la cible du problème et $\ell : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ mesure l'adéquation entre y_i et $q^T x_i$. Typiquement $\ell(z)$ est nul lorsque $z \geq 0$, *i.e.* lorsque y_i et $q^T x_i$ sont du même signe, et est positif (constant ou croissant) dans la région où $z < 0$, *i.e.* lorsque y_i et $q^T x_i$ sont de signes opposés. En fait, la théorie des machines à vecteurs de support est un cas particulier de notre problème d'optimisation d'utilité lorsqu'on ne considère que le signe des rendements et qu'on emploie une fonction d'utilité u nulle sur l'intervalle $[1, \infty]$. Voir [MRT12] pour une introduction générale aux problèmes de régression et de classification.

Finalement, ce travail apporte également une modeste contribution au domaine des statistiques multivariées puisqu'une façon de concevoir le problème de maximisation d'utilité est comme celui des périls inhérents à l'estimation d'un *vecteur* de covariance non centrée entre une variable aléatoire scalaire et un vecteur aléatoire. En effet, dans le cas limite où l'utilité est neutre au risque, *i.e.* $u(x) = x$, le problème de maximisation d'utilité revient à

$$\underset{q}{\text{maximiser}} \quad \mathbf{E}(R q^T X) - \frac{\lambda}{2} \|q\|^2, \quad (12)$$

dont la solution est donnée par $q = \lambda^{-1} \mathbf{E}(RX)$, *i.e.* la covariance non centrée entre R et X . Ainsi, tous les résultats dérivés dans ce travail s'appliquent aussi à ce problème d'estimation statistique.

2 Optimisation moderne de portefeuille

L'objet de cette section est de présenter une brève introduction à quelques textes fondamentaux à l'intersection des mathématiques statistiques et de la gestion financière de portefeuille.

Dans tous les cas, le problème fondamental reste essentiellement le même : un investisseur est doté d'une certaine fonction d'utilité g (implicite ou non) qui dépend d'une décision q ayant un effet linéaire sur le rendement aléatoire R . D'autre part, l'investisseur cherche à réduire le risque du portefeuille estimé à travers la norme $\|q\|^2$ (où $\|\cdot\|$ est à préciser).

2.1 Approche statistique

Une revue de littérature sur la théorie du portefeuille serait fondamentalement incomplète sans l'article fondateur de Markowitz, publié en 1952 [Mar52]. Le cadre théorique développé par Markowitz peut être considéré comme un cas particulier de notre algorithme, pour autant que l'on considère un portefeuille à un seul actif.

Soit un portefeuille à k actifs d'espérance de rendement $\mu \in \mathcal{R}^k$ et de covariance $\Sigma \in \mathcal{R}^{k \times k}$. Si $q \in \mathcal{R}^k$ représente la répartition du portefeuille à optimiser, alors un investisseur *markowitzien* souhaite

$$\underset{q}{\text{maximiser}} \quad \mu^T q - \gamma q^T \Sigma q. \quad (13)$$

Littéralement, il cherche à maximiser le rendement espéré du portefeuille pondéré (premier terme) tout en minimisant, pour un certain niveau de risque $\gamma > 0$, sa covariance totale. En ne considérant qu'un seul actif dont la variance de rendement est notée σ^2 , le problème devient alors

$$\underset{q}{\text{maximiser}} \quad \mu^T q - \gamma \sigma^2 q^2. \quad (14)$$

En recalibrant le terme de régularisation pour tenir compte de la variance σ^2 , le problème devient identique à au problème [Citation needed] avec décision linéaire sur une utilité neutre au risque et une seule variable de marché constante à 1 (terme de biais).

Le problème de Markowitz à un actif peut aussi être considéré comme une maximisation d'utilité sans régularisation. En effet, en définissant

$$u(r) = r - \frac{\gamma}{\sigma^2 + \mu^2} \sigma^2 r^2, \quad (15)$$

on obtient

$$EU(qR) = qER - \frac{\gamma}{\sigma^2 + \mu^2} \sigma^2 q^2 ER^2, \quad (16)$$

et donc, puisque $\sigma^2 + \mu^2 = ER^2$, le problème de Markowitz s'exprime aussi comme un problème d'utilité espérée :

$$\underset{q}{\text{maximiser}} \quad EU(qR). \quad (17)$$

Nous suggérons au lecteur intéressé par l'équivalence des diverses formulations d'optimisation de portefeuille dans un univers de Markowitz [BPS13] et [Mar14], tous deux publiés à l'occasion du soixantième anniversaire de [Mar52].

Dans la même veine, l'article [BSCV09] considère l'optimisation d'un portefeuille à k actifs disposant de p variables de marché. Avec $X_t \in \mathcal{R}^{k \times p}$ une matrice aléatoire représentant la réalisation au temps t des diverses variables de marché, la composition $w_t \in \mathcal{R}^k$ du portefeuille sera donnée par

$$w_t = \bar{w}_t + X_t q. \quad (18)$$

La décision $q \in \mathcal{R}^p$ agit donc linéairement sur les variables de marché et globalement sur tous les actifs. Le terme de biais \bar{w}_t représente dans l'article original une composition de référence, par exemple un index lorsqu'il est question de gestion active de fonds. L'objectif de l'investisseur sera alors de

$$\text{maximiser } \mathbf{E}_t u(w_t^T r_t), \quad (19)$$

autrement dit de choisir une décision q permettant de

$$\text{maximiser}_{q \in \mathcal{R}^p} \mathbf{E}_t u(\bar{w}_t^T r_t + r_t^T X_t q). \quad (20)$$

On obtient donc un objectif très proche de ce qui est proposé dans ce mémoire. Cependant, l'absence de régularisation dans le vecteur de décision ne permet pas de fournir à l'investisseur des garanties sur la performance du portefeuille. Pire, sous certaines formes d'utilité (par exemple risque neutre), il est évident que la solution de l'objectif peut avoir une amplitude non bornée !

Néanmoins, une telle approche demeure simple à implémenter, laisse une grande liberté dans la forme paramétrique de l'utilité et évite d'avoir à calculer les deux premiers moments statistiques d'un univers à k actifs.

2.2 Approche régularisée

D'une certaine façon, ces travaux approchent le problème de gestion de portefeuille un peu trop brusquement en ne laissant pas suffisamment de place aux garanties statistiques. Autrement dit, ils présentent tous un risque de généralisation élevé. Comme la méthode proposée par ce mémoire, d'autres travaux ont aussi cherché à étudier l'importance de la régularisation des décisions dans la gestion de portefeuille.

Par exemple [OND15] étudie l'idée selon laquelle les coûts de transaction inhérents à la gestion de portefeuille peuvent être modélisés comme une régularisation dans l'objectif de maximisation de rendement – minimisation de variance. Le problème de Markowitz (13) devient alors

$$\text{maximiser}_q \mu^T q - \gamma q^T \Sigma q - \kappa \|\Lambda(q - q_0)\|_p^p, \quad (21)$$

le troisième terme représentant les coûts de transaction comme la p -norme du rebalancement du portefeuille linéarisé par un opérateur symétrique $\Lambda \in \mathcal{R}^{k \times k}$ et paramétré par un scalaire κ . Bien que la régularisation soit ici appliquée au vecteur de poids et non à une décision linéaire sur des observations, les auteurs parviennent empiriquement à la même conclusion, c'est-à-dire que les résultats hors échantillons sont mieux contrôlés. Intuitivement, un tel résultat s'explique par le fait qu'un gestionnaire de portefeuille soumis à des contraintes de coûts de transaction évitera une politique d'investissement trop ambitieuse.

Cependant, l'argument demeure empirique et ne bénéficie donc pas comme ici de véritables garanties théoriques sur les performances hors échantillon. En outre, le modèle suggéré reste essentiellement markowitzien et se limite donc à maximiser une utilité quadratique, alors que notre modèle permet d'optimiser sur une fonction d'utilité de forme arbitraire.

Plus récemment, [BEKL16] explore l'importance de la régularisation dans une gestion de portefeuille où le risque est représenté par une fonction $\mathcal{R} : \mathcal{R}^k \rightarrow \mathcal{R}$ agissant sur le vecteur de poids $q \in \mathcal{R}^k$. Le risque est laissé à la discrétion de l'investisseur, mais pourrait être représenté par exemple par $\mathcal{R}(q) = q^T \Sigma q$ la norme de la covariance ou par sa valeur à risque conditionnelle $\mathcal{R}(q) = \text{CVar}(q)$.¹ L'argument offert est essentiellement le même que celui présenté à la section 1.2.3 : si on sait que le problème empirique

$$\underset{q}{\text{maximiser}} \quad \hat{\mu}^T q - \lambda_0 \hat{\mathcal{R}}(q) \quad (22)$$

converge asymptotiquement vers la solution optimale, l'absence de régularisation implique l'absence de garantie sur la qualité des résultats lorsque l'optimisation a lieu sur un nombre de points finis. La régularisation est alors exprimée comme la *variance empirique du risque*, i.e. l'objectif devient

$$\underset{q}{\text{maximiser}} \quad \hat{\mu}^T q - \lambda_0 \hat{\mathcal{R}}(q) - \lambda_1 \text{Var}(\hat{\mathcal{R}}(q)). \quad (23)$$

Dans ces conditions, les auteurs démontrent que le risque encouru par la décision empirique régularisée \hat{q} converge elle aussi vers le risque optimal. Cependant, aucune borne finie n'est donnée, contrairement à ce qui est proposé dans ce mémoire.

Plus près de l'objectif de ce mémoire, [RV14] a le mérite d'appliquer plusieurs théorèmes issus de l'apprentissage statistique dans un contexte de gestion. L'idée est en fait de coupler le problème classique du vendeur de journaux² à une situation où la décision est prise à partir d'un grand nombre de variables $X \in \mathcal{R}^p$ liées au problème.

1. La valeur à risque conditionnelle paramétrée par $\beta \in (0, 1)$ d'une variable aléatoire R (en l'occurrence le rendement pondéré par q) est une mesure de l'étalement dans les régions défavorables à l'investisseur et est donné par $E(R \mid R \leq \beta^c \text{ quantile de } R)$.

2. Le problème du vendeur de journaux (ou *newsvendor problem*) cherche à minimiser les coûts de gestion d'inventaire $c(p, D) = \alpha_1(D - p)^+ + \alpha_2(p - D)^+$ où p est la quantité de journaux à commander, $D \in \mathcal{R}$ la demande aléatoire et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R}_+$ sont respectivement les coûts liés à la rupture de stock et au maintien des invendus. Sous sa forme classique, le problème revient aussi à une estimation de quantile. Voir par exemple [SDR09] pour une introduction au problème du vendeur de journaux dans un contexte d'optimisation stochastique.

Sous un noyau linéaire, l'objectif est alors de déterminer q de façon à

$$\underset{q}{\text{minimiser}} \quad \mathbf{E} c(q^T X, D). \quad (24)$$

où $c : \mathcal{R} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathcal{R}$ est la fonction du coût correspondant à l'achat de $q^T x$ journaux si une demande aléatoire $D \in \mathbf{D} \subseteq \mathcal{R}$ a lieu. La convexité de c permet alors d'obtenir des garanties hors échantillon lorsqu'un terme de régularisation quadratique est ajouté à l'objectif :

$$\underset{q}{\text{minimiser}} \quad \mathbf{E} c(q^T X, D) + \lambda \|q\|^2. \quad (25)$$

De plus, ce papier cherche également à établir le rôle de la dimension p de X dans la qualité des résultats. Ainsi, à bien des égards, son objectif est très semblable au nôtre.

Tous les travaux présentés jusqu'à présent font l'hypothèse que les variables aléatoires d'intérêt (rendement et variables de marché) sont stationnaires dans le temps. À l'inverse, [Cov91] considère un univers où les rendements sont distribués selon un processus arbitraire et possiblement adversarial. L'idée est alors de minimiser le *regret* encouru par une décision scalaire d'investissement $q_t \in \mathcal{R}$, où le regret est calculé comme étant la fortune finale obtenue en appliquant une décision q_t par rapport à la fortune finale qui aurait été obtenue en appliquant une politique optimale constante q^* . Autrement dit,

$$\text{Regret}(T) := \max_{q^*} \sum_{t=1}^T \log(q^* r_t) - \sum_{t=1}^T \log(q_t r_t). \quad (26)$$

En choisissant q_t à partir d'une descente de gradient (voir par exemple [Haz15] pour un contexte plus général d'apprentissage en ligne) on peut alors garantir un regret dont la progression du regret est $\mathcal{O}(\sqrt{T})$. Un tel algorithme induisant un regret sous linéaire, *i.e.* dominé par $\mathcal{O}(T)$, est appelé *portefeuille universel*.

2.3 Conclusion

En conclusion, la nature générale de notre modèle (impliquée par la forme arbitraire de la fonction d'utilité) permet donc de le positionner comme une version flexible des travaux présentés ici. Plusieurs avantages sont ainsi regroupés : le terme de risque arbitraire, la stabilité des résultats consolidée par la présence de régularisation et l'admission de variables de marché quelconques. Cependant, notre algorithme a le désavantage de ne considérer un portefeuille qu'à un seul actif, contrairement à ce qui se fait généralement en gestion classique de portefeuille.

3 Algorithme d'apprentissage

Cette section sera l'occasion d'étudier l'algorithme avec lequel une politique d'investissement empirique \hat{q} peut être obtenue à partir d'un ensemble d'entraînement $\mathcal{S}_n = \{(r_1, x_1), \dots, (r_n, x_n)\}$ échantillonné de la loi de marché M .

Les formulations primale et duale seront d'abord présentées dans le cas où l'espace des variables de marché \mathbf{X} ne subit aucune transformation. Ces deux formulations seront ensuite généralisées au cas non linéaire obtenu par application $x \mapsto \phi(x)$. Finalement l'"astuce du noyau", qui permet de représenter des situations complexes où $\phi(x)$ est possiblement de dimension infinie, sera introduite.

3.1 Formulations primale et duale

Tel que discuté en introduction, le cas le plus simple pour un espace de décision est celui où l'espace \mathbf{X} des variables de marché ne subit aucune transformation. L'espace \mathbf{Q} correspond³ alors à \mathbf{X} et le scalaire de décision $q(x)$ est obtenu par produit scalaire $q^T x$. On obtient donc ici le problème sous la forme *primale* :

$$\boxed{\text{maximiser}_{q \in \mathbf{X}} \quad n^{-1} \sum_{i=1}^n u(r_i q^T x_i) - \frac{\lambda}{2} \|q\|^2} \quad (27)$$

Formulation primale I

Par la théorie de l'optimisation convexe (voir [BV04]) on sait qu'une solution \hat{q} existe et qu'elle est unique. En supposant que $\mathbf{X} \subseteq \mathcal{R}^p$, on peut alors exprimer \hat{q} comme une combinaison linéaire de p coordonnées.

Cependant, \hat{q} peut aussi être exprimé comme une combinaison linéaire de la base $\{x_1, \dots, x_n\}$, i.e. il existe un vecteur $\hat{\alpha} \in \mathcal{R}^n$ tel que $\hat{q} = \Xi^T \hat{\alpha}$, où $\Xi \in \mathcal{R}^{n \times p}$ est la matrice des observations.

Il suffit en effet de remarquer que l'espace $\mathbf{Q} = \mathbf{X}$ peut être décomposé comme la somme directe du sous-espace vectoriel $\hat{\mathbf{X}}$ engendré par Ξ^T et son complément orthogonal $\hat{\mathbf{X}}^\perp$, i.e. $\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{X}} \oplus \hat{\mathbf{X}}^\perp$. Ainsi, tout vecteur de décision $q \in \mathbf{Q}$ s'exprime comme la somme de $\hat{x} \in \hat{\mathbf{X}}$ et $\hat{x}^\perp \in \hat{\mathbf{X}}^\perp$, deux vecteurs orthogonaux (voir les appendices de [BV04] ou [MRT12]). La fonction objectif EU_λ évaluée au point q se simplifie alors

3. En fait, pour être exact, $q : \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{R}$ étant une *fonction*, il est plus exact de faire correspondre \mathbf{Q} à l'espace *dual* \mathbf{X}^* . Mais par le théorème de Riez, à tout vecteur $v \in \mathbf{V}$ d'un espace vectoriel, il existe un unique vecteur dual $v^* \in \mathbf{V}^*$ (noté v^T en dimension finie). On peut donc se contenter de faire correspondre \mathbf{Q} à \mathbf{X} .

ainsi :

$$\mathbf{EU}_\lambda(q) = \mathbf{EU}_\lambda(\hat{x} + \hat{x}^\perp) \quad (28)$$

$$= n^{-1} \sum_{i=1}^n u(r_i (\hat{x} + \hat{x}^\perp)^T x_i) - \frac{\lambda}{2} \|\hat{x} + \hat{x}^\perp\|^2 \quad (29)$$

$$\leq n^{-1} \sum_{i=1}^n u(r_i \hat{x}^T x_i) - \frac{\lambda}{2} \|\hat{x}\|^2, \quad (30)$$

puisque, par définition, $(\hat{x}^\perp)^T x_i = 0$ pour toute observation x_i et que d'autre part $\|\hat{x}\|^2 \leq \|\hat{x}\|^2 + \|\hat{x}^\perp\|^2 = \|q\|^2$. Ainsi, toute solution \hat{q} repose bien dans l'espace colonne de Ξ^T .

Cette observation (qui correspond en fait au célèbre théorème de la représentation) peut se révéler très utile car elle permet de changer le domaine d'optimisation de \mathbf{X} à \mathcal{R}^n par l'identité $\hat{q} = \Xi^T \hat{\alpha}$. Autrement dit, le problème d'optimisation devient

$$\underset{\alpha \in \mathcal{R}^n}{\text{maximiser}} \quad n^{-1} \sum_{i=1}^n u(r_i \alpha^T \Xi x_i) - \frac{\lambda}{2} \alpha^T \Xi \Xi^T \alpha. \quad (31)$$

On peut simplifier cette expression en posant $K := \Xi \Xi^T \in \mathcal{R}^{n \times n}$:

$$\boxed{\underset{\alpha \in \mathcal{R}^n}{\text{maximiser}} \quad n^{-1} \sum_{i=1}^n u(r_i K_i \alpha) - \frac{\lambda}{2} \alpha^T K \alpha,} \quad (32)$$

Formulation duale I

où $\sum_{j=1}^n x_j^T x_i = K_i \in \mathcal{R}^n$ représente la i^{e} colonne (ou rangée car K est alors symétrique) de K . En fait K correspond à la *matrice gramienne*, i.e. la matrice des produits scalaires de toutes les observations x_i .

Le problème dual, lorsqu'il est exprimé avec une utilité risque neutre, admet une solution analytique équivalente à la solution primale, mais qui donne une interprétation supplémentaire au concept de solution optimale. En considérant

$$\underset{\alpha \in \mathcal{R}^n}{\text{maximiser}} \quad n^{-1} r^T K \alpha - \frac{\lambda}{2} \alpha^T K \alpha \quad (33)$$

et en faisant l'hypothèse qu'aucune observation x_i n'est de norme nulle (une telle observation serait de toute façon inutile puisqu'elle n'induirait alors aucune décision d'investissement, étant donné que $q^T x_i = 0$ pour toute décision q), K est alors définie positive et la solution $\hat{\alpha} = (\lambda n)^{-1} r$ est unique. Ainsi, la décision optimale $\hat{q} = \Xi^T \hat{\alpha}$ peut être conçue comme une moyenne pondérée par le rendement de chacune des observations.

3.2 Transformations non linéaires

Le cas $Q = X$ est cependant trop pour rendre compte de certaines géométries de problème. Il est alors naturel de définir une transformation non linéaire d'une observation

$x \in \mathbf{X}$ par une fonction $\phi : \mathbf{X} \rightarrow \phi(\mathbf{X})$. Par exemple, si $\mathbf{X} \in \mathcal{R}$, i.e. une seule variable de marché est considérée, alors on peut chercher une solution polynômiale en posant une transformation du genre

$$\phi : x \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^k \end{pmatrix}. \quad (34)$$

En notant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de l'espace $\phi(\mathbf{X})$, le problème consiste alors à trouver un vecteur optimal $q \in \mathcal{Q} = \phi(\mathbf{X})$ de façon à

$$\boxed{\text{maximiser}_{q \in \phi(\mathbf{X})} \quad n^{-1} \sum_{i=1}^n u(r_i \langle q, \phi(x_i) \rangle) - \frac{\lambda}{2} \|q\|^2.} \quad (35)$$

Formulation primale II

Mais puisque le théorème de représentation s'applique encore, \hat{q} peut aussi s'exprimer comme une combinaison linéaire α des observations $\{\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)\}$:

$$\boxed{\text{maximiser}_{\alpha \in \mathcal{R}^n} \quad n^{-1} \sum_{i=1}^n u(r_i K_i \alpha) - \frac{\lambda}{2} \alpha^T K \alpha.} \quad (36)$$

Formulation duale II

Cette fois par contre $K_{ij} = \langle \phi(x_i), \phi(x_j) \rangle$; chaque élément de K représente le produit scalaire des éléments $\phi(x_i)$.

3.3 Fonctions de noyau

Ainsi, pour toute transformation $\phi : \mathbf{X} \rightarrow \phi(\mathbf{X})$, quelle que soit la dimension de l'espace $\phi(\mathbf{X})$, on peut exprimer la décision optimale à partir d'une optimisation sur n dimensions. En outre, ce programme d'optimisation ne dépend plus que du produit scalaire entre ces observations transformées. De plus, on peut dans bien des cas court-circuiter le calcul de ce produit scalaire par une fonction *noyau* $\kappa : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{R}$ telle que $\kappa(x_i, x_j) = \langle \phi(x_i), \phi(x_j) \rangle$.

Par exemple, dans l'exemple montré plus haut, il suffirait de poser

$$\kappa(x_i, x_j) = 1 + x_i x_j + (x_i x_j)^2 + \dots + (x_i x_j)^k. \quad (37)$$

Évidemment, dans un pareil cas le gain est assez faible puisqu'on a uniquement réarrangé l'ordre des opérations. Mais, il est alors possible de circonvier complètement

la transformation ϕ et de représenter sa non linéarité qu'à partir de κ . Par exemple, le noyau gaussien

$$\kappa(x_i, x_j) = \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (38)$$

permet de calculer directement le produit scalaire $\langle \phi(x_i), \phi(x_j) \rangle$ d'observations $\phi(x_i)$ et $\phi(x_j)$ de dimension infinie.

Choisir adéquatement le noyau est alors une tâche cruciale du modèle puisque tout noyau κ induit une géométrie particulière du modèle; il peut alors être impossible de déterminer une fonction de décision q pourvue de bonne performance si le noyau ne correspond pas à la géométrie de la loi de marché M .

Il faut par ailleurs imposer une contrainte supplémentaire à la classe des noyaux possibles. En effet $\kappa(x_i, x_j)$ représente un produit scalaire dans $\phi(\mathbf{X})$ et est donc tenu de respecter les propriétés algébriques de celui-ci. En fait, κ doit satisfaire l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\kappa(x_i, x_j)^2 = \langle \phi(x_i), \phi(x_j) \rangle^2 \quad (39)$$

$$\leq \|\phi(x_i)\| \|\phi(x_j)\| \quad (40)$$

$$= \kappa(x_i, x_i) \kappa(x_j, x_j). \quad (41)$$

Le noyau κ doit donc être une forme semi-définie positive sur \mathbf{X} (voir encore [MRT12]).

3.4 Espace de décision vectoriel

Enfin, cette fonction noyau est également en mesure d'*induire* un espace de décision par la relation $\mathbf{Q} = \kappa(\mathbf{X}, \cdot)$. L'espace de décision ainsi obtenu est alors un *espace de Hilbert à noyau reproduisant*, et donc un espace vectoriel. Autrement dit, les opérations comme la norme, l'addition ou le produit scalaire sont supportés et peuvent être appliquées sur des fonctions de décision $q \in \mathbf{Q}$.

On peut de surcroît introduire une nouvelle notation $|x\rangle = \kappa(x, \cdot)$ et $\langle x| = \kappa(x, \cdot)^*$ le dual de l'élément. Cela permet d'introduire une notation $q(x) = \langle q|x\rangle := \langle q, \kappa(x, \cdot) \rangle$. Le premier produit scalaire réfère aux éléments dans l'espace \mathbf{Q} alors que le second aux éléments de l'espace vectoriel $\phi(\mathbf{X})$.

Ceci permet par exemple de donner la solution du problème à utilité neutre au risque simplement comme

$$q = \frac{1}{n\lambda} \sum_{i=1}^n r_i |x_i\rangle. \quad (42)$$

4 Garanties statistiques

La section précédente été dédiée à l’approche algorithmique du problème : comment, donnés un ensemble d’entraînement et un espace de décision \mathcal{Q} , une fonction de décision $\hat{q} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{R}$ permettant de prescrire un investissement pouvait être déterminée. Cette section sera consacrée aux garanties statistiques de cette solution. Dans un premier temps, une étude de la stabilité de l’algorithme d’optimisation permettra de dériver une borne de généralisation sur la performance hors-échantillon (Section 4.1). Par la suite, le problème sera approché d’un point probabiliste (en terme de variables aléatoires) afin de comparer les performances de la décision optimale d’investissement sur M par rapport à la décision empirique (Section 4.2). Enfin, la Section 4.3 portera sur l’influence de la dimensionalité de l’espace \mathcal{Q} sur la qualité des bornes alors obtenues, et don

Les bornes qui seront dérivées n’auront de signification qu’en terme d’*util*, c’est à dire la dimension de $u(r)$ pour un certain rendement. Comme cette notion n’a en soi aucune signification tangible, un théorème sera finalement introduit afin d’obtenir pour chacune des bornes une version sous forme de rendement équivalent.

Hypothèses et discussion Certaines hypothèses devront d’abord être formulées afin d’être en mesure d’obtenir des résultats pertinents : ce sera en fait le prix à payer pour l’absence de contraintes sur la forme de la loi de marché M .

Hypothèse 1. *L’amplitude de similarité d’une observation est bornée : pour tout $x \in \mathcal{X}$, $\kappa(x, x) \leq \xi^2$.*

Hypothèse 2. *Le rendement aléatoire est borné : $|R| \leq \bar{r}$.*

Hypothèse 3. *Un investisseur est doté d’une fonction d’utilité u concave, monotone et standardisée, c’est-à-dire que $u(0) = 0$ et $\partial u(0) \ni 1$ ⁴. De plus, u est défini sur l’ensemble de \mathcal{R} . Enfin, u est γ -Lipschitz, c’est-à-dire que pour tout $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$, $|u(r_1) - u(r_2)| \leq \gamma|r_1 - r_2|$.*

Avant d’aller plus loin, il convient de discuter de la plausibilité de ces contraintes. Cependant, compte tenu de l’aspect central de la première hypothèse, une discussion approfondie ne sera abordée qu’à la section 4.3.

Pour ce qui est de la seconde hypothèse, si on définit les rendements selon l’interprétation usuelle d’un changement de prix p , i.e., $r = \Delta p/p$, on constatera que r est nécessairement borné par 0. De plus, selon la période de temps pendant laquelle Δp est mesuré, il y a forcément moyen de limiter l’accroissement dans le prix, pour autant que Δt soit suffisamment court.

4. Ici, $\partial u(r)$ signifie l’ensemble des sur-gradients de u . Dans le cas dérivable, cela revient à la notion de dérivée. Dans le cas simplement continu, $\partial u(r)$ est l’ensemble des fonctions affines “touchant” à $u(r)$ et supérieures à $u(r)$ pour tout r du domaine).

La troisième hypothèse est davantage contraignante. Elle exclut d'emblée plusieurs fonctions d'utilité courantes ; par exemple l'utilité logarithmique et racine carrée puisqu'elles ne sont définies que pour \mathcal{R}_+ . Une utilité quadratique, comme celle de Markowitz est également inadmissible puisqu'elle est non-monotone. Les utilités de forme exponentielle inverse $u(r) = \mu(-\exp(-r/\mu) + 1)$ de paramètre $\mu > 0$ violent quant à elles la condition Lipschitz. On peut cependant définir une utilité exponentielle à *pente contrôlée*, c'est à dire dont la pente devient constante lorsque $r \leq r_0$. La Section 5 emploiera une telle fonction d'utilité pour illustrer numériquement ces résultats. En outre, une utilité qui serait définie par morceaux linéaires serait parfaitement acceptable.

4.1 Bornes de généralisation

Exposition du problème Soit \mathcal{Q} un espace de décision induit par un noyau $\kappa : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathcal{R}$ et soit un ensemble d'entraînement $\mathcal{S}_n = \{(x_i, r_i)\}_{i=1}^n \sim M^n$ échantillonné à partir de la distribution de marché. Alors on peut définir l'*algorithme de décision* $\mathcal{Q} : M^n \rightarrow \mathcal{Q}$ par

$$\mathcal{Q}(\mathcal{S}_n) = \arg \max_{q \in \mathcal{Q}} \left\{ \widehat{EU}(\mathcal{S}_n, q) - \lambda \|q\|^2 \right\} \quad (43)$$

où

$$\widehat{EU}(\mathcal{S}_n, q) := n^{-1} \sum_{i=1}^n u(r_i q(x_i)). \quad (44)$$

La question qui se pose naturellement est de savoir dans quelle mesure une fonction de décision $\hat{q} = \mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)$ est capable d'offrir à un investisseur une utilité espérée comparable à celle qu'il aurait observée au sein de l'ensemble d'entraînement. Il serait aussi souhaitable qu'une telle garantie soit indépendante de l'ensemble d'entraînement \mathcal{S}_n . Autrement dit, on cherche à déterminer pour tout échantillon \mathcal{S}_n une borne probabiliste $\hat{\Omega}_u(\delta, n, \dots)$ s'appliquant avec probabilité d'au moins $1 - \delta$ sur l'erreur de généralisation de $\hat{q} = \mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)$:

$$\hat{\zeta}_u(\mathcal{S}_n) \leq \hat{\Omega}_u(\delta, n, \dots), \quad (45)$$

où

$$\hat{\zeta}_u(\mathcal{S}_n) := \widehat{EU}(\mathcal{S}_n, \mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)) - EU(\mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)) \quad (46)$$

représente l'erreur de généralisation et

$$EU(q) := E u(R \cdot q(X)) \quad (47)$$

l'utilité espérée *hors échantillon* d'une politique d'investissement q .

Bien que ces résultats soient intéressants d'un point de vue théorique, on veut d'un point de vue pratique pouvoir offrir le même genre de garanties $\hat{\Omega}_r(\delta, n, \dots)$ à un gestionnaire de portefeuille sur son rendement équivalent hors échantillon par rapport au rendement équivalent en échantillon :

$$CE(\mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)) \geq \widehat{CE}(\mathcal{S}_n, \mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)) - \hat{\Omega}_r(\delta, n, \dots), \quad (48)$$

où

$$\mathbf{CE}(q) := u^{-1}(\mathbf{EU}(q)) \quad (49)$$

indique le rendement équivalent espéré hors échantillon et

$$\widehat{\mathbf{CE}}(\mathcal{S}_n, q) := u^{-1}(\widehat{\mathbf{EU}}(\mathcal{S}_n, q)) \quad (50)$$

le rendement équivalent en échantillon \mathcal{S}_n suivant une politique q .

Intuition et éléments de preuve En fait, la motivation derrière ces hypothèses est la suivante : combinées à l'élément de régularisation, elles parviennent d'une part à borner la perte que peut entraîner la prise de décision dans le pire cas et d'autre part à borner la différence entre deux fonctions de décision entraînées sur des ensembles à peu près identiques.

Théorème 1 (Borne sur l'erreur de généralisation (util)). *L'erreur de généralisation sur \hat{q} est bornée par*

$$\widehat{\mathbf{EU}}(\mathcal{S}_n, \mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)) - \mathbf{EU}(\mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)) \leq \hat{\Omega}_u, \quad (51)$$

où

$$\hat{\Omega}_u = \frac{\bar{r}^2 \xi^2}{2\lambda} \left(\frac{\gamma^2}{n} + (2\gamma^2 + \gamma + 1) \sqrt{\frac{\log(1/\delta)}{2n}} \right). \quad (52)$$

Considérons deux ensembles d'entraînement : $\mathcal{S}_n \sim M^n$ et \mathcal{S}'_n , où \mathcal{S}'_n ne diffère de \mathcal{S}_n que par un seul point (par exemple le j -ème point serait rééchantillonné de la distribution de marché M). De l'algorithme \mathcal{Q} on dérivera alors deux décisions : \hat{q} et \hat{q}' . Pour n suffisamment grand, on peut alors s'attendre à ce que l'utilité dérivée de ces deux décisions soit relativement proche, et ce, pour toute observation. On aurait alors une borne $\beta(n)$ telle que pour tout $(x, r) \sim M$,

$$|u(r \hat{q}(x)) - u(r \hat{q}'(x))| \leq \beta. \quad (53)$$

C'est ce qu'on appelle dans la littérature la *stabilité algorithmique*. La plupart des algorithmes régularisés classiques disposent par ailleurs d'une telle stabilité. En particulier, le terme de régularisation $\lambda \|q\|^2$, combiné à la continuité Lipschitz de u font en sorte que $\beta = (n^{-1})$. Par le Lemme 5, p. 65 (une application directe du théorème de Bousquet), on obtient effectivement

$$\beta \leq \frac{\gamma^2 \bar{r}^2 \xi^2}{2\lambda n}. \quad (54)$$

Dotée de cette stabilité de \mathcal{Q} , la différence dans l'erreur de généralisation de \mathcal{S}_n et \mathcal{S}'_n peut alors être bornée :

$$|\hat{\zeta}(\mathcal{S}_n) - \hat{\zeta}(\mathcal{S}'_n)| = |\mathbf{EU}(\hat{q}) - \mathbf{EU}(\hat{q}') + \widehat{\mathbf{EU}}(\mathcal{S}_n, \hat{q}) - \widehat{\mathbf{EU}}(\mathcal{S}'_n, \hat{q}')| \quad (55)$$

$$\leq |\mathbf{EU}(\hat{q}) - \mathbf{EU}(\hat{q}')| + |\widehat{\mathbf{EU}}(\mathcal{S}_n, \hat{q}) - \widehat{\mathbf{EU}}(\mathcal{S}'_n, \hat{q}')|. \quad (56)$$

Or, par le théorème de Jensen appliqué à la fonction valeur absolue, on obtient du premier terme que

$$|\mathbf{E}\mathbf{U}(\hat{q}) - \mathbf{E}\mathbf{U}(\hat{q}')| = |\mathbf{E}(u(R \cdot \hat{q}(X)) - u(R \cdot \hat{q}'(X)))| \quad (57)$$

$$\leq \mathbf{E}(|u(R \cdot \hat{q}(X)) - u(R \cdot \hat{q}'(X))|) \quad (58)$$

$$\leq \beta, \quad (59)$$

par définition de la stabilité. Quant au deuxième terme de (56) on peut le borner de la même façon :

$$|\widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}(\mathcal{S}_n, \hat{q}) - \widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}(\mathcal{S}'_n, \hat{q}')| \quad (60)$$

$$= n^{-1} \left| \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{i \neq j} u(r_i \hat{q}(x_i)) + u(r_j \hat{q}(x_j)) - \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{i \neq j} u(r_i \hat{q}'(x_i)) - u(r'_j \hat{q}'(x'_j)) \right| \quad (61)$$

$$\leq n^{-1} \left(|u(r_j \hat{q}(x_j)) - u(r'_j \hat{q}'(x'_j))| + \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{i \neq j} |u(r_i \hat{q}(x_i)) - u(r_i \hat{q}'(x_i))| \right) \quad (62)$$

$$\leq n^{-1} (|u(r_j \hat{q}(x_j)) - u(r'_j \hat{q}'(x'_j))| + (n-1)\beta). \quad (63)$$

Considérons le premier terme. Par le Lemme ??, p. ??, on sait que $\hat{q}(x) \leq (2\lambda)^{-1} \bar{r} \xi^2$ et que $|R| \leq \bar{r}$. On peut donc borner cette différence par la différence dans l'utilité dérivée par la meilleure décision d'investissement sur le meilleur rendement et sur le pire rendement. Par hypothèse Lipschitz et de sur-gradient de 1 à $r = 0$, on sait que pour $r > 0$, $u(r) < r$ et que pour $r < 0$, $\gamma r \leq u(r)$. On peut donc conclure que

$$|u(r_j \hat{q}(x_j)) - u(r'_j \hat{q}'(x'_j))| \leq u((2\lambda)^{-1} \bar{r}^2 \xi^2) - u(-(2\lambda)^{-1} \bar{r}^2 \xi^2) \quad (64)$$

$$\leq (2\lambda)^{-1} (\gamma + 1) \bar{r}^2 \xi^2. \quad (65)$$

Ce qui entraîne donc que

$$|\widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}(\mathcal{S}_n, \hat{q}) - \widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}(\mathcal{S}'_n, \hat{q}')| \leq \frac{\gamma + 1}{2\lambda n} \bar{r}^2 \xi^2 + \frac{n-1}{n} \beta \quad (66)$$

$$\leq \beta + \frac{\gamma + 1}{2\lambda n} \bar{r}^2 \xi^2, \quad (67)$$

d'où, après quelques simplifications algébriques, on peut enfin tirer que

$$|\hat{\zeta}(\mathcal{S}_n) - \hat{\zeta}(\mathcal{S}'_n)| \leq \beta(2\gamma^2 + \gamma + 1). \quad (68)$$

Ainsi la différence dans l'erreur de généralisation est de convergence (n^{-1}) . À ce stade, la démonstration est presque complète, puisqu'en appliquant l'inégalité de concentration de McDiarmid, on obtient que pour tout \mathcal{S}_n ,

$$\mathbf{P}\{\hat{\zeta}(\mathcal{S}_n) \geq \epsilon + \mathbf{E}_{\mathcal{S}_n} \hat{\zeta}(\mathcal{S}_n)\} \leq \exp\left(-\frac{2\epsilon^2}{n\beta^2(2\gamma^2 + \gamma + 1)^2}\right), \quad (69)$$

ce qui revient à dire qu'avec probabilité $1 - \delta$:

$$\hat{\zeta}(\mathcal{S}_n) < \mathbf{E}_{\mathcal{S}_n} \hat{\zeta}(\mathcal{S}_n) + \frac{\sqrt{n}\beta(2\gamma^2 + \gamma + 1) \log(1/\delta)}{2}. \quad (70)$$

Or, $\mathbf{E}_{\mathcal{S}_n} \hat{\zeta}(\mathcal{S}_n) \leq \beta$ (voir [MRT12] pour une preuve technique mais complète), d'où on a finalement la borne recherchée.

Équivalent certain À ce point-ci, il ne reste plus qu'à inverser le domaine de cette garantie pour l'exprimer en unités de rendements. En effet, si à partir d'un échantillon d'entraînement on a pu calculer un rendement équivalent $\widehat{CE} = u^{-1}(\widehat{EU})$, en utilisant le résultat du Lemme 9, p. 67, un investisseur aura un rendement équivalent hors échantillon CE tel que

$$CE \geq \widehat{CE} - (1/(\lambda\sqrt{n})). \quad (71)$$

De façon explicite :

$$CE \geq \widehat{CE} - \partial u^{-1}(\widehat{CE}) \cdot \frac{\bar{r}^2 \xi^2}{2\lambda} \left(\frac{\gamma^2}{n} + (2\gamma^2 + \gamma + 1) \sqrt{\frac{\log(1/\delta)}{2n}} \right). \quad (72)$$

Cette borne permet ainsi d'appréhender dans quelle mesure un large échantillonnage est nécessaire pour obtenir un degré de confiance élevé. On notera l'influence de plusieurs facteurs sur la qualité de la borne (la discussion sur l'influence du terme $\bar{r}^2 \xi^2$ est repoussé à la Section 4.3).

Ainsi, la constante γ et le terme du sur-gradient inverse $\partial u^{-1}(\widehat{CE})$ sont tous deux susceptibles de dégrader considérablement la borne, particulièrement lorsque l'investisseur est doté d'une utilité très averse au risque ; dans des cas extrêmes, par exemple une utilité exponentielle inverse, ces deux valeurs divergeront très rapidement. Il convient cependant de prendre note que la constante Lipschitz est globalement plus importante puisqu'on considère son carré. Il devient alors essentiel de contrôler l'agressivité de l'algorithme en choisissant des valeurs élevées pour la régularisation λ de manière à chercher une utilité espérée relativement proche de $u(0)$.

On constate par ailleurs le rôle de premier plan que joue le terme de régularisation. Avec une régularisation élevée, on obtiendra sans surprise une borne très serrée, mais aux dépens de la politique d'investissement qui varie selon $(1/\lambda)$. Il est donc primordial de faire une validation croisée sur λ pour déterminer le meilleur compromis entre la variance des résultats et l'objectif à atteindre. La constante de confiance δ est quant à elle très performante ; une confiance de 99.9% n'accroît la borne que par un facteur de 2.63. Enfin, compte tenu du théorème limite centrale, l'ordre de convergence de $(1/\sqrt{n})$ n'a finalement rien de surprenant. **[Todo: Plus de détails...]**

4.2 Bornes de sous optimalité

Introduction et hypothèses supplémentaires Jusqu'ici, les efforts théoriques ont été déployés pour déterminer comment se comportait la fonction de décision $\hat{q} =$

$\mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)$ dans un univers probabiliste par rapport à l'univers statistique dans lequel elle avait été construite. Notre attention va maintenant se tourner vers la performance de \hat{q} dans l'univers probabiliste par rapport à la meilleure décision disponible, c'est à dire la solution q^* de

$$\underset{q \in \mathcal{Q}}{\text{maximiser}} \quad \mathbf{E} u(R \cdot q(X)). \quad (73)$$

Il convient cependant de réaliser que l'existence d'une borne sur q^* n'est pas assurée. En effet, supposons d'une part que l'on dispose d'une utilité neutre au risque u_1 , telle que $u_1(r) = r$, et d'autre part que $\mathbf{E} R = 0$. Soit $\alpha > 0$. On pourrait alors définir la fonction suivante :

$$q = \alpha \mathbf{E}(R \kappa(X, \cdot)) \quad (74)$$

On aurait alors, du fait de la linéarité du produit scalaire,

$$\mathbf{E} I(q) = \mathbf{E}(R q(X)) \quad (75)$$

$$= \mathbf{E}(R \langle q, \kappa(X, \cdot) \rangle) \quad (76)$$

$$= \mathbf{E} \langle q, R \kappa(X, \cdot) \rangle \quad (77)$$

$$= \langle q, \mathbf{E}(R \kappa(X, \cdot)) \rangle \quad (78)$$

$$= \alpha \|q\|^2 \geq 0. \quad (79)$$

On peut alors obtenir une utilité espérée non bornée à mesure que $\alpha \rightarrow \infty$. Par ailleurs, ainsi défini, q représente effectivement la covariance entre R et la projection de X dans l'espace dual de \mathcal{Q} ; par exemple dans le cas d'un noyau linéaire on aurait $q = \mathbf{E}(R X^T) = \mathbf{Cov}(R, X)$. On sait qu'en espérance l'application de q à X variera de la même façon que celle de R et donc qu'on aura une utilité infinie, puisque l'utilité est neutre.

Pour empêcher une telle situation d'exister on introduit l'hypothèse suivante. Elle exclut toute forme d'utilité à pente constante pour $r \geq r_0$, notamment l'utilité risque neutre.

Hypothèse 4. *L'utilité croît sous-linéairement, ie. $u(r) = o(r)$ ⁵.*

Une autre hypothèse est maintenant nécessaire pour s'assurer que q^* soit borné : l'absence d'arbitrage. D'un point de vue strictement financier, cela fait certainement du sens en vertu de l'efficience des marchés, version semi-forte[Citation needed]. D'un point de vue théorique, ceci exige en fait qu'il n'y ait pas de région dans \mathbf{X} telle que tous les rendements s'y produisant soient nécessairement positifs ou négatifs.[**Todo:** Insérer image]. Ainsi, même en ayant une connaissance parfaite du monde, il subsistera toujours un terme de bruit rendant incertains la réalisation des rendements.

Hypothèse 5. *Pour toute région $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{X}$,*

$$\mathbf{P}\{R \geq 0 \mid X \in \mathcal{X}\} < 1, \quad (80)$$

et de la même façon avec l'évènement $\mathbf{P}\{R \leq 0 \mid X \in \mathcal{X}\}$.

5. Mathématiquement, on exige donc que $u(r)/r \rightarrow 0$.

Décision optimale finie On veut montrer que $\|q^*\|$ est borné. Pour ce faire, on va tout d'abord décomposer $q = s\theta$, où on pose $\|\theta\| = 1$ et $s > 0$; ainsi on peut poser notre problème d'optimisation comme la recherche d'une 'direction' θ et d'une magnitude s dans \mathcal{Q} . De plus, puisque $\|q\| = s$, il suffit de montrer que s^* est borné.

Notons d'abord que l'hypothèse 5 entraîne en particulier qu'il existe $\delta > 0$ et $\varrho \geq 0$ tels que

$$\mathbf{P}\{R \cdot \theta(X) \leq -\delta\} > \varrho \quad (81)$$

pour tout $\theta \in \mathcal{Q}$ tel que $\|\theta\| = 1$. Définissons maintenant une variable aléatoire à deux états : $B = -\delta$ avec probabilité ϱ et $B = \bar{r}\xi$ avec probabilité $1 - \varrho$. Puisque $R \cdot \theta(X) \leq \bar{r}\xi$, on a alors que, pour tout $r \in \mathbf{R}$,

$$\mathbf{P}\{B \geq r\} \geq \mathbf{P}\{R \cdot \theta(X) \geq r\} \quad (82)$$

[**Todo:** voir figure a produire.]

Puisque par hypothèse u est concave et puisque que B domine stochastiquement $R \cdot \theta(X)$, on a nécessairement que $\mathbf{E} u(sB) \geq \mathbf{E} u(R \cdot s\theta(X))$, pour tout $s > 0$. Or, par hypothèse de sous-linéarité on obtient que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{E} u(R \cdot s\theta(X)) \leq \lim_{s \rightarrow \infty} u(sB) \quad (83)$$

$$= \lim_{s \rightarrow \infty} (\varrho u(-s\delta) + (1 - \varrho)u(s\bar{r}\xi)) \quad (84)$$

$$\leq \lim_{s \rightarrow \infty} -\varrho s\delta + (1 - \varrho)o(s) = -\infty, \quad (85)$$

ce qui démontre bien que s est borné.

Dérivation de la borne On cherchera donc à établir une borne Ω_u sur l'erreur de sous-optimalité de $\hat{q} \sim \mathcal{Q}(M^n)$:

$$\mathbf{E}U(\hat{q}) \geq \mathbf{E}U(q^*) - \Omega_u. \quad (86)$$

Pour ce faire, on utilisera le résultat suivant, montré par [Citation needed]Shalev. En posant

$$\omega = \frac{4\gamma^2\xi^2(32 + \log(1/\delta))}{\lambda n}, \quad (87)$$

on obtient qu'avec probabilité $1 - \delta$,

$$\lambda\|\hat{q} - q_\lambda^*\|^2 \leq \mathbf{E}U_\lambda(q_\lambda^*) - \mathbf{E}U_\lambda(\hat{q}) \leq \omega. \quad (88)$$

De la deuxième inégalité, on obtient alors que

$$\mathbf{E}U(\hat{q}) - \mathbf{E}U(q_\lambda^*) \geq -\omega + \lambda\|\hat{q}\|^2 - \lambda\|q_\lambda^*\|^2 \quad (89)$$

$$\geq -\omega - 2\lambda\|\hat{q}\|\|q_\lambda^* - \hat{q}\| - \lambda\|q_\lambda^* - \hat{q}\|^2. \quad (90)$$

Or, pour un même δ , le résultat de Shalev[Citation needed]implique que $\|q_\lambda^* - \hat{q}\| \leq \sqrt{\omega/\lambda}$. De plus, par le lemme ??, p. ??, $\|\hat{q}\| \leq \bar{r}\xi/(2\lambda)$, d'où on obtient

$$EU(\hat{q}) - EU(q_\lambda^*) \geq -2\omega - \bar{r}\xi\sqrt{\frac{\omega}{\lambda}}. \quad (91)$$

Enfin, puisque par définition de q_λ^* , $EU(q_\lambda^*) - \lambda\|q_\lambda^*\|^2 \geq EU(q^*) - \lambda\|q^*\|^2$, on trouve alors que

$$EU(q_\lambda^*) - EU(q^*) \geq \lambda\|q_\lambda^*\|^2 - \lambda\|q^*\|^2 \geq -\lambda\|q^*\|^2, \quad (92)$$

ce qui donne finalement

$$EU(\hat{q}) = EU(q^*) + EU(\hat{q}) - EU(q_\lambda^*) + EU(q_\lambda^*) - EU(q^*) \quad (93)$$

$$\geq EU(q^*) - 2\omega - \bar{r}\xi\sqrt{\omega/\lambda} - \lambda\|q^*\|^2. \quad (94)$$

Équivalent certain et analyse À partir du résultat obtenu au dernier paragraphe, on peut à nouveau inverser le domaine de garantie afin de l'exprimer en rendement équivalent. En définissant CE l'équivalent certain hors échantillon suivant la politique \hat{q} et CE^* l'équivalent certain optimal compte tenu de l'utilité donnée, l'application directe du Lemme 9, permet de garantir une performance de l'ordre de

$$CE \geq CE^* - (1/(\lambda\sqrt{n})). \quad (95)$$

Plus précisément, avec probabilité $1 - \delta$,

$$CE \geq CE^* - \partial u^{-1}(CE) \cdot \left(\lambda\|q^*\|^2 + \frac{8\gamma^2\xi^2(32 + \log(1/\delta))}{n\lambda} + \frac{2\gamma\bar{r}\xi^2}{\lambda} \sqrt{\frac{32 + \log(1/\delta)}{n}} \right) \quad (96)$$

Les bornes de sous-optimalité convergent ainsi environ à la même vitesse que celle de sous-optimalité, c'est-à-dire dans un régime de $(1/\sqrt{n})$. Bien sûr, une différence majeure est la présence de $\|q^*\|$ qui est a priori impossible à déterminer, dans la mesure où aucune hypothèse n'est faite sur la distribution de M . On constate d'ailleurs sans surprise qu'une faible valeur de régularisation permet au résultat algorithmique de se rapprocher du résultat optimal, bien que les autres termes de la borne aient un effet inverse. Par ailleurs, le sur-gradient inverse de u à CE ne peut lui non plus être déterminé précisément, aussi pour estimer la borne on lui substituera $\partial u^{-1}(\widehat{CE})$.

4.3 Garanties et dimensionalité du problème

Toutes les bornes considérées jusqu'à présent ont été dérivées sans faire apparaître explicitement la relation qui les lie avec la dimension p de l'espace \mathbf{Q} ; autrement dit, on a implicitement considéré que $p = o(n)$. Or, si à première vue l'erreur de généralisation et de sous-optimalité du problème de portefeuille se comportent comme $(1/(\lambda\sqrt{n}))$, dans un contexte où p est comparable à n , on souhaite comprendre comment l'ajout d'information dans \mathbf{Q} peut venir affecter ces bornes.

Discussion sur la première hypothèse Revenons dans un premier temps sur la première hypothèse qu'on a employé allègrement dans nos résultats ; celle-ci stipule que $\kappa(x, x) \leq \xi^2$. Pour les espaces de décision affines, par exemple ceux engendrés par les noyaux de la forme $\kappa(x_1, x_2) = f(\|x_1 - x_2\|)$, cette propriété est naturellement observée puisqu'alors $\kappa(x, x) = f(0)$, peu importe la taille de X . Pour d'autres types de noyaux, par exemple les décisions linéaires $\kappa(x_1, x_2) = x_1^T x_2$, il devient alors nécessaire de borner le support de X pour respecter la condition. Deux approches peuvent alors être employées : soit chaque variable d'information est bornée individuellement, soit on borne simplement $\kappa(X, X)$ par une borne probabiliste.

Le premier cas se prête bien à la situation où on dispose d'une bonne compréhension des variables d'information et de leur distribution. Par exemple, X_j peut naturellement et/ou raisonnablement reposer sur un support fini ; pour d'autres types de distributions, par exemple les variables normales et sous-normales (dominées stochastiquement par une variable normale), on peut borner avec un haut degré de confiance la déviation de leur espérance. Les cas problématiques seront plutôt présentés par des variables X_j présentant des moments supérieurs élevés. En pratique, on pourra alors soit *saturer* l'information par une borne arbitraire, *i.e.* en posant $\tilde{X}_j = X_j(\nu_j/|X_j|)$, puis en ajoutant une nouvelle dimension d'information vrai/faux indiquant si la borne a été atteinte, ou simplement décider de l'incorporer telle qu'elle, mais en n'ayant alors aucune garantie sur les performances hors échantillon. Pour un noyau linéaire, si chaque variable $|X_j| \leq \nu_j$, alors par le théorème de Pythagore on a simplement que $\|X\|^2 \leq \|\nu\|^2 = \xi^2$. On remarquera alors que $\xi^2 = (p)$. Pour les noyaux polynomiaux d'ordre k , ce serait plutôt $\xi^2 = (p^k)$.

Penchons-nous un moment sur le cas linéaire. La situation où X dispose d'une borne explicite sur son support peut en fait être relaxée, moyennant que chacune des composantes soient indépendantes l'une à l'autre et que leur carré soient de forme sous-exponentielle⁶. Sous sa forme généralisée, l'inégalité de Bernstein implique qu'avec haute probabilité,

$$P\{|\|X\|^2 - E\|X\|^2| \geq t\} \leq \exp\left(-\frac{t^2}{(p)}\right). \quad (97)$$

Autrement dit, à mesure que p est grand, la norme $\|X\|^2$ sera concentrée autour de son espérance. Si $E X_j = 0$, alors $\|X\|^2 \approx E\|X\|^2 = \sum_{j=1}^p \text{Var } X_j = (p)$, et on aura donc une borne $\xi^2 = (p)$, mais nettement plus forte que celle considérée au dernier paragraphe, puisque les bornes deviennent alors inutiles. De plus, l'ajout d'une seule dimension d'information vient automatiquement rendre inexacte la borne statique ξ^2 .

Dans un contexte où p est de l'ordre de n , les bornes dérivées aux deux dernières sous-sections peuvent donc se révéler trompeuses, puisqu'elles suggèrent à un potentiel investisseur des garanties ne dépendant que de n . En particulier, puisque toutes nos bornes sont en fait de la forme $\Omega = (\xi^2/\lambda\sqrt{n})$, il serait plus exact de postuler l'existence d'une variable ξ^2 telle que les bornes se comportent en fait selon la dynamique

$$\Omega = (p/\lambda\sqrt{n}). \quad (98)$$

6. Voir Boucheron et/ou Wainwright et/ou définir brièvement

En particulier, dans des régimes où $\sqrt{n} = (p)$, il devient impossible d'avoir des bornes convergeant vers 0, celles-ci restant en fait stationnaires. En outre, si $\sqrt{n} = o(p)$, par exemple si $p = (n)$, alors une divergence devient assurée.

Cependant, cette discussion n'est valide que dans le cas particulier des noyaux linéaires. Les noyaux gaussiens conservent quant à eux une indépendance par rapport à la dimensionnalité, alors que les noyaux polynomiaux l'exacerbent ; pour un noyau de degré k il devient plus juste d'indiquer

$$\Omega = (p^k / \lambda \sqrt{n}). \quad (99)$$

Introduction au cas linéaire [Todo: Ne pas lire cette section !!] Pour le moment, nous allons considérer le cas plus simple où $\mathbf{Q} = \mathbf{X}^*$, c'est à dire que le problème revient simplement à

$$\underset{q \in \mathcal{R}^p}{\text{maximiser}} \quad n^{-1} \sum_{i=1}^n r_i q^T x_i - \lambda \|q\|^2. \quad (100)$$

Pour simplifier la présentation, une utilité neutre au risque sera considérée comme cas limite au problème plus général (voir lemme de borne [Citation needed]).

D'un point de vue probabiliste, on peut définir q_λ^* comme la solution de

$$\underset{q \in \mathcal{R}^p}{\text{maximiser}} \quad \mathbf{E}(R X^T q) - \lambda \|q\|^2, \quad (101)$$

d'où on tire

$$q_\lambda^* = \frac{1}{2\lambda} \mathbf{Cov}(R, X), \quad (102)$$

puisque les deux variables sont centrées. On retrouve alors l'inégalité montrée en lemme [Citation needed](nécessaire ??) Considérons maintenant P le rendement aléatoire obtenu en utilisant la décision q_λ^* :

$$P = \frac{1}{2\lambda} R X^T \mathbf{Cov}(R, X). \quad (103)$$

On a alors $\mathbf{E} P = 1/2\lambda \mathbf{Cov}^2(R, X)$.

Puisque toutes nos variables sont centrées et réduites,

$$\mathbf{Cov}(R, X) = \sum_{j=1}^p \mathbf{E} R X_j. \quad (104)$$

En supposant que notre problème est pleinement déterminé en supposant l'existence d'une matrice A telle que $R = AX$

4.4 Note bibliographique

La théorie de la stabilité algorithmique remonte en fait aux années 70 avec les travaux de Luc Devroye appliqués à l'algorithme des k plus proches voisins[Citation needed]. Jusqu'alors, les bornes de généralisation étaient présentées pour toute décision $q \in \mathcal{Q}$ (ie Vapnik). Bousquet[Citation needed]a été le premier a présenter des résultats dans des espaces de Hilbert à noyau reproduisant. La démonstration est fortement inspirée de l'excellente référence [MRT12]. La démonstration de la borne sur la décision bornée est un résultat inédit, dû à Delage dans le cas linéaire. On doit également à Rudin l'idée de la dimensionalité sur la qualité des garanties, et plus généralement l'idée d'employer une fonction de perte pour parvenir à autre chose qu'une question de régression/classification comme c'est souvent le cas.

5 Expériences empiriques

Cette section sera l'occasion de valider numériquement les garanties présentées à la Section 4 quant aux erreurs de généralisation et de sous optimalité inhérentes à l'algorithme d'investissement présenté dans ce mémoire.

Il va sans dire que le cadre théorique général qui a été développé jusqu'à maintenant présente plusieurs paramètres (dimensionnalité du problème, loi de marché, fonction d'utilité, noyau employé, etc.); tous les décrire représenterait une tâche titanesque, aussi certains choix devront être faits pour restreindre la quantité de paramètres étudiés; la Section 5.1 énumérera le choix fait pour chacun de ces paramètres.

Par la suite, les Sections 5.2, 5.3 et 5.4 étudieront la qualité des garanties de généralisation et de sous optimalité dans un contexte où, respectivement, la taille de l'échantillonnage augmente (n variable, p constant), la taille de l'échantillonnage est fixe mais la dimensionnalité du problème augmente (n constant, p variable) et enfin, la taille de l'échantillonnage et de la dimensionnalité augmentent toutes les deux, mais à des rythmes différents.

5.1 Méthodologie

Noyau Le noyau employé dans nos expériences sera linéaire, *i.e.* $q(x) = q^T x$. En particulier, c'est avec un tel noyau que la dépendance entre la dimensionnalité du problème et les erreurs de sous optimalité et de généralisation se caractérise le plus facilement (voir Section 4.3).

Fonctions d'utilité Chaque expérience sera conditionnée par une fonction d'utilité exponentielle Lipschitz LEU_μ définie algébriquement par

$$LEU_\mu(r) = \begin{cases} r & r < 0 \\ \mu(1 - e^{-r/\mu}) & r \geq 0 \end{cases} \quad (105)$$

pour $\mu \geq 0$ (voir la Figure 3). Cette famille de fonctions d'utilités est intéressante pour deux raisons : de telles fonctions ont toutes un coefficient Lipschitz $\gamma = 1$ et leur paramètre $\mu \geq 0$ permet de quantifier facilement l'aversion au risque qu'elles convoient, $\mu = \infty$ correspondant à une attitude neutre au risque et $\mu = 0$ correspondant à l'attitude extrêmement aversive où aucune utilité n'est accordée aux rendements supérieurs à zéro (semblable aux fonctions de perte *hinge loss* en classification).

La fonction d'utilité inverse $LEU_\mu^{-1} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{R}$, nécessaire pour exprimer en terme de rendement équivalent les erreurs exprimées en util, est illustrée à la Figure 4. On peut vérifier algébriquement que

$$LEU_\mu^{-1}(r) = \begin{cases} r & r < 0 \\ -\mu \log(1 - r/\mu) & r \geq 0 \end{cases} \quad (106)$$

Finalement, les bornes d'erreur de généralisation et de sous optimalité, lorsqu'elles sont exprimées en équivalent certain, font intervenir l'inverse multiplicatif $1/\partial_r u(r)$ du sous-gradient de la fonction d'utilité. Dans le cas d'une utilité LEU_μ , cet inverse correspond simplement à l'inverse de la dérivée de LEU_μ et est donc donné par

$$\left(\frac{d}{dr}LEU_\mu(r)\right)^{-1} = \begin{cases} 1 & r < 0 \\ e^{r/\mu} & r \geq 0 \end{cases}. \quad (107)$$

Régularisation Sauf exception, le facteur de régularisation $\lambda = 1/2$ sera employé au cours de toutes les expériences.

Loi de marché La loi de marché M sera construite en deux temps. D'abord, une loi de marché théorique $\tilde{M} \in \mathcal{R}^{\bar{p}+1 \times \bar{p}+1}$ sera construite selon la méthode présentée au prochain paragraphe. Puis, un échantillon fini $M \sim \tilde{M}^{5000}$ de 5000 points en sera tiré afin de former une loi de marché discrète M à partir de laquelle toutes les expériences seront réalisées. En quelque sorte, M fournit alors une approximation à \tilde{M} , mais permet de déterminer exactement des statistiques qui ne pourraient autrement n'être qu'estimées, comme l'utilité hors échantillon $EU(q)$ d'une politique q , la décision optimale q^* ou l'utilité espérée optimale EU^* de la loi de marché.

Pour construire la loi théorique \tilde{M} , chacune de ses lois marginales $X_1, \dots, X_{\bar{p}}$ et R sera décrite par une variable aléatoire Rademacher (retournant ± 1 avec probabilité $1/2$). La dépendance entre ces lois marginales sera modélisée par une copule gaussienne dont la matrice de corrélation Σ sera de la forme

$$\Sigma = \begin{matrix} & \begin{matrix} X_1 & \dots & X_{\bar{p}} & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{\bar{p}} \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} \ddots & & & | \\ & I_{\bar{p} \times \bar{p}} & & \rho \\ & & \ddots & | \\ - & \rho & - & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad (108)$$

avec

$$\rho = \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{\bar{p}}} \quad \dots \quad \sqrt{\frac{1-\epsilon}{\bar{p}}} \right) \quad (109)$$

sauf exception.

Le paramètre $\epsilon > 0$ permet de quantifier l'idée que cette loi de marché n'admet pas d'arbitrage puisque R conserve alors une faible indépendance par rapport aux variables de marché X_j . La Figure 2 présente 1000 réalisations de cette loi de marché \tilde{M} lorsque $\bar{p} = 2$. Chaque point indique une réalisation de la loi normale multivariée de matrice de corrélation Σ . Les lois marginales Rademacher de \tilde{M} font s'"effondrer" ces valeurs à leur signe ; les quatre histogrammes donnent la fréquence d'un rendement positif ou négatif selon la valeur des deux variables de marché.

Par ailleurs, pour ce cas particulier de loi de marché théorique, on peut établir que la corrélation entre X_j et R correspond au *tau de Kendall*, i.e. $\text{Corr}(X_j, R) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho$. Voir [Rém13] pour des précisions.

La valeur $\epsilon = 0.05$ sera employé au cours de toutes les expériences. De plus, on obtient dans de telles conditions trivialement $\|X\| \leq \xi = \sqrt{p}$ et $\bar{r} = 1$.

Validation des garanties Les garanties énoncées à la dernière section s’appliquaient de façon probabiliste à l’ensemble des réalisations hors échantillon. Les expériences suivantes mesureront, sauf exception, le 95^e percentile d’erreur en employant $m = 150$ échantillons d’erreur. Le paramètre δ de confiance des deux bornes sera fixé à 95%.

Plus précisément, m échantillons \mathcal{S}_n seront tirés indépendamment et identiquement de M^n . Chacun de ces m échantillons fournira une politique de décision $\hat{q} = \mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)$ dont l’erreur de généralisation et de sous optimalité pourra alors être calculée. Puis, de ces m observations d’erreur, le 95^e percentile d’erreur pourra finalement être calculé.

Progression de l’erreur Bien que les garanties sur l’erreur de généralisation et de sous optimalité donnent une borne “numérique”, elles suggèrent aussi une progression de l’erreur $\mathcal{O}(p/\sqrt{n})$. On cherchera donc à vérifier cette “suggestion” en dévoilant progressivement de nouveaux échantillons et/ou de nouvelles variables de marché afin de vérifier l’évolution de l’erreur par rapport aux garanties théoriques.

Au début de chaque expérience, un ensemble d’entraînement formé de \bar{n} réalisation de \bar{p} variables de marché seront tiré de M . Puis, on exposera progressivement à l’algorithme n des \bar{n} points et p des \bar{p} variables de marché de cette ensemble d’entraînement afin d’obtenir peu à peu une meilleure représentation de M . Le tout sera répété m fois (donc sur m ensembles d’entraînement) afin de pouvoir mesurer le 95^e percentile des deux types d’erreur.

Le premier ensemble d’expériences (Section 5.2) conservera $p = 2$ fixe et fera varier n de 2 à 110. À la Section 5.3, ce sera la dimensionalité du problème qui variera, donc avec n fixe et p variant de 1 à 50. Enfin, à la section 5.4, la situation sera un mélange des deux précédentes : plus en plus de points provenant d’un même échantillon sont présentés à l’algorithme, leur dimension dévoilée progressant en fonction de n .

Environnement de calcul L’identification numériques des politiques optimales \hat{q} se fera à partir de l’implémentation CVXPY[DB16] et du solveur ECOS[DCB13]. Les calculs numériques se feront à partir de la librairie BLAS et de l’interface NUMPY.

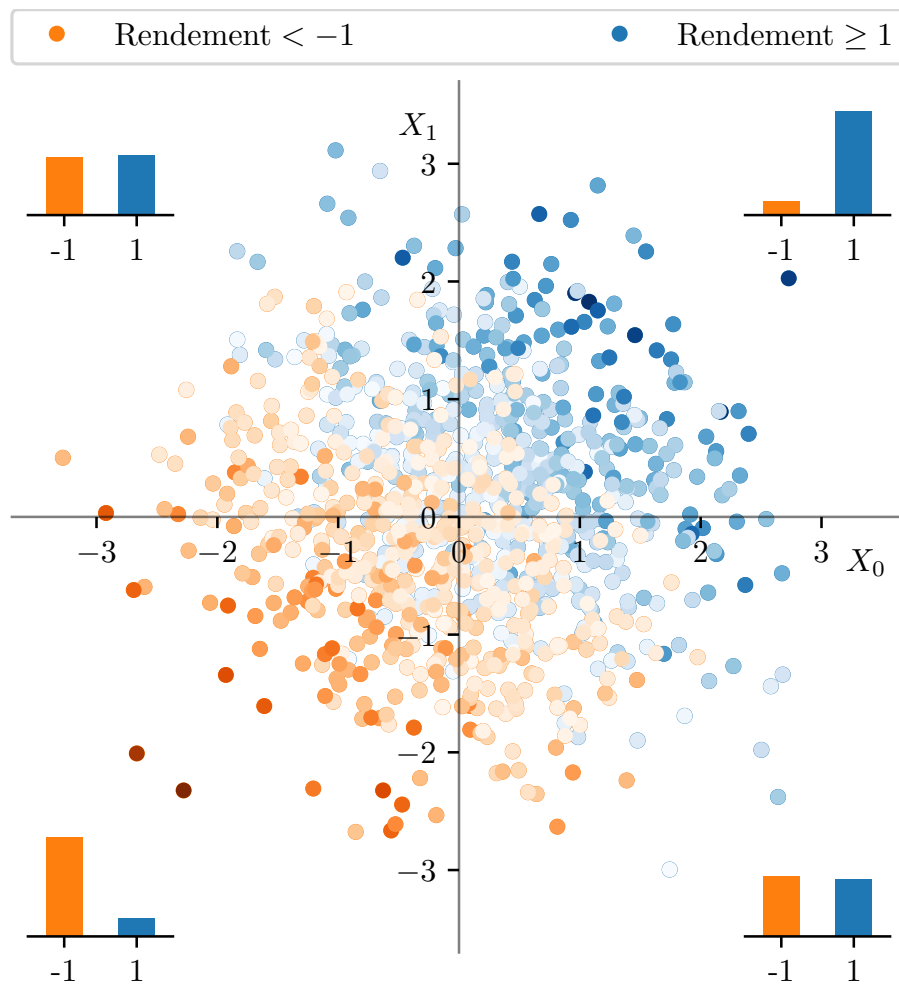


FIGURE 2 – Loi de marché théorique pour $\bar{p} = 2$. Les points bleus et orangés indiquent 1000 réalisations d’une loi normale multivariée avec matrice de corrélation Σ . Les lois marginales Rademacher de la loi de marché entraînent un “effondrement” des réalisations en X_0 , X_1 et R à leur signe. Les quatre histogrammes présentent la distribution de R par rapport à X_0 et X_1 . On constate par ailleurs l’absence d’arbitrage d’une telle loi de marché.

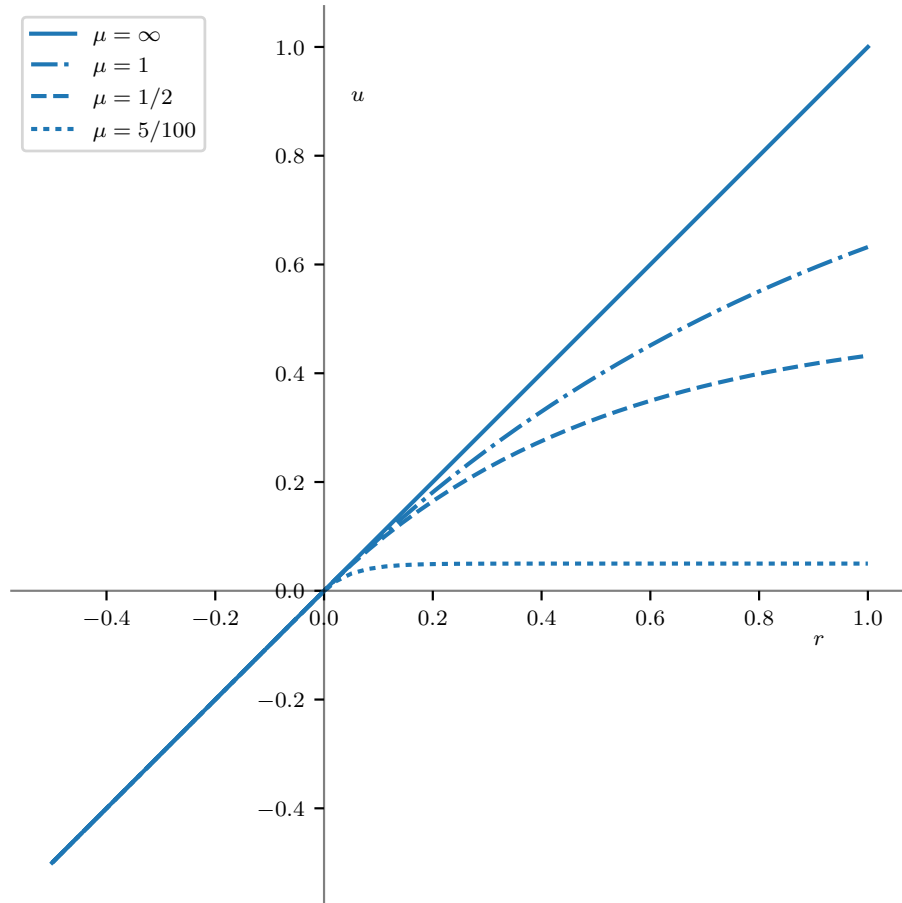


FIGURE 3 – Comportement des fonctions d'utilité exponentielles Lipschitz LEU_μ selon le paramètre μ . L'abscisse est l'axe des rendements, alors que l'ordonnée est celui des *utils*. Le paramètre μ de chacune des instances LEU_μ permet de quantifier l'aversion au risque : un paramètre $\mu \rightarrow \infty$ indique une attitude neutre au risque, alors qu'à l'autre extrême, un paramètre $\mu \rightarrow 0$ modélise une indifférence (utilité constante) aux rendement positifs. Sur la branche négative, l'utilité correspond à la fonction identité, sur la branche positive, $LEU_\mu(r) = \mu(1 - e^{-r/\mu})$.

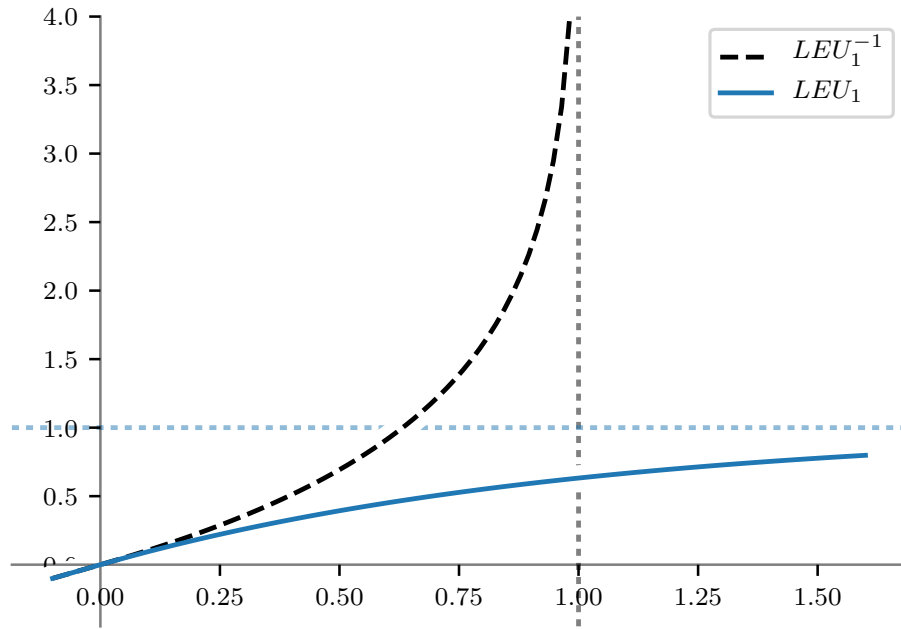


FIGURE 4 – Utilité et utilité inverse. La fonction d'utilité permet de caractériser en *utils* le rendement observé. L'*util* est cependant une notion abstraite qu'on peut réexprimer en rendement à partir de la fonction utilité inverse. Une fonction $LEU_{\mu}(r)$ tend asymptotiquement vers μ à mesure que $r \rightarrow \infty$. Inversement, $LEU_{\mu}^{-1}(r) \rightarrow \infty$ à un rythme logarithmique lorsque $r \rightarrow \mu$. En effet, sur sa branche négative LEU_{μ}^{-1} correspond à la fonction identité, alors que sur la branche négative, $LEU_{\mu}^{-1}(r) = -\mu \log(1 - r/\mu)$.

5.2 n variable, p constant

L'objet de cette section est l'étude du cas canonique où la taille n de l'ensemble d'entraînement \mathcal{S}_n augmente progressivement afin de donner une meilleure représentation de M .

5.2.1 Erreur de généralisation

On rappelle tout d'abord que l'erreur de généralisation d'une politique d'investissement q consiste à mesurer la différence entre l'utilité (resp. l'équivalent certain) espérée observée en échantillon et l'utilité (resp. l'équivalent certain) espérée hors échantillon, ou, mathématiquement, de déterminer $\widehat{EU}(q) - EU(q)$ (resp. $\widehat{CE}(q) - CE(q)$).

Avant de rentrer dans le vif du sujet, il peut être intéressant de voir graphiquement comment se comportent différents quantiles de l'erreur de généralisation à mesure que de nouveaux échantillons sont fournis à l'algorithme (*i.e.* à mesure que n augmente). La Figure 5 illustre précisément ce comportement, en présentant l'erreur en utilité et en rendement. Puisque la variable de rendement R est bornée entre -1 et 1 et que son espérance marginale est nulle, le panneau b) indique qu'avec un échantillon d'entraînement formé de $n = 10$ observations de marché, l'erreur maximale sera d'environ 40%. Par ailleurs, comme la courbe du 1^{er} quantile correspond à une erreur nulle, on peut conclure que dans environ 75% des cas, la performance hors échantillon sera moindre que celle observée en échantillon. Finalement, sans surprise, plus n est élevé, moins l'erreur de généralisation sera importante et tous ses quantiles finiront par converger vers une erreur nulle.

La Figure 6 illustre quant à elle la relation entre l'aversion au risque (caractérisée par le paramètre μ de la fonction d'utilité LEU) et le 95^e percentile d'erreur de généralisation en utilité et en équivalent certain. On constate en particulier qu'une faible aversion au risque, toutes choses étant égales par ailleurs, entraîne une plus grande erreur de généralisation. On peut expliquer cette observation d'un point de vue géométrique, puisqu'une aversion plus prononcée au risque vient ajouter de la courbure à la fonction d'utilité, et qu'en ce sens, cette courbure a le même effet que l'ajout d'un terme de régularisation $\lambda \|q\|^2$ dans la fonction objectif de l'algorithme. Or, comme l'idée même de la régularisation est de permettre d'établir des politiques d'investissement plus conservatrices qui favorisent des investissements moins importants, on comprend donc qu'une aversion au risque élevée aura le même genre d'effet et entraînera donc une erreur hors échantillon moins importantes.

À la Figure 7, c'est le 95^e percentile d'erreur et sa borne théorique ($\delta = 5\%$) en fonction de n qui sont illustrés, ce qui permet donc de constater la pertinence des garanties théoriques offertes par l'algorithme d'investissement. Ce qui frappe le plus, c'est surtout que la borne n'est pas exactement serrée, les deux courbes différant l'une de l'autre d'un ordre de grandeur (soit d'un facteur d'environ 10). Par exemple, il faut attendre d'avoir environ $n = 150$ observations avant de pouvoir garantir une erreur inférieure à 100%, alors que le 95^e percentile d'erreur empirique n'y est que de 5%.

Néanmoins, il faut d'abord conserver à l'idée que ces bornes sont valides pour toute loi de marché M telle que $\xi \leq \sqrt{2}$ et $\bar{r} \leq 1$ et toute courbe d'utilité u de coefficient Lipschitz 1. C'est toutefois avec cette forme particulière de M (marges Rademacher) qu'on a pu observer les bornes plus serrées. Mais d'autre part, si les bornes ne sont en tant que telles pas particulièrement fortes, l'ordre $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ qu'elles indiquent semble bien respecté empiriquement. Cette propriété est très importante puisqu'elle permet à un investisseur de savoir de quelle façon et à quel rythme décroît son risque d'erreur de généralisation en fonction de la taille de son ensemble d'entraînement \mathcal{S}_n .

Il peut en outre être intéressant de décomposer ce 95^e percentile d'erreur de généralisation en sa composante de performance en échantillon $\widehat{EU}(\hat{q})$ et hors échantillon $EU(\hat{q})$ (Figure 8). Cette figure permet de constater que bien que la composante hors échantillon possède une utilité espérée positive, elle sera cependant beaucoup plus faible que ce qui était anticipé par l'utilité espérée en échantillon. De plus, la composante hors échantillon demeure relativement stable et c'est la composante en échantillon qui converge vers elle. De plus, cette figure permet de comprendre comment on peut passer d'une représentation en utilité à une représentation en rendement suite à l'application de la fonction utilité inverse $LEU_\mu^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}$ (voir Figure 4). Puisque $\mu = 1$ ici, cette utilité inverse a un effet plus prononcé pour des utilités proches de 1, et son effet décroît pour des utilités plus faibles. Bien entendu, cette amplification est plus prononcée à mesure que l'investisseur est averse au risque, ce qui dégrade alors la qualité des garanties offertes par l'algorithme.

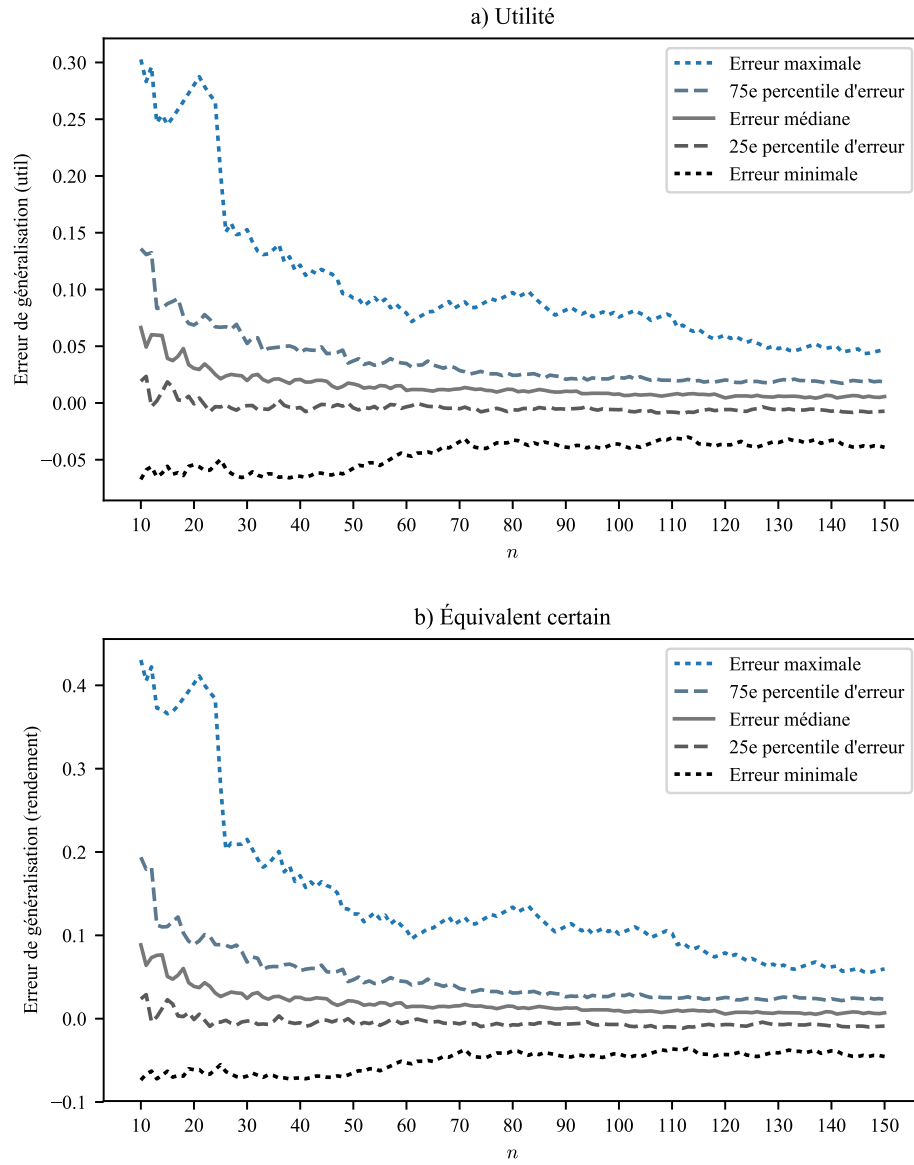


FIGURE 5 – Progression des quartiles de l’erreur de généralisation en util et en équivalent certain en fonction de la taille n de l’échantillonnage. Dans environ 75% des cas, la performance hors échantillon sera moindre que celle observée en échantillon.

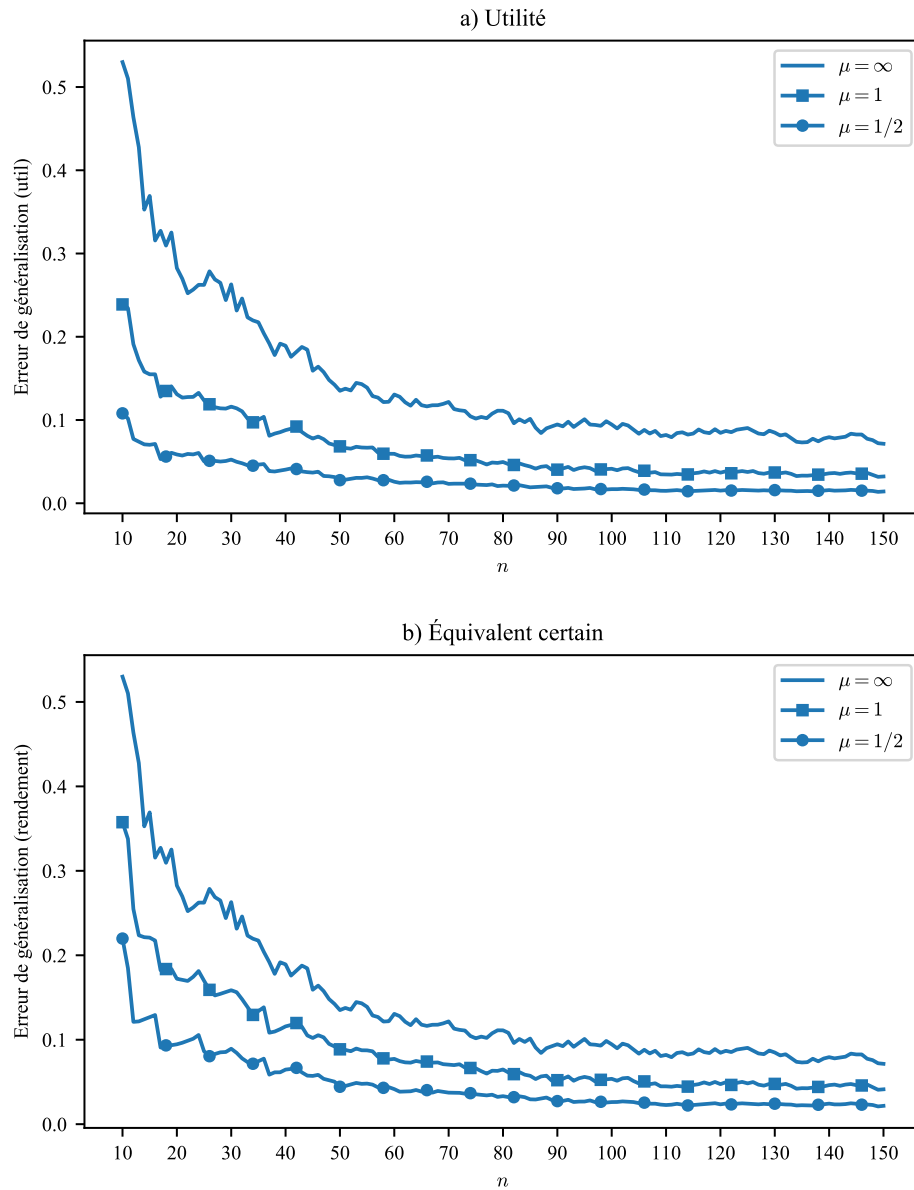


FIGURE 6 – Progression du 95^e percentile d'erreur de généralisation en fonction de la taille de l'échantillon n pour trois niveaux d'aversion au risque. Plus l'aversion au risque est faible (avec comme cas limite l'attitude neutre au risque $\mu = \infty$), plus l'erreur de généralisation est importante, et inversement pour une forte aversion au risque.

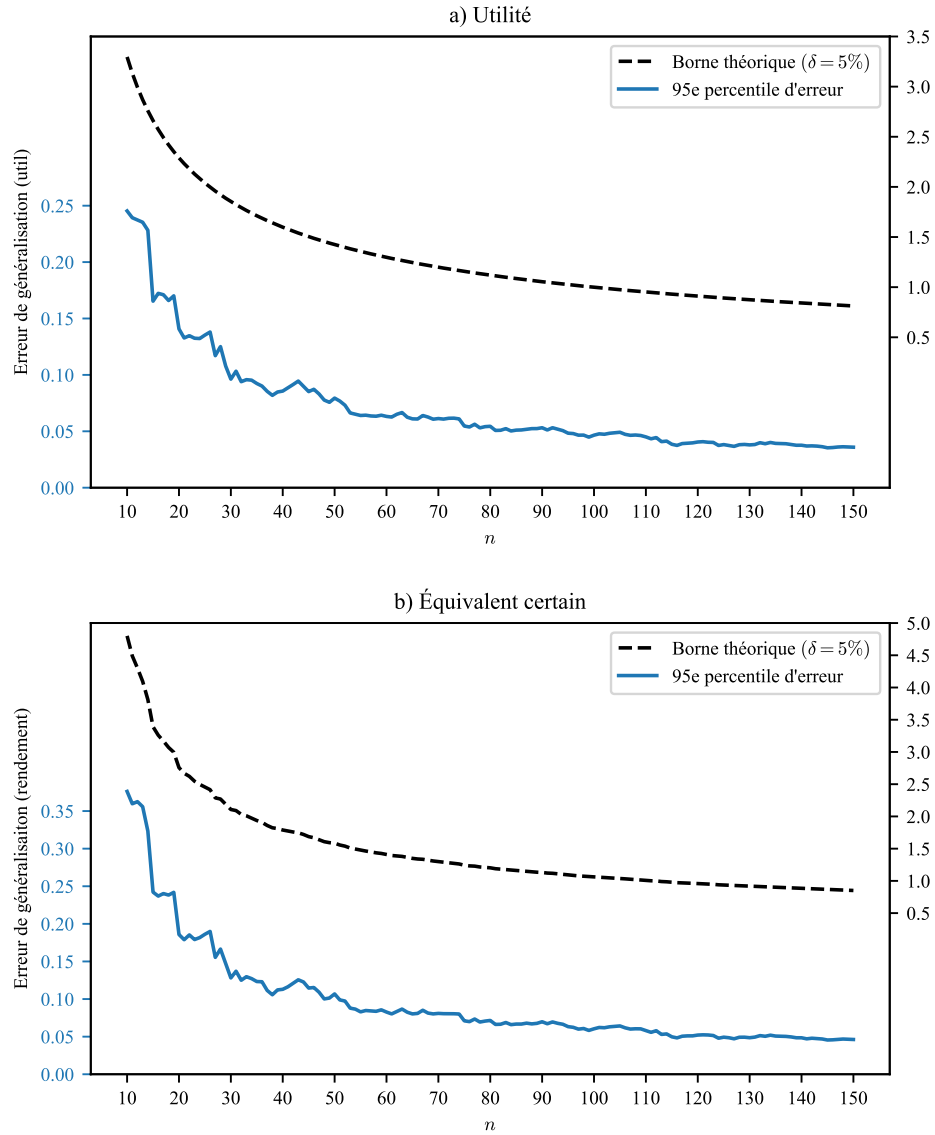


FIGURE 7 – Progression du 95^e percentile l’erreur de généralisation et borne théorique (paramètre de confiance $\delta = 5\%$) en fonction de la taille d’échantillon n , exprimés en util et en rendement. Dû à la différence d’ordre, les deux figures font intervenir deux ordonnées : celle de gauche quantifie l’erreur empirique alors que celle de droite quantifie la borne théorique. Ainsi, la borne théorique est environ 10 fois supérieure à l’erreur empirique.

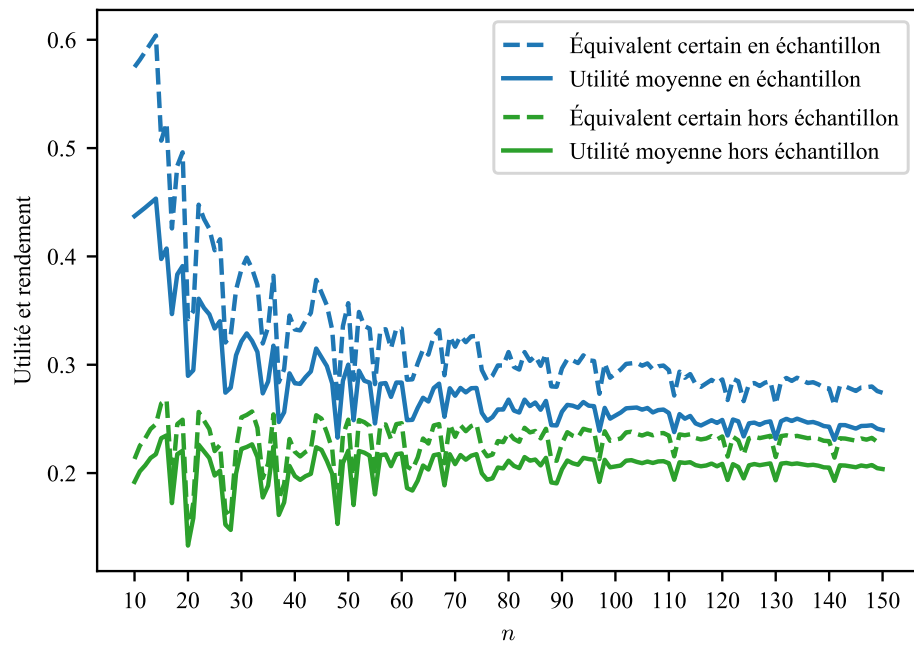


FIGURE 8 – Progression sur la même échelle des composantes de performance en échantillon et hors échantillon, exprimées en util et en rendement, du 95^e percentile d'erreur de généralisation de la Figure 7 a). Plus une valeur d'utilité est grande, plus l'amplification de l'utilité inverse se fera ressentir. L'erreur de généralisation est donc plus importante lorsqu'elle est mesurée en unités de rendement qu'en unités d'util.

5.2.2 Erreur de sous optimalité

Contrairement à l'erreur de généralisation, l'erreur (en util) de sous optimalité $EU(q^*) - EU(\hat{q})$ (resp. $CE(q^*) - CE(\hat{q})$ dans le domaine des rendements) ne bénéficie pas d'une convergence vers zéro du fait de la présence du terme de régularisation dans l'algorithme $\mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)$. En fait, la meilleure garantie offerte par le théorème [Citation needed], lorsque $n \rightarrow \infty$, correspond à $\lambda \|q^*\|^2$ dans le domaine des utils.

Ainsi, la Figure 9 présente la progression du 95^e percentile de l'erreur empirique de sous optimalité et de la borne théorique $\delta = 5\%$ selon la taille n de l'échantillon. En particulier, le facteur de régularisation constant $\lambda = 1/2$ fait en sorte que, exprimés en utils, la borne théorique converge vers $\lambda \|q^*\|^2$ (évaluée numériquement à 3.16) alors que le 95^e percentile d'erreur semble converger vers une utilité espérée aux alentours de 0.24.

D'autre part, la borne théorique de sous optimalité du 95^e percentile d'erreur empirique est relâchée d'environ deux ordres de grandeur (10^{-1} pour l'erreur empirique vs 10^2 pour la garantie théorique). En fait, ce qui est particulièrement déconcertant, c'est que même dans la limite $n \rightarrow \infty$, la borne théorique est supérieure à la plus grande erreur empirique observée (*i.e.* lorsque $n = 10$)! [Todo: En fait, il est possible que ce ne soit pas un hasard, mais bien une propriété mathématique de l'algorithme.] Cela étant, même si la borne de sous optimalité est particulièrement relâchée, elle suggère en revanche un ordre de convergence $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ qui lui semble être en adéquation avec le 95^e percentile de l'erreur de sous optimalité empirique.

Néanmoins, un investisseur ayant à cœur une faible erreur de sous optimalité devra nécessairement faire converger son paramètre de régularisation vers zéro à mesure que de nouvelles observations de la loi de marché sont disponibles. De plus, il a été démontré au cours de la section précédente qu'on doit avoir $\lambda = \omega(1/\sqrt{n})$, *i.e.* une décroissance moins rapide que $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$ pour bénéficier d'une convergence vers une erreur nulle. En particulier, si $\lambda = \mathcal{O}(n^{-k})$, alors la garantie théorique sera composée de trois termes : $\mathcal{O}(n^{k-1}) + \mathcal{O}(n^{k-1/2}) + \mathcal{O}(n^{-k})$. Dans de telles conditions, une constante $k = 1/4$ semble bien adaptée pour balancer les deux derniers termes.

Ainsi, la Figure 10 présente la progression du 95^e percentile d'erreur de sous optimalité empirique et de sa garantie théorique en fonction de n lorsque $\lambda = (10/n)^{1/4}$. Ainsi défini, lorsque $n = 10$, λ est identique au facteur de régularisation employé pour produire la Figure 9. On constate effectivement que l'erreur de sous optimalité est initialement la même pour les deux figures. Cependant, alors qu'elle paraissait stagner vers une erreur de 34% avec une régularisation constante, la décroissance $\lambda = \mathcal{O}(n^{1/4})$ permet ici d'obtenir une erreur de 26% lorsque $n = 150$. Par contre, il faut être bien conscient que la borne théorique ne décroît plus qu'à un rythme $\mathcal{O}(n^{1/4})$.

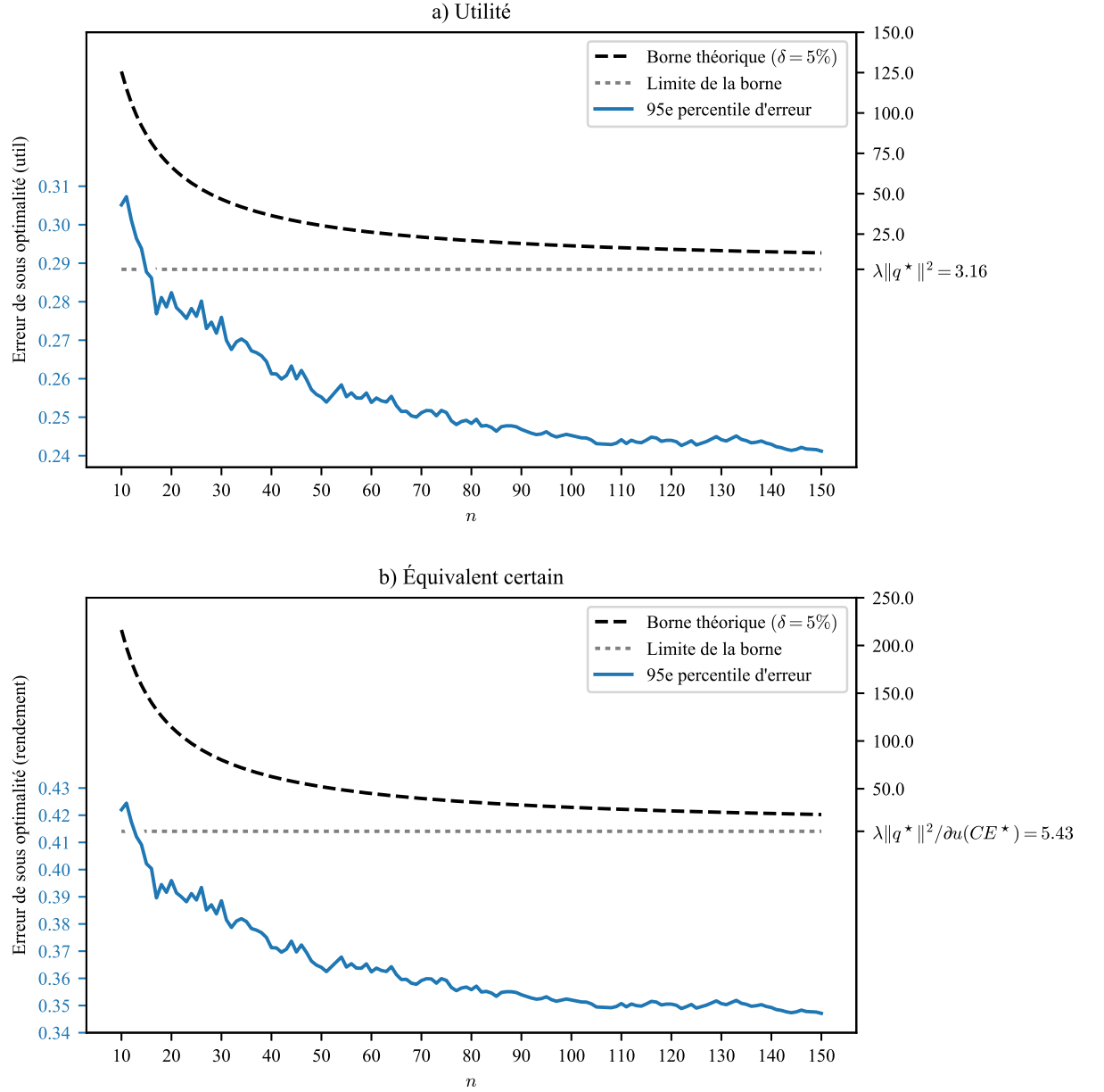


FIGURE 9 – Progression du 95^e percentile l’erreur empirique de sous optimalité et de la borne théorique ($\delta = 5\%$) selon la taille n de l’échantillonnage. Le facteur de régularisation constant $\lambda = 1/2$ fait en sorte que, exprimés en utils, la borne théorique planche à $\lambda \|q^*\|^2$ (évaluée numériquement à 3.16) alors que le 95^e percentile d’erreur semble plancher aux alentours de 0.24. En plus d’être dégagée de près d’un ordre de grandeur de la courbe empirique, même la limite de la borne théorique est supérieure aux plus hautes valeurs observées. Cependant, l’ordre $\mathcal{O}(n^{-1/2})$ théorique se manifeste ici aussi dans le domaine empirique.

Erreur de sous optimalité — Régularisation décroissante $\lambda = O(n^{1/4})$

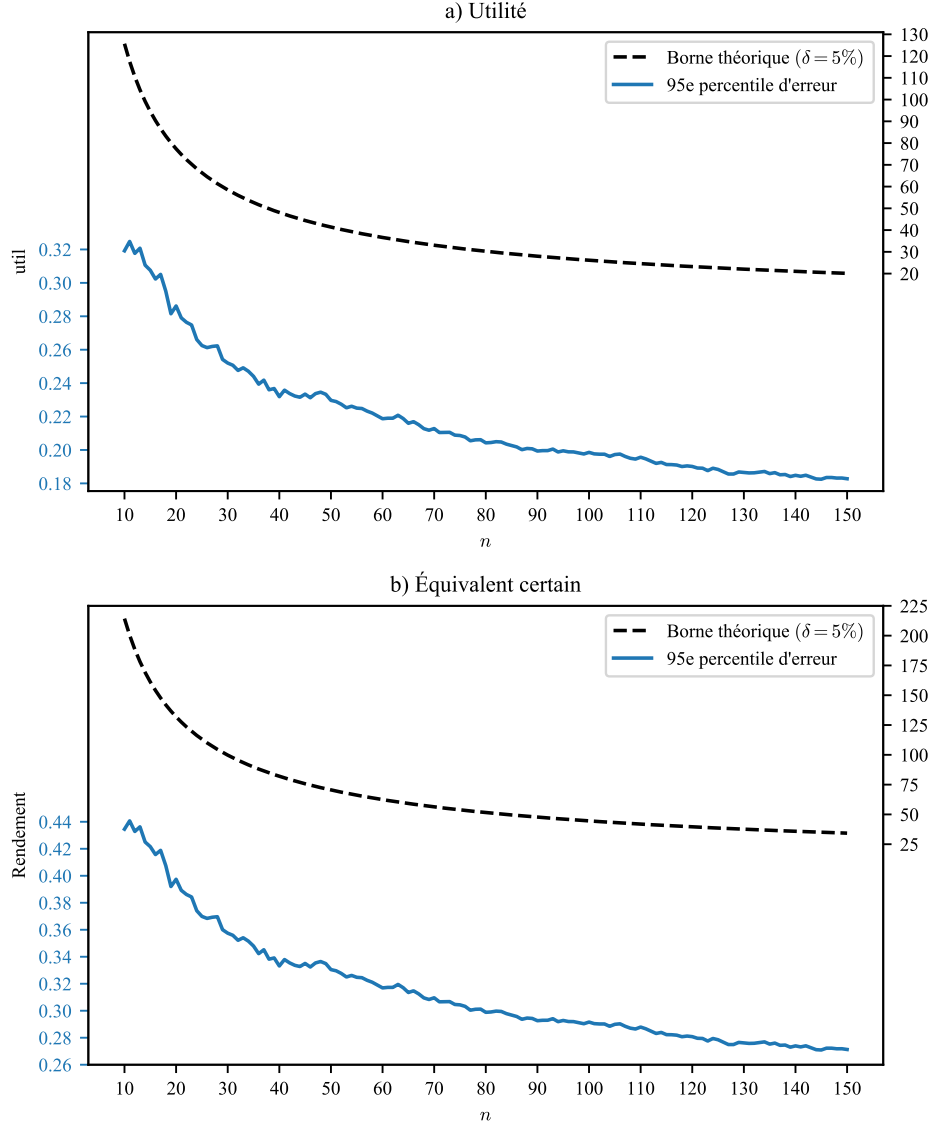


FIGURE 10 – Progression du 95^e percentile de l’erreur de sous optimalité empirique exprimée en util et de la borne théorique $\delta = 5\%$ selon la taille n de l’échantillonnage avec un facteur de régularisation $\lambda = \sqrt{10/n}$. Le panneau a) indique la progression de la borne théorique alors que le panneau b) indique sa limite de la borne dans le cas $n \rightarrow \infty$. Contrairement au cas présenté à la Figure 9, cette situation offre une garantie théorique d’une erreur nulle puisque le facteur de régularisation converge vers 0. Le rythme de convergence n’est toutefois que de $\mathcal{O}(n^{-1/4})$ alors que l’erreur empirique devrait décroître plus rapidement, à un rythme $\mathcal{O}(n^{-1/2})$.

5.3 n constant, p variable

Cette section sera consacrée à l'étude du rapport qu'entretient les erreurs de généralisation et de sous-optimalité de notre algorithme lorsque sont incorporées à la prise de décision de nouvelles variables de marché indépendantes des précédentes, tout en conservant la taille d'échantillonnage constante.

On rappelle donc que les expériences suivantes dévoileront une à une les 50 variables de marché X_j à partir desquelles le rendement aléatoire R est construit sur une copule gaussienne. Trois situations différentes seront par ailleurs considérées, chacune d'elles représentée respectivement par les vecteurs de corrélation $\mathbf{Corr}(\tilde{X}, \tilde{R}) \in \mathcal{R}^{\tilde{p}}$ (dans le domaine de la copule gaussienne) suivants :

$$\rho = \left(\sqrt{\frac{1-\epsilon}{p}} \quad \cdots \quad \sqrt{\frac{1-\epsilon}{p}} \right) ; \quad (110)$$

$$\rho = \left(\sqrt{1-\epsilon} \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \right) ; \quad (111)$$

$$\rho = (0 \quad \cdots \quad 0) . \quad (112)$$

La première situation sera donc celle où chacune des variables de marché a une influence égale sur le rendement, la seconde celle où seule la première variable vient influencer la réalisation du rendement et enfin la dernière celle où toutes les variables de marché sont indépendantes au rendement, *i.e.* elle ne forment qu'un "bruit". Ces trois situations seront désignées respectivement par *information dispersée*, *information concentrée* et *aucune information*.

5.3.1 Erreur de généralisation

La figure 11 présente donc pour ces trois situations comment progresse leur 95^e percentile d'erreur de généralisation (avec $\bar{n} = 10$ observations du marché) et leur garantie théorique (ici commune aux trois cas) à mesure que de nouvelles variables de marché sont dévoilées à l'algorithme. Initialement, lorsque $p = 1$, la courbe *Information concentrée* affiche sans surprise une erreur beaucoup plus faible que les autres, puisque l'algorithme est déjà en mesure d'inférer la meilleure politique d'investissement. Au contraire, la courbe *Information dispersée* ne détecte qu'un faible lien entre cette variable de marché et R . À mesure que de nouvelles variables sont dévoilées, la situation où l'information concentrée continue de présenter une erreur plus faible aux autres cas, bien que la courbe d'erreur dans la courbe *Information dispersée* semble finir par la rejoindre. C'est de plus lorsqu'aucune information n'est présente que le risque d'erreur de généralisation est le plus grand, puisque toute décision d'investissement non nulle se traduit forcément par une utilité hors échantillon plus faible qu'en échantillon.

En outre, la garantie sur l'erreur de généralisation, dans le cas d'un apprentissage par noyau linéaire et d'une taille constante d'échantillonnage, suggère une progression de l'erreur à un rythme linéaire $\mathcal{O}(p)$ (voir Section 4.3). Or, les trois courbes d'erreur empirique semblent indiquer qu'il se pourrait que ce ne soit que le cas que dans une limite asymptotique. En effet, leur forme est loin d'être linéaire et semble plutôt posséder

une composante racine carrée. Il se pourrait donc que le comportement de l'erreur de généralisation soit plutôt de $\mathcal{O}(p^{1/2}) + \mathcal{O}(p)$.

Afin de confirmer cette idée, la figure 12 présente un ajustement des 25 derniers points des trois courbes d'erreurs empiriques à deux fonctions polynômiales $f(x) = a_0x + a_1x^{1/2} + b$ et $f(x) = a_0x^{1/2} + b$ par méthode des moindres carrés. Il faut garder à l'esprit qu'estimer numériquement un ordre polynômial n'est pas forcément simple, particulièrement lorsqu'on ne dispose que de si peu de points ($\bar{p} = 50$ dans ce cas-ci). Cela dit, dans les trois cas, l'hypothèse où l'erreur de généralisation serait de nature $\mathcal{O}(p^{1/2}) + \mathcal{O}(p)$ semble plus convaincante puisqu'elle suit de plus proche les vingt cinq premiers points des trois courbes. Cette conclusion reste cependant spéculative.

5.3.2 Sous optimalité

Dans le cas où on ajoute de l'information, la sous optimalité, contrairement à l'erreur de généralisation, peut référer à deux types d'erreur. Soit on compare la performance hors échantillon de \hat{q} à celle de la politique optimale qui ne dispose que de $p \leq \bar{p}$ variables d'information, soit à la politique optimale qui dispose des \bar{p} variables d'information nécessaires pour décrire M . Cependant, le développement théorique qui a été mené au cours de la dernière section ne s'est implicitement préoccupé que de la première situation.

La Figure 13 indique le comportement de l'utilité espérée optimale EU^* en fonction du nombre de variables de marché connues de l'algorithme. Naturellement, le cas où toute l'information est disponible dès $p = 1$ affiche une utilité espérée optimale constante, alors qu'il s'agit plutôt d'une progression à peu près linéaire lorsqu'on dévoile progressivement des variables d'information chacune faiblement corrélées à R , mais indépendantes l'une à l'autre. Enfin, l'utilité espérée optimale est bien entendu nulle dans le cas où toutes les variables de marché sont indépendantes à R .

La Figure 14 elle, indique la progression du 95^e percentile des erreurs de sous optimalité des trois situations et de leur garantie théorique pour $\delta = 5\%$ à mesure que de nouvelles variables de marché sont dévoilées à l'algorithme, avec $\bar{n} = 10$ constant. Initialement, l'erreur de sous optimalité des courbes *Information dispersée* et *Aucune information* est très faible alors que la courbe *Information concentrée* dispose déjà de suffisamment d'information pour permettre une erreur élevée. Puis, à mesure que p se rapproche de \bar{p} , on observe pour la courbe *Information dispersée* une progression qui correspond environ à la progression de l'utilité espérée optimale. Cela signifie donc que l'erreur de sous optimalité serait maximisée lorsque l'utilité espérée hors échantillon est nulle. Les deux autres courbes d'erreur empirique progressent beaucoup plus lentement, possiblement à un rythme $\mathcal{O}(\sqrt{p})$. Dans le cas de la courbe *Information concentrée*, puisque sa courbe de référence EU^* est constante, on en conclut que l'utilité espérée hors échantillon minimale augmente selon $\mathcal{O}(\sqrt{p})$.

De plus, le caractère linéaire annoncé n'est empiriquement pas très clair, sauf dans le cas particulier où l'information est dispersée. Mais comme c'était le cas pour l'erreur de généralisation, il n'est pas non plus impossible que l'erreur de sous optimalité ait un

ordre de progression $\mathcal{O}(\sqrt{p}) + \mathcal{O}(p)$: cela permettrait d'expliquer pourquoi la courbe *Information dispersée* est linéaire alors que les deux autres affichent plutôt un caractère de progression racine carrée.

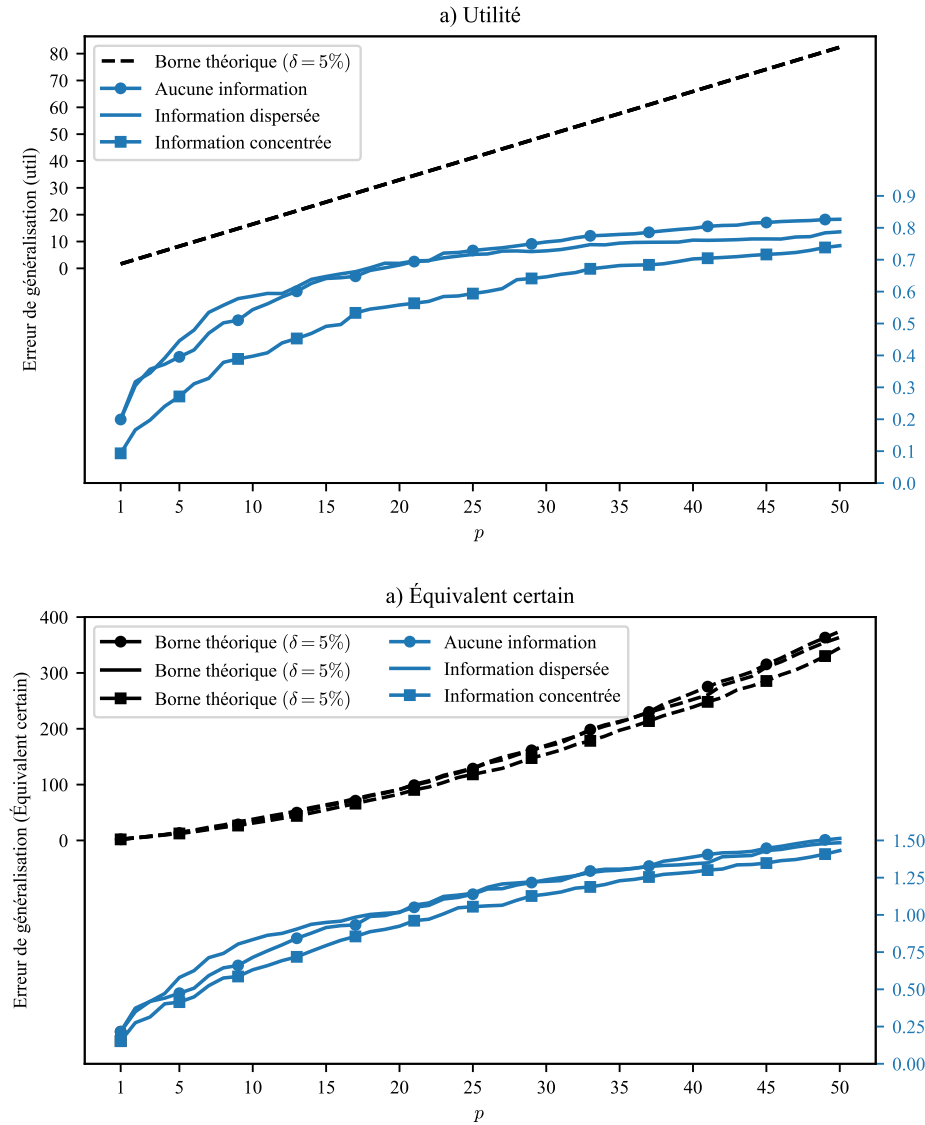


FIGURE 11 – Progression du 95^e percentile de l'erreur de généralisation exprimée en util et en équivalent certain à mesure que de nouvelles variables de marché sont dévoilées à l'algorithme, pour une taille d'échantillonnage constante $\bar{n} = 10$. Dans le domaine des utils, illustré par le panneau a), la borne théorique est commune aux trois situations et progresse linéairement. Lorsque $p = 1$, la courbe *Information concentrée* affiche sans surprise une erreur initialement plus faible que les autres, puisque l'algorithme est déjà en mesure d'inférer la meilleure politique d'investissement. Les courbes *Aucune information* et *Information dispersée* présentent une erreur similaire lorsque p est faible (donc peu de variables connues) mais se distancent l'une de l'autre à mesure que p converge vers \bar{p} .

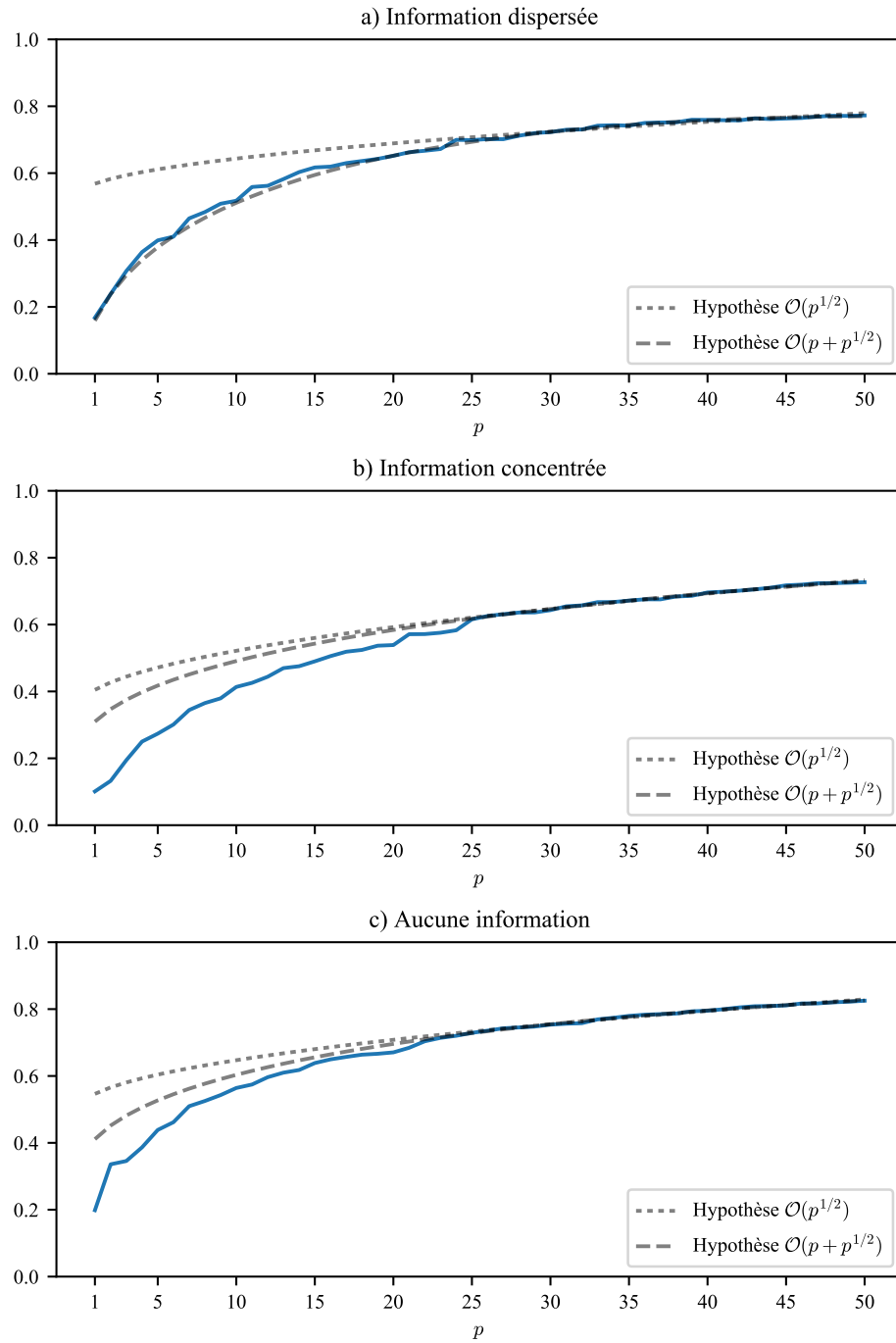


FIGURE 12 – Ajustement des 25 derniers points des courbes d'erreur présentées à la Figure 11 à deux polynômes $f(p) = a_0p + a_1p^{1/2} + b$ et $f(p) = a_0p + b$. Entre les deux, l'hypothèse où l'erreur aurait une progression $\mathcal{O}(p^{1/2}) + \mathcal{O}(p)$ serait ainsi la plus probable.

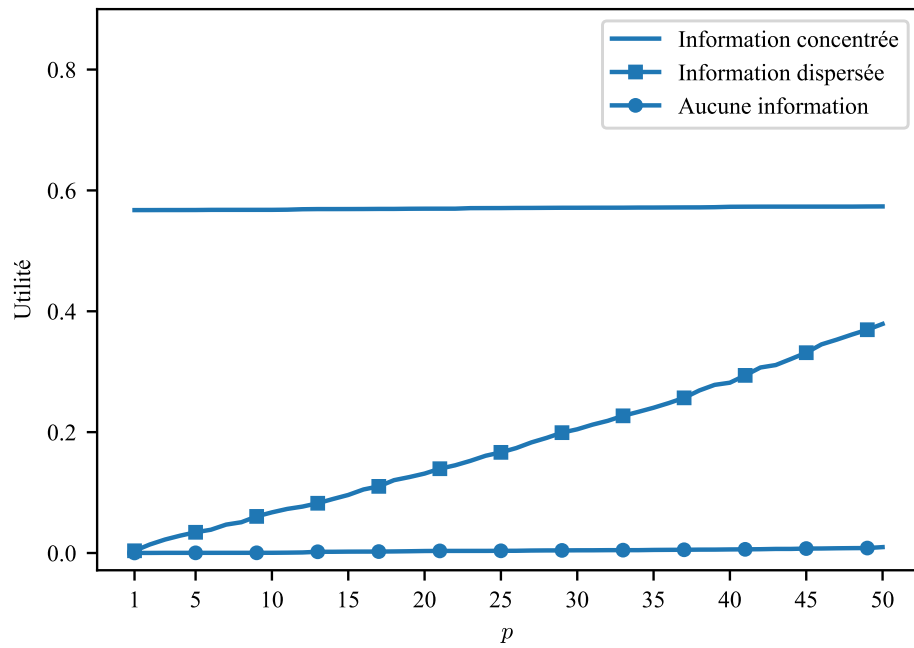


FIGURE 13 – Progression de l'utilité espérée optimale EU^* en fonction du nombre de variables de marché connues. Naturellement, le cas où toute l'information est disponible dès $p = 1$ affiche une utilité espérée optimale constante, alors qu'il s'agit plutôt d'une progression à peu près linéaire lorsqu'on dévoile progressivement des variables d'information chacune faiblement corrélées à R , mais indépendantes l'une à l'autre. Enfin, l'utilité espérée optimale est bien entendu nulle dans le cas où toutes les variables de marché sont indépendantes à R . Les bornes théoriques exprimées en util se confondent car elles sont numériquement très rapprochées.

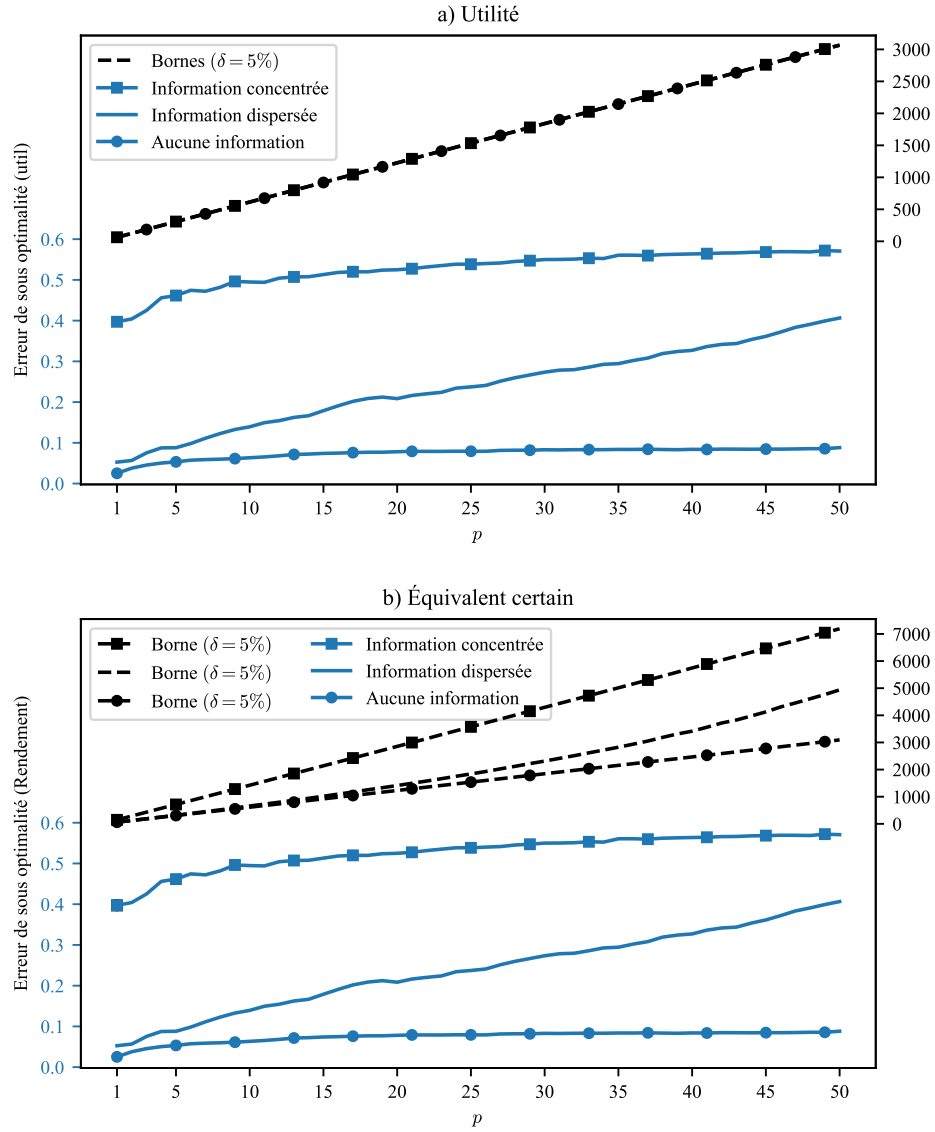


FIGURE 14 – Progression du 95^e percentile des erreurs de sous optimalité et de leur garantie théorique à mesure que de nouvelles variables de marché sont dévoilées à l'algorithme, avec $\bar{n} = 10$ constant. Initialement, l'erreur de sous optimalité des courbes *Information dispersée* et *Aucune information* est très faible alors que la courbe *Information concentrée* dispose déjà de suffisamment d'information pour permettre une erreur élevée. Puis, à mesure que p se rapproche de \bar{p} , on observe pour la courbe *Information dispersée* une progression linéaire, alors que l'erreur plafonne dans les deux autres cas. Les garanties en util donnent une progression qui elle est linéaire en util.

5.4 n et p variables

Finalement, cette section cherche à illustrer le comportement de l'erreur de généralisation et de sous optimalité lorsqu'on est en présence de régimes dynamiques entre n et en p , *i.e.* lorsque $p = \mathcal{O}(n^k)$. Trois régimes seront étudiés : celui où $p = \mathcal{O}(n^{1/2})$, $p = \mathcal{O}(n^{3/4})$ et $p = \mathcal{O}(n)$. La façon de procéder restera la même que celle employée aux sections précédentes. Les percentiles d'erreur seront déterminés à partir d'un échantillon formé de $m = 150$ ensembles d'entraînement de taille n , n variant de 9 à 50. Le nombre de variables de marché dévoilées sera ensuite donné à partir d'une des trois relations suivantes : $p = 2n$, $p = 3.5n^{3/4}$ et $p = 6n^{1/2}$, selon le régime. Le marché sera constitué de $\bar{p} = 100$ variables, ce qui correspond à $p(\bar{n})$ dans le régime $p = \mathcal{O}(n)$. Ces relations ont été déterminées afin que les valeurs initiales de p soient identiques et qu'elles conservent le même ordre de grandeur sur toute l'expérience (voir Figure 15).

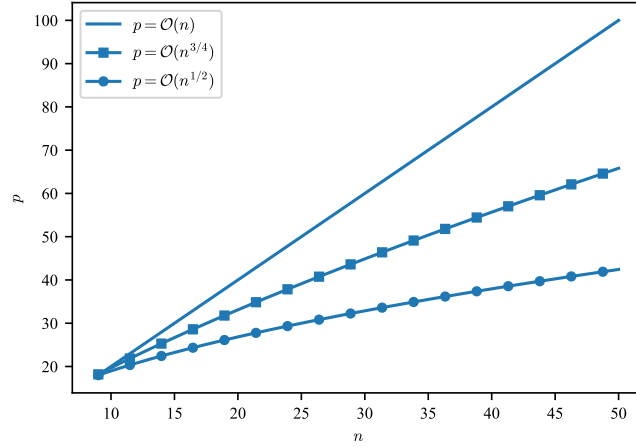


FIGURE 15 – En fonction de n , trois de cas de figure seront étudiés où le nombre p de variables de marché dévoilées à l'algorithme dépend de n . Dans les expériences de cette section, n variera de 9 à 50. La relation entre p et n sera alors respectivement donnée par $p = 2n$, $p = 3.5n^{3/4}$ et $p = 6n^{1/2}$.

Les propriétés mathématiques des deux types d'erreur établies à la Section 4.3 suggèrent un ordre asymptotique $\mathcal{O}(p/n^{1/2})$. Les résultats empiriques de la Section 5.2 (n variable, p constant) ont d'abord permis de confirmer l'ordre $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$ avec p constant. Puis à la Section 5.3 (n constant, p variable), la progression qu'on aurait pu anticiper être linéaire s'est révélée comporter possiblement une composante racine carrée, *i.e.* $\mathcal{O}(p) + \mathcal{O}(\sqrt{p})$. Ainsi, uniquement à partir de ces observations, on pourrait conjecturer que l'erreur se comporte en fait comme $\mathcal{O}(p/\sqrt{n}) + \mathcal{O}(\sqrt{p/n})$. Du fait de la dominance de $1/\sqrt{n}$ sur $1/n$, rien n'empêcherait non plus que l'ordre soit $\mathcal{O}(p/n) + \mathcal{O}(\sqrt{p/n})$.

5.4.1 Erreur de généralisation

La Figure 16 présente la progression du 95^e percentile de l'erreur de généralisation et de la garantie théorique ($\delta = 5\%$) des trois régimes de p en fonction de la taille d'échantillonnage n . Ce qui frappe surtout, c'est comment les ordres théoriques n'ont rien à voir avec les ordres empiriques. Soit par exemple le cas où $p = \mathcal{O}(\sqrt{n})$. La courbe de la garantie demeure constante alors qu'en fait c'est plutôt une décroissance qui est observée. Si on a plutôt une progression $p = \mathcal{O}(n)$, il aurait été raisonnable de penser que l'erreur de généralisation augmenterait, alors que même dans ce cas, elle continue de décroître !

La Figure 17 présente le 95^e percentile de l'erreur de généralisation suivant un autre régime où $p = 0.0016n^{3/2}$. Si l'erreur est alors bien croissante, il faut être prudent et éviter de généraliser cette observation puisque la valeur de départ $p = 1$ lorsque $n = 9$ n'est pas la même que pour les trois régimes de la Figure 16 où $p = 18$ lorsque $n = 9$. Mais de toute façon, les résultats de la Section 5.3 confirment qu'il existe un point où si p domine suffisamment n l'erreur de généralisation devra croître. Il n'est cependant pas clair quel est ce point, ni comment il dépend de n ou de p .

5.4.2 Erreur de sous optimalité

La Figure 18 présente quant à elle la progression du 95^e percentile de l'erreur de sous optimalité de la borne de généralisation selon les trois régimes à l'étude, $p = \mathcal{O}(n^{1/2})$, $p = \mathcal{O}(n^{3/4})$ et $p = \mathcal{O}(n)$. L'ordre $\mathcal{O}(p/\sqrt{n})$ de la borne théorique semble ici respecté, puisque l'erreur de sous optimalité demeure constante dans le cas $p = \mathcal{O}(\sqrt{n})$, alors qu'elle augmente dans les deux autres cas. Cependant, les courbes théoriques décroissent, excepté lorsque $p = \mathcal{O}(n)$!

Pour expliquer ce phénomène contre intuitif, il suffit de réaliser que la borne théorique a en fait une croissance $\mathcal{O}(p/\sqrt{n}) + \mathcal{O}(\sqrt{p/n}) + \mathcal{O}(1)$. Donc si $p = \mathcal{O}(\sqrt{n})$, l'ordre asymptotique de l'erreur sera alors $\mathcal{O}(1)$, *i.e.* constant mais le deuxième terme forcera une décroissance $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ vers cette constante, et c'est précisément cette décroissance qu'on observe dans la Figure 18.

De plus, il ne faut pas oublier que la norme de la décision optimale $\lambda \|q^*\|^2$ entre aussi dans la composition de la borne théorique, et donc possiblement dans celle de l'erreur empirique de sous optimalité. Hélas, l'ordre de grandeur de cette décision optimale est inconnue.

Cette figure illustre en fait assez bien le problème à réduire la progression des erreurs en ordres asymptotiques. En effet, si l'erreur est polynômiale, alors même si un certain ordre doit émerger asymptotiquement, lorsque n est fini, il est tout à fait possible que ce soit un terme d'un autre ordre qui domine la progression. Avec les paramètres choisis pour l'expérience de la Figure 18, si l'ordre de l'erreur de sous optimalité est effectivement de $\mathcal{O}(p/\sqrt{n}) + \mathcal{O}(\sqrt{p/n})$, alors il est clair que seule la première composante joue sur la progression de l'erreur. À la Section 5.3 où le cas où n étant constant était

étudié, il semblait pourtant que l'erreur progresse en $\mathcal{O}(\sqrt{p}) + \mathcal{O}(p)$, ce qui laisse donc finalement assez incertain l'ordre véritable de l'erreur de sous optimalité.

5.5 Conclusion

Cette section a permis d'illustrer le comportement des erreurs de généralisation et de sous optimalité dans un cas relativement simple, où l'algorithme de décision ne disposait que d'un noyau linéaire et où les variables de marché et le rendement étaient toutes distribuées selon une loi Rademacher, liées les unes autres par une copule gaussienne.

Il a pu être établi assez clairement que pour un nombre constant de variables de marché, l'erreur décroît bien à un rythme $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$, ce qui d'une certaine façon est sans surprise au vu du théorème limite centrale ou de la théorie de la programmation stochastique [Todo: Shapiro].

Les choses se compliquent sensiblement lorsqu'on fait intervenir un nombre croissant de variables de marché. Néanmoins, avec n constant, les expériences menées plus haut ont permis de constater que l'ordre des deux types d'erreur est probablement $\mathcal{O}(p)$, bien que ce régime puisse mettre du temps à apparaître et qu'il serait en fait plus précis de parler d'un régime $\mathcal{O}(p) + \mathcal{O}(\sqrt{p})$.

La théorie par contre ne permet pas d'expliquer les courbes d'erreur de généralisation observées dans des régimes dynamiques où $p = \mathcal{O}(n^k)$, où, pour $k \leq 1$, celles-ci étaient toutes décroissantes alors qu'elles auraient dû être croissantes. Ceci dit, l'étude faite sur l'erreur de sous optimalité viendrait supporter l'idée que sa progression serait bien de $\mathcal{O}(p/\sqrt{n})$.

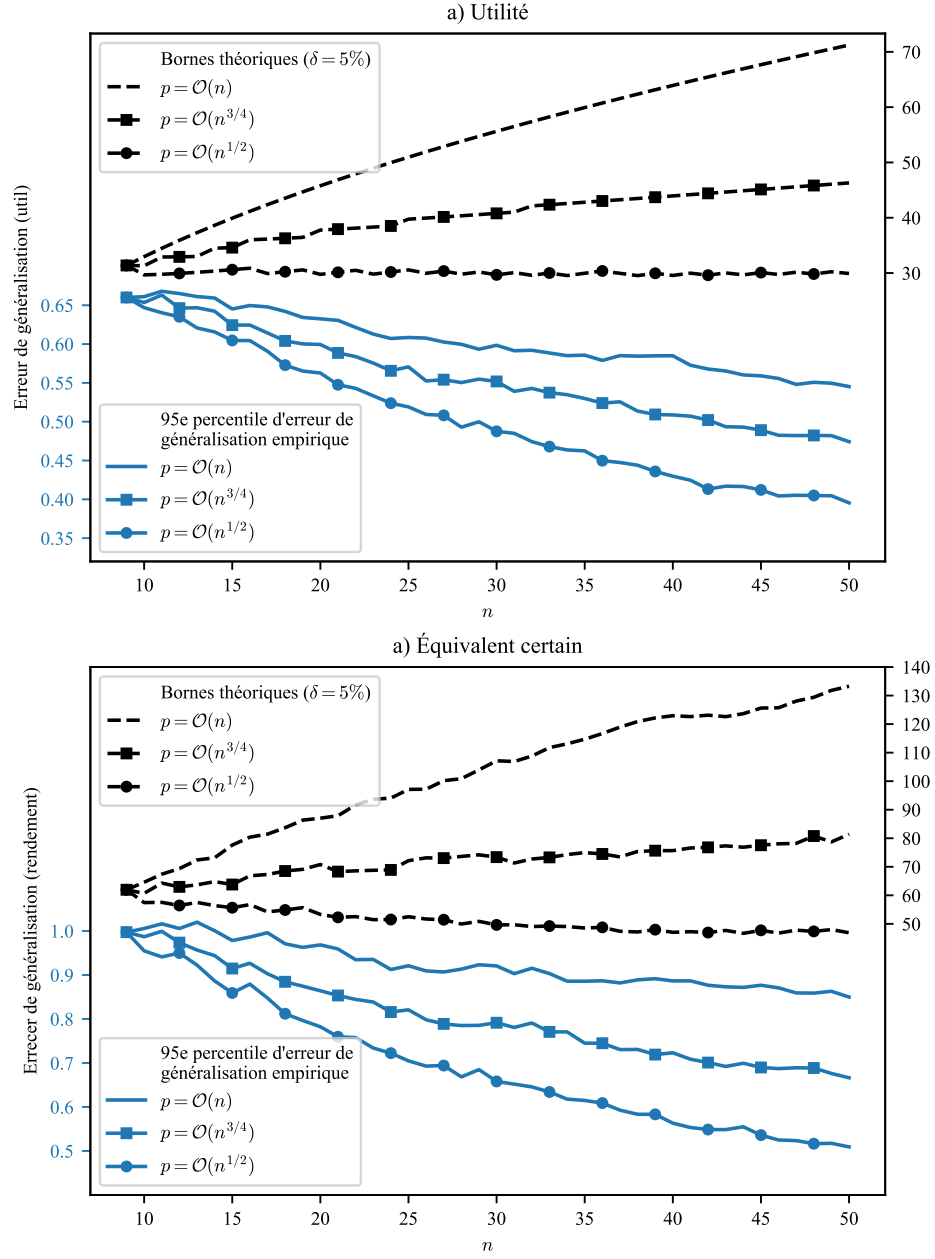


FIGURE 16 – Progression du 95^e percentile d’erreur de généralisation et des garanties théorique en fonction de n , selon le régime de p . Une forte disparité entre la courbe des garanties théoriques et celle de l’erreur empirique est observée. Les courbes théoriques suggérant une progression de l’erreur $\mathcal{O}(p/n^{1/2})$, on se serait attendu à une amplification de l’erreur dès que p domine $n^{1/2}$, *i.e.* si $p = \omega(n^{1/2})$. Pourtant, cette figure indique que même si p est de l’ordre de n , *i.e.* $p = \mathcal{O}(n)$, l’erreur de généralisation empirique décroît tout de même.

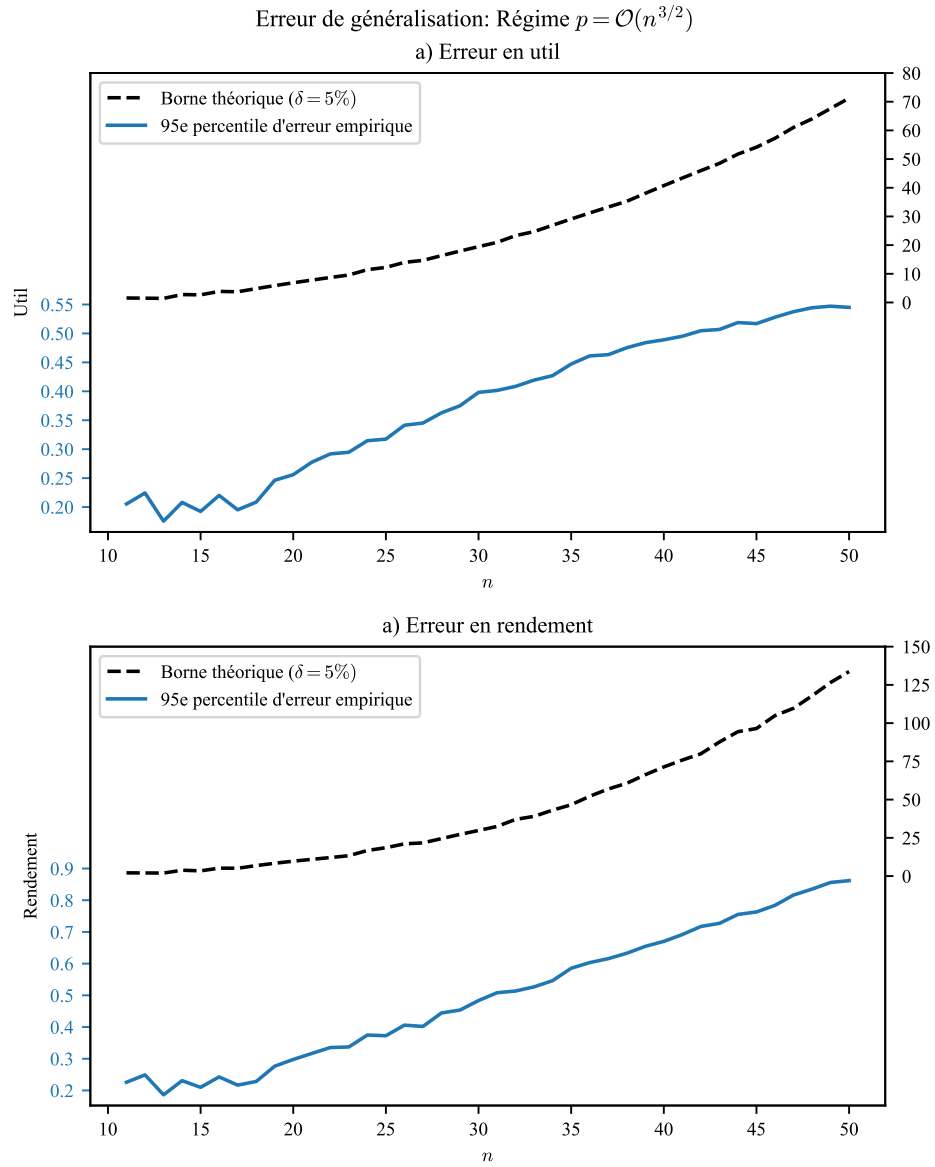


FIGURE 17 – Progression du 95^e percentile de l’erreur de généralisation et de sa borne théorique ($\delta = 5\%$) en fonction de la taille de l’échantillonnage n . La relation entre n et p est donnée par la partie entière de $p = 0.0016n^{3/2}$. On observe bien une croissance de l’erreur de généralisation, cependant il serait trompeur de comparer ce résultat à celui présenté à la Figure 16 puisque le nombre p de variables de marché est initialement beaucoup moins élevé dans ce cas-ci.

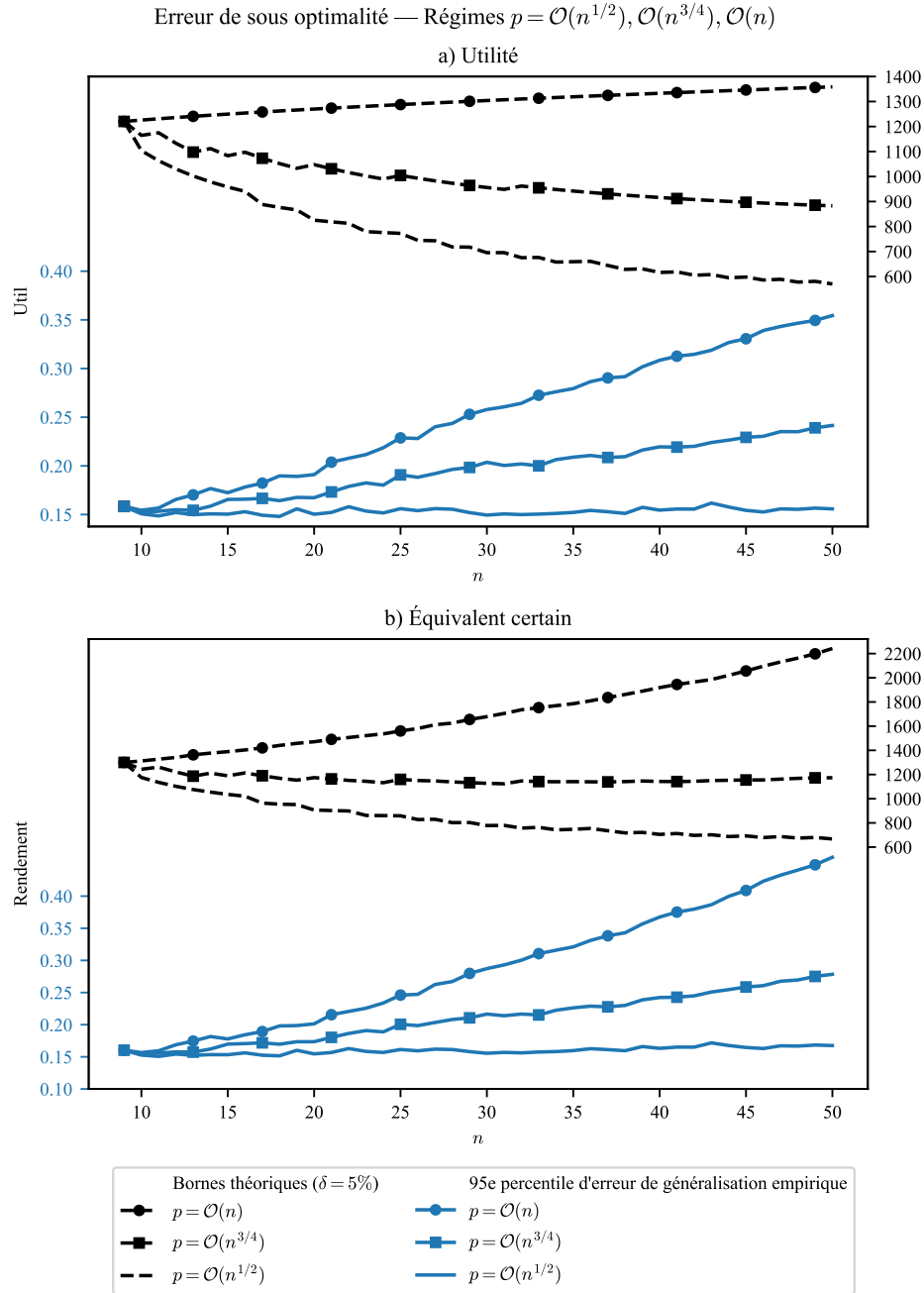


FIGURE 18 — Progression du 95^e percentile de l'erreur de sous optimalité et de sa garantie théorique ($\delta = 5\%$) selon les trois régimes à l'étude, $p = \mathcal{O}(n^{1/2})$, $p = \mathcal{O}(n^{3/4})$ et $p = \mathcal{O}(n)$. L'ordre $\mathcal{O}(p/\sqrt{n})$ de la borne semble ici respecté, puisque l'erreur de sous optimalité demeure constante dans le cas $p = \mathcal{O}(\sqrt{n})$, alors qu'elle augmente dans les deux autres cas. Cependant, les courbes théoriques décroissent, excepté lorsque $p = \mathcal{O}(n)$!

6 Conclusion

SVM multiclasse

Time series et learning

Références

- [BE02] Olivier Bousquet and André Elisseeff. Stability and generalization. *Journal of Machine Learning Research*, 2(Mar) :499–526, 2002.
- [BEKL16] Gah-Yi Ban, Noureddine El Karoui, and Andrew EB Lim. Machine learning and portfolio optimization. *Management Science*, 2016.
- [BLM13] Stéphane Boucheron, Gábor Lugosi, and Pascal Massart. *Concentration inequalities : A nonasymptotic theory of independence*. Oxford university press, 2013.
- [BPS13] Taras Bodnar, Nestor Parolya, and Wolfgang Schmid. On the equivalence of quadratic optimization problems commonly used in portfolio theory. *European Journal of Operational Research*, 229(3) :637–644, 2013.
- [BSCV09] Michael W Brandt, Pedro Santa-Clara, and Rossen Valkanov. Parametric portfolio policies : Exploiting characteristics in the cross-section of equity returns. *Review of Financial Studies*, 22(9) :3411–3447, 2009.
- [BV04] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. *Convex optimization*. Cambridge university press, 2004.
- [Cov91] Thomas M Cover. Universal portfolios. *Mathematical finance*, 1(1) :1–29, 1991.
- [DB16] Steven Diamond and Stephen Boyd. CVXPY : A Python-embedded modeling language for convex optimization. *Journal of Machine Learning Research*, 17(83) :1–5, 2016.
- [DCB13] A. Domahidi, E. Chu, and S. Boyd. ECOS : An SOCP solver for embedded systems. In *European Control Conference (ECC)*, pages 3071–3076, 2013.
- [Haz15] Elad Hazan. Introduction to online convex optimization. *Foundations and trends in optimization*, 2(3-4) :157–325, 2015.
- [Mar52] Harry Markowitz. Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1) :77–91, 1952.
- [Mar14] Harry Markowitz. Mean–variance approximations to expected utility. *European Journal of Operational Research*, 234(2) :346–355, 2014.
- [MCC98] Dilip B Madan, Peter P Carr, and Eric C Chang. The variance gamma process and option pricing. *European finance review*, 2(1) :79–105, 1998.
- [MRT12] Mehryar Mohri, Afshin Rostamizadeh, and Ameet Talwalkar. *Foundations of machine learning*. MIT press, 2012.
- [OND15] Alba V Olivares-Nadal and Victor DeMiguel. A robust perspective on transaction costs in portfolio optimization. Technical report, working paper, 2015.
- [Ré13] Bruno Rémillard. *Statistical Methods for Financial Engineering*. CRC Press, 2013.
- [RV14] Cynthia Rudin and Gah-Yi Vahn. The big data newsvendor : Practical insights from machine learning. Article submitted to Operations Research, 2014.

- [SDR09] Alexander Shapiro, Darinka Dentcheva, and Andrzej Ruszczyński. *Lectures on stochastic programming : modeling and theory*. SIAM, 2009.
- [Shr04] Steven E Shreve. *Stochastic calculus for finance II : Continuous-time models*, volume 11. Springer Science & Business Media, 2004.
- [Vap98] Vladimir Vapnik. *Statistical Learning Theory*, volume 1. Wiley New York, 1998.

A Démonstrations

A.1 Lemmes

Lemme 1 (Décision neutre au risque). La solution au problème

$$\underset{q \in \mathcal{Q}}{\text{maximiser}} \quad \widehat{\mathbf{EI}}(q) - \frac{\lambda}{2} \|q\|^2 \quad (113)$$

est donnée par

$$\hat{q}_1 = \frac{1}{n\lambda} \sum_{i=1}^n r_i |x_i\rangle. \quad (114)$$

On en déduit par ailleurs que

$$\widehat{\mathbf{EI}} = \lambda \langle \hat{q}_1 | \quad (115)$$

et donc que

$$\widehat{\mathbf{EI}}(\hat{q}_1) = \lambda \|\hat{q}_1\|^2 \quad (116)$$

et

$$\widehat{\mathbf{EI}}_\lambda(\hat{q}_1) = \frac{\lambda}{2} \|\hat{q}_1\|^2. \quad (117)$$

Démonstration. Si on considère un déplacement de décision $\hat{q}_1 + \Delta q$, alors par linéarité le premier terme de l'objectif devient $\widehat{\mathbf{EI}}(\hat{q}_1 + \Delta q) = \widehat{\mathbf{EI}}(\hat{q}_1) + \widehat{\mathbf{EI}}(\Delta q)$ et le terme de régularisation devient

$$-\lambda/2 \|\hat{q}_1 + \Delta q\|^2 = -\lambda/2 \|\hat{q}_1\|^2 - \lambda \langle \hat{q}_1 | \Delta q \rangle - \lambda/2 \|\Delta q\|^2. \quad (118)$$

On a donc

$$\widehat{\mathbf{EI}}_\lambda(\hat{q}_1) - \widehat{\mathbf{EI}}_\lambda(\hat{q}_1 + \Delta q) = -\widehat{\mathbf{EI}}(\Delta q) + \lambda \langle \hat{q}_1 | \Delta q \rangle + \lambda/2 \|\Delta q\|^2 \quad (119)$$

$$= -\lambda \langle \hat{q}_1 | \Delta q \rangle + \lambda \langle \hat{q}_1 | \Delta q \rangle + \lambda/2 \|\Delta q\|^2 \quad (120)$$

$$= \lambda/2 \|\Delta q\|^2 \geq 0, \quad (121)$$

Ce qui entraîne $\widehat{\mathbf{EI}}_\lambda(\hat{q}_1) \geq \widehat{\mathbf{EI}}_\lambda(\hat{q}_1 + \Delta q)$ pour tout déplacement $\Delta q \in \mathcal{Q}$. \square

Lemme 2 (Forte concavité de l'objectif). Soit \mathcal{S}_n un ensemble d'entraînement et $\hat{q} = \arg \max \mathbf{EU}_\lambda(q)$ la décision régularisée optimale. Alors pour toute décision $q \in \mathcal{Q}$,

$$\frac{\lambda}{2} \|\hat{q} - q\|^2 \leq \widehat{\mathbf{EU}}_\lambda(\hat{q}) - \widehat{\mathbf{EU}}_\lambda(q). \quad (122)$$

Lemme 3 (Forte concavité II). L'objectif est fortement concave, que ce soit sous sa version statistique $\widehat{\mathbf{EU}}_\lambda$ ou probabiliste \mathbf{EU}_λ . Autrement dit, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, on a

$$\mathbf{EU}_\lambda(\alpha q_1 + (1-\alpha)q_2) \geq \alpha \mathbf{EU}_\lambda(q_1) + (1-\alpha) \mathbf{EU}_\lambda(q_2) + \lambda\alpha(1-\alpha) \|q_1 - q_2\|^2, \quad (123)$$

et de même pour $\widehat{\mathbf{EU}}_\lambda$. Effectivement, puisque u est concave et $\|\cdot\|^2$ est convexe, on a successivement :

$$\mathbf{EU}_\lambda(\alpha q_1 + (1 - \alpha)q_2) \quad (124)$$

$$= \mathbf{E} u(R \cdot (\alpha q_1 + (1 - \alpha)q_2)(X)) - \lambda \|\alpha q_1 + (1 - \alpha)q_2\|^2 \quad (125)$$

$$= \mathbf{E} u(\alpha(R \cdot q_1(X)) + (1 - \alpha)(R \cdot q_2(X))) - \lambda \|\alpha q_1 + (1 - \alpha)q_2\|^2 \quad (126)$$

$$\geq \mathbf{E}(\alpha u(R \cdot q_1(X)) + (1 - \alpha)u(R \cdot q_2(X))) - \lambda \|\alpha q_1 + (1 - \alpha)q_2\|^2 \quad (127)$$

$$= \alpha \mathbf{EU}(q_1) + (1 - \alpha) \mathbf{EU}(q_2) - \lambda \|\alpha q_1 + (1 - \alpha)q_2\|^2 \quad (128)$$

$$= \alpha \mathbf{EU}_\lambda(q_1) + (1 - \alpha) \mathbf{EU}_\lambda(q_2) - \lambda(\|\alpha q_1 + (1 - \alpha)q_2\|^2 - \alpha \|q_1\|^2 - (1 - \alpha) \|q_2\|^2). \quad (129)$$

Mais d'autre part,

$$- \lambda \|\alpha q_1 + (1 - \alpha)q_2\|^2 + \lambda \alpha \|q_1\|^2 + \lambda (1 - \alpha) \|q_2\|^2 \quad (130)$$

$$= \lambda \alpha (1 - \alpha) (\|q_1\|^2 + \|q_2\|^2 - 2 \langle q_1, q_2 \rangle) \quad (131)$$

$$= \lambda \alpha (1 - \alpha) \|q_1 - q_2\|^2, \quad (132)$$

Ce qui complète la démonstration. La dérivation demeure exactement la même lorsqu'on considère $\widehat{\mathbf{EU}}_\lambda$.

Lemme 4 (Sigma admissibilité). Soit $q, q' \in \mathcal{Q}$ deux vecteurs de décision et $(x, r) \in \mathcal{M}$ deux points quelconques du support de la loi de marché. Alors

$$|u(r q(x)) - u(r q'(x))| \leq \gamma \bar{r} \xi \|q - q'\|. \quad (133)$$

Démonstration. D'abord avec la propriété Lipschitz de u puis par l'hypothèse $|r| \leq \bar{r}$, on obtient

$$|u(r q(x)) - u(r q'(x))| \leq \gamma \bar{r} |(q(x) - q'(x))|. \quad (134)$$

Puis en notation vectorielle on obtient

$$= \gamma \bar{r} |\langle q | x \rangle - \langle q' | x \rangle| \quad (135)$$

$$= \gamma \bar{r} |\langle q - q' | x \rangle| \quad (136)$$

$$\leq \gamma \bar{r} \xi \|q - q'\| \quad (137)$$

successivement par Cauchy Schwartz et par l'hypothèse $\kappa(x, x) \leq \xi$, ce qui complète la démonstration. \square

Lemme 5 (Stabilité). Soit \mathcal{S}_n et \mathcal{S}'_n deux ensembles d'entraînement ne différant qu'à leur j^{e} point :

$$\mathcal{S}_n = \{(x_1, r_1), \dots, (x_j, r_j), \dots, (x_n, r_n)\} \quad (138)$$

$$\mathcal{S}'_n = \{(x_1, r_1), \dots, (x'_j, r'_j), \dots, (x_n, r_n)\}, \quad (139)$$

et soit $\hat{q} = \mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)$ et $\hat{q}' = \mathcal{Q}(\mathcal{S}'_n)$ les deux décisions optimales correspondantes. Alors

$$\|\hat{q} - \hat{q}'\| \leq \frac{2\gamma \xi \bar{r}}{\lambda n}. \quad (140)$$

Remarque. Cette propriété a été démontrée par [BE02]. Nous en donnons ici une version simplifiée et adaptée à la situation. Voir aussi [MRT12] pour une démonstration dans un contexte général.

Démonstration. Posons $\widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}} = \widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}(\mathcal{S}_n, \cdot)$ et $\widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}' = \widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}(\mathcal{S}'_n, \cdot)$. Du Lemme 2, on obtient

$$\lambda \|\hat{q} - \hat{q}'\|^2 \leq \widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}_\lambda(\hat{q}) - \widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}_\lambda(\hat{q}') + \widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}'_\lambda(\hat{q}') - \widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}'_\lambda(\hat{q}). \quad (141)$$

Les termes de régularisation s'annulent et on obtient donc :

$$\lambda \|\hat{q} - \hat{q}'\|^2 \leq \widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}(\hat{q}) - \widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}(\hat{q}') + \widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}'(\hat{q}') - \widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}'(\hat{q}) \quad (142)$$

Ces deux différences font disparaître tous les termes, excepté le j^e :

$$\lambda \|\hat{q} - \hat{q}'\|^2 \leq n^{-1}(u(r_j \hat{q}(x_j)) - u(r_j \hat{q}'(x_j))) + \quad (143)$$

$$n^{-1}(u(r'_j \hat{q}'(x'_j)) - u(r'_j \hat{q}(x'_j))). \quad (144)$$

D'autre part, cette somme est positive par le terme de gauche, on peut donc successivement appliquer l'opérateur valeur absolue, l'inégalité du triangle et le résultat du Lemme 4 pour obtenir

$$\lambda \|\hat{q} - \hat{q}'\|^2 \leq \frac{2}{n} \gamma \bar{r} \xi \|\hat{q} - \hat{q}'\|, \quad (145)$$

d'où on tire le résultat annoncé. \square

Lemme 6 (Décision limite). Soit \mathcal{S}_n un ensemble d'entraînement, $\hat{q}_u = \arg \max_q \widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}_\lambda(q)$ la solution au problème pour une utilité u quelconque (respectant les hypothèses) et $\hat{q}_1 = \arg \max_q \widehat{\mathbf{E}\mathbf{I}}_\lambda(q)$ la solution au problème risque neutre. Alors

$$\|\hat{q}_u\| \leq \|\hat{q}_1\| \leq \frac{\bar{r} \xi}{\lambda}. \quad (146)$$

Démonstration. D'abord, par la propriété de forte concavité de $\widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}_\lambda(\hat{q}_u)$ (Lemme 2), en posant $q = 0$, on obtient, $\frac{\lambda}{2} \|\hat{q}_u\|^2 \leq \widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}_\lambda(\hat{q}_u)$, ou encore $\lambda \|\hat{q}_u\|^2 \leq \widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}(\hat{q}_u)$.

On a par ailleurs,

$$\widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}(\hat{q}_u) \leq u(\widehat{\mathbf{E}\mathbf{I}}(\hat{q}_u)) \leq \widehat{\mathbf{E}\mathbf{I}}(\hat{q}_u) \quad (147)$$

en appliquant successivement l'inégalité de Jensen et l'inégalité $u(x) \leq x$. Ainsi, en appliquant Cauchy Schwartz et le résultat du Lemme 1,

$$\lambda \|\hat{q}_u\|^2 \leq \widehat{\mathbf{E}\mathbf{I}}(\hat{q}_u) = \lambda \langle \hat{q}_1 | \hat{q}_u \rangle \leq \lambda \|\hat{q}_1\| \|\hat{q}_u\| \quad (148)$$

pour obtenir $\|\hat{q}_u\| \leq \|\hat{q}_1\|$. On obtient la deuxième inégalité simplement avec la définition de $\hat{q}_1 = \lambda^{-1} \sum_{i=1}^n r_i |x_i\rangle$ et en appliquant les hypothèses $r_i \leq \bar{r}$ et $|x_i\rangle \leq \xi$. \square

Lemme 7 (Domaine d'utilité limite). Soit $\hat{q} = \mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)$ et $\hat{q}' = \mathcal{Q}(\mathcal{S}'_n)$ deux décisions obtenues à partir de deux ensembles d'entraînement $\mathcal{S}_n, \mathcal{S}'_n \sim M^n$, et soit $(x, r), (x', r') \in M$ deux points du domaine de marché. Alors

$$|u(r q(x)) - u(r' q'(x'))| \leq \lambda^{-1} (\gamma + 1) \bar{r}^2 \xi^2. \quad (149)$$

Démonstration. Du Lemme 6 et par hypothèse, on sait que pour tout $(x, r) \in M$, $|r \hat{q}(x)| \leq \lambda^{-1} \bar{r}^2 \xi^2$. De plus, $u(x) \leq x$ sur tout le domaine de u et $\gamma x \leq u(x)$ si $x < 0$ par hypothèse Lipschitz. On en déduit donc que

$$\lambda^{-1} \gamma \bar{r}^2 \xi^2 \leq u(r \hat{q}(x)) \leq \lambda^{-1} \bar{r}^2 \xi^2. \quad (150)$$

Donc au plus, deux valeurs d'utilité ne peuvent différer que de $\lambda^{-1}(\gamma + 1) \bar{r}^2 \xi^2$. \square

Lemme 8 (Théorème de McDiarmid). Soit \mathcal{S}_n et \mathcal{S}'_n deux ensembles d'entraînement échantillonnés à partir d'une quelconque variable aléatoire réelle D supportée par D et ne différant que d'un seul point, et soit $g : D^n \rightarrow \mathcal{R}$ telle que

$$|g(\mathcal{S}_n) - g(\mathcal{S}'_n)| \leq c. \quad (151)$$

Alors pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout échantillon aléatoire $\mathcal{S}_n \sim D^n$,

$$P\{g(\mathcal{S}_n) - E g(\mathcal{S}_n) \geq \epsilon\} \leq \exp\left(-\frac{2\epsilon^2}{nc^2}\right). \quad (152)$$

Remarque. De façon équivalente, en posant

$$\delta = \exp\left(-\frac{2\epsilon^2}{nc^2}\right), \quad (153)$$

alors on aura, avec probabilité au moins $1 - \delta$, $g(\mathcal{S}_n) < \epsilon + E g(\mathcal{S}_n)$. Autrement dit, avec probabilité au moins $1 - \delta$, l'évènement suivant aura lieu :

$$g(\mathcal{S}_n) \leq E g(\mathcal{S}_n) + \sqrt{\frac{nc^2 \log(1/\delta)}{2}}. \quad (154)$$

Démonstration. Consulter [MRT12] ou [BLM13]. \square

Lemme 9 (Borne sur l'équivalent certain). Soient $CE_1 = u^{-1}(EU_1)$ et $CE_2 = u^{-1}(EU_2)$ et soit une borne Ω_u telle que

$$EU_1 \geq EU_2 - \Omega_u. \quad (155)$$

Par définition du sur-gradient, pour tout $r \in \mathcal{R}$, $u(r + \Delta) \leq u(r) + \Delta \cdot \partial u(r)$. Donc en posant $\Delta = CE_1 - CE_2$ et $r = CE_2$, on obtient ces deux inégalités :

$$-\Omega_u \leq EU_1 - EU_2 = u(CE_1) - u(CE_2) \leq \partial u(CE_2)(CE_1 - CE_2). \quad (156)$$

On trouve ainsi :

$$CE_1 \geq CE_2 - \Omega_u \cdot \partial u^{-1}(CE_2). \quad (157)$$

Typiquement, CE_1 et EU_1 seront des quantités inobservables, alors que CE_2 et EU_2 seront des quantités calculables. De plus, si $\partial u^{-1}(CE_2)$ comporte plusieurs éléments (e.g. si la dérivée de u est discontinue à CE_2), on choisira l'élément le plus favorable ; la plupart du temps ce sera équivalent à $\lim_{r \rightarrow CE_2^-} 1/u'(r)$ dans la région où $1/u'(r)$ est défini. Enfin, on note que cette limite existe puisque u est strictement monotone, et donc sa pente ne s'annule nulle part.

A.2 Théorèmes 1 et 2

Théorème 1. On rappelle qu'on veut démontrer que pour tout ensemble d'entraînement, avec probabilité $1 - \delta$,

$$\zeta(\mathcal{S}_n) = \mathbf{EU}(\mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)) - \widehat{\mathbf{EU}}(\mathcal{S}_n, \mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)) \leq \Omega_u. \quad (158)$$

Démonstration. L'idée est en fait d'appliquer le théorème de McDiarmid (énoncé au Lemme 8) à l'erreur de généralisation $\hat{\zeta}(\mathcal{S}_n)$. Pour ce faire, on va donc d'abord chercher à borner la différence d'erreur entraînée par deux fonctions de décision $\hat{q} = \mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)$ et $\hat{q}' = \mathcal{Q}(\mathcal{S}'_n)$, où \mathcal{S}_n et \mathcal{S}'_n ne diffèrent que d'un seul point qu'on supposera être le j^e .

Formellement, si on pose

$$\mathcal{S}_n = \{(x_1, r_1), \dots, (x_j, r_j), \dots, (x_n, r_n)\} \quad (159)$$

$$\mathcal{S}'_n = \{(x_1, r_1), \dots, (x'_j, r'_j), \dots, (x_n, r_n)\}. \quad (160)$$

Alors

$$|\hat{\zeta}(\hat{q}) - \hat{\zeta}(\hat{q}')| = |\mathbf{EU}(\hat{q}) - \widehat{\mathbf{EU}}(\hat{q}) - \mathbf{EU}(\hat{q}') + \widehat{\mathbf{EU}}'(\hat{q}')| \quad (161)$$

$$\leq |\mathbf{EU}(\hat{q}) - \mathbf{EU}(\hat{q}')| + |\widehat{\mathbf{EU}}(\hat{q}) - \widehat{\mathbf{EU}}'(\hat{q}')| \quad (162)$$

Par le théorème de Jensen appliqué à la fonction valeur absolue, on obtient du premier terme que

$$|\mathbf{EU}(\hat{q}) - \mathbf{EU}(\hat{q}')| = |\mathbf{E}(u(R \cdot \hat{q}(X)) - u(R \cdot \hat{q}'(X)))| \quad (163)$$

$$\leq \mathbf{E} |u(R \cdot \hat{q}(X)) - u(R \cdot \hat{q}'(X))| \quad (164)$$

$$\leq \gamma \bar{r} \xi \|\hat{q} - \hat{q}'\| \quad (165)$$

$$\leq \frac{2\gamma^2 \bar{r}^2 \xi^2}{\lambda n}, \quad (166)$$

en appliquant successivement les Lemmes 4 et 5. Quant au deuxième terme de (162) on peut le borner de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & |\widehat{\mathbf{EU}}(\hat{q}) - \widehat{\mathbf{EU}}'(\hat{q}')| \\ &= \frac{1}{n} \left| u(r_j \hat{q}(x_j)) - u(r'_j \hat{q}'(x'_j)) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (u(r_i \hat{q}(x_i)) - u(r_i \hat{q}'(x_i))) \right|, \end{aligned} \quad (167)$$

qu'on peut décomposer en deux termes en appliquant l'inégalité du triangle. Le premier terme :

$$n^{-1} |u(r_j \hat{q}(x_j)) - u(r'_j \hat{q}'(x'_j))| \leq \frac{(\gamma + 1) \bar{r}^2 \xi^2}{\lambda n} \quad (168)$$

en appliquant le résultat du Lemme 7. En appliquant une deuxième fois les Lemmes 4 et 5, le deuxième terme est borné par

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (u(r_i \hat{q}(x_i)) - u(r_i \hat{q}'(x_i))) \right| \leq \frac{n-1}{n} \frac{2\gamma^2 \bar{r}^2 \xi^2}{\lambda n} \leq \frac{2\gamma^2 \bar{r}^2 \xi^2}{\lambda n}. \quad (169)$$

Une fois toutes réunies, ces inégalités donnent donc

$$|\hat{\zeta}(\hat{q}) - \hat{\zeta}(\hat{q}')| \leq \frac{2\gamma^2 \bar{r}^2 \xi^2}{\lambda n} + \frac{(\gamma + 1) \bar{r}^2 \xi^2}{\lambda n} + \frac{2\gamma^2 \bar{r}^2 \xi^2}{\lambda n} \quad (170)$$

$$= \frac{(4\gamma^2 + \gamma + 1) \bar{r}^2 \xi^2}{\lambda n}. \quad (171)$$

On peut alors directement appliquer le corrolaire du Théorème de McDiarmid (Lemme 8). On trouve donc qu'avec probabilité au moins $1 - \delta$, on aura

$$\hat{\zeta}(\mathcal{S}_n) \leq \mathbf{E} \hat{\zeta}(\mathcal{S}_n) + \frac{(4\gamma^2 + \gamma + 1) \bar{r}^2 \xi^2}{\lambda} \sqrt{\frac{\log(1/\delta)}{2n}} \quad (172)$$

[**Todo:** Mais],

$$\hat{\zeta}(\mathcal{S}_n) \leq \frac{2\gamma \bar{r}^2 \xi^2}{\lambda n} \quad (173)$$

et donc,

$$\hat{\zeta}(\mathcal{S}_n) \leq \frac{2\gamma \bar{r}^2 \xi^2}{\lambda n} + \frac{(4\gamma^2 + \gamma + 1) \bar{r}^2 \xi^2}{\lambda} \sqrt{\frac{\log(1/\delta)}{2n}} \quad (174)$$

□

ce qui correspond au résultat annoncé.

B Conjecture sur l'erreur de généralisation

Lemme 10 (Généralisation du lemme de Hoeffding). Ce lemme généralise le lemme de Hoeffding à un espace vectoriel de dimension arbitraire \mathbf{Q} . Soit un vecteur aléatoire $Q \in \mathbf{Q}$ tel que $\|Q\| \leq \beta$ et $\mathbf{E} Q = 0$. Alors pour tout $t \in \mathbf{Q}$,

$$\mathbf{E} e^{\langle t, Q \rangle} \leq \exp \left(\frac{\beta^2 \|t\|^2}{2} \right). \quad (175)$$

En effet, on sait que par définition de la convexité de la fonction exponentielle, pour tout $s \in [0, 1]$,

$$\exp(sa + (1-s)b) \leq s \exp a + (1-s) \exp b. \quad (176)$$

Donc en définissant $g : \{q \in \mathbf{Q} : \|q\| \leq \beta\} \rightarrow [0, 1]$ par

$$g(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\langle t, q \rangle}{\beta \|t\|} + 1 \right) \quad (177)$$

et en posant $a = \beta \|t\|$ et $b = -\beta \|t\|$, alors pour tout $q \in \mathbf{Q}$,

$$ag(q) = \frac{1}{2} (\langle t, q \rangle + \beta \|t\|), \quad (178)$$

$$b(1 - g(q)) = -\frac{1}{2} (\beta \|t\| - \langle t, q \rangle), \quad (179)$$

et donc

$$\exp(ag(q) + (1 - g(q))b) = e^{\langle t, q \rangle}. \quad (180)$$

La branche droite de l'inégalité devient quant à elle

$$\left(\frac{\langle t, q \rangle}{\beta \|t\|} + 1 \right) e^{\beta \|t\|} + \left(1 - \frac{\langle t, q \rangle}{\beta \|t\|} \right) e^{-\beta \|t\|} \quad (181)$$

et donc, puisque $\mathbf{E} \langle t, Q \rangle = \langle t, \mathbf{E} Q \rangle = 0$,

$$\mathbf{E} e^{\langle t, Q \rangle} \leq \mathbf{E} \left(\left(\frac{\langle t, Q \rangle}{\beta \|t\|} + 1 \right) e^{\beta \|t\|} + \left(1 - \frac{\langle t, Q \rangle}{\beta \|t\|} \right) e^{-\beta \|t\|} \right) \quad (182)$$

$$= e^{\beta \|t\|} + e^{-\beta \|t\|} \quad (183)$$

$$= e^{\phi(\beta \|t\|)} \quad (184)$$

où $\phi(x) = \log(e^x + e^{-x})$. Or, avec le résultat de [MRT12], p. 370, on a $\phi(x) \leq x^2/2$, d'où on tire le résultat annoncé.

Lemme 11 (Généralisation de la borne de Chernoff). Ce lemme généralise la borne de Chernoff à un espace vectoriel de dimension arbitraire \mathbf{Q} . Soit un vecteur aléatoire $Q \in \mathbf{Q}$. Alors l'évènement $\|Q\| \geq \epsilon$ aura lieu si et seulement s'il existe $t \in \mathbf{Q}$, $\|t\| = 1$ tel que $\langle t, Q \rangle \geq \epsilon$. Ainsi, pour tout $s > 0$, en employant l'inégalité de Markov,

$$\mathbf{P}\{\|Q\| \geq \epsilon\} = \mathbf{P}\{s\langle t, Q \rangle \geq s\epsilon\} = \mathbf{P}\{e^{s\langle t, Q \rangle} \geq e^{s\epsilon}\} \quad (185)$$

$$\leq e^{-s\epsilon} \mathbf{E} e^{\langle t, Q \rangle}. \quad (186)$$

Lemme 12 (Généralisation de l'inégalité de McDiarmid). L'inégalité de McDiarmid peut également se généraliser à des fonctions prenant leurs valeurs dans des espaces vectoriels. À élaborer !

Soit une distribution \mathcal{F} à valeur dans un espace quelconque \mathbf{F} , un espace vectoriel \mathbf{Q} et une fonction $f : \mathbf{F}^n \rightarrow \mathbf{Q}$. S'il existe une constante $c \in \mathcal{R}$ telle que pour deux ensembles d'échantillons i.i.d. $\mathcal{S}_n \sim \mathcal{F}^n$ et \mathcal{S}'_n , où \mathcal{S}_n et \mathcal{S}'_n ne diffèrent que d'un seul point rééchantillonné de \mathcal{F} , on a

$$\|f(\mathcal{S}_n) - f(\mathcal{S}'_n)\| \leq c, \quad (187)$$

alors pour tout échantillon aléatoire $\mathcal{S}_n \sim \mathcal{F}^n$,

$$P\{\|f(\mathcal{S}_n) - \mathbf{E} f(\mathcal{S}_n)\| \geq \epsilon\} \leq \exp\left(-\frac{2\epsilon^2}{nc^2}\right). \quad (188)$$

Lemme 13 (Borne sur la décision). Considérons le cas d'une utilité neutre au risque puisqu'on sait que toute solution à $\max_q \mathbf{E} U_\lambda(q)$ sera bornée par celle de $\max_q \mathbf{E} I_\lambda(q)$. La stabilité de l'algorithme \mathcal{Q} fournie par [BE02] établit que pour deux échantillons \mathcal{S}_n et \mathcal{S}'_n tirés de M^n et ne différant que d'un seul point,

$$\|\mathcal{Q}(\mathcal{S}_n) - \mathcal{Q}(\mathcal{S}'_n)\| \leq \frac{\bar{r}\xi}{\lambda n}. \quad (189)$$

En posant $\hat{q} \sim \mathcal{Q}(M^n)$, on peut donc appliquer directement le résultat de l'inégalité de McDiarmid (Lemme 12) pour obtenir avec probabilité $1 - \delta$ que

$$\|\hat{q} - \mathbf{E} \mathcal{Q}(\mathcal{S}_n)\| \leq \frac{\bar{r}\xi}{\lambda} \sqrt{\frac{\log(1/\delta)}{2n}}. \quad (190)$$

Or, \mathcal{Q} est un estimateur non-biaisé de q_λ^* . En effet, pour une utilité neutre au risque,

$$\mathbf{E} \mathcal{Q}(\mathcal{S}_n) = \mathbf{E}_{M^n} \left(\frac{1}{2n\lambda} \sum_{i=1}^n r_i \kappa(\cdot, x_i) \right) \quad (191)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda} \mathbf{E}_M(R \kappa(\cdot, X)) \quad (192)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_\lambda^* \quad (193)$$

$$= q_\lambda^*. \quad (194)$$

On obtient ainsi

$$\|\hat{q} - q_\lambda^*\| \leq \frac{\bar{r}\xi}{\lambda} \sqrt{\frac{\log(1/\delta)}{2n}}. \quad (195)$$

Lemme 14. La solution \hat{q}_1 de

$$\underset{q \in \mathbf{Q}}{\text{maximiser}} \quad \mathbf{E} I_\lambda(q) = \hat{\mathbf{E}} \langle q | t \rangle - \frac{\lambda}{2} \|q\|^2. \quad (196)$$

est donnée par

$$\langle \hat{q}_1 | = \lambda^{-1} \hat{\mathbf{E}} \langle t | \quad (197)$$

où $\langle x_i | = \kappa(x_i, \cdot)$ est l'élément dual de x sous \mathbf{Q} . Sous un noyau linéaire cela revient donc à

$$\hat{q}_1^T = \lambda^{-1} \hat{\mathbf{E}}(r^T x) \quad (198)$$

c'est à dire la covariance décentrée entre r et x . On observera aussi que

$$\mathbf{EI} = \lambda \langle \hat{q}_1 | \cdot \rangle. \quad (199)$$

et donc que

$$\mathbf{EI}(\hat{q}_1) = \lambda \|\hat{q}_1\|^2. \quad (200)$$

Démonstration. Si on considère un déplacement de décision $\hat{q}_1 + \Delta q$, alors par linéarité le premier terme de l'objectif devient $\mathbf{EI}(\hat{q}_1 + \Delta q) = \mathbf{EI}(\hat{q}_1) + \mathbf{EI}(\Delta q)$ et le terme de régularisation devient

$$-\lambda/2 \|\hat{q}_1 + \Delta q\|^2 = -\lambda/2 \|\hat{q}_1\|^2 - \lambda \langle \hat{q}_1 | \Delta q \rangle - \lambda/2 \|\Delta q\|^2. \quad (201)$$

On a donc

$$\mathbf{EI}_\lambda(\hat{q}_1) - \mathbf{EI}_\lambda(\hat{q}_1 + \Delta q) = -\mathbf{EI}(\Delta q) + \lambda \langle \hat{q}_1 | \Delta q \rangle + \lambda/2 \|\Delta q\|^2 \quad (202)$$

$$= -\lambda \langle \hat{q}_1 | \Delta q \rangle + \lambda \langle \hat{q}_1 | \Delta q \rangle + \lambda/2 \|\Delta q\|^2 \quad (203)$$

$$= \lambda/2 \|\Delta q\|^2 \geq 0, \quad (204)$$

Ce qui entraîne $\mathbf{EI}_\lambda(\hat{q}_1) \geq \mathbf{EI}_\lambda(\hat{q}_1 + \Delta q)$. \square

Lemme 15 (Borne sur la décision utilitaire). Pour toute fonction d'utilité u respectant les hypothèses,

$$\|\hat{q}_1\| \geq \|\hat{q}_u\|. \quad (205)$$

Ce lemme entraîne notamment que l'utilité en échantillon $\widehat{\mathbf{EU}}(\hat{q}_u) \leq \widehat{\mathbf{EI}}(\hat{q}_1)$: puisque $u(x) \leq x$,

$$\widehat{\mathbf{EU}}(\hat{q}_u) \leq \widehat{\mathbf{EI}}(\hat{q}_u) = \lambda \langle \hat{q}_1, \hat{q}_u \rangle \leq \lambda \|\hat{q}_1\| \|\hat{q}_u\| \leq \lambda \|\hat{q}_1\|^2 \quad (206)$$

$$= \widehat{\mathbf{EI}}(\hat{q}_1) \quad (207)$$

Démonstration. On note tout d'abord avec l'inégalité de Jensen que $u(\widehat{\mathbf{EI}}(\hat{q}_u)) \geq \widehat{\mathbf{EU}}(\hat{q}_u) \geq \lambda/2 \|\hat{q}_u\|^2 \geq 0$ puisque la valeur de l'objectif $\widehat{\mathbf{EI}}_\lambda(q)$ est d'au moins 0 à $q = 0$. Mais puisque u a un sur-gradient de 1 à 0, on déduit que $u(x) \geq 0$ entraîne $x \geq u(x)$. On a ainsi $\widehat{\mathbf{EI}}(\hat{q}_u) - \lambda/2 \|\hat{q}_u\|^2 \geq 0$. Ce qui entraîne alors que

$$\lambda \langle \hat{q}_1 | \hat{q}_u \rangle \geq \lambda/2 \|\hat{q}_u\|^2 \quad (208)$$

Mais par Cauchy-Schwartz, on a aussi

$$\|\hat{q}_1\| \|\hat{q}_u\| \geq \langle \hat{q}_1, \hat{q}_u \rangle \geq \|\hat{q}_u\|^2/2 \quad (209)$$

Et donc

$$\|\hat{q}_1\| \geq \|\hat{q}_u\|/2. \quad (210)$$

\square

Lemme 16. L'erreur de généralisation du problème averse au risque est bornée par celle du problème neutre au risque :

$$\widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}(\hat{q}_u) - \mathbf{E}\mathbf{U}(\hat{q}_u) \leq \gamma(\widehat{\mathbf{E}\mathbf{I}}(\hat{q}_1) - \mathbf{E}\mathbf{I}(\hat{q}_1)). \quad (211)$$

Démonstration. Puisque u est monotone, on peut tout d'abord noter que pour tout $r + \Delta \in \mathbf{R}$, on a l'inégalité $u(r + \Delta) \leq u(r) + \Delta \partial u(r)$. Ainsi, pour deux variables aléatoires $R_1, R_2 \in \mathbf{R}$, en posant $\Delta = R_1 - R_2$, on a nécessairement

$$u(R_1) - u(R_2) \leq \partial u(R_2)(R_1 - R_2) \leq \gamma(R_1 - R_2), \quad (212)$$

par définition du coefficient Lipschitz. On tire donc

$$\mathbf{E} u(R_1) - \mathbf{E} u(R_2) \leq \gamma(\mathbf{E} R_1 - \mathbf{E} R_2). \quad (213)$$

En appliquant cette inégalité aux opérateurs $\widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}$ et $\mathbf{E}\mathbf{U}$ on obtient alors

$$\widehat{\mathbf{E}\mathbf{U}}(\hat{q}_u) - \mathbf{E}\mathbf{U}(\hat{q}_u) \leq \gamma(\widehat{\mathbf{E}\mathbf{I}}(\hat{q}_u) - \mathbf{E}\mathbf{I}(\hat{q}_u)) \quad (214)$$

$$= \gamma\lambda(\langle \hat{q}_1 | \hat{q}_u \rangle - \langle q_\lambda^* | \hat{q}_u \rangle). \quad (215)$$

Mais par le Lemme 15, $\langle \hat{q}_1 | \hat{q}_u \rangle \geq 0$ et $\|\hat{q}_u\| \leq 2\|\hat{q}_1\|$. □