Mechanik Jan Neuser Blatt 4

1/

a) $E = m\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2mr^2} + mgr$, $E = const.$

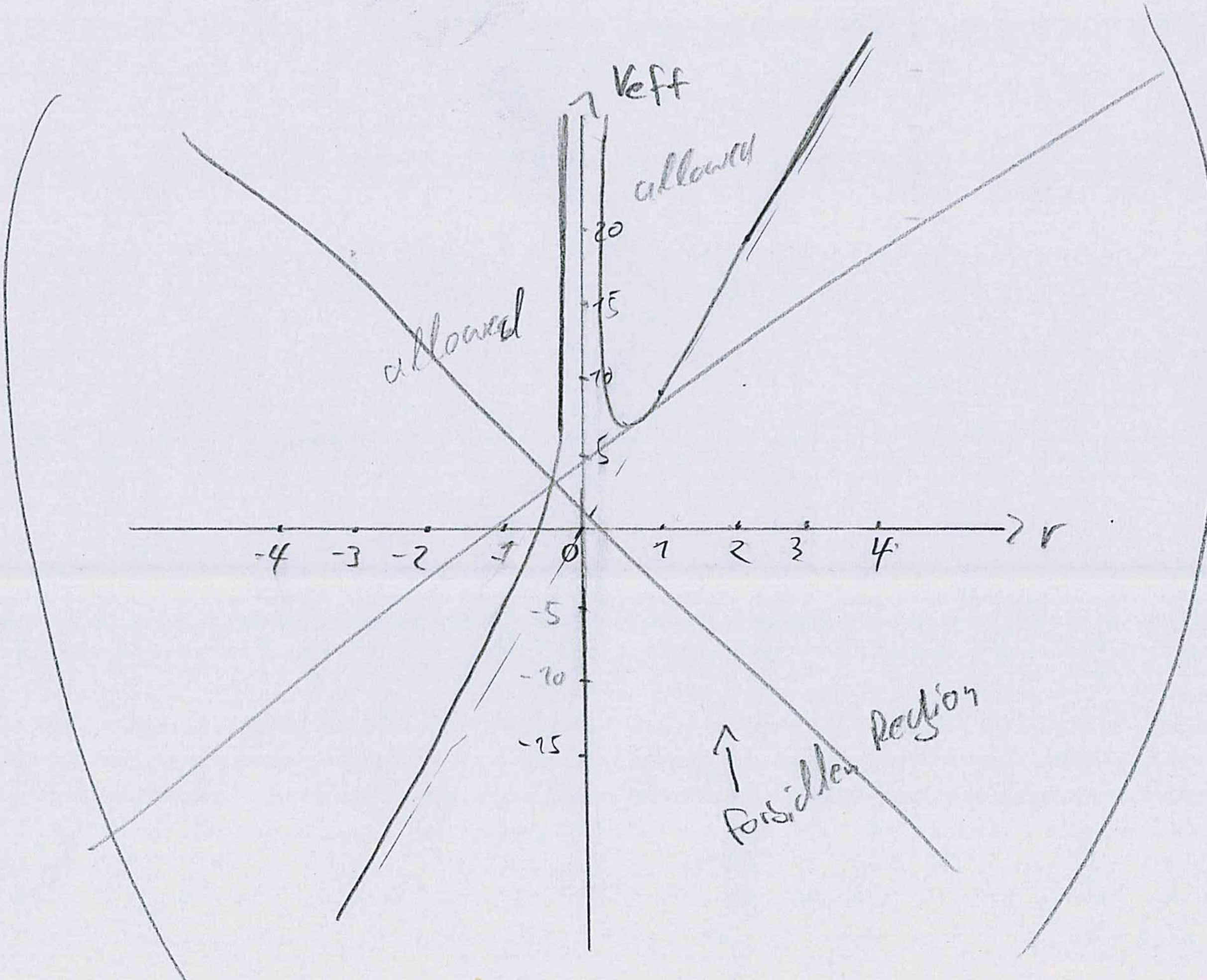
$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(E - \frac{l_z^2}{2mr^2} - mgr\right) \cdot \frac{1}{m}} = \frac{dr}{dt}$$

$$\Leftrightarrow t + C = \int \left(\sqrt{\left(E - \frac{l_z^2}{2mr^2} - mgr\right) \cdot \frac{1}{m}}\right)^{-1} dr$$

b) $V_{eff} = \frac{l_z^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{l_z^2}{2mr^2} + mgr$

(aus der Vorlesung)

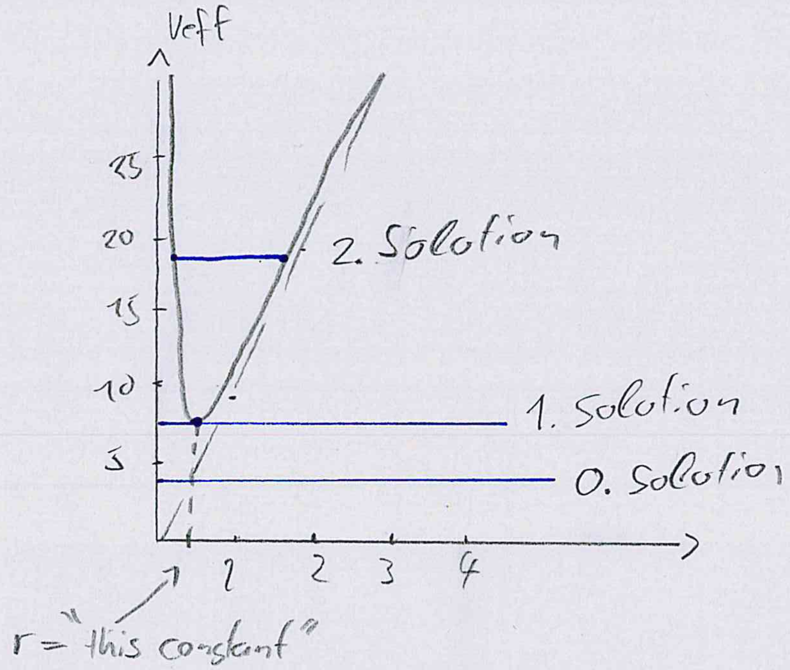
plot mit $m=1$ $l_z=1$



$$E = V_{eff} \Leftrightarrow m \cdot \dot{r}^2 + l_z^2/(2mr^2) + mgr = \frac{l_z^2}{2mr^2} + mgr$$

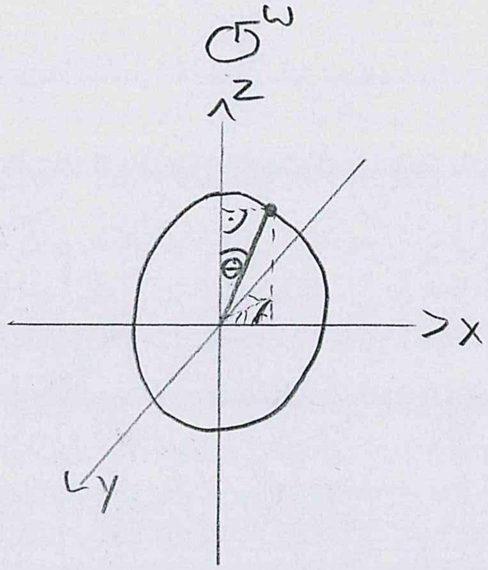
$$\Leftrightarrow m\dot{r}^2 = 0 \Leftrightarrow \dot{r}^2 = 0 \Leftrightarrow \dot{r} = 0$$

this means that r = const



2)

a)



$(x, y, z) = (\sin(\theta)\cdot r \cdot \quad , \quad , \cos(\theta)\cdot r$

$(\sin(\theta)\cdot R \cdot \cdot \cos(\omega t), \sin(\theta)\cdot R \cdot \sin(\omega t), \cos(\theta)\cdot R)$

$V = m\cdot g \cdot z = m \cdot g \cdot R \cdot \cos(\theta)$

$T = \frac{m}{2} (v)^2 = \frac{m}{2}\cdot(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

$= \frac{m}{2}\Big((\dot\theta \cos(\theta)\cdot R\cdot\cos(\omega t) - \sin(\theta)\cdot R\cdot\omega\cdot\sin(\omega t))^2$

$+ (\dot\theta\cos(\theta) R\cdot\sin(\omega t) + \sin(\theta)\cdot R\cdot\omega\cdot\cos(\omega t))^2 (-\dot\theta\sin(\theta)\cdot R)^2 \Big)$

$= \frac{m}{2}(\dot\theta\cos\theta\cdot R\cdot\cos(\omega t))^2 - 2\dot\theta\omega R^2\cos(\theta)\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\omega t)\cdot\sin(\omega t)$

$+ (\sin(\theta)\cdot R\cdot\omega\cdot\sin(\omega t))^2$

$+ (\dot\theta\cos(\theta)\cdot R\cdot\sin(\omega t))^2 + 2\dot\theta\cdot\omega\cdot R^2\cos(\theta)\cdot\sin(\theta)\sin(\omega t)\cos(\omega t)$

$+ (\sin(\theta)\cdot R\cdot\omega\cdot\cos(\omega t))^2 + (-\dot\theta\sin(\theta)\cdot R)^2$

$= \frac{m}{2}(\dot\theta\cdot R\cdot\cos(\theta))^2\cdot(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) + (R\cdot\omega\cdot\sin(\theta))^2\cdot(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))$

$+ (-\dot\theta\sin(\theta)\cdot R)^2$

$= \frac{m}{2}(\dot\theta^2 R^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) + R^2\omega^2\cdot\sin^2(\theta)$

$= \frac{m}{2}\dot\theta^2\cdot R^2 + \frac{m}{2}R^2\omega^2\sin^2(\theta)$

folglich:

$$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{\theta}^2 R^2 + \frac{m}{2} R^2\omega^2\sin^2(\theta) - mgR\cos(\theta)$$

b)

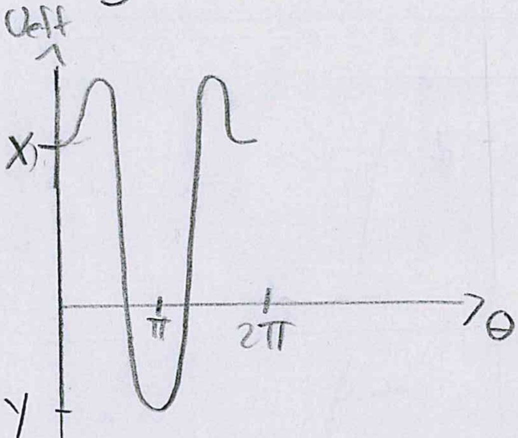
$$U_{eff} = \frac{m}{2} R^2\omega^2\sin^2(\theta) + m\cdot g\cdot R\cos(\theta)$$

Da $E = T + V = \frac{m}{2}\dot{\theta}^2 R^2 + \frac{m}{2} R^2\omega^2\sin^2(\theta) + mgR\cos(\theta)$

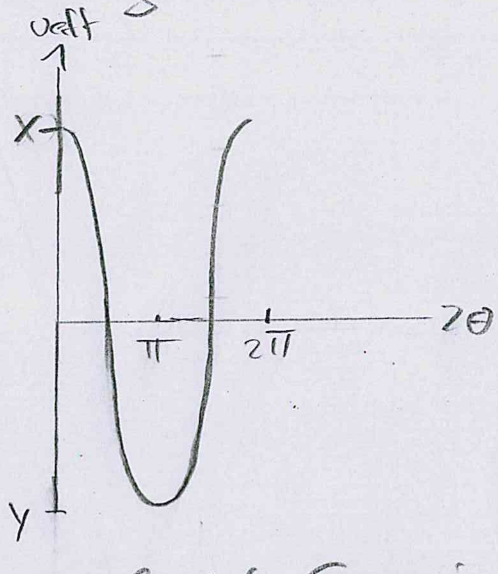
$$= \frac{m}{2}\dot{\theta}^2 R^2 + U_{eff}$$

$$\Leftrightarrow U_{eff} = \frac{m}{2} R^2\omega^2\sin^2(\theta) + mgR\cos(\theta) := U(\theta)$$

$\frac{R\omega^2}{g} > 1$:



$\frac{R\omega^2}{g} < 1$



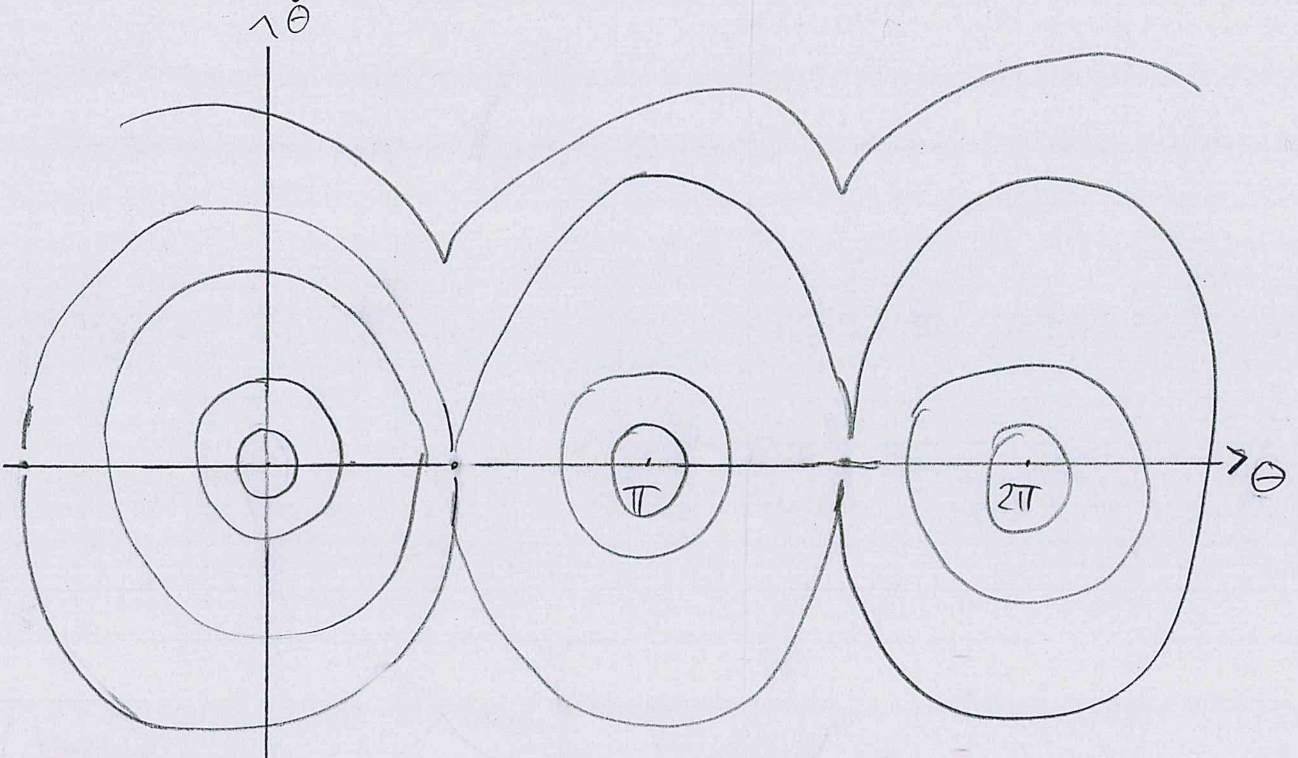
Für $\frac{R\omega^2}{g} > 1$ gibt es höhere erlaubte Energien, als für $\frac{R\omega^2}{g} < 1$.

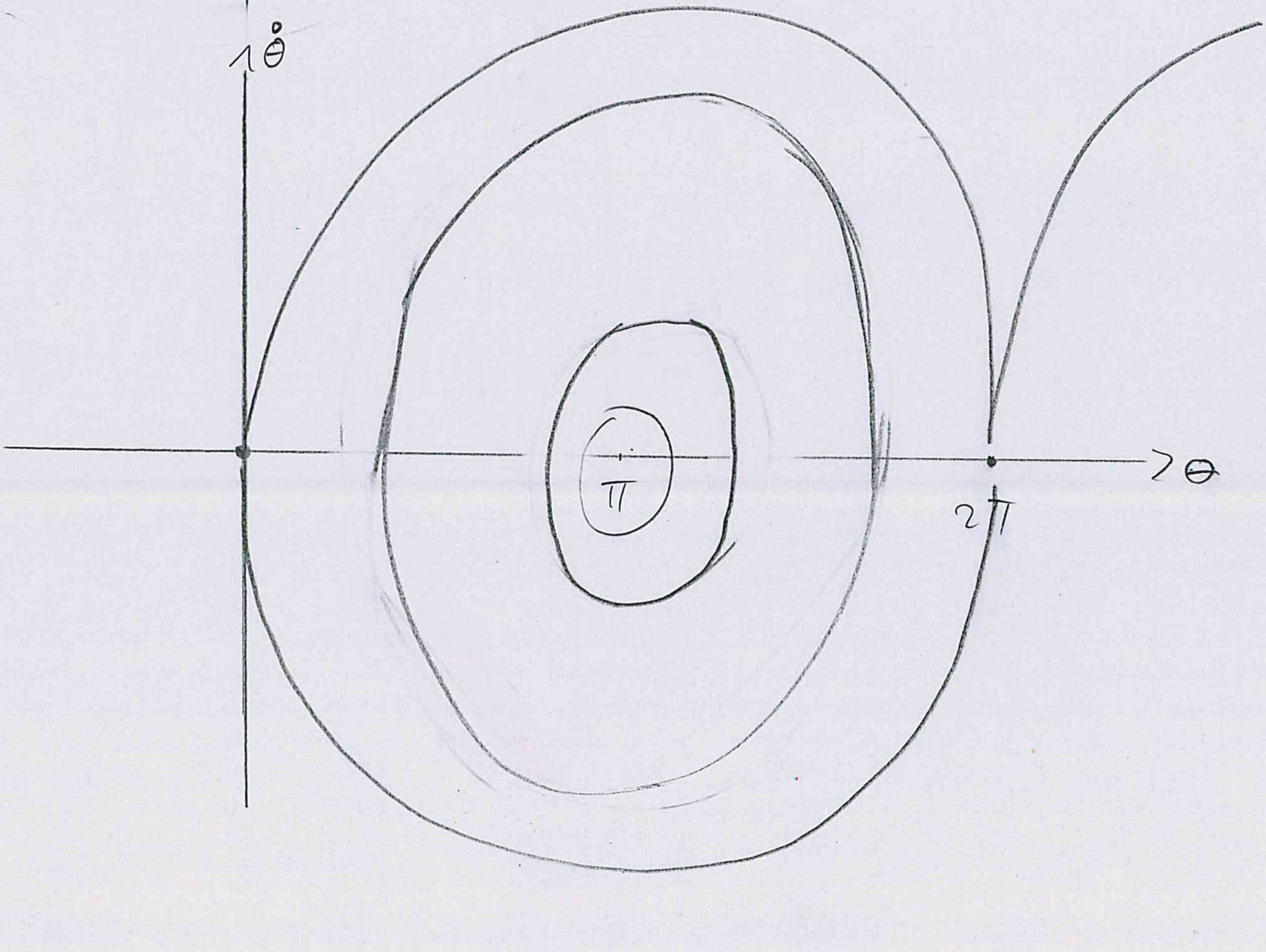
Für $\frac{R\omega^2}{g} > 1$ gibt es zwei instabile Gleichgewichte und zwei stabile Ggw. für $\frac{R\omega^2}{g} < 1$ gibt es jeweils nur eines.

Das stabile ist immer bei $\theta = \pi$

2/

c) $\frac{R\omega^2}{g} > 1$:





3/

a) $V(x,y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$-\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{-2x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{-2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}} = m \cdot \ddot{x}$$

$$\frac{-y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = m \cdot \ddot{y}$$

b) $V(x,y) = \ln(r) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

$$-\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\ \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2} (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-x}{x^2+y^2} = m \ddot{x}$$

$$\frac{-y}{x^2+y^2} = m \ddot{y}$$

c) $V(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2$

$$-\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} -x \\ -2y \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -x = m \cdot \ddot{x}$$
$$-2y = m \cdot \ddot{y}$$

d) $$V(x,y) = -\Big(1 + \underbrace{\exp\big(10(\sin^2(x)\sin^2(y) - \tfrac{1}{2})\big)}_{:= A(x,y)}\Big)^{-1}$$

$$-\vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \big(1+\exp(10(\sin^2(x)\sin^2(y)-\frac{1}{2}))\big)^{-2} \cdot \big(20 \cdot \sin(x) \cdot \sin^2(y) \cdot \cos(x)\big) \cdot A(x,y) \\ \big(1+\exp(10(\sin^2(x)\sin^2(y)-\frac{1}{2}))\big)^{-2} \cdot \big(20 \sin^2(x) \cdot \sin(y) \cdot \cos(y)\big) \end{pmatrix}$$

$$= m \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}$$

3) a) zu den Plots:

da $\frac{-1}{r}$ ein Zentralpotential ist bewegt sich unser Teilchen immer in einer Ebene. Wir haben für die ersten beiden Plots elipsen und für den letzten eine gerade

b) Der erste plot ist nicht geschlossen (der 3. auch) und der zweite ist wieder eine ellipse. $\ln(r)$ ist zwar kein zentralpotential, aber anscheinend sind die Anfangsbedingungen Richtig gewählt.

c) Die linien schließen sich nicht, da die startbedingungen nicht Richtig gewahlt worden. (und es kein Zentralpotential ist)