Jan Neuser Serie 1

Mechanik

1)

$$z = a(x^2+y^2) = a\cdot\left(r^2\cdot\cos^2(\varphi) + r^2\cdot\sin^2(\varphi)\right) = a\cdot r^2$$

a) $(x,y,z) = r\cdot(\cos(\varphi), \sin(\varphi), a\cdot r)$

wir wissen: $F_x = m\cdot\ddot{x}$

$F_y = m\cdot\ddot{y}$

$F_z = m\cdot\ddot{z}$

aber wir haben Zwangskräfte in x, y und z-Richtung folglich:

$m\cdot\ddot{x} = Z_x$

$m\cdot\ddot{y} = Z_y$

$m\cdot\ddot{z} = -mg + Z_z$ (-mg = F_g das konstante Gravitationsfeld)

Für die Ableitungen erhalten wir:

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin(\varphi) - r\ddot{\varphi}\sin(\varphi) - r(\dot{\varphi})^2\cos(\varphi)$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + \ddot{\varphi}\, r\cos\varphi - r(\dot{\varphi})^2\sin\varphi$$

$$\ddot{z} = 2ar\ddot{r} + 2a\cdot(\dot{r})^2$$

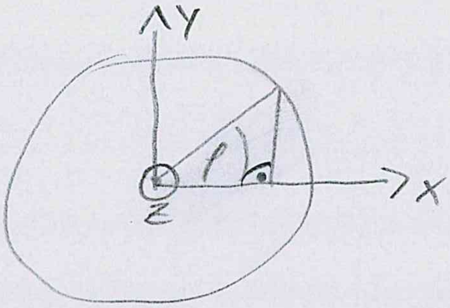
also:

I) $m\cdot\left(\ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r(\dot{\varphi})^2\cos\varphi\right) = Z_x$

II) $m\cdot\left(\ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + \ddot{\varphi}r\cos\varphi - r(\dot{\varphi})^2\sin\varphi\right) = Z_y$

III) $m\cdot\left(2ar\ddot{r} + 2a(\dot{r})^2\right) = -mg + Z_z$

wir benutzen, dass die Kraft senkrecht auf der Oberfläche ist:



also: $\sin(\varphi) = \dfrac{Z_y}{Z_{xy}}$

$\cos(\varphi) = \dfrac{Z_x}{Z_{xy}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(\varphi)}{Z_y} = \frac{\cos(\varphi)}{Z_x}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\varphi)\cdot Z_x = \cos(\varphi)\cdot Z_y$$

mit I und II erhält man so:

$$\sin(\varphi)\cdot\left(m\cdot(\ddot r\cos\varphi - 2\dot r\dot\varphi\sin\varphi - r\ddot\varphi\sin\varphi - r(\dot\varphi)^2\cos\varphi\right)$$

$$= \cos(\varphi)\cdot\left(m\cdot(\ddot r\sin\varphi + 2\dot r\dot\varphi\cos\varphi + r\ddot\varphi\cos\varphi - r(\dot\varphi)^2\sin\varphi\right)$$

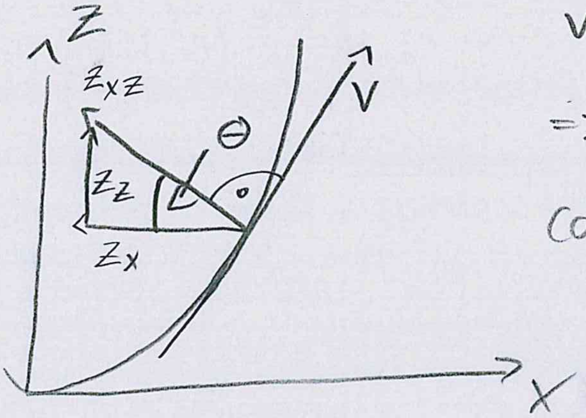
$$\Leftrightarrow \ddot r\sin\varphi\cos\varphi - 2\dot r\dot\varphi\sin^2\varphi - r\ddot\varphi\sin^2\varphi - 2(\dot\varphi)^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$= \ddot r\sin\varphi\cos\varphi + 2\dot r\dot\varphi\cos^2\varphi + r\ddot\varphi\cos^2\varphi - r(\dot\varphi)^2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\Leftrightarrow 0 = (2r\dot\varphi)\cdot\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{=1} + (r\ddot\varphi)\underbrace{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}_{=1}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2r\dot\varphi + r\ddot\varphi$$

Um die Zweite DGL zu kriegen benutzen wir:



(Ableitung der Fläche nach r)

$\vec{v} = (\cos(\varphi), 2ar) = (1, 2ar)$

$\Rightarrow \vec{Z}_{x_Z} = \left(-1, \frac{1}{2ar}\right) \cdot \xi$

(da orthogonal auf $\vec{v}$)

und da wir nur ein x-Richtung haben gilt:

$\varphi = 0°$

$\Rightarrow Z_x = m(\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2)$

$Z_Z = m \cdot (2a\ddot{r}r + 2a(\dot{r})^2 + g)$

$\Rightarrow \xi(-1) = m \cdot (\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2)$

$\xi \cdot \frac{1}{2ar} = m \cdot (2a\ddot{r}r + 2a(\dot{r})^2 + g)$

$\Rightarrow \xi \cdot 1 = -m(\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2)$

$\xi \cdot 1 = m \cdot (2ar)(2a\ddot{r}r + 2a(\dot{r})^2 + g)$

$\Rightarrow -\ddot{r} + r(\dot{\varphi})^2 = 4a^2r^2\ddot{r} + 4a^2r(\dot{r})^2 + 2arg$

$\Leftrightarrow 0 = \ddot{r} + 4a^2r^2\ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2 + 4a^2r(\dot{r})^2 + 2arg$

$= \ddot{r} \cdot (1 + 4a^2r^2) + 4a^2r(\dot{r})^2 - r(\dot{\varphi})^2 + 2arg$

was die zweite Gleichung ist

1)

c) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\underbrace{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}_{=\dot{x}^2+\dot{y}^2}+\underbrace{(2r\dot{r}a)^2}_{\dot{z}^2})$$

$$V = m\cdot g\cdot z = m\cdot g\cdot r^2 a$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+(2r\dot{r}a)^2) - mgr^2a$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{r}}\right) = \frac{d}{dt}\left(m\dot{r}+\frac{1}{2}m2(2r\dot{r}a)\cdot 2ra\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(m\dot{r}+4mr^2a^2\cdot\dot{r}\right) = m\ddot{r}+4m\ddot{r}a^2r^2+8mra^2(\dot{r})^2$$

$$\frac{dL}{dr} = m r(\dot{\varphi})^2 + m(2r\dot{r}a)\cdot 2\dot{r}a - 2mgra$$

$$= mr(\dot{\varphi})^2+4mr(\dot{r})^2\cdot a^2-2mg\cdot ra \overset{!}{=} \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{r}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ddot{r}+4\ddot{r}a^2r^2+8ra^2(\dot{r})^2 = r(\dot{\varphi})^2+4r(\dot{r})^2\cdot a^2-2gra$$

$$\Leftrightarrow \ddot{r}+4\ddot{r}a^2r^2+8ra^2(\dot{r})^2-4ra^2(\dot{r})^2-r(\dot{\varphi})^2+2gra=0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{r}\cdot(1+4a^2r^2)+4ra^2(\dot{r})^2-r(\dot{\varphi})^2+2gra=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\left(2m\dot{\varphi}\cdot r^2\right) = 2m\ddot{\varphi}r^2+2m\dot{\varphi}2r\dot{r} = 2m\ddot{\varphi}r^2+4m\dot{\varphi}r\dot{r}$$

$$\frac{dL}{d\varphi} = 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = 2mr(\ddot{\varphi}r+2\dot{\varphi}\dot{r}) = 0 \Leftrightarrow \ddot{\varphi}r+2\dot{\varphi}\dot{r}=0$$

$(r\neq 0,\ m\neq 0)$

2)

a) $\frac{d}{dt} r^2 \dot{\varphi} = 2 r \dot{r} \dot{\varphi} + r^2 \ddot{\varphi} = r \cdot \underbrace{(2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi})}_{=0} = 0$

folglich muss $\frac{d}{dt} r^2 \dot{\varphi} = 0 \Rightarrow r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$

b) $r^2 \dot{\varphi} = \frac{l_z}{m} \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \frac{l_z}{m r^2}$

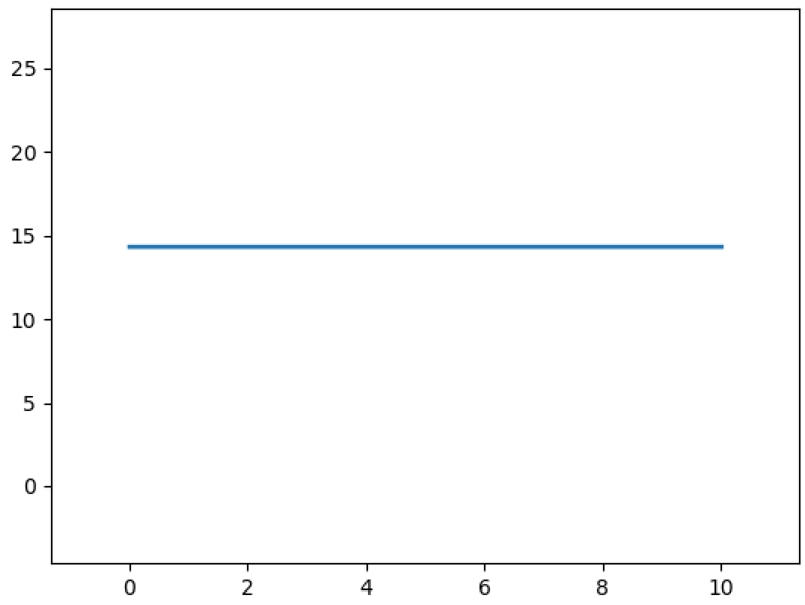
weswegen gilt: $2 \ddot{r} - r \frac{l_z^2}{(m r^2)^2} + g = 0$

$\Leftrightarrow 2 \ddot{r} - \frac{l_z^2}{m^2 r^3} + g = 0$

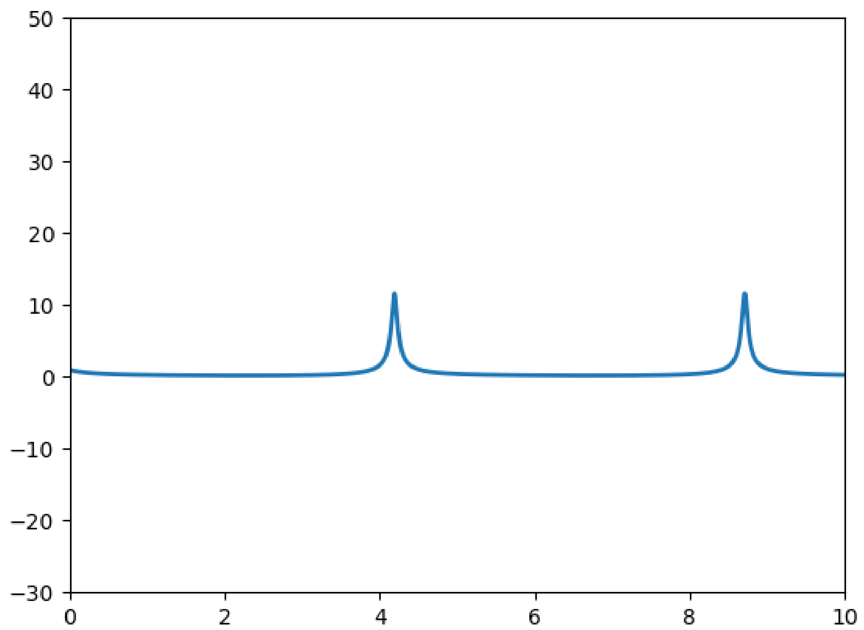
c) wir wissen $\dot{\varphi} = \frac{l_z}{m r^2}$, wenn wir diese Gleichung in unser Programm hinzufügen gibt uns das eine Liste für φ und somit können wir r gegen phi plotten

2b) In unserem Fall können wir einfach zeigen, dass die Energie erhalten bleibt, da wir einfach die Energie in Abhängigkeit der zeit plotten können. Erhalten wir eine konstante Funktion so bleibt die Energie konstant, was bei uns der Fall war (ein beispielhafter Plot, welchen wir bekommen haben):

Optional zeigt unser Programm auch für jede Rechnung die Energie, welche immer sehr konstant war (mit sehr kleinen Abweichungen, welche durch die Approximationen erklärt werden können)



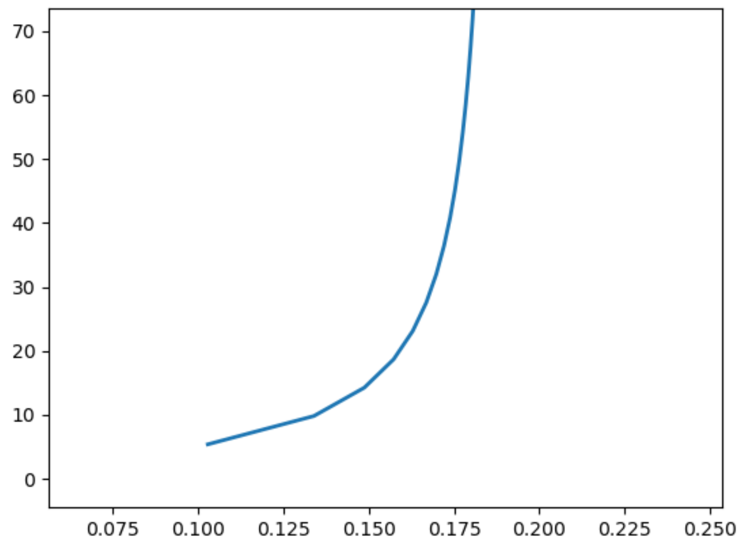
2c) für(r,v,lz,m)=(1,-10,300,100) erhalten wir den folgenden Plot:



Die Kugel scheint hoch und wider runter zu rollen. Nur ist hier das Problem, dass ein Winkel von 2*π dasselbe ist wie 0, was mein Programm nicht berücksichtigt, weshalb der echte Plot höchstwahrscheinlich anders aussieht.

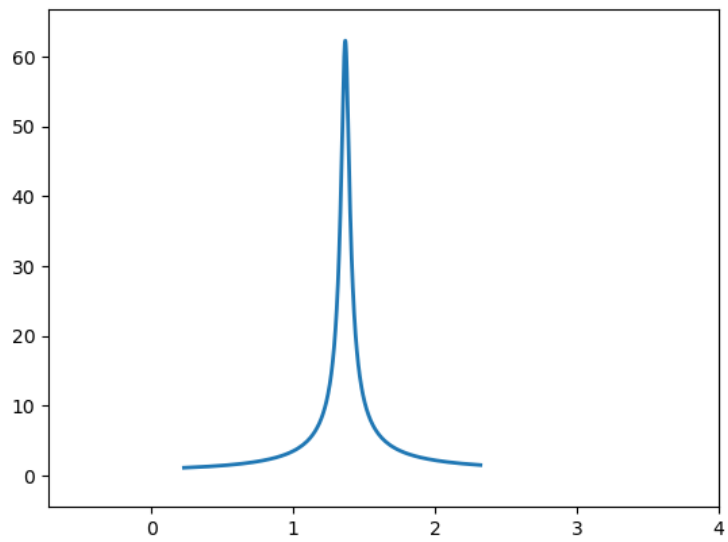
Welcher leider nicht im Ansatz einem Kreis ähnelt.

Für (r,v,lz,m)=(1,-10,300,1) erhalten wir den folgenden Plot:



Welcher danach schnell seht schnell nach oben geht, aber wenigstens sieht die untere kurve ein wenig aus wie ein Viertel eines Kreises. Dies bedeutet, dass die Kugel wohl durch den Nullpunkt rollt und auf der andren Seite die Fläche wieder hochrollt, was die Spitze wohl signalisiert. Die gewählten 10 Sekunden Simulation Dauer sind wohl zu kurz um zu sehen wie sie wieder runterkommt.

Für (r,v,lz,m)=(1,10,300,10) erhalten wir folgende Plots:



Hier scheint es so wie zuvor nur reichen nun die 10 Sekunden, damit die Kugel wieder einmal herunterkommt.

Ich habe viele verschiedene Konfigurationen versucht, jedoch hab ich es nicht geschafft, dass es aussieht wie ein Kreis, ich nehme an, dass es eine Startgeschindigkeit brauch die in die (x, y) Richtung zeigt, aber ich weiß nicht wie ich das in mein Programm mit einschreiben kann und ich habe leider keine Zeit mehr das zu lernen (natürlich müsste man dem Programm auch klar machen, dass $2*\pi$ dasselbe ist wie 0). Was natürlich auch sein könnte ist, dass mein Programm einen Fehler hat, mir ist aufgefallen, dass es einem x wert nicht mehr als einen y Wert zuordnet, was verhindert einen kreis zu zeichnen, ich nehme an es liegt daran, dass mein Programm die phi werte pro rechen gang einfach hochaddiert und nicht realisiert dass es ab einem bestimmten Wert wieder von vorne beginnt, was verhindert für einen x wert mehrere y werte zu bekommen.

3)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d}{dt}F(q,t)\right)\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d}{dt}F(q,t)\right)\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d}{dt}F(q,t)\right)\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d}{dt}F(q,t)\right)$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{d}{dt}F(q,t)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d}{dt}F(q,t)\right)$$

wir wissen: $\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial r_i}{\partial q_i}$ (siehe Vorlesung)

und $\frac{d}{dt}F(q,t) = v_i$ also gilt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(q,t)}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\cdot\left(\frac{d}{dt}\left(F(q,t)\right)\right)$$

also gilt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{d}{dt}\left(F(q,t)\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{d}{dt}F(q,t)\right) = 0\right.$$

also erfüllt $\tilde{L}$ die Langrangian-Gleichung

$$F_x = -\left(\frac{\partial}{\partial x} q(\phi - v\cdot A)\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} q(\phi - v\cdot A)\right)$$

$$= -\left(q\cdot\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - v_x\cdot\frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} - v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - \frac{d}{dt}A_x\cdot q\right.$$

$$= q\cdot\left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - q\cdot\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{dA_x}{dt}\right)$$

$$\nabla\times A = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix},$$

betrachte nur x-komponente:

$$(v\times B)_x = (v\times(\nabla\times A))_x = v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + v_z\cdot\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$

Aus der Vorlesung wissen wir:

$$\frac{d A_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \sum_j v_j\frac{\partial A_x}{\partial x_j} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}$$

also gilt:

$$F_x = q\cdot\left(v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial A_z}{\partial x}\right) - q\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$

$$= q\cdot\Big(\underbrace{-\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}}_{=E_x} + \underbrace{v_x\cdot\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial x}\right)}_{=0} + \underbrace{v_y\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) + v_z\cdot\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)}_{(v\times B)_x}\Big)$$

$= q\cdot(E_x + (v\times B)_x)$, das funktioniert für alle koordinaten und man erhält so das Ergebnis