# Анализа 2 – основне идеје доказа важнијих теорема и тврђења

## 1 Диференцирање

### 1.1 Диференцирање у нормираним векторским просторима

**Теорема.** (Извод сложене функције) Нека су $X, Y$, и $Z$ нормирани векторски простори, $V \subseteq X$, $W \subseteq Y$ отворени скупови, $f : V \to Y$, $g : W \to Z$ и $a \in V$, $f(a) \in W$. Тада важи:

$$f\mathcal{D}a \wedge g\mathcal{D}f(a) \implies g \circ f\mathcal{D}a$$

и при томе је

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

*Доказ.* Доказ следи из дефиниције извода пресликавања и чињенице да је $o(O(h)) = o(h)$. □

**Теорема.** (Извод инверзне функције) Нека су $X$ и $Y$ нормирани векторски простори, $V \subseteq X$ отворен скуп, $a \in V$ и $f : V \to Y$ пресликавање са следећим својствима:

1) $f\mathcal{D}a$

2) $Df(a)$ инвертибилан

3) у некој $W$ околини тачке $b := f(a)$ пресликавање $f$ има инверзно

4) $f^{-1}Cb$

Тада је $f^{-1}\mathcal{D}b$ и важи:

$$(Df^{-1})(b) = (Df(a))^{-1}$$

*Доказ.* Нека је $b = f(a), a = f^{-1}(b)$. Показати да, пошто су транслације хомеоморфизми, важи $f(a + h) = b + t$ и $f^{-1}(b + t) = a + h$. Из непрекидности $f^{-1}$ у $b$ закључити чему је једнако $f^{-1}(b + t) - f^{-1}(b)$. Из услова $f\mathcal{D}a$ закључити чему је једнако $(f'(a))^{-1}t$ као и да је $o(h) = o(t)$. На основу претходних корака, и дефиниције извода, извести коначни закључак. □

**Тврђење.** Ако је простор Банахов (комплетан нормиран векторски простор), скуп $GL(X)$ је отворен у $\mathcal{L}(X; X)$.

*Доказ.* Посматрати $A \in GL(X)$ и $h \in \mathcal{L}(X;X)$. Доказати да је и $A+h \in GL(X)$ односно да постоји $(A+h)^{-1}$. Искористити комплетност домена као и дефинисаност норме. $\square$

**Напомена.** Претходно тврђење важи и у нешто општијем случају, за $\mathcal{L}(X;Y)$, уколико је $X$ Банахов, а $Y$ нормирани векторски простор.

**Теорема.** (Теорема о коначном прираштају) Нека су $X$ и $Y$ нормирани векторски простори, $V \in X$ отворен и $f : V \to Y$ непрекидно. Ако је

$$[a, a+h] = \{a + th \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq V$$

и ако је пресликавање $f$ диференцијабилно у свим тачкама скупа

$$]a, a+h[= \{a + th \mid 0 < t < 1\}$$

онда важи

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq \sup_{x \in ]a,a+h[} \|f'(x)\| \cdot \|h\|$$

*Доказ.* Доказати да теорема важи на сваком сегменту $[c_1, c_2] \subseteq ]a, a+h[$. Претпоставити супротно,

$$\sup_{x \in [c_1,c_2]} \|f'(x)\| < \frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta x\|}$$

Поделити интервал $[c_1, c_2]$ на два подинтервала и применити помоћну лему на њих. Продужити поступак, формирати низ интервала. Поново применити помоћну лему. Извести контрадикцију. $\square$

**Напомена.** Помоћна лема из претходне теореме је следећа неједнакост:

Ако за $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}_+$ важи $c \leq a + b$ и $\gamma = \alpha + \beta$, онда је

$$\frac{c}{\gamma} \leq \max\{\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\}$$

**Теорема.** (Ојлерова теорема) Нека је $X$ нормирани векторски простор над $\mathbb{R}$. Диференцијабилна функција $f : X \to \mathbb{R}$ је хомогена степена $k > 0$ ако и само ако је

$$df(x) \cdot x = kf(x)$$

*Доказ.* Дефинишати помоћну функцију $\psi(t) = f(tx) - t^k f(x)$ и одатле доказати оба смера еквиваленције. $\square$

**Тврђење.** $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X;Y)) \cong \mathcal{L}(X, X; Y)$

*Доказ.* Нека је $L \in \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X;Y))$ произвољно. Дефинисати $\tilde{L} : X \times X \to Y$ као

$$\tilde{L}(\eta, \xi) := L(\eta)(\xi)$$

Доказати да је са $\varphi(L) = \tilde{L}$ добро дефинисан тражени изоморфизам. $\square$

**Теорема.** Нека су $X, Y$ нормирани векорски простори, $V \subseteq X$ отворен, $a \in V$, $f\mathcal{D}^{n-1}V$ и $f\mathcal{D}^n a$. Тада је

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + o(\|h\|^n), h \to 0$$

*Доказ.* Доказ извести индукцијом по $n$ коришћењем Последице 2. теореме о коначном прираштају и чињенице да је $(Lx^n)' = nLx^{n-1}$. □

**Теорема.** (Теорема о имплицитној функцији) Нека су $X, Y$ и $Z$ нормирани векторски простори, при чему је $Y$ комплетан, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ и $W = B]x_0; \alpha[\times B]y_0; \beta[\subseteq X \times Y$. Претпоставимо да пресликавање $F : W \to Z$ испуњава следеће услове:

(1) $F(x_0, y_0) = 0$

(2) $FC(x_0, y_0)$

(3) $D_2F$ дефинисано на $W$ и непрекидно у тачки $(x_0, y_0)$

(4) $\exists (D_2F(x_0, y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(Z; Y)$

Тада постоје околине $U$ и $V$ тачака $x_0$ и $y_0$ и пресликавање $f : U \to Y$ са својствима:

(а) $U \times V \subseteq W$

(б) $[(x, y) \in U \times V$ и $F(x, y) = 0] \iff y = f(x)$

(в) $fCx_0$

*Доказ.* Пошто су транслације хомеоморфизми, без умањења општости претпоставити да важи $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Дефинисати помоћну функцију $g_x : B]0; \beta[\to Y$ као

$$g_x(y) := y - (D_2F(0, 0))^{-1}F(x, y).$$

Користећи Теорему о коначном прираштају доказати да је $g_x$ контракција и да слика неки комплетан скуп у себе. Применити Банахов став о фиксној тачки. Одатле извести закључак. □

**Теорема.** (Теорема о инверзној функцији) Нека су $X, Y$ нормирани векторски простори, при чему је $Y$ комплетан, нека је $V \subseteq Y$ отворен скуп, $y_0 \in V$ и $g : V \to X$ пресликавање које има следећа својства:

(1) $g \in \mathcal{D}(V; X)$

(2) $DgCy_0$

(3) $\exists (Dg(y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(X; Y)$

Тада постоје околина $V_0 \subseteq Y$ тачке $y_0$ и околина $U_0 \subseteq X$ тачке $x_0 := g(y_0)$ такве да је $g : V_0 \to U_0$ бијекција, $g^{-1}\mathcal{D}x_0$ и важи

$$Dg^{-1}(x_0) = (Dg(y))^{-1}.$$

*Доказ.* Доказ следи из Теореме о имплицитној функцији примењене на функцију $F(x, y) = x - g(y)$. $\square$

**Теорема.** (Теорема о рангу) Нека је $V \subseteq \mathbb{R}^k$ отворен и $f : V \to \mathbb{R}^l$ пресликавање класе $C^n$, такво да је за све $x \in V$ $\mathrm{rang} Df(x) = r$. Тада у околини сваке тачке $x_0 \in V$ и њене слике $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^l$ постоје локалне координате класе $C^n$ у којима $f$ има запис

$$f : (s_1, \dots, s_k) \to (s_1, \dots, s_r, 0, \dots, 0).$$

Краће речено, пресликавање константног ранга $r$ локално изгледа као пројекција на $\mathbb{R}^r$.

*Доказ.* $\square$

**Тврђење.** Сваки дифеоморфизам класе $C^1$

$$\mathbb{R}^l \supseteq V \xrightarrow{f} f(V) \subseteq \mathbb{R}^l$$

може локално да се представи као композиција $l$ простих дифеоморфизама.

*Доказ.* Индукцијом по $k$ доказати да дифеоморфизам који мења највише $k$ координата може локално да се представи као композиција $k$ простих дифеоморфизама. $\square$

## 1.2 Подмногострукости у $\mathbb{R}^n$ и условни екстремуми

**Тврђење.** За $M \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ следећа тврђења су еквивалента:

(а) M је $k$ - димензиона подмногострукост класе $C^p$

(б) $(\forall p \in M)$ постоје отворене околине $p \in V$ и $0 \in U$ у $\mathbb{R}^{k+l}$ и дифеоморфизам $g : U \to V$ класе $C^p$ такав да је $g(V \cap M) = U \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$

(в) $(\forall p \in M)$ постоје отворене околине $p \in V$ у $\mathbb{R}^{k+l}$ и $0 \in U$ у $\mathbb{R}^k$ и имерзија $h : D \to V$ класе $C^p$ таква да је $h : D \to V \cap M$ хомеоморфизам у релативној топологији на $V \cap M$ наслеђеној из $R^{k+l}$.

*Доказ.* Како је $k$-дим подмногострукост у $\mathbb{R}^{k+l}$ локално задата једначином $f(x) = 0$, где је $f$ сумбмерзија и $\mathrm{rang} Df(x) = l$, из Теореме о рангу закључити да је могуће изабрати локалне координате у којима $f$ има запис

$$f(x_1, \dots, x_{k+l}) = (x_1, \dots, x_l).$$

Одатле директно закључити (б). Уз помоћ претходног, дефинисати тражену имерзију и закључити (в). $\square$

**Тврђење.** Нека је $h : D \to M$ локална параметризација околине тачке $p = h(0)$ и нека је $f : V \to \mathbb{R}^l$ субмерзија таква да је $M \cap V = f^{-1}(0)$. Тада важи да је $T_pM = \ker Df(p)$.

*Доказ.* Диференцирањем $f(h(t)) \equiv 0$ у тачки $t = 0$ и применом правила за извод композиције пресликавања закључити да је $T_pM \subseteq \ker Df(p)$. Одатле, применом Прве теореме о изоморфизму на пресликавање $Df(p)$ закључити да важи једнакост. $\square$

**Теорема.** Нека је $V \in \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $f : V \to \mathbb{R}$ функција класе $C^1$ и $M \subseteq V$ глатка подмногострукост. Да би тачка $p \in M$ била тачка условног локалног екстремума функције $f|_M$ неопходно је да буде испуњен бар 1 од следећих услова:

(а) $df(p) = 0$ (тј. $p$ је критична тачка за $f$)

(б) $T_pM \subseteq T_pS$, где је $S := \{x \in V | f(x) = f(p)\}$

## 1.3 Апстрактне многострукости