Анализа 2 – основне идеје доказа важнијих теорема и тврђења

1 Диференцирање

1.1 Диференцирање у нормираним векторским просторима

Теорема. (Извод сложене функције) Нека су X, Y, и Z нормирани векторски простори, $V \subseteq X$, $W \subseteq Y$ отворени скупови, $f : V \to Y$, $g : W \to Z$ и $a \in V$, $f(a) \in W$. Тада важи:

$$f\mathcal{D}a \wedge g\mathcal{D}f(a) \implies g \circ f\mathcal{D}a$$

и при томе је

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

Доказ. Доказ следи из дефиниције извода пресликавања и чињенице да је $o(O(h)) = o(h)$. □

Теорема. (Извод инверзне функције) Нека су X и Y нормирани векторски простори, $V \subseteq X$ отворен скуп, $a \in V$ и $f : V \to Y$ пресликавање са следећим својствима:

1) $f\mathcal{D}a$
2) $Df(a)$ инвертибилан
3) у некој W околини тачке $b := f(a)$ пресликавање f има инверзно
4) $f^{-1}Cb$

Тада је $f^{-1}\mathcal{D}b$ и важи:

$$(Df^{-1})(b) = (Df(a))^{-1}$$

Доказ. Нека је $b = f(a), a = f^{-1}(b)$. Показати да, пошто су транслације хомеоморфизми, важи $f(a + h) = b + t$ и $f^{-1}(b + t) = a + h$. Из непрекидности f^{-1} у b закључити чему је једнако $f^{-1}(b + t) - f^{-1}(b)$. Из услова $f\mathcal{D}a$ закључити чему је једнако $(f'(a))^{-1}t$ као и да је $o(h) = o(t)$. На основу претходних корака, и дефиниције извода, извести коначни закључак. □

Тврђење. Ако је простор Банахов (комплетан нормиран векторски простор), скуп $GL(X)$ је отворен у $\mathcal{L}(X; X)$.

Доказ. Посматрати $A \in GL(X)$ и $h \in \mathcal{L}(X;X)$. Доказати да је и $A + h \in GL(X)$ односно да постоји $(A+h)^{-1}$. Искористити комплетност домена као и дефинисаност норме. $\square$

Напомена. Претходно тврђење важи и у нешто општијем случају, за $\mathcal{L}(X;Y)$, уколико је X Банахов, а Y нормирани векторски простор.

Теорема. (Теорема о коначном прираштају) Нека су X и Y нормирани векторски простори, $V \in X$ отворен и $f : V \to Y$ непрекидно. Ако је

$$[a, a+h] = \{a + th \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq V$$

и ако је пресликавање f диференцијабилно у свим тачкама скупа

$$]a, a+h[= \{a + th \mid 0 < t < 1\}$$

онда важи

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq \sup_{x \in]a,a+h[} \|f'(x)\| \cdot \|h\|$$

Доказ. Доказати да теорема важи на сваком сегменту $[c_1, c_2] \subseteq]a, a+h[$. Претпоставити супротно,

$$\sup_{x \in [c_1,c_2]} \|f'(x)\| < \frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta x\|}$$

Поделити интервал $[c_1, c_2]$ на два подинтервала и применити помоћну лему на њих. Продужити поступак, формирати низ интервала. Поново применити помоћну лему. Извести контрадикцију. $\square$

Напомена. Помоћна лема из претходне теореме је следећа неједнакост:

Ако за $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}_+$ важи $c \leq a + b$ и $\gamma = \alpha + \beta$, онда је

$$\frac{c}{\gamma} \leq \max\{\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\}$$

Теорема. (Ојлерова теорема) Нека је X нормирани векторски простор над $\mathbb{R}$. Диференцијабилна функција $f : X \to \mathbb{R}$ је хомогена степена $k > 0$ ако и само ако је

$$df(x) \cdot x = kf(x)$$

Доказ. Дефинишати помоћну функцију $\psi(t) = f(tx) - t^k f(x)$ и одатле доказати оба смера еквиваленције. $\square$

Тврђење. $\mathcal{L}(X;\mathcal{L}(X;Y)) \cong \mathcal{L}(X, X; Y)$

Доказ. Нека је $L \in \mathcal{L}(X;\mathcal{L}(X;Y))$ произвољно. Дефинисати $\tilde{L} : X \times X \to Y$ као

$$\tilde{L}(\eta, \xi) := L(\eta)(\xi)$$

Доказати да је са $\varphi(L) = \tilde{L}$ добро дефинисан тражени изоморфизам. $\square$

Тврђење. $fD^n a \implies D^n f(a)$ је симетрично n-линеарно пресликавање.

Доказ. Приметити најпре да је довољно доказати за транспозиције, јер оне генеришу групу пермутација. Увести

$$F_{\zeta,\eta}(t) := f(a + t(\zeta + \eta)) - f(a + t\zeta) - f(a + t\eta) - f(a)$$

и доказати да је

$$D^2 f(a)(\zeta, \eta) = \lim_{t\to 0} \frac{F_{\zeta,\eta}(t)}{t^2}.$$

Извести закључак из тога, чињенице да је F симетрично по ζ и η, као и

$$D^n f(a)(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = D_{\zeta_1} D_{\zeta_2} \dots D_{\zeta_n} f(a).$$

□

Теорема. Нека су X, Y нормирани векторски простори, $V \subseteq X$ отворен, $a \in V$, $f\mathcal{D}^{n-1}V$ и $f\mathcal{D}^n a$. Тада је

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)h^n + o(\|h\|^n), h \to 0$$

Доказ. Доказ извести индукцијом по n коришћењем Последице 2. теореме о коначном прираштају и чињенице да је $(Lx^n)' = nLx^{n-1}$. □

1.2 Унутрашње тачке екстремума

Тврђење. Нека је V отворен подскуп нормираног векторског простора X, $a \in V$, $f : V \to \mathbb{R}$, $fD^n a$, $Df(a) = D^2 f(a) = \ldots = D^{n-1} f(a)$, $D^n f(a) \neq 0$. Да би a била тачка локалног екстремума функције f:

- **неопходно** је да n буде паран број и да је $D^n f(a)$ семидефинитна форма.
- **довољно** је да су вредности $D^n f(a)h^n$ одвојене од 0 на јединичној свери $\|h\| = 1$.

Доказ. Применити Тејлорову формулу. □

Пример. (Ојлер–Лагранжове једначине)

1.3 Теорема о имплицитној функцији

Теорема. (Теорема о имплицитној функцији) Нека су X, Y и Z нормирани векторски простори, при чему је Y комплетан, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ и $W = B]x_0; \alpha[\times B]y_0; \beta[\subseteq X \times Y$. Претпоставимо да пресликавање $F : W \to Z$ испуњава следеће услове:

(1) $F(x_0, y_0) = 0$

(2) $FC(x_0, y_0)$

(3) $D_2 F$ дефинисано на W и непрекидно у тачки (x_0, y_0)

(4) $\exists (D_2 F(x_0, y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(Z; Y)$

Тада постоје околине U и V тачака x_0 и y_0 и пресликавање $f : U \to Y$ са својствима:

(а) $U \times V \subseteq W$

(б) $[(x, y) \in U \times V$ и $F(x, y) = 0] \iff y = f(x)$

(в) fCx_0

Доказ. Пошто су транслације хомеоморфизми, без умањења општости претпоставити да важи $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Дефинисати помоћну функцију $g_x : B]0; \beta[\to Y$ као

$$g_x(y) := y - (D_2F(0, 0))^{-1}F(x, y).$$

Користећи Теорему о коначном прираштају доказати да је g_x контракција и да слика неки комплетан скуп у себе. Применити Банахов став о фиксној тачки. Одатле извести закључак. $\square$

Теорема. (Теорема о инверзној функцији) Нека су X, Y нормирани векторски простори, при чему је Y комплетан, нека је $V \subseteq Y$ отворен скуп, $y_0 \in V$ и $g : V \to X$ пресликавање које има следећа својства:

(1) $g \in \mathcal{D}(V; X)$

(2) $DgCy_0$

(3) $\exists (Dg(y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(X; Y)$

Тада постоје околина $V_0 \subseteq Y$ тачке y_0 и околина $U_0 \subseteq X$ тачке $x_0 := g(y_0)$ такве да је $g : V_0 \to U_0$ бијекција, $g^{-1}\mathcal{D}x_0$ и важи

$$Dg^{-1}(x_0) = (Dg(y))^{-1}.$$

Доказ. Доказ следи из Теореме о имплицитној функцији примењене на функцију $F(x, y) = x - g(y)$. $\square$

Теорема. (Теорема о рангу) Нека је $V \subseteq \mathbb{R}^k$ отворен и $f : V \to \mathbb{R}^l$ пресликавање класе C^n, такво да је за све $x \in V$ $\text{rang} Df(x) = r$. Тада у околини сваке тачке $x_0 \in V$ и њене слике $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^l$ постоје локалне координате класе C^n у којима f има запис

$$f : (s_1, \dots, s_k) \to (s_1, \dots, s_r, 0, \dots, 0).$$

Краће речено, пресликавање константног ранга r локално изгледа као пројекција на $\mathbb{R}^r$.

Доказ. $\square$

Тврђење. Сваки дифеоморфизам класе C^1

$$\mathbb{R}^l \supseteq V \xrightarrow{f} f(V) \subseteq \mathbb{R}^l$$

може локално да се представи као композиција l простих дифеоморфизама.

Доказ. Индукцијом по k доказати да дифеоморфизам који мења највише k координата може локално да се представи као композиција k простих дифеоморфизама. $\square$

2 Многострукости

2.1 Подмногострукости у $\mathbb{R}^n$ и условни екстремуми

Тврђење. За $M \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ следећа тврђења су еквивалента:

(а) M је k - димензиона подмногострукост класе C^p

(б) $(\forall p \in M)$ постоје отворене околине $p \in V$ и $0 \in U$ у $\mathbb{R}^{k+l}$ и дифеоморфизам $g : U \to V$ класе C^p такав да је $g(V \cap M) = U \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$

(в) $(\forall p \in M)$ постоје отворене околине $p \in V$ у $\mathbb{R}^{k+l}$ и $0 \in U$ у $\mathbb{R}^k$ и имерзија $h : D \to V$ класе C^p таква да је $h : D \to V \cap M$ хомеоморфизам у релативној топологији на $V \cap M$ наслеђеној из R^{k+l}.

Доказ. Како је k-дим подмногострукост у $\mathbb{R}^{k+l}$ локално задата једначином $f(x) = 0$, где је f сумбмерзија и rang$Df(x) = l$, из Теореме о рангу закључити да је могуће изабрати локалне координате у којима f има запис

$$f(x_1, \ldots, x_{k+l}) = (x_1, \ldots, x_l).$$

Одатле директно закључити (б). Уз помоћ претходног, дефинисати тражену имерзију и закључити (в). □

Тврђење. Нека је $h : D \to M$ локална параметризација околине тачке $p = h(0)$ и нека је $f : V \to \mathbb{R}^l$ субмерзија таква да је $M \cap V = f^{-1}(0)$. Тада важи да је $T_pM = \ker Df(p)$.

Доказ. Диференцирањем $f(h(t)) \equiv 0$ у тачки $t = 0$ и применом правила за извод композиције пресликавања закључити да је $T_pM \subseteq \ker Df(p)$. Одатле, применом Прве теореме о изоморфизму на пресликавање $Df(p)$ закључити да важи једнакост. □

Теорема. Нека је $V \in \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $f : V \to \mathbb{R}$ функција класе C^1 и $M \subseteq V$ глатка подмногострукост. Да би тачка $p \in M$ била тачка условног локалног екстремума функције $f|_M$ неопходно је да буде испуњен бар 1 од следећих услова:

(а) $df(p) = 0$ (тј. p је критична тачка за f)

(б) $T_pM \subseteq T_pS$, где је $S := \{x \in V | f(x) = f(p)\}$

Доказ. Претпоставити да важи a) у теореми. Одатле директно закључити да је p кандидат за безусловни, а самим тим и условни екстремум. Даље, претпоставити да a) у теореми не важи. Доказати да је онда у некој околини тачке p функција f субмерзија, па је онда S $(n-1)$ - дим глатка подмногострукост, па има смисла T_pS. Узети $\gamma :]-\delta, +\delta[\to M$ такво да $\gamma(0) = p$. Из $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ извести $T_pM \subseteq T_pS$. □

Напомена. Нека је M глобално задато једначином $g(x) = 0$ за неку субмерзију $g : V \to \mathbb{R}$ и нека је p локални екстремум за $f|_M$. Са $\gamma : I \to M$ дата је нека крива која лежи на M и за коју важи $\gamma(0) = p$. Тада, $f \circ \gamma$ има локални екстремум у 0, тј. за $f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ важи $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ односно $\overrightarrow{\nabla f}(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0$ за свако γ кроз p. Одатле следи $\overrightarrow{\nabla f}(p) \perp M$. Како је $\gamma \in M$, одатле следи $(g \circ \gamma)(t) = 0$ па када то диференцирамо по t добијамо да је $\overrightarrow{\nabla g} \perp M$. Коначно, добијамо систем $n+1$ једначина са $n+1$ непознатих који је одређен и који нам служи за одређивање условних екстремума:

$$\boxed{\begin{array}{l} \overrightarrow{\nabla f}(p) = \lambda \overrightarrow{\nabla g}(p) \\ \quad g(p) = 0 \end{array}}$$

2.2 Апстрактне многострукости

Лема. Нека је $M \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ k - димензиона подмногострукост класе C^p, нека су V_1, V_2 околине (у $\mathbb{R}^{k+l}$) тачке $p \in M$ и нека су $h_1 : D_1 \to V_1$, $h_2 : D_2 \to V_2$ две локалне C^p параметризације скупова $V_1 \cap M$ и $V_2 \cap M$. Тада је

$$h_2 \circ {h_1}^{-1} : D_1 \cap {h_1}^{-1}(V_2) \to D_2 \cap {h_2}^{-1}(V_1)$$

дифеоморфизам класе C^p.

Доказ. Доказ леме следи из чињенице да је композиција дифеоморфизама дифеоморфизам. □

Тврђење. Не постоји имерзија класе C^p где је $p \leq 1$ где $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ таква да је $h(\mathbb{R}) = \Gamma$.

Доказ. Из непрекидности h' извести контрадикцију. □

Теорема. За свако отворено покривање $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ глатке многострукости M постоји разлагање јединице $\{\rho_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ такво да је $\text{supp}\rho_\lambda \subseteq U_\lambda$.

Теорема. За $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ као у претходној теореми постоји разлагање јединице $\{\rho_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ са компактним носачем, такво да $(\forall \sigma \in \Sigma)(\exists \lambda \in \Lambda)\ \text{supp}\rho_\sigma \subseteq U_\lambda$.

Теорема. (Витнијева) Свака глатка n-димензиона многострукост M може да се глатко уложи у $\mathbb{R}^{2n+1}$, тј. постоји C^∞ улагање $f : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$. Другим речима, свака апстрактна глатка многострукост је дифеоморфна подмногострукости у еуклидском простору.

Теорема. Свака компактна глатка многострукост M може глатко да се уложи у $\mathbb{R}^l$ за довољно велико l.

Доказ. Нека је $\{(U_j, \varphi_j)_{1 \leq j \leq k}\}$ атлас на M, такав да је $\varphi_j(U_j) = B(0;3)$ и да $V_j = {\varphi_j}^{-1}(B(0;1))$ такође покривају M. За свако j конструисати функцију $h_j : U_j \to \mathbb{R}$ помоћу

$$h(x) = \frac{g(4 - \|x\|^2)}{g(4 - \|x\|^2) + g(\|x\|^2 - 1)}$$

где је g дато са

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Дефинисати пресликавање

$$f : M \to \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{k} =: \mathbb{R}^l$$

са

$$f(p) = \Big(h_1(p)\varphi_1(p), \ldots, h_k(p)\varphi_k(p), h_1(p), \ldots, h_k(p)\Big)$$

где је $n = \text{dim}M$. Доказати да је f једно улагање.

□

2.3 Извод пресликавања $f : M \to N$

Лема. Деривација D на $C^\infty(p)$ пресликавања које је константно у некој околини тачке p је 0.

Доказ. Примнити Лајбницово правило и из хомогености (деривација је линеарно пресликавање, дакле и хомогено) закључити да је довољно доказати $D1 = 0$. $\square$

Лема. Нека је $f \in C^\infty_{\mathbb{R}}(U)$ и $p \in U$. Тада постоје лопта $B := B(p, \varepsilon) \subseteq U$ и функције $g_1, g_2, \dots, g_n \in C^\infty_{\mathbb{R}}(U)$ такве да:

1. $g_j(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(p)$
2. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(p) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j - p_j)g_j(x)$

Доказ. За $x \in B$ (B као у поставци) можемо написати

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \int_0^1 \frac{1}{dt} f(p + t(x-p))dt \\ &= f(p) + \sum_{j=1}^{n}(x_j - p_j)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j} f(p + t(x-p))dt \end{aligned}$$

Узети да је $g_j = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j} f(p + t(x-p))dt$. $\square$

Теорема. Нека је $U \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен скуп и $p \in U$. За сваку деривацију $D : C^\infty(p) \to C^\infty(p)$ алгебре $C^\infty(p)$ постоји јединствени вектор $\xi \in T_pU$ такав да је $Df(p) = df(p) \cdot \xi$.

Доказ. Написати $f(x)$ као у претходној леми, и применити деривацију на тај запис. Добијемо

$$Df(x) = \sum_{j=1}^{n}(D\pi_j(x) \cdot g_j(x) + (x_j - p_j) \cdot Dg_j(x)),$$

Применом овога у тачки p имамо:

$$Df(p) = \sum_{j=1}^{n} D\pi_j(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = df(p) \cdot \xi,$$

за $\xi = (D\pi_1, D\pi_2, \dots, D\pi_n)$. $\square$

Напомена. Претходна теорема нам даје еквиваленцију геометријског и алгебарског (аналитичког) приступа дефиницији тангнетног простора многострукости.
Последица. T_pM је векторски простор, јер је линеарна комбинација деривација такође деривација.
Последица. $\dim M = n \implies \dim T_pM = n$

Доказ. Нека је $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ локална карта и $p \in U$. Тада је $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ база за $T_{\varphi(p)}U$, па је $(\varphi^{-1})_* \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, (\varphi^{-1})_* \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, (\varphi^{-1})_* \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ база за T_pM. $\square$

3 Интеграција

3.1 Апстрактни интеграли

Лема. Векторски потпростор $\mathcal{E}$ простора $\mathbb{R}^T$ је решетка акко важи

$$f \in \mathcal{E} \implies |f| \in \mathcal{E}.$$

Доказ. Искористити везу између апсолутне вредности и максимума и мимимума. $\square$

Тврђење. Радонов интеграл је уједно и елементарни интеграл.

Доказ. По дефиницији је радонов интеграл линеаран, тако да је довољно доказати да за опадајући низ функција f_n са компактним носачем који тежи 0 важи и да је $I(f_n) \to 0$, кад $n \to \infty$. Нека је K_n носач функције f_n. Како је f_n опадајући низ који тежи нули, следи да је $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots$. Из Динијеве теореме (0 је непрекидна функција) следи да $f_n \rightrightarrows 0$, па за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такво да $n \geq n_0 \implies f_n |_{K_1} < \varepsilon$.

На крају, нека је $\psi \in C_C(T)$ функција за коју је $0 \leq \psi \leq 1$ и $\psi |_{K_1} \equiv 1$ (таква функција постоји због Урисонове леме). Због $\mathrm{supp} f_n \subseteq K_1$, важи

$$f_n = f_n \cdot \chi_{K_1} \leq f_n \cdot \psi \leq \varepsilon\psi.$$

Из позитивности и линеарности Радоновог интеграла имамо $I(f_n) \leq \varepsilon I(\psi)$, па је онда и $I(f_n) \to 0$, кад $n \to \infty$. $\square$

Напомена. Простор $C_C(T)$ је простор непрекидних функција $f : T \to \mathbb{R}$ које имају компактан носач, при чему је T локално компактан метрички (или Хаусдорфов) простор.

Пример. Још неки примери елементарног интеграла су:

- Диракова делта функција $\delta_a : C_C(T) \to \mathbb{R}$, $\delta_a(f) := f(a)$ (валуација у тачки).
- Риманов интеграл
- Риман-Стилтјесов интеграл

Лема. За Радонов интеграл $I : C_C(T) \to \mathbb{R}$ важи:

1. $f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$
2. $|I(f)| \leq I(|f|)$

Доказ. За први део тврђења применити линеарност и позитивност I. За други део применити први део и $-|f| \leq f \leq |f|$. $\square$

Тврђење. Нека је T локално компактан Хаусдорфов простор, $K \subseteq T$ компактан подскуп и $C(T;K)$ скуп функција и $C_C(T)$ којима је носач у K. Тада је рестрикција

$$I : C(T;K) \to \mathbb{R}$$

Радоновог интеграла непрекидна у односу на норму

$$\|f\|_K := \sup\{|f(t)| \mid t \in K\}.$$

Доказ. Нека је $\psi \in C_C(T)$ функција за коју је $0 \leq \psi \leq 1$ и $\psi\mid_K \equiv 1$. Тада је

$$(\forall f \in C(T;K))(\forall t \in T)|f(t)| \leq \|f\|_K \cdot \psi(t),$$

па је $|I(f)| \leq I(|f|) \leq I(\psi) \cdot \|f\|_K$. $\square$

Теорема. (Фубини) Нека су S и T комапктни Хаусдорфови простори и нека су

$$I_S : C(S) \to \mathbb{R}, I_T : C(T) \to \mathbb{R}$$

Радонови интеграли. Тада постоји јединствен Радонов интеграл

$$I : C(S \times T) \to \mathbb{R}$$

такав да је

$$I(f \otimes g) = I(f) \cdot I(g).$$

Напомена. Тензорски производ функција $f : S \to \mathbb{R}$ и $g : T \to \mathbb{R}$ је функција $f \otimes g : S \times T \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f \otimes g(s,t) := f(s) \cdot g(t)$$

Дефинишемо и простор $C(S) \otimes C(T)$ као

$$C(S) \otimes C(T) := \Big\{ \sum_j f_j \otimes g_j \mid f_j \in C(S), g_j \in C(T) \Big\},$$

где је наведена сума коначна.

Доказ. Из претходног тврђења следи да је Радонов интеграл на компактним просторима непрекидан, па је и равномерно непрекидан по Канторовој теореми. Из Стон-Вајерштрасове теореме следи да је $\overline{C(S) \otimes C(T)} = C(S \times T)$, па доказ тврђења следи из Принципа продужења равномерно непрекидног пресликавања са комплетним кодоменом (одатле следи и јединственост). $\square$

Последица. (Фубинијева теорема за Риманов интеграл) Нека је $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2$ n-димензиони квадар, представљен као производ k–димензионог квадра $\mathcal{J}_1$ и $(n-k)$–димензионог квадра $\mathcal{J}_2$. Тада, за непрекидну функцију $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ важи:

$$\int_{\mathcal{J}} = \int_{\mathcal{J}_2} \left(\int_{\mathcal{J}_1} f(x,y)dx \right) dy = \int_{\mathcal{J}_1} \left(\int_{\mathcal{J}_2} f(x,y)dy \right) dx.$$

Доказ. Због линеарности Римановог интеграла и претходне теореме, довољно је доказати тврђење за $f = f_1 \otimes f_2$, за $f_i : \mathcal{J}_i \to \mathbb{R}, i \in \{1,2\}$ непрекидне функције. Сада директно следи доказ из дефиниције Римановог интеграла по квадру $\mathcal{J}$. $\square$

3.2 Нормирани простор интеграбилних функција

Лема. Релација еквиваленције на скупу $\mathcal{D}(T, \mathcal{E}, I) := \{f \in D(T, \mathcal{E}, I) \mid \overline{I}(|f|) < +\infty\}$, дефинисана са

$$f \sim g \iff f = g \text{ скоро свуда на Т.}$$

је конгруенција (тј. сагласна је са операцијама векторског простора). Количнички простор је нормирани векторски простор, са нормом

$$\|[f]\|_1 := \overline{I}(|f|),$$

која је добро дефинисана.

Доказ. Наведена норма је очигледно псеудо–норма (задовољава неједнакост троугла и симетричност). Њена добра дефинисаност је јасна, ако је $[f] = [g]$, онда је $f = g$ скоро свуда на T, па је и $\overline{I}(|f|) = \overline{I}(|g|)$. Треба још доказати да је $[\alpha f + \beta g] = \alpha[f] + \beta[g]$. Хомогеност је јасна, па је довољно доказати само линеарност, која ће следети из чињенице да је унија два скупа мере нула такође скуп мере нула. □

Последица. $(\widetilde{D}(T, \mathcal{E}, I), \|\cdot\|_1)$ је нормирани векторски простор.
Напомена. Пресликавање $I : \widetilde{D}(T, \mathcal{E}, I) \to \mathbb{R}$ је непрекидно линеарно пресликавање, јер је $|I(f)| \leq I(|f|) =: \|f\|_1$.

3.3 Комплетирање метричког простора и Лебегов интеграл

Теорема. За сваки метрички простор (M_0, d_0) постоји комплетан метрички простор (M, d) и инјективно пресликавање $i : M_0\ toM$ са својствима:

1. $d(i(x), i(y)) = d_0(x, y), \forall x, y \in M_0$
2. $i(M_0)$ је густ у M.

Доказ. На простору $X \subseteq M_0^{\mathbb{N}}$, свих Кошијевих низова у M_0, дефинисати релацију еквиваленције

$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \iff \lim_{n\to\infty} d_0(a_n, b_n) = 0.$$

На простору $M := X/_\sim$ дефинишемо метрику $d([a_n], [b_n]) := \lim\limits_{n\to\infty} (a_n, b_n)$.

Добра дефинисаност метрике d следи из адитивности по лимесу, а лако је и доказати да d јесте метрика. Дефинишимо улагање $i : M_0 \to M$ са $i(x) := [\{x\}]$, где је $\{x\}$ константан низ. Посматрајмо $x \in M$. Тада је $x = [x_n]$, за неки низ x_n у M_0 и важи $i(x_n) \to x$, одакле следи да је $i(M_0)$ густ у M. Треба још доказати да је M комплетан. Нека је x_n Кошијев низ у M. Из $\overline{i(M_0)} = M$ следи да постоји $a_n \in M_0$ за које је $d(i(a_n), x_n) < \frac{1}{n}$. Закључујемо да ако је x_n Кошијев, онда је и $i(a_n)$ Кошијев (као низ константних низова у M). Међутим, одатле следи и да је a_n Кошијев у M_0, па a_n дефинише тачку у M и важи $x_n \to a$. □

Напомена. Ово се може и применити да од нормираног векторског простора добијемо Банахов простор. Доказ се може извести елегантније, због чињенице да је дуал увек комплетан и због чињенице да постоји линеарно улагање нормираног векторског простора у дуал дуала.
Последица. Комплетирање простора $(C(\mathcal{J}), \|\cdot\|_1)$ назива се простором функција интеграбилних по Лебегу. Како је интеграл равномерно непрекидан, онда се он може (из Принципа продужења равномерно непрекидне функције са комплетним кодоменом) продужити до пресликавања које називамо Лебеговим интеграло.

3.4 Класа функција интеграбилних по Риману

Лема. $f \in \mathcal{R}(\mathcal{J}) \implies f$ је ограничена на $\mathcal{J}$

Доказ. Претпоставити супротно, и закључитида за сваку поделу постоји квадар на којем је функција неограничена, тј. постоје тачке ζ, η из тог квадра такве да је $|f(\zeta) - f(\eta)|$ произвољно велико. Узети две поделе са уоченим тачкама које се разликују само на том квадру, једну са уоченом тачком ζ, а другу са η. Извести контрадикцију из Кошијевог критеријума постојања лимеса по филтеру. □

Теорема. (Дарбуова) За сваку ограничену функцију $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ важи:

$$\overline{\int_{\mathcal{J}}} f(x)dx = \lim_{\mathscr{F}_{\mathcal{J}}} S(f, \mathcal{P})$$
$$\underline{\int_{\mathcal{J}}} f(x)dx = \lim_{\mathscr{F}_{\mathcal{J}}} s(f, \mathcal{P})$$

Доказ. Довољно је доказати једно од наведених тврђења (друго следи применом на $-f$). Означимо $\underline{I} = \underline{\int_{\mathcal{J}}}$ Нека је $\mathcal{P}_\varepsilon$ подела таква да је $s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) > \underline{I} - \varepsilon$. Посматрати Γ_ε, скуп свих тачака које леже на граници неког од квадара поделе $\mathcal{P}_\varepsilon$ и доказати да је он Лебегове мере 0. Онда постоји $\lambda_\varepsilon > 0$ такво да је за сваку поделу чији је параметар мањи од λ_ε, збир запремина квадара који секу Γ_ε мањи од ε. Нека је $\mathcal{P}$ таква подела и нека је $\mathcal{P}'$ подела која садржи све тачке подела $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}_\varepsilon$. Тада је

$$\underline{I} - \varepsilon < s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < s(f, \mathcal{P}') \leq \underline{I}.$$

Закључити да у разлици $s(f, \mathcal{P}') - s(f, \mathcal{P})$ учествују само сабирци који одговарају квадрима који секу Γ_ε, па је $|s(f, \mathcal{P}') - s(f, \mathcal{P})| < 2M\varepsilon$, где је $|f| \leq M$. На крају доказати да је $\underline{I} = s(f, P) < (2M + 1)\varepsilon$, одакле следи тврђење. □

Последица.

$$f \in \mathcal{R}(\mathcal{J}) \iff f \text{ је ограничена и } \underline{\int} f(x)dx = \overline{\int} f(x)dx$$

Лема. Нека је $T \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f : T \to \mathbb{R}$ ограничена функција и $\varepsilon > 0$. Тада је скуп

$$F := \{t \in T \mid \omega(f; T) \geq \varepsilon\}$$

затоврен у T

Доказ. Доказати да је комплемент $T \setminus F$ отворен. □

Теорема. (Лебегов критеријум интеграбилности по Риману) Функција $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ је интеграбилна по Риману акко је ограничена и непрекидна скоро свуда у смилсу Лебега (тј. ако је скуп прекида $E = \{x \in \mathcal{J} \mid \omega(f; x) > 0\}$ мере 0.)

Доказ. ($\implies$) Најпре, закључити да је довољно доказати

$$(\forall n \in \mathbb{N}) E_n := \left\{x \in \mathcal{J} \mid \omega(f; x) > \frac{1}{n}\right\} \text{ је мере 0.}$$

Нека је $\mathcal{P}$ подела таква да је $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{n}$ и нека је $P_n := \{\mathcal{J} \in \mathcal{P} \mid \mathcal{J} \cap E_n \neq \emptyset\}$. Одатле извести закључак да је $\displaystyle\sum_{I \in P_n} \mu(I) < \varepsilon$, па је E_n мере 0 (P_n покривају E_n).

($\Longleftarrow$) Посматрати $E_\varepsilon := \{x \in \mathcal{J} \mid \omega(f;x) \geq \frac{\varepsilon}{2\mu(J)}\}$. Као подскуп скупа E, овај скуп је мере нула, а због претходне леме је и затворен, па ће бити и компактан. Онда постоји коначна фамилија квадара која га покрива и за коју је $\mu(J_1) + \mu(J_2) + \ldots + \mu(J_k) < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$. За $t \in \mathcal{J} \setminus \bigcup_{i=1}^k J_k$ важи $\omega(f;t) < \frac{\varepsilon}{2\mu(J)}$, тј. за свако такво t постоји квадар I_t такав да је $\sup_{I_t} f - \inf_{I_t} f < \frac{\varepsilon}{2\mu(J)}$. Како је скуп $t \in \mathcal{J} \setminus \bigcup_{i=1}^k J_k$ затоврен, можемо издвојити коначно потпокривање I_t. На крају, разлику $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})$ представити као $\sum (M_i - m_i)\mu(K_i)$ и раздвојити је на сумирање по квадрима J_i и I_t, одакле ћемо добити $S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$. $\square$

Последица. Нека је $E \subseteq \mathbb{R}^K$ ограничен скуп садржан у квадру $\mathcal{J}$. Тада је

$$\chi_E \in \mathcal{R}(\mathcal{J}) \iff \partial E \text{ је скуп мере } 0.$$

Доказ. ∂E је скуп прекида функције χ_E. $\square$

Тврђење. Нека је $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}^k$ $k-$димензиони квадар. Тада је простор $(C(\mathcal{J}), \|\cdot\|_1)$ густ у $(\mathcal{R}(\mathcal{J}), \|\cdot\|_1)$.

Доказ. Покрити скуп прекида пребројивом унијом квадара $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, чији је збир запремина мањи од $\frac{\varepsilon}{2M}$. Идеја је да *непрекидно* пређемо са квадра J_n на остатак простора, а то ћемо урадити конструисањем функције φ_n која је једнака 0 на J_n, варира између 0 и 1 на квадру $\widetilde{J}_n$ који је двапут веће запремине од J_n и садржи га, и једанака је 1 ван $\widetilde{J}_n$. Комбиновањем свих тих функција добијамо функцију g, за коју важи

$$\|f - g\|_1 = \int_{\bigcup \widetilde{J}_n} |f - g| < \varepsilon.$$

$\square$

Тврђење. Фубинијева теорема важи за класу функција интеграбилних по Риману.

Доказ. Следи из раније доказане теореме за непрекидне функције и принципа продужења непрекидног пресликавања $\int_{I \times J} : C(I \times J) \to \mathbb{R}$ на скуп $\mathcal{R}(I \times J)$, у коме је $C(I \times J)$ густ. $\square$

Напомена. Пре смо Фубинија доказали за Риманов интеграл непрекидне функције, сада смо доказали за Риманов интеграл функције интеграбилне по Риману.
Теорема. Нека је $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}^k$ $k-$дим квадар и $E \subseteq \mathcal{J}$ скуп мерљив по Жордану. Представимо $\mathcal{J}$ као производ $\mathcal{J} = \mathcal{J}_x \times \mathcal{J}_y$ квадара $\mathcal{J}_x \subseteq \mathbb{R}^l$ и $\mathcal{J}_y \subseteq \mathbb{R}^{k-l}$. Тада је за свако $y_0 \in \mathcal{J}_y$ пресек $E_{y_0} := \{(x,y) \in E \mid y = y_0\}$ скупа E и $l-$димензионе равни $y = y_0$ мерљив по Жордану и важи

$$\mu_k(E) = \int_{\mathcal{J}_y} \mu_l(E_y) dy,$$

где је μ_k (односно μ_l) Жорданова мера у $\mathbb{R}^k$ (односно $\mathbb{R}^l$)

Доказ. Следи из Фубинијеве теореме примењене на функцији $\chi_E(x,y) = \chi_{E_y}(x)$ $\square$

3.5 Смена промењиве у интегралу

Теорема. Нека су D_t и D_x органичени отворени скупови у $\mathbb{R}^k$, $\varphi : D_t \to D_x$ дифеоморфизам (класе C^1), $\varphi' : D_t \to \mathbb{R}^{k\times k}$ његова матрица првог извода и $f \in \mathcal{R}(D_x)$ функција чији је носач $\text{supp} f := \overline{\{x \in D_x \mid f(x) \neq 0\}}$ компактан у D_x. Тада важи:

(1) $(f \circ \varphi)|\det \varphi'| \in \mathcal{R}(D_t)$

(2) $\int_{D_x} f(x)dx = \int_{D_t} f \circ \varphi(t)|\det \varphi'(t)|dt$

Напомена. Докажимо прво 4 помоћне леме.

Лема. Нека су D_t, D_x, φ као у теореми, $E_t \subseteq D_t$, $E_x := \varphi(E_t) \subseteq D_x$. Тада важи:

(1) Ако је E_t скуп мере нула у смислу Лебега, онда је такав и E_x.

(2) Ако је Жорданова мера скупова E_t и $\overline{E_t}$ нула, онда је и Жорданова мера скупова E_x и $\overline{E_x}$ нула.

(3) Ако је скуп E_t мерљив по Жордану и $\overline{E_t} \subseteq D_t$ онда је и скуп E_x мерљив по Жордану и $\overline{E_x} \subseteq D_x$.

Доказ. Приметити да се сваки отворен скуп $D \in \mathbb{R}^k$ може представити као пребројива унија квадара чије се унутрашњости међусобно не секу. Како је пребројива унија скупова мере нула скуп мере нула, доказати (1) под претпоставком да је $E_t \subseteq J$ за неко J. Нека је $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ покривање скупа E_t квадрима таквим да је $\sum \mu(I_j) < \epsilon$. Применом Теореме о коначном прираштају и претходног закључити да се сваки скуп $\varphi(I_j)$ налази у квадру $\tilde{I}_j$ таквом да је $\mu(\tilde{I}_j) = M^k\mu(I_j)$. Одатле извести (1).

Део (2) следи из (1) јер је $\tilde{E}_t$, а самим тим и његова непрекидна слика $\tilde{E}_x$, компактан скуп, а сваки компактан скуп мере нула у Лебеговом смислу има Жорданову меру нула.

Део (3) извести из чињенице да дифеоморфизам слика унутрашње тачке у унутрашње тачке, шо је последица Теореме о инверзној функцији, односно извести закључак из $\partial E_x = \varphi(\partial E_x)$. □

Последица. Под условима Теореме о смени променљиве, интеграл у тачки (2) постоји.

Доказ. Следи из Лебегове теореме о интеграбилности и претходне леме. □

Лема. (једнодимензиони случај) Нека је $\varphi : I_t \to I_x$ дифеоморфизам интервала $I_t \subseteq \mathbb{R}$ на интервал $I_x \subseteq \mathbb{R}$ и нека $f \in \mathcal{R}(I_x)$ и важи

$$\int_{I_x} f(x)dx = \int_{I_t} f \circ \varphi(t)|\varphi'(t)|dt$$

Доказ. Доказати применом Њутн - Лајбницове формуле из Анализе 1. □

Напомена. Код смене променљиве за функције једне променљиве у уобичајеном облику немамо апсолутну вредност код φ'. То није у колизији, због тога што се у у тој апсолутној вредности само крије знак који "обрће"границе интервала.

Напомена. Појава $|\cdot|$ сугерише везу интеграције и оријентације. Не можемо интегралити по објектима који нису оријентабилни.

Лема. Теорема о смени променљиве у интегралу важи за просте дифеоморфизме.

Доказ. Ова лема је у суштини последица претходне леме и Фубинијеве теореме. Претпоставити ради једноставности записа да φ мења само последњу (k - ту) координату. Квадре $J_x \supseteq D_x$ и $J_t \supseteq D_t$ у $\mathbb{R}^k$ представити као Декартов производ квадра у $\mathbb{R}^{k-1}$ и интервала. Применити Фубинијеву теорему на интеграл функције $f\chi_{D_x}$ по квадру J_x имајући у виду да је φ прост дифеоморфизам те је $\det\varphi' = \frac{\partial\varphi_k}{\partial t_k}$. □

Лема. Ако Теорема о смени променљиве важи за дифеоморфизме

$$\psi : D_s \to D_t, \qquad \varphi : D_t \to D_x$$

онда важи и за композицију $\varphi \circ \psi : D_s \to D_x$.

Доказ. Доказ извести из $\det(\varphi \circ \psi)' = \det\varphi' \cdot \det\psi'$ и две примене Теорема о смени променљиве: прво на функцију f и дифеоморфизам φ, а затим на $f \circ \varphi|\det\varphi'|$ и дифеоморфизам ψ. □

Можемо сада довршити доказ прве теореме.

Доказ. (Доказ теореме о смени променљиве у интегралу) Доказ завршити коришћењем Тврђења о представљању дифеоморфизма као композиције простих, међутим обратити пажњу на *локално* у њему. Идеја да се докаже да теорема важи на целом D_t јесте да се D_t подели на мање скупове на којима теорема важи. □

Напомена. Интуиција за мало другачији доказ: Нека је J квадар, $f : J \to \mathbb{R}$ непрекидна функција и $\varphi : J \to \varphi(J)$ дифеоморфизам класе C^1. Посматрајмо шта је $\int_{\varphi(J)} f(x)dx$. Поделимо квадар J на квадре J_l. Тада је

$$\int_{\varphi(J)} f(x)dx = \sum_l \int_{\varphi(J_l)} f(x)dx$$

Даље имамо да је

$$\min_{\varphi(J_l)} f \int_{\varphi(J_l)} 1dx \leq \int_{\varphi(J_l)} f(x)dx \leq \max_{\varphi(J_l)} f \int_{\varphi(J_l)} 1dx$$

односно

$$\min_{\varphi(J_l)} f \leq \frac{1}{\mu(\varphi(J_l))} \int_{\varphi(J_l)} f(x)dx \leq \max_{\varphi(J_l)} f$$

Из непрекидности f, применом теореме о средњој вредности закључити да постоји ξ_l такво да

$$f(\xi_l) = \frac{1}{\mu(\varphi(J_l))} \int_{\varphi(J_l)} f(x)dx$$

Следи да је

$$\int_{\varphi(J)} f(x)dx = \sum_l f(\xi_l)\mu(\varphi(J_l))$$

Узмимо $\tau_l \in J_l$ такво да $\xi_l = \varphi(\tau_l)$. Тада је

$$\int_{\varphi(J)} f(x)dx = \sum_l f \circ \varphi(\tau_l)\mu(\varphi(J_l))$$

Доказати још да је $\mu(\varphi(J_l)) = |\det\varphi| \cdot \mu(J_l)$. У случају да је φ линеарно, доказ извести користећи теорему о јединствености детерминанте. У случају да φ није линеарно представити га као $\varphi \approx C + \varphi'$, где је φ' линеарно а $C = \varphi(x_0)$ транслација, стога не мења запремину.

4 Векторска поља и диференцијалне форме

Тврђење. За $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$ и глатко пресликавање $F : M \to N$ важи:

(1) $F^*(\alpha + \beta) = F^*\alpha + F^*\beta$

(2) $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$

Другим речима, ако дефинишемо

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{j=0}^{\dim M} \Omega^j(M)$$

и слично $\Omega^*(N)$ онда је

$$F^* : (\Omega^*(N), +, \wedge) \to (\Omega^*(M), +, \wedge)$$

хомоморфизам алгебри.

Доказ. (1) $F^*(\alpha + \beta)X = (\alpha + \beta)(F_*X) = \alpha(F_*X) + \beta(F_*X) = (F^*\alpha + F^*\beta)X$

(2)

$$\begin{aligned}
F^*(\alpha \wedge \beta)(X, Y) &= (\alpha \wedge \beta)(F_*(X), F_*(Y)) \\
&= \begin{vmatrix} \alpha(F_*(X)) & \alpha(F_*(Y)) \\ \beta(F_*(X)) & \beta(F_*(Y)) \end{vmatrix} \\
&= \alpha(F_*(X)) \cdot \beta(F_*(Y)) - \alpha(F_*(Y)) \cdot \beta(F_*(X)) \\
&= F^*(\alpha)X \cdot F^*(\beta)Y - F^*(\alpha)Y \cdot F^*(\beta)X \\
&= \begin{vmatrix} F^*(\alpha)X & F^*(\alpha)Y \\ F^*(\beta)X & F^*(\beta)Y \end{vmatrix} \\
&= (F^*(\alpha) \wedge F^*(\beta))(X, Y)
\end{aligned}$$

□

Напомена. Pullback се такође слаже и са спољашњим диференцијалом, односно важи

$$F^* \circ d = d \circ F^*$$

за $F : U \to V$ пресликавање класе C^∞, где су $U \in \mathbb{R}^n$ и $V \in \mathbb{R}^k$. Захваљујући овоме, могуће је дефинисати $d : \Omega^l(M) \to \Omega^{l+1}(M)$ за произвољну многострукост.

Тврђење. (Лајбницово правило) Нека су $\alpha \in \Omega^l(M)$ и $\beta \in \Omega^k(M)$ две форме. Тада важи

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^l \alpha \wedge d\beta$$

Доказ. Због линеарности d довољно је доказати формулу за $\alpha = f(x)dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$ и $\beta = g(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. Применити дефиницију d и извести закључак. □

Теорема. $\alpha \in \Omega^l(M) \implies d(d\alpha) = 0$