

Descripción de elementos.

Antes de analizar un circuito RLC empezaremos por describir cada uno de los elementos involucrados, es decir resistores (o resistencias), capacitores (o condensadores) e inductores (o bobinas).

Resistor o resistencia

Este componente será un material omhnico, es decir, que cumple con la ley de Ohm, esto implica que al aplicar que la diferencia de potencia V_R requerida para que una corriente I atraviese el resistor es igual al producto de dicha corriente y la resistencia R del elemento. esto se puede expresar más formalmente como (1).

$$V_R = RI \quad (1)$$

En un circuito, las resistencias se representan graficamente en diagramas de circuitos mediante el simbolo mostrado en la figura 1.



Figura 1: simbolo internacional del resistor

Capacitor

El capacitor es un dispositivo que almacena carga eléctrica cuando se aplica una diferencia de potencial V_C entre sus extremos, la carga almacenada q es proporcional al la diferencia de potencial aplicada, así como tambien al valor de la capacitancia C , la que podría definirse como la capacidad de almacenamiento de carga por unidad de potencial aplicada. Esto se expresa formalmente por medio de (2).

$$q = V_C C \quad (2)$$

Vale la pena resaltar que debido a que la intensidad de corriente que atraviesa un capacitor es equivalente a la derivada temporal de la carga almacenada, tambien podemos escribir (3).

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dV_C}{dt} \quad (3)$$

El simbolo utilizado para representar gráficamente estos dispositivos en un circuito es 2.

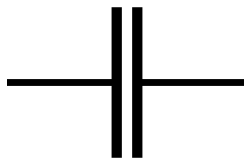


Figura 2: simbolo internacional del capacitor

Reactancia

El capacitor es un elemento reactivo, su reactancia puede expresarse como (4). Donde ω es la velocidad angular de asociada a la corriente que atraviesa el capacitor.

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (4)$$

Inductor

El inductor es, a rasgos generales, una bobina. Cuando una corriente electrica atraviesa el capacitor se genera un campo magnético que autoinduce al mismo dispositivo, en consecuencia, el capacitor es una elmento que opone resistencia al cambio en la intensidad de corriente. Matemáticamente podemos expresalor como (5).

$$V_L = L \frac{dI}{dt} \quad (5)$$

El inductor se representa gráficamente mediante un símbolo que asemeja un resorte o varias espiras, algunos de estos simbolos usuales son 3.

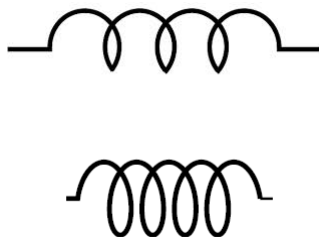


Figura 3: simbolos usuales para el inductor.

Reactancia

Los inducores, en principio, no ponen resistencia, pero así como los capacitores, los inductores tambien son elementos reactivos. La reactancia inductiva es decrita por 6.

$$X_C = \omega L \quad (6)$$

Circuito RLC en serie

En primer lugar, analizaremos el caso correspondiente a un circuito RLC donde todos los elementos (resistencia, capacitor e inductor) se encuentran en serie, tal como en la figura 4.

Mediante la ley de tensiones de Kirchhoff aplicada sobre el circuito de la figura 4 obtenemos la expresión (7).

$$V(t) = V_R + V_C + V_L \quad (7)$$

Podemos substituir (1) y (5) en (7) y obtenemos (8).

$$V(t) = RI + V_C + L \frac{dI}{dt} \quad (8)$$

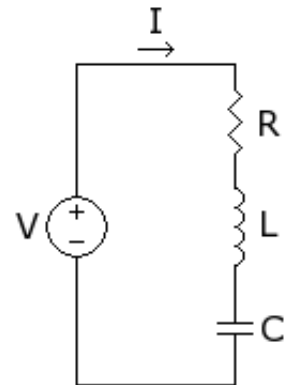


Figura 4: Circuito RLC en serie.

Finalmente, como conocemos una expresion para la intensidad de corriente como función del voltaje V_C , se puede reescribir (8) como (9).

$$V(t) = V_C + RC \frac{dV_C}{dt} + LC \frac{d^2V_C}{dt^2} \quad (9)$$

Caso de estudio

Se propone como caso de estudio un circuito tal cual la figura 4, donde el voltaje $V(t)$ es una función escalón, tal que sea nulo antes de $t = 0$, y que valga 2 en $t \in [0, \infty)$. Lo anterior queda planteado más formalmente como (10). Tambien consideraremos, por mera conveniencia, $R = 1\Omega$, $C = 1F$ y $L = 1H$, todas unidades en el sistema internacional, así que a partir de aquí podríamos obviar las indicaciones de unidades salvo para dar resultados.

$$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Cuando $t < 0$

Si analizamos el circuito con $V(t) = 0$, y asumiento que el circuito ha pasado tanto tiempo en estas condiciones que alcanzó el regimen estacionario, entonces $\frac{dI}{dt} = 0$. Así que escribimos

$$V(t) = RI + V_C + L \frac{dI}{dt} = RI + V_C + L(0) = 0 \longrightarrow V_C = -RI \quad (11)$$

Como $\frac{dI}{dt} = 0$ el valor de I debe ser constante, y según (11) tambien debería serlo V_C . El condensador no puede mantener un voltaje constante mientras se descarga (2), por lo que la corriente I debe ser nula, y con ello tambien el voltaje V_C .

Cuando $t \geq 0$

La situación descrita por (10) implica que $V_C = 0 \forall t \leq 0$, por lo que el capacitor ha de estar descargado ($V_C = 0$) en este intervalo. Que V_C sea constante para $t < 0$ implica, como dicta (3), que $I = 0$ para el mismo intervalo. La expresión (5) exige que I sea una función continua respecto al tiempo (de lo contrario V_L no sería finito), por lo que puede asegurarse que $I_{t=0} = 0$.

Así pues, substituyendo los valores de $R = 1$, $L = 1$ y $C = 1$, se puede escribir la EDO del problema, a partir de la expresión (9) como:

$$V(t) = V_C + RC \frac{dV_C}{dt} + LC \frac{d^2 V_C}{dt^2} = V_C + (1)(1) \frac{dV_C}{dt} + (1)(1) \frac{d^2 V_C}{dt^2}$$

De manera que la EDO que rige la dinámica del circuito es (12)

$$V_C + \frac{dV_C}{dt} + \frac{d^2 V_C}{dt^2} - V(t) = 0 \quad (12)$$

Como conocemos tanto (9) como las condiciones iniciales, podemos finalmente plantear el PVI (13). Nótese que $V(t) = 2 \forall t \geq 0$, por eso no aparece en (13) sino que se substituye por su valor numérico.

$$\begin{cases} V_C + \frac{dV_C}{dt} + \frac{d^2 V_C}{dt^2} - 2 = 0 \\ V_C(0) = 0 \\ \frac{dV_C}{dt}(0) = 0 \end{cases} \quad \forall t \geq 0 \quad (13)$$

Para resolver este problema nos apoyaremos del uso de la transformada de Laplace. El objetivo es determinar I , pero para ello será necesario el cálculo de V_C a partir del PVI (13).

Solución analítica

Se calcula la transformada de Laplace de la EDO correspondiente al PVI.

$$L\{V_C + \frac{dV_C}{dt} + \frac{d^2 V_C}{dt^2} - 2\} = 0$$

$$L\{V_C\} - V_C(0) + sL\{V_C\} - sV_C(0) - \frac{dV_C}{dt}(0) + s^2 L\{V_C\} - 2/s = 0$$

Simplificando lo anterior al considerar $V_C(0) = 0$ y $\frac{dV_C}{dt}(0) = 0$, como plantea (13).

$$(1 + s + s^2)L\{V_C\} = \frac{2}{s} \longrightarrow L\{V_C\} = \frac{2}{s(1+s+s^2)} \quad (14)$$

Vale la pena estudiar los polos de la expresión obtenida en (14), para esto buscamos las raíces de $s(1 + s + s^2)$. La primera de las raíces (trivial) es $s_1 = 0$, las otras se obtienen a partir de $(1 + s + s^2)$.

$$1 + s + s^2 \longrightarrow a = 1, b = 1, c = 1$$

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \rightarrow s = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$s_1 = 0 \quad s_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad s_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (15)$$

Como vemos en (15), se tiene un polo en el origen y dos polos complejos con parte real negativa, por lo que el sistema es subamortiguado.

Al aplicar la transformada inversa de Laplace sobre (14) se obtiene como resultado (16).

$$V_C(t) = 2 - 2e^{-t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}t} e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \quad (16)$$

Derivando V_C obtenemos una expresión para la intensidad de corriente (17). Esto es posible debido a (3) con $C = 1$.

$$I(t) = \frac{4e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)}{\sqrt{3}} \quad (17)$$

Simulación del circuito

Utilizando el software libre *QUCS* es posible recrear el circuito correspondiente al caso de estudio, así los vemos en la figura 5.

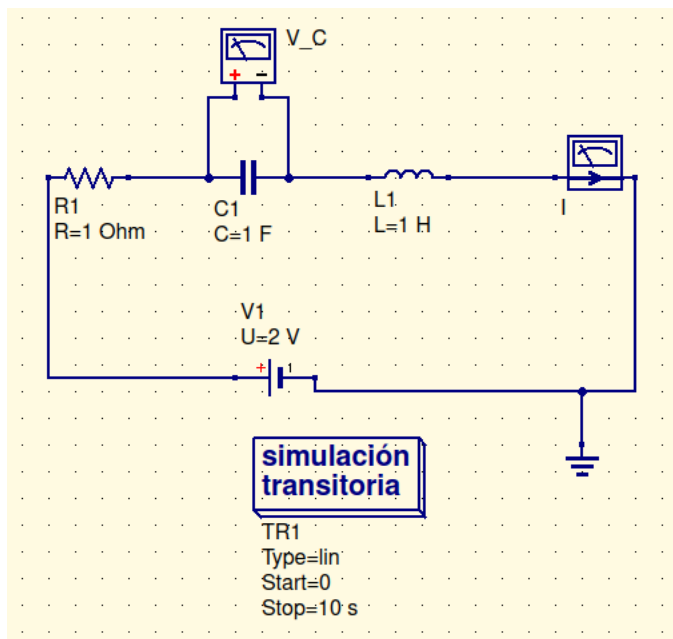


Figura 5: Circuito de estudio.

Acá se agregan un medidor de tensión eléctrica entre los extremos del capacitor y un medidor de corriente eléctrica en la línea única del circuito, de manera que sea posible medir las variables anteriormente planteadas V_C e I . Se realiza una simulación transitoria, lo que permite captar la evolución temporal de las variables de control (I y V_C), para valores de tiempo entre 0 s y 10 s . Los resultados de la simulación pueden apreciarse en la gráfica 6 para la corriente I , y 7 para la tensión V_C .

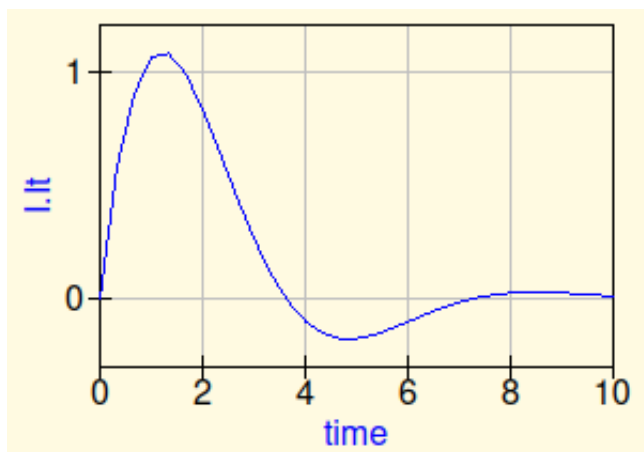


Figura 6: Evolución temporal de la corriente I . Escala de corriente en Ampere y de tiempo en segundos.

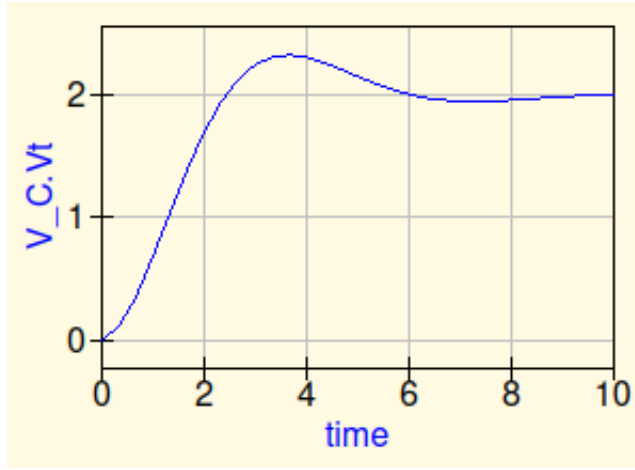


Figura 7: Evolución temporal de la tensión V_C . Escala de tensión en voltios y de tiempo en segundos.

Análisis de resultados

Tanto V_C como I presentan un comportamiento similar, oscilan de manera amortiguada en torno a un valor de equilibrio, estos serían $V_C = 2v$ e $I = 0$, lo que tiene mucho sentido cuando consideramos que este sería el comportamiento esperable en un régimen estacionario (o cuando $t \rightarrow \infty$). Este comportamiento además concuerda con las soluciones náliticas obtenidas para el las variables V_C (16) e I (17). De igual manera, se confirma que el comportamiento es subamortiguado, tal como indica en análisis de polos de la función, cuyo resultado se plantea en (15).