Анализа 2 – основне идеје доказа важнијих теорема и тврђења

1 Диференцирање

1.1 Диференцирање у нормираним векторским просторима

Теорема. (Извод сложене функције) Нека су X, Y, и Z нормирани векторски простори, $V \subseteq X$, $W \subseteq Y$ отворени скупови, $f : V \to Y$, $g : W \to Z$ и $a \in V$, $f(a) \in W$. Тада важи:

$$f\mathcal{D}a \wedge g\mathcal{D}f(a) \implies g \circ f\mathcal{D}a$$

и при томе је

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

Доказ. Доказ следи из дефиниције извода пресликавања и чињенице да је $o(O(h)) = o(h)$. □

Теорема. (Извод инверзне функције) Нека су X и Y нормирани векторски простори, $V \subseteq X$ отворен скуп, $a \in V$ и $f : V \to Y$ пресликавање са следећим својствима:

1) $f\mathcal{D}a$

2) $Df(a)$ инвертибилан

3) у некој W околини тачке $b := f(a)$ пресликавање f има инверзно

4) $f^{-1}Cb$

Тада је $f^{-1}\mathcal{D}b$ и важи:

$$(Df^{-1})(b) = (Df(a))^{-1}$$

Доказ. Нека је $b = f(a), a = f^{-1}(b)$. Показати да, пошто су транслације хомеоморфизми, важи $f(a + h) = b + t$ и $f^{-1}(b + t) = a + h$. Из непрекидности f^{-1} у b закључити чему је једнако $f^{-1}(b + t) - f^{-1}(b)$. Из услова $f\mathcal{D}a$ закључити чему је једнако $(f'(a))^{-1}t$ као и да је $o(h) = o(t)$. На основу претходних корака, и дефиниције извода, извести коначни закључак. □

Тврђење. Ако је простор Банахов (комплетан нормиран векторски простор), скуп $GL(X)$ је отворен у $\mathcal{L}(X; X)$.

Доказ. Посматрати $A \in GL(X)$ и $h \in \mathcal{L}(X;X)$. Доказати да је и $A+h \in GL(X)$ односно да постоји $(A+h)^{-1}$. Искористити комплетност домена као и дефинисаност норме. $\square$

Напомена. Претходно тврђење важи и у нешто општијем случају, за $\mathcal{L}(X;Y)$, уколико је X Банахов, а Y нормирани векторски простор.

Теорема. (Теорема о коначном прираштају) Нека су X и Y нормирани векторски простори, $V \in X$ отворен и $f : V \to Y$ непрекидно. Ако је

$$[a, a+h] = \{a + th \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq V$$

и ако је пресликавање f диференцијабилно у свим тачкама скупа

$$]a, a+h[= \{a + th \mid 0 < t < 1\}$$

онда важи

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq \sup_{x \in]a,a+h[} \|f'(x)\| \cdot \|h\|$$

Доказ. Доказати да теорема важи на сваком сегменту $[c_1, c_2] \subseteq]a, a+h[$. Претпоставити супротно,

$$\sup_{x \in [c_1,c_2]} \|f'(x)\| < \frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta x\|}$$

Поделити интервал $[c_1, c_2]$ на два подинтервала и применити помоћну лему на њих. Продужити поступак, формирати низ интервала. Поново применити помоћну лему. Извести контрадикцију. $\square$

Напомена. Помоћна лема из претходне теореме је следећа неједнакост:

Ако за $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}_+$ важи $c \leq a + b$ и $\gamma = \alpha + \beta$, онда је

$$\frac{c}{\gamma} \leq \max\{\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\}$$

Теорема. (Ојлерова теорема) Нека је X нормирани векторски простор над $\mathbb{R}$. Диференцијабилна функција $f : X \to \mathbb{R}$ је хомогена степена $k > 0$ ако и само ако је

$$df(x) \cdot x = kf(x)$$

Доказ. Дефинишати помоћну функцију $\psi(t) = f(tx) - t^k f(x)$ и одатле доказати оба смера еквиваленције. $\square$

Тврђење. $\mathcal{L}(X;\mathcal{L}(X;Y)) \cong \mathcal{L}(X,X;Y)$

Доказ. Нека је $L \in \mathcal{L}(X;\mathcal{L}(X;Y))$ произвољно. Дефинисати $\tilde{L} : X \times X \to Y$ као

$$\tilde{L}(\eta, \xi) := L(\eta)(\xi)$$

Доказати да је са $\varphi(L) = \tilde{L}$ добро дефинисан тражени изоморфизам. $\square$

Тврђење. $fD^na \implies D^nf(a)$ је симетрично n-линеарно пресликавање.

Доказ. Приметити најпре да је довољно доказати за транспозиције, јер оне генеришу групу пермутација. Увести

$$F_{\zeta,\eta}(t) := f(a+t(\zeta+\eta)) - f(a+t\zeta) - f(a+t\eta) - f(a)$$

и доказати да је

$$D^2f(a)(\zeta,\eta) = \lim_{t\to 0}\frac{F_{\zeta,\eta}(t)}{t^2}.$$

Извести закључак из тога, чињенице да је F симетрично по ζ и η, као и

$$D^nf(a)(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n) = D_{\zeta_1}D_{\zeta_2}\ldots D_{\zeta_n}f(a).$$

□

Теорема. Нека су X,Y нормирани векторски простори, $V\subseteq X$ отворен, $a\in V$, $f\mathcal{D}^{n-1}V$ и $f\mathcal{D}^na$. Тада је

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + o(\|h\|^n), h\to 0$$

Доказ. Доказ извести индукцијом по n коришћењем Последице 2. теореме о коначном прираштају и чињенице да је $(Lx^n)' = nLx^{n-1}$. □

1.2 Унутрашње тачке екстремума

Тврђење. Нека је V отворен подскуп нормираног векторског простора X, $a\in V$, $f:V\to\mathbb{R}$, fD^na, $Df(a) = D^2f(a) = \ldots = D^{n-1}f(a)$, $D^nf(a)\neq 0$. Да би a била тачка локалног екстремума функције f:

- **неопходно** је да n буде паран број и да је $D^nf(a)$ семидефинитна форма.
- **довољно** је да су вредности $D^nf(a)h^n$ одвојене од 0 на јединичној свери $\|h\|=1$.

Доказ. Применити Тејлорову формулу. □

Пример. (Ојлер–Лагранжове једначине)

1.3 Теорема о имплицитној функцији

Теорема. (Теорема о имплицитној функцији) Нека су X,Y и Z нормирани векторски простори, при чему је Y комплетан, $x_0\in X$, $y_0\in Y$ и $W = B]x_0;\alpha[\times B]y_0;\beta[\subseteq X\times Y$. Претпоставимо да пресликавање $F:W\to Z$ испуњава следеће услове:

(1) $F(x_0,y_0)=0$

(2) $FC(x_0,y_0)$

(3) D_2F дефинисано на W и непрекидно у тачки (x_0,y_0)

(4) $\exists(D_2F(x_0,y_0))^{-1}\in\mathcal{L}(Z;Y)$

Тада постоје околине U и V тачака x_0 и y_0 и пресликавање $f : U \to Y$ са својствима:

(а) $U \times V \subseteq W$

(б) $[(x, y) \in U \times V$ и $F(x, y) = 0] \iff y = f(x)$

(в) fCx_0

Доказ. Пошто су транслације хомеоморфизми, без умањења општости претпоставити да важи $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Дефинисати помоћну функцију $g_x : B]0; \beta[\to Y$ као

$$g_x(y) := y - (D_2F(0, 0))^{-1}F(x, y).$$

Користећи Теорему о коначном прираштају доказати да је g_x контракција и да слика неки комплетан скуп у себе. Применити Банахов став о фиксној тачки. Одатле извести закључак. □

Теорема. (Теорема о инверзној функцији) Нека су X, Y нормирани векторски простори, при чему је Y комплетан, нека је $V \subseteq Y$ отворен скуп, $y_0 \in V$ и $g : V \to X$ пресликавање које има следећа својства:

(1) $g \in \mathcal{D}(V; X)$

(2) $DgCy_0$

(3) $\exists (Dg(y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(X; Y)$

Тада постоје околина $V_0 \subseteq Y$ тачке y_0 и околина $U_0 \subseteq X$ тачке $x_0 := g(y_0)$ такве да је $g : V_0 \to U_0$ бијекција, $g^{-1}\mathcal{D}x_0$ и важи

$$Dg^{-1}(x_0) = (Dg(y))^{-1}.$$

Доказ. Доказ следи из Теореме о имплицитној функцији примењене на функцију $F(x, y) = x - g(y)$. □

Теорема. (Теорема о рангу) Нека је $V \subseteq \mathbb{R}^k$ отворен и $f : V \to \mathbb{R}^l$ пресликавање класе C^n, такво да је за све $x \in V$ $\text{rang}Df(x) = r$. Тада у околини сваке тачке $x_0 \in V$ и њене слике $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^l$ постоје локалне координате класе C^n у којима f има запис

$$f : (s_1, \ldots, s_k) \to (s_1, \ldots, s_r, 0, \ldots, 0).$$

Краће речено, пресликавање константног ранга r локално изгледа као пројекција на $\mathbb{R}^r$.

Доказ. □

Тврђење. Сваки дифеоморфизам класе C^1

$$\mathbb{R}^l \supseteq V \xrightarrow{f} f(V) \subseteq \mathbb{R}^l$$

може локално да се представи као композиција l простих дифеоморфизама.

Доказ. Индукцијом по k доказати да дифеоморфизам који мења највише k координата може локално да се представи као композиција k простих дифеоморфизама. □

2 Многострукости

2.1 Подмногострукости у $\mathbb{R}^n$ и условни екстремуми

Тврђење. За $M \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ следећа тврђења су еквивалента:

(а) М је k - димензиона подмногострукост класе C^p

(б) $(\forall p \in M)$ постоје отворене околине $p \in V$ и $0 \in U$ у $\mathbb{R}^{k+l}$ и дифеоморфизам $g : U \to V$ класе C^p такав да је $g(V \cap M) = U \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$

(в) $(\forall p \in M)$ постоје отворене околине $p \in V$ у $\mathbb{R}^{k+l}$ и $0 \in U$ у $\mathbb{R}^k$ и имерзија $h : D \to V$ класе C^p таква да је $h : D \to V \cap M$ хомеоморфизам у релативној топологији на $V \cap M$ наслеђеној из R^{k+l}.

Доказ. Како је k-дим подмногострукост у $\mathbb{R}^{k+l}$ локално задата једначином $f(x) = 0$, где је f сумбмерзија и $\mathrm{rang} Df(x) = l$, из Теореме о рангу закључити да је могуће изабрати локалне координате у којима f има запис

$$f(x_1, \dots, x_{k+l}) = (x_1, \dots, x_l).$$

Одатле директно закључити (б). Уз помоћ претходног, дефинисати тражену имерзију и закључити (в). $\square$

Тврђење. Нека је $h : D \to M$ локална параметризација околине тачке $p = h(0)$ и нека је $f : V \to \mathbb{R}^l$ субмерзија таква да је $M \cap V = f^{-1}(0)$. Тада важи да је $T_pM = \ker Df(p)$.

Доказ. Диференцирањем $f(h(t)) \equiv 0$ у тачки $t = 0$ и применом правила за извод композиције пресликавања закључити да је $T_pM \subseteq \ker Df(p)$. Одатле, применом Прве теореме о изоморфизму на пресликавање $Df(p)$ закључити да важи једнакост. $\square$

Теорема. Нека је $V \in \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $f : V \to \mathbb{R}$ функција класе C^1 и $M \subseteq V$ глатка подмногострукост. Да би тачка $p \in M$ била тачка условног локалног екстремума функције $f|_M$ неопходно је да буде испуњен бар 1 од следећих услова:

(а) $df(p) = 0$ (тј. p је критична тачка за f)

(б) $T_pM \subseteq T_pS$, где је $S := \{x \in V | f(x) = f(p)\}$

Доказ. Претпоставити да важи a) у теореми. Одатле директно закључити да је p кандидат за безусловни, а самим тим и условни екстремум. Даље, претпоставити да a) у теореми не важи. Доказати да је онда у некој околини тачке p функција f субмерзија, па је онда S $(n-1)$ - дим глатка подмногострукост, па има смисла T_pS. Узети $\gamma :]-\delta, +\delta[\to M$ такво да $\gamma(0) = p$. Из $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ извести $T_pM \subseteq T_pS$. $\square$

Напомена. Нека је M глобално задато једначином $g(x) = 0$ за неку субмерзију $g : V \to \mathbb{R}$ и нека је p локални екстремум за $f|_M$. Са $\gamma : I \to M$ дата је нека крива која лежи на M и за коју важи $\gamma(0) = p$. Тада, $f \circ \gamma$ има локални екстремум у 0, тј. за $f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ важи $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ односно $\overrightarrow{\nabla f}(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0$ за свако γ кроз p. Одатле следи $\overrightarrow{\nabla f}(p) \perp M$. Како је $\gamma \in M$, одатле следи $(g \circ \gamma)(t) = 0$ па када то диференцирамо по t добијамо да је $\overrightarrow{\nabla g} \perp M$. Коначно, добијамо систем $n+1$ једначина са $n+1$ непознатих који је одређен и који нам служи за одређивање условних екстремума:

$$\boxed{\begin{array}{l}\overrightarrow{\nabla f}(p) = \lambda \overrightarrow{\nabla g}(p)\\ \quad g(p) = 0\end{array}}$$

2.2 Апстрактне многострукости

Тополошки простор M је тополошка многострукост ако ...