Mechanik Jan Neuser

1/

a) $E_{kin} + E_{pot} = 0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \Leftrightarrow v^2 = -2gy$

$\Leftrightarrow v = \sqrt{-2yg} = \sqrt{2g(-y)}$

the length of an explicit curve is:

$dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$

$v = \frac{dl}{dt} \Leftrightarrow dl = v \cdot dt = \sqrt{2g(-y)}\,dt$

$\Rightarrow \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{2g(-y)}\,dt$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g(-y)}}\,dx = dt$

$\Leftrightarrow \int_{r_{Ax}}^{r_{Bx}} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2g(-y)}}\,dx = \int_0^T dt = T$

$\left(dL = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\cdot dx^2} = \sqrt{1+(y')^2}\,dx \right)$

b) $y(x) = -\frac{1}{2}x, \quad y'(x) = -\frac{1}{2}$

$T = \int_0^2 \sqrt{\frac{1+(-\frac{1}{2})^2}{2g\cdot\frac{1}{2}x}}\,dx = \int_0^2 \sqrt{\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{g}\cdot\frac{1}{x}}\,dx = \sqrt{\frac{5}{4\cdot g}}\cdot\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$= \sqrt{\frac{5}{4\cdot g}}\cdot\left[2\sqrt{x}\right]_0^2 = \sqrt{\frac{5}{4\cdot g}}\cdot 2\cdot\sqrt{2} = \sqrt{\frac{4\cdot 5\cdot 2}{4\cdot g}} = \sqrt{\frac{10}{g}} = \sqrt{\frac{10}{9{,}81}}$

```python
from scipy.integrate import quad
from math import cos, exp, pi, sin, sqrt
from scipy.misc import derivative


def curve (x): #Die Kurve welche die Bahn beschreibt
    return -1/2*x

def Nenner(x): #Nenner des Integrals
    return 1/sqrt(2*-(curve(x))*9.81)

def deriv (x, h=0.00000001): #differential quotient für die Ableitung (hier ensteht ein Fehler da es nicht die ableitung ist sondern nur eine annäherung)
    return curve(x+h)/h-curve(x)/h

def Zähler(x): #Zähler des integrals
    return sqrt(1+( deriv(x) )**2)

def integrator (y): #Zusammengesetzte Funktion für das Integral
    return Zähler(y)*Nenner(y)

if curve(0)==0 and curve(2)==-1: #Prüft ob die Funktion die gegebenen Vorraussetzungen erüllt
    print("Die Kurve erfüllt die Vorraussetzungen und die benötigte Zeit ist (Wert [s], Fehler[s])")
    print(quad(integrator,0,2)) #Integral von Nenner mal Zähler welches die benötigte Zeit ist
else:
    print("Die Kurve erfüllt nicht die Vorraussetzungen") #Falls die Vorraussetzungen nicht erfüllt werden bekommen wir als output einen Fehler


#f(x)=-1/2*x                                      time:(1.0096375544955325, 1.7783297057150094e-09)
#f(x)=-1*x+1/4*x**2                               time:(0.8624548063069947, 4.309375745137345e-09)
#f(x)=(1/(x+1)-1)*3/2                             time:(0.8355438465062506, 1.1712219194492945e-08)
#f(x)=-sin(1/4*pi*x)                              time:(0.8924637063678499, 8.189575684269812e-10)
#f(x)=(exp(-x+1)-exp(1))*exp(1)/(-1 + exp(2))    time:(0.8527180257272348, 4.494299155055614e-09)
#f(x)=-sqrt(1/2*x)                                time:(0.8248173097914494, 1.464707588549885e-08)
```

Zudem erhalten wir für eine Gerade den Wert: 1.0096375544… was sehr gut mit dem Theoretisch berechneten Wert übereinstimmt (circa. 1.00963755469), die Abweichungen ergeben sich durch die verschieden Abschätzungen, die in dem Programm vorgenommen wurden (Differenzialquotienten und Integral).

Wir erkennen, dass die Funktion: f(x)=-(1/2*x)^1/2 die schnellste Bahnkurve hat, mit einer Zeit von knapp 0.825s

Unter dem Code sind die Werte von einigen anderen Kurven aufgelistet, welche eine kleinere Zeit besitzen.

2)

a) $r(t) = \rho(t)\cdot e_\rho(t)$

$e_\rho = (\cos(\theta), \sin\theta) = (x, y)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \rho(t)\cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$v_r = \frac{d}{dt} r(t) = \frac{d}{dt}\rho(t)\cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot\rho\cos\theta - \rho\sin(\theta)\cdot\dot\theta \\ \dot\rho\sin\theta + \rho\cos(\theta)\cdot\dot\theta \end{pmatrix}$$

$$a_r = \frac{d}{dt} r(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \dot\rho\cos\theta - \rho\sin(\theta)\cdot\dot\theta \\ \dot\rho\sin\theta + \rho\cos(\theta)\cdot\dot\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \ddot\rho\cos\theta - \dot\rho\sin(\theta)\dot\theta - \rho\cdot\ddot\theta\sin(\theta) - \rho\cos(\theta)(\dot\theta)^2 \\ \ddot\rho\sin\theta + \dot\rho\cos(\theta)\dot\theta - \rho\cdot\sin(\theta)(\dot\theta)^2 + \rho\cos(\theta)\cdot(\ddot\theta) \end{pmatrix}$$

b) $\vec{e}_r = (\sin\Theta\cos\phi, \sin\Theta\sin\phi, \cos\Theta)$

$\vec{e}_\Theta = (\cos\Theta\cos\phi, \cos\Theta\sin\phi, -\sin\Theta)$

$\vec{e}_\phi = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$

$r(t) = r(t)e_r(t)$

$$v_r = \frac{d r(t)}{dt} = \dot r\cdot\begin{pmatrix} \sin\Theta\cos\phi \\ \sin\Theta\sin\phi \\ \cos\Theta \end{pmatrix} + r\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\Theta)\cdot\dot\Theta\cos\phi - \sin(\Theta)\sin(\phi)\cdot\dot\phi \\ \cos(\Theta)\dot\Theta\sin(\phi) + \sin(\Theta)\cdot\cos\phi\cdot\dot\phi \\ -\sin(\Theta)\cdot\dot\Theta \end{pmatrix}}_{\dot e_r}$$

$$a_r = \frac{d^2}{dt^2}r(t) = \frac{d}{dt}v_r = \ddot r\cdot e_r + \dot r\cdot\dot e_r + \dot r\cdot\dot e_r + r\cdot\ddot e$$

Seite 4

$$\ddot{e} = \begin{pmatrix} \cos(\Theta)\,\ddot{\Theta}\cos\phi - \cos(\Theta)\cdot\Theta\overbrace{\phi\,\sin(\phi) - \sin(\Theta)\sin(\phi)\cdot\ddot{\phi}}^{\sin(\Theta)(\dot{\phi})^2\cos\phi} - \sin(\Theta)\cos(\phi)\cdot(\dot{\phi})^2 - \cos\Theta\sin\phi\,\dot{\phi} \\ \cos(\Theta)\,\ddot{\Theta}\sin\phi + \cos(\Theta)\,\dot{\Theta}\,\dot{\phi}\cos\phi - \sin(\Theta)(\dot{\Theta})^2\sin(\phi) - \sin\Theta\sin\phi\,(\dot{\phi})^2 + \sin\Theta\cos(\phi)\,\ddot{\phi} + \cos\Theta\cos(\phi)\,\dot{\phi}\,\dot{\Theta} \\ -\cos(\Theta)\cdot(\dot{\Theta})^2 - \sin(\Theta)\cdot(\ddot{\Theta}) \end{pmatrix}$$