

Rapport d'évaluation

Thierry BAZIER-MATTE

Vincent JOHAL

Le 16 décembre 2016

1 Introduction

Ce mandat introduit une Mortgage backed security qui s'avère être un parfait candidat de sous-jacent pour une paire de dérivés Interest Only strips et Principal Only strips. Premièrement, nous déterminerons les courbes forward et zéro coupon à partir des données Libor-Swap disponibles dans le mandat, grâce au modèle de courbe Nelson-Siegel. Deuxièmement, nous déterminerons les prix des caps qui sont implicites aux volatilités Black décrites dans le mandat. Armés de notre courbe forward et des prix des caps, nous calibrerons notre modèle de taux court, le CIR++ afin de répliquer au mieux les deux séries d'inputs de départ. Finalement, en simulant les taux d'intérêts par une simulation de Monte Carlo nous évaluerons les flux monétaires liés à la Mortgage backed security et dériverons les valeurs des IO et PO, ainsi que leur sensibilité au taux d'intérêt.

2 Calibration de la courbe zéro coupon

Pour construire la courbe des zéro coupons associée aux taux LIBOR et swap du marché, nous avons procédé de façon à bien distinguer la courbe zéro coupon de la courbe swap. Pour ce faire, comme le LIBOR 3 et 6 mois étaient disponibles, nous avons simplement interpolé avec splines cubiques le swap 9 mois. Puis à partir de cette courbe, par méthode de bootstrapping tel qu'expliqué par [6] p. 177 nous avons reconstruit progressivement la courbe zéro coupon. De la même façon, toujours avec un bootstrapping et une interpolation cubique, nous avons construit successivement une courbe swap interpolée et la courbe zéro coupon en découlant (voir `interpolate_curve():zero.py`).

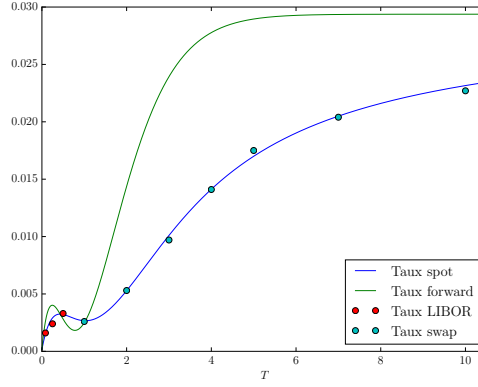
Ensuite, à partir de cette courbe zéro coupon avec des points disponibles à tous les trois mois, nous avons établi une méthode de moindres carrés avec comme paramètres ceux de la courbe Nelson Siegel augmentée (voir [4]):

$$R(0, t) = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1 - e^{-t/\theta_1}}{t/\theta_1} \right) + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-t/\theta_1}}{t/\theta_1} - e^{-t/\theta_1} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-t/\theta_2}}{t/\theta_2} - e^{-t/\theta_2} \right).$$

Table 1

β_0	β_1	β_2	β_3	θ_1	θ_2
0.029 376	-0.029 224	-5.608 975	5.565 088	0.564 358	0.560 598

Figure 1



En employant la relation $f(0, t) = R(0, t) + t \partial_t R(0, t)$ On obtient par la courbe forward:

$$f(0, t) = \beta_0 + \beta_1 e^{-t/\theta_1} + \beta_2 \frac{t}{\theta_2} e^{-t/\theta_1} + \beta_3 \frac{t}{\theta_2} e^{-t/\theta_2}.$$

Un algorithme à régions de confiance [3] a été employé pour déterminer les paramètres optimaux. Des poids supplémentaires ont aussi été attribués aux premiers mois ainsi qu'au tout dernier afin de bien répliquer la forme de la courbe impliquée par les mesures empiriques (voir méthode `load_ns_params():zero.py` pour plus de détails).

Les paramètres ainsi obtenus sont reportés à la table 1.

On remarque notamment qu'on obtient un taux instantané $R(0, 0) = \beta_0 + \beta_1 = 0.015 148\%$. Graphiquement, le taux spot et le taux forward instantané sont présentés dans la Figure 1.

3 Calibration des prix caps

Pour ce qui concerne les caps, la première étape a été de transformer à partir de la formule de Black les prix qui leurs sont implicites, en sachant que leurs taux d'exercice, les caps étant à la monnaie, correspondent aux taux swap. Cette fonction est implémentée dans la méthode `cap(T, σ):cir.py`. Mathématiquement, on en trouve l'expression dans [1] à la p. 17.

On trouve alors les prix suivants reportés à la Table 2.

Table 2

T	Prix cap	σ
1	0.000 373\$	0.6004
2	0.003 607\$	0.6317
3	0.012 168\$	0.5478
4	0.022 158\$	0.4862
5	0.031 992\$	0.4466
6	0.041 089\$	0.4134
7	0.051 609\$	0.4125
8	0.062 394\$	0.4125
9	0.065 759\$	0.3515
10	0.074 157\$	0.3428

Table 3

	Paramètres initiaux	Borne inférieure	Borne supérieure	Paramètres obtenus
x_0	0.0001	$-\infty$	$R(0)$	$7.291\,809\,688\,83 \times 10^{-9}$
σ	0.6	$-\infty$	∞	0.136 728 733 551
θ	0.01	$-\infty$	$1.25f(0, 10)$	0.033 822 097 013 2
k	0.08	0	0.15	0.321 782 134 839

Ces prix obtenus, il reste ensuite à calibrer le processus CIR++ afin de les répliquer. Nous avons donc construit une fonction `cap_CIR(T,x0,k,θ,σ):cir.py` dont l’objectif est de calculer le prix d’un cap à la monnaie selon une maturité et un ensemble de paramètres CIR++, afin d’utiliser cette fonction dans une méthode de moindres carrés dont la sortie devrait être semblable aux prix obtenus ci-haut.

Cette fonction est construite en faisant la somme de la valeur des caplets composant le cap, puis en employant la relation caplet-put, suivi de la parité put-call (`ZBP(T,K,*α):cir.py`, pour enfin implémenter l’équation (3.78) de la p. 103 de [1] (`ZBC(T,K,*α):cir.py`). Une telle implémentation ne pose pas de problème particulier. Notons que dans le code, `*α` réfère au vecteur de paramètres CIR++.

Ceci étant dit, une fois l’algorithme de moindres carrés évalué (voir `load_cir_params():cir.py`), le processus de taux court en découlant peut être particulièrement sujet à d’infâmes taux négatifs, pour peu qu’on n’y prenne garde. En effet, soulignons d’une part que cet algorithme affiche une grande sensibilité aux valeurs initiales données (reportées dans la Table 3). Mais d’autre part, puisque $\mathbf{E}r_t = f(0, t)$ et que la courbe forward tombe à des valeurs très proches de zéro autour d’un an, ces taux négatifs à courte échéance ont été presque impossibles à éviter. Pour éviter les taux négatifs à plus longue échéance, nous avons suivi les conseils prodigués par [1] p. 108, notamment en bornant le facteur θ , qui correspond à la limite asymptotique en distribution du processus CIR sous jacent au CIR++, par un ordre de grandeur de $f(0, 10)$ (voir Table 3).

Pour ce qui concerne la simulation du processus (voir `cir_process(T,τ,N,x0,k,θ,σ):cir.py`),

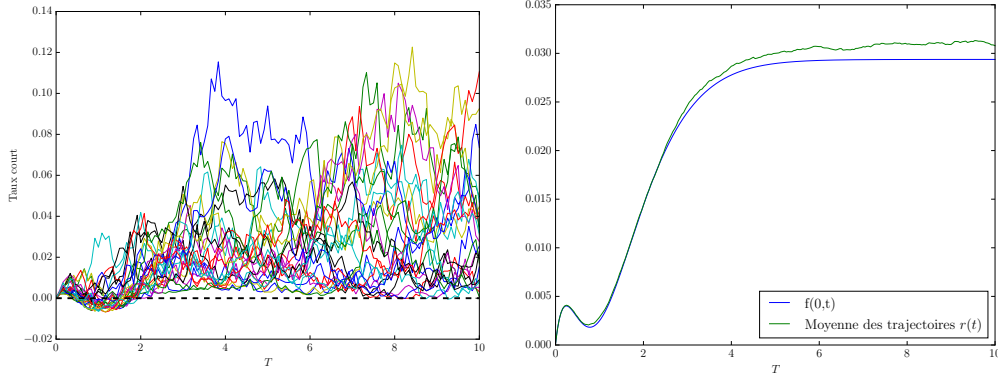


Figure 2

elle ne pose pas non plus de problème particulier; il s'agit essentiellement d'ajouter un paramètre de correction $\phi(t)$ à un processus CIR régulier. Ce processus a été simulé en employant l'algorithme décrit dans [5] à la p. 124.

Les résultats sont reportés à la figure 2 où sont présentés un échantillon de 25 trajectoires de taux court jusqu'à une échéance de 10 ans. On remarque notamment qu'à courte échéance la plupart des trajectoires tombent sous 0, mais rapidement elles remontent et sont bornées à des taux positifs. La seconde figure illustre la moyenne de 5000 trajectoires qui reproduit la courbe forward. On remarque qu'à plus longue échéance, la moyenne tend à donner des valeurs supérieures au forward théorique. Ceci doit être dû au fait que les taux ont une distribution chi carrée décentrée, et donc des moments d'ordre 3 (asymétrie) et 4 (kurtose) importants; autrement dit, la moyenne empirique tend lentement vers la moyenne théorique.

Finalement, la Figure 3 reporte la valeur des caps empiriques par rapport à la valeur des caps implicites au processus CIR++. On remarque que l'adéquation est relativement bonne. Cependant, lorsqu'on inverse le prix des caps toujours avec la formule de Black, pour de courtes échéances, on observe une différence assez importante, qui tend à se réduire pour de plus faibles échéances. Ceci s'explique par le fait que pour de courtes maturités, une très petite variation de prix entraînera une variation très importante dans l'espace des volatilités.

4 Evaluation des MBS

Méthodologie

Les mortgages backed securities ou titres adossés à des créances hypothécaires sont un type d'obligation adossé à des actifs, sécurisé par un pool d'hypothèques. Des banques d'investissements achètent les hypothèques et titrisent les prêts hypothécaires afin de les revendre à des investisseurs. Un facteur à prendre en compte lorsqu'il est question d'évaluer une MBS est la vitesse de prépaiement des débiteurs hypothécaires. En effet, selon le niveau de taux d'intérêt, les détenteurs

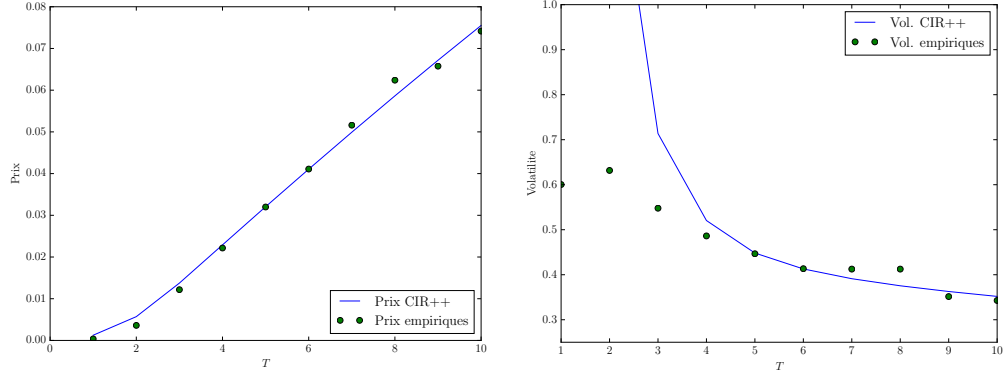


Figure 3

d'hypothèques repaie leur dette plus ou moins rapidement. Pour intégrer cet aspect à l'évaluation de la MBS, nous attribuons une probabilité de prépaiement p_t pour chaque mensualité t . Cette probabilité correspond à une fonction intégrant un facteur de taux de prépaiement conditionnel, dénoté ici par CPR_t (conditional prepayment rate). Le CPR_t est défini dans le mandat par la fonction suivante:

$$CPR_t = 0.07 + 1.05 * \max\{(0.0594 - (0.00837 + 0.905r_t), 0\}$$

dont les valeurs sont fondées sur les travaux de [2].

La probabilité p_t est ensuite déterminée comme suit:

$$p_t = 1 - (1 - CPR_t)^{1/12}$$

et illustre la vitesse à laquelle le prépaiement survient.

Les cashflows de la MBS se résument aux trois quantités suivantes:

$$\text{Paiement d'intérêts sur MBS : } I_t^{MBS} = \frac{r_{12}^{MBS}}{12} * L_t$$

$$\text{Principal anticipé : } Pay_t^{scheduled} = C_t - I_t$$

$$\text{Prépaiement du principal : } Pay_t^{prepaid} = p_t * L_t$$

et requièrent les quantités ci-dessous:

$$\text{Paiement d'intérêts hypothécaires : } I_t = \frac{r_{12}^m}{12} * L_t$$

$$\text{Principal non-payé : } L_{t+1} = L_t - Pay_t^{scheduled} - Pay_t^{prepaid}$$

$$\text{Mise à jour du coupon anticipé : } C_{t+1} = (1 - p_t) * C_t$$

Le coupon initial C_0 est déterminé de façon à satisfaire la relation de la valeur actualisée des coupons

et du principal définie par

$$\text{Principal} = \sum_{i=1}^{5 \cdot 12} \frac{C_0}{\left(1 + \frac{r_{12}^m}{12}\right)^i}$$

La valeur du Principal L_0 correspond à la valeur indiquée dans le descriptif de la MBS dans le mandat, c'est-à-dire 7 326 596\$.

Ainsi nous pouvons définir le flux monétaire mensuel généré par la MBS selon:

$$\text{Cash-flow total par mensualité : } CF_t = I_t + Pay_t^{\text{scheduled}} + Pay_t^{\text{prepaid}}.$$

Les dérivés hypothécaires *Interest Only strips* et *Principal Only strips* que le courtier souhaite émettre constituent les flux monétaires d'une MBS lorsqu'ils sont combinés. La *Interest Only* verse à son détenteur les flux monétaires attachés aux coupons de la mortgage backed security. Le détenteur d'une IO est long le taux d'intérêt puisqu'une baisse du taux incite les détenteurs d'hypothèques à accélérer le remboursement de leurs hypothèques. Par conséquent, les intérêts de la MBS sont perçus sur un capital qui décroît plus vite. À l'inverse, la *Principal only* découle des flux monétaires liés au remboursement du principal et celle-ci prend de la valeur lorsque le taux d'intérêt baisse, puisque il accélère le remboursement des hypothèques et donc des flux monétaires de la PO.

Pour obtenir la valeur de la IO, il suffit de faire la somme de tous les cashflows d'intérêt payés par la MBS (colonne 6), ajustés par le facteur d'actualisation correspondant à la période t (colonne 9). La valeur de la PO est constituée de la somme des paiements anticipés (colonne 8) actualisés ainsi que la somme des prépaiements de principal (colonne 5) actualisés.

Résultats

La Table 5 présente les prix obtenus, ainsi que les statistiques associées, pour une évaluation Monte Carlo de 50 000 trajectoires. En outre, la Figure 4 présente un histogramme de la valeur des IO et des PO. On remarque notamment l'asymétrie opposée des deux produits dérivés.

Pour expliquer ces résultats, attardons nous d'abord sur l'histogramme de la valeur des IO. On remarque que celle-ci suit de près la distribution des taux courts. Mais la valeur d'un dérivé IO est directement corrélé à la valeur des taux courts: des taux élevés impliquent un prépaiement faible, et donc un principal plus important sur lequel prélever des intérêts. Et inversement pour les taux faibles.

De la même façon, des taux élevés impliquent une hausse dans les prépaiements ce qui entraîne alors des flux monétaires importants et donc hausse la valeur du PO, ce qui explique une distribution symétrique à celles des taux courts.

Table 4

T	p	Principal	Coupon	Princ. prépayé	Int. transféré	Intérêt	Princ. anticipé	$P(0, t)$
0.08	0.0109	7 326 596.00\$	139 861.29\$	79 998.34\$	33 580.23\$	36 205.60\$	103 655.69\$	0.9999
0.17	0.0106	7 142 941.97\$	138 379.16\$	75 694.58\$	32 738.48\$	35 298.04\$	103 081.12\$	0.9996
0.25	0.0105	6 964 166.27\$	136 920.53\$	73 408.17\$	31 919.10\$	34 414.59\$	102 505.94\$	0.9993
0.33	0.0107	6 788 252.16\$	135 450.88\$	72 862.18\$	31 112.82\$	33 545.28\$	101 905.60\$	0.9989
0.42	0.0109	6 613 484.39\$	133 979.65\$	71 833.80\$	30 311.80\$	32 681.64\$	101 298.02\$	0.9986
0.50	0.0109	6 440 352.57\$	132 520.69\$	70 131.78\$	29 518.28\$	31 826.08\$	100 694.61\$	0.9984
0.58	0.0109	6 269 526.18\$	131 075.17\$	68 387.23\$	28 735.33\$	30 981.91\$	100 093.26\$	0.9982
0.67	0.0112	6 101 045.68\$	129 601.79\$	68 580.16\$	27 963.13\$	30 149.33\$	99 452.46\$	0.9980
0.75	0.0113	5 933 013.07\$	128 134.84\$	67 155.28\$	27 192.98\$	29 318.97\$	98 815.87\$	0.9978
0.83	0.0114	5 767 041.93\$	126 677.77\$	65 579.09\$	26 432.28\$	28 498.80\$	98 178.97\$	0.9977
0.92	0.0115	5 603 283.86\$	125 227.31\$	64 157.61\$	25 681.72\$	27 689.56\$	97 537.75\$	0.9975
1.00	0.0112	5 441 588.51\$	123 822.94\$	61 025.09\$	24 940.61\$	26 890.52\$	96 932.42\$	0.9973
1.08	0.0112	5 283 630.99\$	122 436.80\$	59 147.87\$	24 216.64\$	26 109.94\$	96 326.85\$	0.9971
1.17	0.0109	5 128 156.27\$	121 106.67\$	55 711.04\$	23 504.05\$	25 341.64\$	95 765.04\$	0.9968
1.25	0.0112	4 976 680.20\$	119 754.96\$	55 546.38\$	22 809.78\$	24 593.09\$	95 161.87\$	0.9965
1.33	0.0112	4 825 971.95\$	118 414.66\$	54 012.58\$	22 119.04\$	23 848.34\$	94 566.31\$	0.9961
1.42	0.0113	4 677 393.06\$	117 073.10\$	52 991.72\$	21 438.05\$	23 114.12\$	93 958.98\$	0.9955
1.50	0.0112	4 530 442.35\$	115 758.84\$	50 858.74\$	20 764.53\$	22 387.94\$	93 370.90\$	0.9950
1.58	0.0111	4 386 212.71\$	114 474.43\$	48 667.27\$	20 103.47\$	21 675.20\$	92 799.23\$	0.9943
1.67	0.0111	4 244 746.21\$	113 199.27\$	47 283.56\$	19 455.09\$	20 976.12\$	92 223.15\$	0.9935
1.75	0.0112	4 105 239.50\$	111 936.05\$	45 811.31\$	18 815.68\$	20 286.73\$	91 649.32\$	0.9926
1.83	0.0112	3 967 778.87\$	110 687.74\$	44 248.62\$	18 185.65\$	19 607.44\$	91 080.30\$	0.9917
1.92	0.0112	3 832 449.94\$	109 452.68\$	42 762.62\$	17 565.40\$	18 938.69\$	90 513.99\$	0.9906
2.00	0.0109	3 699 173.34\$	108 258.84\$	40 348.23\$	16 954.54\$	18 280.08\$	89 978.76\$	0.9895
2.08	0.0109	3 568 846.35\$	107 082.40\$	38 782.49\$	16 357.21\$	17 636.05\$	89 446.35\$	0.9883
2.17	0.0107	3 440 617.51\$	105 936.95\$	36 804.00\$	15 769.50\$	17 002.38\$	88 934.56\$	0.9869
2.25	0.0108	3 314 878.95\$	104 788.65\$	35 931.34\$	15 193.20\$	16 381.03\$	88 407.63\$	0.9855
2.33	0.0108	3 190 539.99\$	103 659.00\$	34 394.82\$	14 623.31\$	15 766.59\$	87 892.42\$	0.9841
2.42	0.0105	3 068 252.74\$	102 568.96\$	32 264.68\$	14 062.83\$	15 162.28\$	87 406.68\$	0.9825
2.50	0.0103	2 948 581.38\$	101 512.70\$	30 364.78\$	13 514.33\$	14 570.91\$	86 941.79\$	0.9809
2.58	0.0096	2 831 274.82\$	100 536.87\$	27 216.53\$	12 976.68\$	13 991.22\$	86 545.66\$	0.9793
2.67	0.0097	2 717 512.63\$	99 559.14\$	26 428.04\$	12 455.27\$	13 429.04\$	86 130.10\$	0.9775
2.75	0.0099	2 604 954.48\$	98 577.93\$	25 673.37\$	11 939.37\$	12 872.82\$	85 705.11\$	0.9758
2.83	0.0094	2 493 576.00\$	97 646.83\$	23 552.68\$	11 428.89\$	12 322.42\$	85 324.41\$	0.9739
2.92	0.0098	2 384 698.91\$	96 687.82\$	23 420.58\$	10 929.87\$	11 784.39\$	84 903.43\$	0.9721
3.00	0.0095	2 276 374.90\$	95 767.94\$	21 657.17\$	10 433.38\$	11 249.09\$	84 518.86\$	0.9702

Table 5

	Moyenne	Écart-Type	Asymétrie
IO	870 785\$	6734.77	1.30
PO	7 156 512\$	2307.67	-1.07

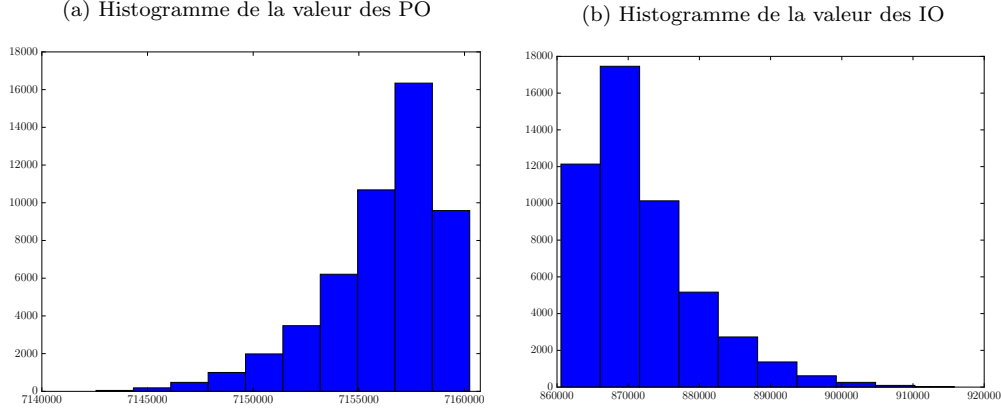


Figure 4

5 Evaluation de la durée

Pour déterminer la durée, comme il ne nous a pas semblé exister de consensus sur la façon de la calculer, nous avons procédé de la façon suivante (voir `duration2(N):mbs.py`). Tout d'abord nous avons déterminé les valeurs initiales des IO et PO. Puis, afin de simuler un choc, nous nous sommes inspirés de la méthode employée lors d'une tarification avec arbre binomial (voir [6], p. 448). Parmi toutes les trajectoires de taux court obtenues, nous n'avons retenues que celles qui tombaient à une valeur inférieure à un écart type de la moyenne et celles supérieures à la même quantité. À partir de ces taux initialement élevés ou bas, nous avons calculé la valeur des IO et des PO un mois plus tard, que nous avons comparés à la valeur initiale. Ceci nous a permis de simuler un choc sur la valeur du PO, observé au mois suivant, donc avec un effet temporel relativement limité.

En somme, l'équation suivante a été employée:

$$D = -\frac{1}{V(0)} \frac{V(1/12)_{up} - V(1/12)_{down}}{\bar{r}_{up} - \bar{r}_{down}}$$

pour les deux produits dérivés. Notons que \bar{r}_{up} et \bar{r}_{down} correspondent à la moyenne des taux supérieurs et inférieurs.

On obtient avec une telle méthode, avec une simulation de $N = 100\,000$ paramètres une durée de -1.0302 pour le IO et de 0.0316 pour le PO. Notons que ces résultats sont cohérents pour les raisons évoquées plus haut.

Notons en passant que nous avons également été tentés de faire bouger la courbe zéro coupon au grand complet, mais qu'une telle méthode est très lente à faire converger, et ce pour plusieurs raisons. D'abord, la kurtose importante de la distribution de r_t implique qu'une telle simulation peut mettre du temps à converger à une valeur suffisamment précise. Ensuite, le mouvement qu'on peut donner à la courbe est très faible, puisque celle-ci commence déjà avec des valeurs faibles. De sorte qu'un mouvement si faible peut être difficilement mesurable, notamment pour la raison évoquée ci haut.

6 Conclusion

Afin de conclure cette étude, nous allons revenir sur les principaux défis auxquels nous avons dû faire face. Premièrement, bien que nous ayons obtenu des résultats très satisfaisants concernant la modélisation des prix des caps, nos prédictions de volatilité caps sont encore porteuses d'erreur d'un degré conséquent, surtout pour les volatilités à court terme. En tentant d'améliorer la modélisation de ces volatilités de courte maturité, c'est alors la qualité des prédictions de volatilité à plus long terme qui se dégradait. Il fallut donc trouver un compromis entre la qualité de prédiction du long terme et du court terme. Deuxièmement, lorsque nous avons simulé nos trajectoires de taux court, nous avons dû faire face à un taux court qui allait chercher des valeurs trop élevées. Pour réduire ces trajectoires indésirables, nous avons dû faire une savante combinaison de poids et de bornes sur les paramètres afin d'obtenir des simulations dont la volatilité n'était ni trop faible ni trop élevée et qui étaient bornées rapidement par zéro. Troisièmement, certaines trajectoires de simulation du taux court furent temporairement négatives et cet effet indésirable n'a pas pu être éradiqué. Finalement, comme modifier complètement la courbe des taux pour déterminer la durée ne pouvait être envisagé, nous avons eu recours à une méthode de notre cru qui est inspirée de la durée calculée sur un arbre binomial. Cependant, cette méthode n'est pas à toute épreuve. Comme nous l'avons souligné, on obtient des valeurs assez faibles pour la durée du PO. Ceci s'explique possiblement par le fait que le "choc" qu'on fait subir au taux d'intérêt ne peut qu'être positif, puisqu'à une échéance d'un mois les taux ne peuvent que monter s'ils veulent suivre la courbe forward. Encore une fois, au vu de l'absence d'une méthode générale pour déterminer la durée d'un instrument dérivé d'un processus à taux court, nous croyons avoir implémenté ce qui nous paraissait le plus raisonnable.

References

- [1] D. Brigo and F. Mercurio. *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [2] M. Chernov, B. R. Dunn, and F. A. Longstaff. Macroeconomic-driven prepayment risk and the valuation of mortgage-backed securities. Technical report, National Bureau of Economic Research, 2016.
- [3] A. R. Conn, N. I. Gould, and P. L. Toint. *Trust region methods*, volume 1. Siam, 2000.
- [4] F. X. Diebold and C. Li. Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of econometrics*, 130(2):337–364, 2006.
- [5] P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, volume 53. Springer Science & Business Media, 2003.
- [6] P. Veronesi. *Fixed income securities: Valuation, risk, and risk management*. John Wiley & Sons, 2010.