Анализа 2 – основне идеје доказа важнијих теорема и тврђења

1 Непрекидност

Тврђење. (Коши - Шварцова неједнакост) Ако је $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позитивна хермитска форма, онда је
$$|\langle x, y\rangle|^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$$

Доказ. Нека су $x, y \in X$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Због позитивности $0 \leq \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle$. Расписати претходни израз, заменити $\alpha = \frac{-\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ и извести тражено. У случају да је $\alpha \in \mathbb{C}$ показати да је $|\langle x, y\rangle| = (\mathrm{Re}\langle x, \alpha y\rangle)^2$. Свести на први случај. □

Тврђење. За линеарно пресликавање $L : X \to Y$ нормираних векторских простора следећи искази су еквивалентни:

а) L је непрекидно у једној тачки

б) L је непрекидно

в) L је равномерно непрекидно

г) L је Липшицово

д) $\sup_{\|x\|=1} \|L(x)\| < \infty$

Доказ. Приметити да г) $\implies$ в) $\implies$ б) $\implies$ а) увек важи. Даље, д) $\implies$ г) следи из дефиниције $\mathrm{lip} f$. Потребно је још доказати а) $\implies$ д). Како из LCa следи да је L ограничено на некој лопти $B[a;\rho]$,тј. ограничено је и на $S[a;\rho]$. Представити $S[a;\rho]$ као $a+\rho S[0;1]$ и одале извести закључак. □

Теорема. Нека су X и Y метрички простори. За $f : X \to Y$ следећи искази су еквивалентни:

а) f је непрекидно

б) За сваки отворен скуп $V \subseteq Y$ скуп $f^{-1}(V) \subseteq X$ је отворен

в) За сваки затворен скуп $G \subseteq Y$ скуп $f^{-1}(G)$ је затворен

г) За сваки подскуп $A \subseteq X$ је $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

Доказ. а) $\implies$ г) : Доказати да за $a \in \overline{A}$ вази $f(a) \in \overline{f(A)}$. Искористити непрекидност у тачки a.
г) $\implies$ в) : Доказати да је $f^{-1}(G)$ једнако $\overline{f^{-1}(G)}$.
в) $\implies$ б) : Искористити затвореност $f^{-1}(Y \setminus V) = Y \setminus f^{-1}(V)$.
б) $\implies$ а) : Доказати да $f^{-1}(W) \in \mathcal{F}_a$ где је $V \subseteq W$ и V отворен, а $a \in X$ и $W \in \mathcal{F}_{f(a)}$. □

Тврђење. (Принцип продужења једнакости) Нека су X, Y метрички простори, $f, g : X \to Y$ непрекидна пресликавања, $A \subseteq X$. Тада важи:

(1) Скуп $S = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ је затворен

(2) $f|_A = g|_A \implies f|_{\overline{A}} = g|_{\overline{A}}$

Доказ. (1) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow d(f(x), g(x)) = 0$. Тада $S = (d(f,g))^{-1}(\{0\}$ затворен због непрекидности $d(f, g)$.

(2) $f|_A = g|_A \implies A \subseteq S \implies \overline{A} \subseteq \overline{S} = S \implies f|_{\overline{A}} = g|_{\overline{A}}$

$\square$

Тврђење. (Принцип продужења неједнакости) Нека је X метрички простор, $A \subseteq X$ и $f, g : X \to \mathbb{R}$ непрекидна пресликавања. Тада важи:

1) Скуп $V = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$ је отворен

2) Скуп $V = \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$ је затворен

3) $f|_A \leq g|_A \implies f|_{\overline{A}} \leq g|_{\overline{A}}$

4) $\sup f(A) = \sup f(\overline{A})$ (аналогно и за inf)

Доказ. Дефинисати пресликавање $\varphi := g - f : X \to \mathbb{R}$ и за 1) и 2) посматрати инверзне слике скупова $[0, \infty)$ и $]0, \infty)$. Под 3) се доказује као у претходном тврђењу. 4) следи из 3) ако узмемо да је $g = C$ где је C константа којом је ограничена рестрикција f на A. $\square$

Напомена. У претходном тврђењу кодомен функција f и g је $\mathbb{R}$ због тога што нам је због неједнакости потребно уређење на кодомену.

Последица. $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$

Доказ. Следи из принципа продужења неједнакости. $\square$

Тврђење. (Смена променљиве у лимесу) Нека су X, Y метрички простори, $A \subseteq X$, $a \in \overline{A}$. Тачка $\xi \in Y$ је гранична вредност пресликавања f у тачки a. Нека је $\varphi : M \to X$ хомеоморфизам метричког простора M на X. Тада је

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{t \to \varphi^{-1}(a)} f \circ \varphi(t)$$

Доказ. Формирајмо низ $t_n \in \varphi^{-1}(A)$ који тежи ка $\varphi^{-1}(A)$. Тада $f(\varphi(t_n)) \to \xi$ због непрекидности φ у a и због $\lim_{x \to a} f(x) = \xi$. $\square$

1.1 Комплетност

Тврђење. Подскуп $A \subseteq X$ комплетног простора X је комплетан акко је затворен.

Доказ. $\boxed{\Rightarrow}$ Доказати да је $A = \overline{A}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Из затворености сваки Кошијев низ је конвергентан у A. $\square$

Напомена. Примери простора који нису комплетни су незатворени подскупови комплетних.

Тврђење. Производ $(X, d_\infty) = \prod_{j=1}^{k} (X_i, d_i)$ је комплетан ако и само ако су сви X_i комплетни.

Доказ. Нека је $\pi_j : X \to X_j$. Доказати да низови $\pi_j a_n$ конвергирају у просторима X_j, где је a_n низ у X. $\square$

Теорема. (Канторова карактеризација комплетности) Метрички простор (X, d) је комплетан ако и само ако сваки опадајући низ непразних затворених подскупова чији низ дијаметара тези нули има непразан пресек.

Доказ. $\boxed{\Rightarrow}$ Претпоставимо да је простор комплетан. Нека је F_n низ подскупова из услова теореме. Формирамо низ $a_n \in F_n$. Покази да је тај низ Кошијев, па је због комплетности и конвергентан, стога пресек је a_∞ па није празан.
$\boxed{\Leftarrow}$ Нека је a_n Кошијев низ у X. Дефинисати $F_n := \overline{\{a_n, a_{n+1}, ...\}}$, па како X има Канторово својство, пресек није празан, тј постоји $a_\infty \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. $\square$

Теорема. (Продужење непрекидног пресликавања) Нека су X, Y метрички простори, $A \in X$, $\overline{A} = X$ (тј. A густ у X) и $f : A \to Y$ непрекидно пресликавање. Тада важи:

(1) Постоји непрекидно пресликавање $F : X \to Y$ са особином $F|_A = f$ ако и само ако $(\forall x \in X)\ \exists \lim_{t\to x} f(t) =: g(x)$. При томе је $F \equiv g$ (јединственост продужења).

(2) Ако је f равномерно непрекидно и Y комплетан, онда постоји равномерно непрекидно $F : X \to Y$ са особином $F|_A = f$.

Доказ. (1) Један смер је тривијалан. За други смер искористити својство непрекидне функције $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, примењено на одговарајућу околину тачке.

(2) Нека је $x \in X$ произвољна тачка и a_n низ у A који тежи ка x. Тада је a_n Кошијев, па је $f(a_n)$ такође Кошијев (јер је Y комплетан и f равномерно непрекидно), па је $f(a_n)$ конвергентан. Да бисмо могли да кажемо $F(x) := \lim_{n\to\infty} f(a_n)$, морамо доказати да ова дефиниција не зависи од избора низа. Претпоставимо да $b_n \to x$. Доказати тада $d_X(a_n, b_n) \to 0$ и одатле, из равномерне непрекидности, закључити да $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \to 0$, одакле следи добра дефиниција (ово је смислено због карактеризације лимеса у тачки преко лимеса низа).

$\square$

Теорема. (Банахова теорема о фиксној тачки) Нека је X комплетан метрички простор, $f : X \to X$ контракција, $0 < q = \text{lip} f < 1$. Тада f има тачно једну фиксну тачку, тј. постоји јединствена тачка $a_\infty \in X$ таква да је $f(a_\infty) = a_\infty$.

Тачка a_∞ је гранична вредност низа дефинисаног рекурентно: a_0 произвољно, $a_{n+1} = f(a_n)$ (низ сукцесивних апроксимација) и при томе важи

$$d(a_n, a_\infty) \leq \frac{q^n}{1-q} d(a_0, a_1)$$

Доказ. Почети од $d(a_{n+2}, a_{n+1}) = d(f(a_{n+1}), f(a_n)) \leq q d(a_{n+1}, a_n)$. Помножити неједнакост са $q^{-(n+1)}$. Закључити да је низ $q^{-n} d(a_{n+1}, a_n)$ опадајући. Проценити $d(a_{n+1}, a_n)$ са $d(a_1, a_0)$. Проценити $d(a_m, a_n)$ (супремум тога) и закључити да је a_n Кошијев. Тад је фиксна тачка лимес тог низа. Доказати јединственост супротном претпоставком. $\square$

Теорема. Нормирани векторски простор X је комплетан ако и само ако је сваки апсолутно конвергентан ред у њему конвергентан.

Доказ. $\boxed{\Rightarrow}$ Нека је X комплетан и $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_k\| < \infty$. Нека је $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Доказати да је s_n Кошијев.
$\boxed{\Leftarrow}$ Нека је a_n Кошијев у X. Тада постоји $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ тд. $\left\|a_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n+1)}\right\| \leq 2^{-n}$. Пошто $\sum 2^{-n}$ конвергира, закључити и да $a_{\varphi(n)}$ конвергира. Искористити чињеницу да је Кошијев низ који има конвергентан подниз и сам конвергентан. Следи комплетност X. □

Теорема. $B_Y(X)$ је Банахов ако и само ако је Y Банахов.
Последица. $\mathcal{L}(X;Y)$ је комплетан ако и само ако је Y комплетан.

Доказ. Доказ следи из претходног и тога да је $\mathcal{L}(X;Y) \hookrightarrow B_Y(S)$ изоморфизам на затворен подскуп, где је $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$. □

Напомена. Ако је X нормирани векторски простор над пољем $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, онда је његов дуал $X^* := \mathcal{L}(X;\mathbb{K})$ комплетан.

Напомена. У коначно димензионом случају $X \cong X^*$, тј важи Рисова теорема о репрезентацији

$$(\forall \alpha \in X^*)(\exists a \in X)(\forall v \in X)\ \alpha(v) = \langle v, a \rangle$$

Напомена. У бесконачно димензионом слуцају не мора да важи претходно, X не мора бити комплетан, а X^* је увек комплетан.

Напомена. Ако је X Хилбертов, онда је $X \cong X^*$.

1.2 Компактност

Тврђење. Компактан метрички простор је комплетан.

Доказ. Следи из чињенице да ако Кошијев низ има конвергентан подниз, онда је и сам конвергентан. □

Тврђење.

(1) Компактан скуп је затворен

(2) Затворен подскуп компактног скупа је компактан

Доказ. (1) Раније доказано за комплетност

(2) Тривијално

□

Тврђење. Непрекидна слика компактног скупа је компактан.

Доказ. Конструисати низ b_n у $f(X)$. Наћи његов конвергентан подниз. □

Последица. Непрекидна реална функција на компактном скупу је ограничена и има min и max.
Тврђење. Производ метричких простора је компактан ако и само ако су такви простори фактори.

Доказ. $\boxed{\Rightarrow}$ пројекције су непрекидне сурјекције па су има слике компактне
$\boxed{\Leftarrow}$ принцип дијагонализације $\square$

Тврђење. Компактан скуп је ограничен.

Доказ. Непрекидност $f : A \to \mathbb{R}$ $f(x) = d(x, a)$ $\square$

Тврђење. Нека су X и Y метрички простори, X компактан, $f : X \to Y$ непрекидна бијекција. Тада је f хомеоморфизам, тј. пресликавање $f^{-1} : Y \to X$ је такође непрекидно.

Доказ. Нека је $F \subseteq X$ затворен подскуп. Тада је F компактан, па је и $f(F)$ компактан, односно $f(F)$ је затворен. Закључак следи из чињенице да је непрекидна слика затвореног скупа затворена акко је пресликавање непрекидно. $\square$

Напомена. Пресликавање $\varphi : [0, 2\pi[\to \mathbb{S}^1$ дато као $\varphi(t) := e^{it}$ је непрекидна бијекција која није хомеоморфизам.
Теорема. (Канторова) Непрекидно пресликавање на компакту је равномерно непрекидно.

Доказ. Претпоставити супротно, да је X компактан, $f : X \to Y$ непрекидно, али није равномерно. Негирати услов равномерне непрекидности и узети $\delta = \frac{1}{n}$. Извести контрадикцију. $\square$

Лема. Свака норма
$$\|\cdot\| : \mathbb{K}^r \to \mathbb{R}$$
на векторском простору $\mathbb{K}^r$ је Липшицово пресликавање нормираног векторског простора $(\mathbb{K}^r, \|\cdot\|)$ са стандардном еуклидском нормом.

Доказ. Представити $x = (x_1, \ldots, x_r)$ као линеарну комбинацију базних вектора. Применом Коши-Шварцове неједнакости закључити да је $\|x\| \leq C|x|$, односно даље, $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\| \leq C|x - y|$. $\square$

Тврђење. Нека је $\|\cdot\|$ произвољна норма. Тада
$$(\exists m, M \in (0, \infty))(\forall x \in \mathbb{K}^r)\; m|x| \leq \|x\| \leq M|x|$$
где је $|\cdot|$ стандардна еуклидска норма на $\mathbb{K}^r$.

Доказ. Пошто је јединична сфера компактан скуп, $\|\cdot\|$ достиже минимум и максимум на њему. Важи
$$m \leq \left\| \frac{x}{|x|} \right\| \leq M$$
$\square$

Напомена. На $k - \dim$ простору све норме су еквивалентне.

Последица. Свака два нормирана векторска простора исте коначне димензије су алгебарски и тополошки изоморфна.

Напомена. Димензија је једина инваријанта коначно димензионог векторског простора.

Тврђење. Метрички простор је тотално ограничен (пред-компактан) ако и само ако сваки низ у њему има Кошијев подниз.

Доказ. $\boxed{\Rightarrow}$ Нека је X тотално ограничен и нека је $a \in X^{\mathbb{N}}$. Нека је E_1 1-мрежа. Тада се за неко $e_1 \in E_1$ у лопти $B_1 = B]e1; 1[$ налази бесконачно много чланова низа a_n. Даље, понављати поступак за $\frac{1}{n}$ - мреже. Добија се низ лопти B_n таквих да је свака следећа садржана у претходној. Тразени низ дефинисати као $a \circ \varphi$ где је $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ дато са:

$$\varphi(0) = 0, \varphi(n+1) = \min a^{-1}(B_n \cap (\varphi(n), +\infty))$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Претпоставити супротно, да X није тотално ограничен. Извести контрадикцију. □

Последица. Метрички простор је компактан ако и само ако је комплетан и тотално ограничен.

Тврђење. Подскуп $A \subseteq X$ комплетног метричког простора X је релативно компактан, односно његово затворење је компактно, ако и само ако је тотално ограничен.

Доказ. Из компактности $\overline{A}$ закључити да је $\overline{A}$ комплетан и тотално ограничен. Применом продужења неједнакости закључити да је и A тотално ограничен. □

Напомена. Сваки компактан подскуп у Хаусдорфовом простору је релативно компактан

Лема. (Лебегова) Нека је X компактан метрички простор и $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ његово отворено покривање. Тада $(\exists \delta > 0)$ са својством да је свака отворена лопта полупречника δ садржана у неком V_λ.

1.3 Простор непрекидних пресликавања

Тврђење. X компактан $\implies C(X;Y) \subseteq B(X;Y)$

Доказ. Закључити из тога да функција $f : X \to \mathbb{R}$ која слика $x \mapsto d(b, f(x))$ на компакту достиже минимум и максимум. □

Тврђење. $C_Y(X)$ је затворен у $B_Y(X)$.

Доказ. Нека је $f_n : X \to Y$ низ у $C_Y(X)$. Нека $f_n \longrightarrow f_\infty$ кад $n \to \infty$. Доказати да је $f_\infty \in C_Y(X)$, односно да је $(\forall a \in X) fCa$. Искористити дефиницију непрекидности у тачки. □

Последица. Ако је X компактан и Y комплетан, онда је и $C_Y(X)$ комплетан.

Доказ. Због тога што, ако је X компактан тада је $C(X;Y) \subseteq B(X;Y)$. Ако је Y комплетан, тада је $B(X;Y)$ комплетан. Према претходном $C(X;Y)$ је затворен у $B(X;Y)$, па стога закључујемо да је и комплетан као затворен подскуп комплетног скупа. □

Теорема. (Дини) Нека је X компактан метрички простор и f_n монотон низ у $C_{\mathbb{R}}(X)$ такав да важи:

(1) $(\forall x \in X) \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f_\infty(x)$

(2) $f_\infty \in C_{\mathbb{R}}(X)$

Тада $f_n \rightrightarrows f_\infty$ (тј. $f_n \to F$ у $(C_{\mathbb{R}}(X), d_\infty)$.

Доказ. На кодомену $\mathbb{R}$ метрика је дефинисана уз помоћ $|\cdot|$, даље на $C_{\mathbb{R}}(X)$ имамо норму $\|g\|_\infty := \max_{x \in X} |g(x)|$ и равномерна метрика је $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$. Посматрајмо низ функција: $g_n : X \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = |f_\infty(x) - f_n(x)|$. Доказ спровести у два корака:

1) Из особина низа g_n закључити да $\|g_n\|_\infty \searrow$.

2) Формирати низ $F_n = \{x \in X | g_n(x) \geq \epsilon\}$. Он је затворен. Доказати да важи $\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_\infty = 0$. Одатле следи тражено.

Могуће је и посматрати низ отворених скупова $U_n = \{x \in X | g_n(x) < \epsilon\}$. Ово је отворени покривач компактног простора X, одакле следи да имамо коначан потпокривач. Како је g_n опадајући низ, одабиром максималног n из коначног потпокривача следи да је $\|g_n\|_\infty < \varepsilon$, а како је ε произвољно, одатле следи доказ. □

Теорема. (Коровкинова) Нека је X компактан метрички простор и $S \subseteq C_{\mathbb{R}}(X)$ подскуп, такав да је њиме генерисани векторски простор минимизирајући. Ако је

$$P_n : C_{\mathbb{R}}(X) \to C_{\mathbb{R}}(X)$$

низ позитивних линеарних пресликавања такав да $(\forall f \in S) P_n f \rightrightarrows f$, тада важи

$$(\forall f \in C_{\mathbb{R}}(T)) P_n f \rightrightarrows f$$

Доказ. Због линеарности униформне конвергенције и линеарности P_n можемо да претпоставимо да је $S = M$. Нека је $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$. Извести доказ у три корака:

1) Нека је $\epsilon > 0$. Тада

$$(\forall a \in X)(\exists g \in M) g(a) \leq f(a) + \epsilon \wedge g > f$$

2) $(\forall \epsilon > 0)$ $\exists$ коначан низ $g_1, \dots, g_r \in M$ такав да је $f < \inf\{g_1, \dots, g_r\} \leq f + \epsilon$

3) Применом претходног, доказати да је $\|P_n f - f\|_\infty = \sup_{x\in X} |P_n f - f| < \epsilon$.

□

Пример. (Бернштајнови полиноми) $B_n : C[0,1] \to C[0,1]$

$$B_n f(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f\left(\frac{j}{n}\right) x^j (1-x)^{n-j}$$

Нека је $S = \{e_0, e_1, e_2\}$, $e_0(x) = 1, e_1(x) = x, e_2(x) = x^2$ и нека је M векторски простор са базом $\{e_0, e_1, e_2\}$. $M \subseteq C[0,1]$, M је минимизирајући. Важи да $B_n e_j \rightrightarrows e_j$ за све $j \in \{0,1,2\}$. По Коровкиновој теореми закључујемо:

$$(\forall f \in C[0,1]) \; B_n f \rightrightarrows f$$

.

Последица. (Прва Вајерштрасова теорема) Скуп полинома је густ у $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$.

Доказ. Хомеоморфизам $\varphi : [0,1] \to [a,b]$ где је $\varphi(t) = bt + a(1-t)$ дефинише линеарну измометрију $\varphi^* : C[a,b] \to C[0,1]$ са $\varphi^* f = f \circ \varphi$. Даље разматрање своди се на претходни пример. □

Напомена. Профињење Прве Вајерштрасове теореме је развој у степени ред.

Теорема. (Стон - Вајерштрасов став)

- Реални облик: Ако је $\mathcal{A}$ подалгебра алгебре $C_{\mathbb{R}}(X)$ која садржи 1 и разликује тачке, тј. важи $(\forall x, y \in X) x \neq y \implies (\exists f \in \mathcal{A}) f(x) \neq f(y)$, онда је $\mathcal{A}$ густа у $C_{\mathbb{R}}(X)$: $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}(X)$.

- Комплексни облик: Ако је $\mathcal{A}$ подалгебра алгебре $C_{\mathbb{C}}(X)$ која садржи 1 и разликује тачке и затворена је за конјуговање, тј. $f \in \mathcal{A} \implies \overline{f} \in \mathcal{A}$, онда је $\mathcal{A}$ густа у $C_{\mathbb{C}}(X)$.

Доказ. □

Последица. (Друга Вајерштрасова теорема)

- Алгебра генерисана скупом $\{e^{int}\}$ је густа у $C_{\mathbb{C}}(2\pi)$.

- Алгебра генерисана скупом $\{1, \cos nt, \sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ је густа у $C_{\mathbb{R}}(2\pi)$.

Напомена. Профињење Друге Вајерштрасове теореме јесте развој у Фуријеов ред.

Теорема. (Арцела - Асколијева теорема) Нека је X сепарабилан и $f_n : X \to \mathbb{C}$ низ који је:

1. ограничен по тачкама, тј. $(\forall x \in M)\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$

2. равностепено непрекидан

Тада низ f_n има подниз који равномерно конвергира на сваком компактном подскупу.

Доказ. Пошто је X сепарабилан, постоји пребројив густ подскуп $S \subset X$. Поређајмо његове тачке у низ $S = \{x_1, x_2, \dots\}$. Дефинишимо низ подскупова $N_k \subset \mathbb{N}$ индуктивно. Нека је $N_0 = N$. Нека је N_k дефинисано. Према услову 1. постоји бесконачан скуп $N_{k+1} \subset N_k$, такав да постоји

$$\lim_{N_{k+1}\ni n\to\infty} f_n(x_{k+1})$$

Формирајмо $N := \{n_1, n_2, \dots\}$ где је n_k k - ти елемент из скупа N_k за свако k - дијагонални избор. Из конструкције следи да за свако $x \in S$ постоји

$$\lim_{N\ni n\to\infty} f_n(x).$$

Нека је $K \subset M$ компактан подскуп. Покрити K са коначно много отворених лопти, које су довољно малог полупречника таквог да је за свако n вредност $|f_n(x) - f_n(y)|$ произвољно мала (ово је могуће због равностепене непрекидности). Искористити сада и да постоји тачка у пресеку S и сваке такве лопте. На крају довршити доказ оценом $|f_n(x) - f_m(x)|$ уз помоћу неједнакости троугла, Косијевог услова (у комплетном простору $\mathbb{C}$). □

Напомена. У Арцела - Асколијевој теореми X може бити и компактан, пошто је компактност јаче својство од сепарабилности.

1.4 Повезаност

Теорема. За тополошки простор (X, τ) следећи искази су еквивалентни:

а) X не може да се представи као унија 2 дисјунктна непразна отворена скупа

б) X не може да се представи као унија 2 дисјунктна непразна затворена скупа

в) Једини подскупови у X који су и отворени и затворени су $\emptyset$ и X

г) Свако непрекидно пресликавање $X \to \{0,1\}$ (где је $\{0,1\}$ метрички простор са дискретном метриком $d(0,1) = 1, d(0,0) = d(1,1) = 0$) је константно

Доказ. а) $\Leftrightarrow$ б) : Претпоставити супротно. Закључак следи из чињенице да ако је A отворен тада је $B = X \setminus A$ затворен и обрнуто.
а) $\implies$ в) : Претпоставити супротно, да постоји $A \subset X$ који је и отворен и затворен и непразан. Тада се X може представити као унија два отворена дисјунктна скупа A и $X \setminus A$ одакле следи контрадикција сем ако A није празан.
в) $\implies$ а) : Слично претходном.
а) $\implies$ г) : Претпоставити супротно, да f није константно. Доказати да тада не важи а). Контрапозиција.
г) $\implies$ а) : Претпоставити $\neg$ а). Користећи чињеницу да је инверзна слика отвореног скупа отворен скуп закључити $\neg$ г). □

Тврђење. Ако је S повезан скуп и $S \subseteq A \subseteq \overline{S}$, онда је и A повезан.

Доказ. Посматрати непрекидно пресликавање $f : A \to \{0,1\}$ које због повезаности мора бити const. Закључак следи из принципа продужења једнакости. □

Тврђење. Ако је $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ фамилија повезаних скупова и $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \neq \emptyset$, онда је $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ повезан скуп.

Доказ. Конструисати непрекидно прескикавање $f : \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \to \{0,1\}$. На сваком S_λ оно је const. Посто је пресек њих непразан, мора бити const и на целој унији. □

Напомена. Важи и уопштење: $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ повезани и $(\exists \lambda_0)(\forall \lambda \in \Lambda) S_\lambda \bigcap S_{\lambda_0} \neq \emptyset \implies \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ повезан - (теорема "цветић").
Последица. Декартов производ повезаних метричких простора је повезан.

Доказ. Представити $M \times N = \bigcup_{a \in M} \{a\} \times N = (\bigcup_{a \in M} \{a\} \times N) \cup (M \times \{y_0\})$. Даље, следи на основу претходног. □

Тврђење. Непрекидна слика повезаног скупа је повезан скуп.

Доказ. Следи из дефиниције и сурјективности $f : X \to f(S)$. □

Тврђење. Путно повезан скуп је повезан.

Доказ. Показати да је непрекидно $\varphi : S \to \{0,1\}$ константно. Закључити да је $\varphi \circ \gamma = \text{const}$ где је $\gamma : [0,1] \to S$ непрекидно такво да је $\gamma(0) = s_0, \gamma(1) = x$. Одатле следи $\varphi(x) = \varphi(s_0)$, тј. $\varphi = \text{const}$. □

Тврђење. Непрекидна слика путно повезаног скупа је путно повезан.

Доказ. Конструисати $f \circ \gamma$. Посматрати шта је то пресликавање у 0 и 1. □

Напомена. Претходни доказ и доказ сличног тврђења за обичну повезаност су на неки начин дуални ("метод обрнутих стрелица").

2 Диференцирање

2.1 Диференцирање у нормираним векторским просторима

Теорема. (Извод сложене функције) Нека су X, Y, и Z нормирани векторски простори, $V \subseteq X$, $W \subseteq Y$ отворени скупови, $f : V \to Y$, $g : W \to Z$ и $a \in V$, $f(a) \in W$. Тада важи:

$$f\mathcal{D}a \wedge g\mathcal{D}f(a) \implies g \circ f\mathcal{D}a$$

и при томе је

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

Доказ. Доказ следи из дефиниције извода пресликавања и чињенице да је $o(O(h)) = o(h)$. □

Теорема. (Извод инверзне функције) Нека су X и Y нормирани векторски простори, $V \subseteq X$ отворен скуп, $a \in V$ и $f : V \to Y$ пресликавање са следећим својствима:

1) $f\mathcal{D}a$

2) $Df(a)$ инвертибилан

3) у некој W околини тачке $b := f(a)$ пресликавање f има инверзно

4) $f^{-1}Cb$

Тада је $f^{-1}\mathcal{D}b$ и важи:

$$(Df^{-1})(b) = (Df(a))^{-1}$$

Доказ. Нека је $b = f(a), a = f^{-1}(b)$. Показати да, пошто су транслације хомеоморфизми, важи $f(a + h) = b + t$ и $f^{-1}(b + t) = a + h$. Из непрекидности f^{-1} у b закључити чему је једнако $f^{-1}(b + t) - f^{-1}(b)$. Из услова $f\mathcal{D}a$ закључити чему је једнако $(f'(a))^{-1}t$ као и да је $o(h) = o(t)$. На основу претходних корака, и дефиниције извода, извести коначни закључак. □

Тврђење. Ако је простор Банахов (комплетан нормиран векторски простор), скуп $GL(X)$ је отворен у $\mathcal{L}(X; X)$.

Доказ. Посматрати $A \in GL(X)$ и $h \in \mathcal{L}(X; X)$. Доказати да је и $A + h \in GL(X)$ односно да постоји $(A + h)^{-1}$. Искористити комплетност домена као и дефинисаност норме. □

Напомена. Претходно тврђење важи и у нешто општијем случају, за $\mathcal{L}(X; Y)$, уколико је X Банахов, а Y нормирани векторски простор.

Теорема. (Теорема о коначном прираштају) Нека су X и Y нормирани векторски простори, $V \in X$ отворен и $f : V \to Y$ непрекидно. Ако је

$$[a, a + h] = \{a + th \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq V$$

и ако је пресликавање f диференцијабилно у свим тачкама скупа

$$]a, a + h[= \{a + th \mid 0 < t < 1\}$$

онда важи

$$\|f(a + h) - f(a)\| \leq \sup_{x \in]a,a+h[} \|f'(x)\| \cdot \|h\|$$

Доказ. Доказати да теорема важи на сваком сегменту $[c_1, c_2] \subseteq]a, a+h[$. Претпоставити супротно,

$$\sup_{x \in [c_1, c_2]} \|f'(x)\| < \frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta x\|}$$

Поделити интервал $[c_1, c_2]$ на два подинтервала и применити помоћну лему на њих. Продужити поступак, формирати низ интервала. Поново применити помоћну лему. Извести контрадикцију. □

Напомена. Помоћна лема из претходне теореме је следећа неједнакост:

Ако за $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}_+$ важи $c \leq a + b$ и $\gamma = \alpha + \beta$, онда је

$$\frac{c}{\gamma} \leq \max\{\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\}$$

Теорема. (Ојлерова теорема) Нека је X нормирани векторски простор над $\mathbb{R}$. Диференцијабилна функција $f : X \to \mathbb{R}$ је хомогена степена $k > 0$ ако и само ако је

$$df(x) \cdot x = kf(x)$$

Доказ. Дефинишати помоћну функцију $\psi(t) = f(tx) - t^k f(x)$ и одатле доказати оба смера еквиваленције. □

Тврђење. $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y)) \cong \mathcal{L}(X, X; Y)$

Доказ. Нека је $L \in \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y))$ произвољно. Дефинисати $\tilde{L} : X \times X \to Y$ као

$$\tilde{L}(\eta, \xi) := L(\eta)(\xi)$$

Доказати да је са $\varphi(L) = \tilde{L}$ добро дефинисан тражени изоморфизам. □

Тврђење. $fD^n a \implies D^n f(a)$ је симетрично n-линеарно пресликавање.

Доказ. Приметити најпре да је довољно доказати за транспозиције, јер оне генеришу групу пермутација. Увести

$$F_{\zeta,\eta}(t) := f(a + t(\zeta + \eta)) - f(a + t\zeta) - f(a + t\eta) - f(a)$$

и доказати да је

$$D^2 f(a)(\zeta, \eta) = \lim_{t \to 0} \frac{F_{\zeta,\eta}(t)}{t^2}.$$

Извести закључак из тога, чињенице да је F симетрично по ζ и η, као и

$$D^n f(a)(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = D_{\zeta_1} D_{\zeta_2} \dots D_{\zeta_n} f(a).$$

□

Теорема. Нека су X, Y нормирани векторски простори, $V \subseteq X$ отворен, $a \in V$, $f\mathcal{D}^{n-1}V$ и $f\mathcal{D}^n a$. Тада је

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)h^n + o(\|h\|^n), h \to 0$$

Доказ. Доказ извести индукцијом по n коришћењем Последице 2. теореме о коначном прираштају и чињенице да је $(Lx^n)' = nLx^{n-1}$. □

2.2 Унутрашње тачке екстремума

Тврђење. Нека је V отворен подскуп нормираног векторског простора X, $a \in V$, $f : V \to \mathbb{R}$, $fD^n a$, $Df(a) = D^2 f(a) = \ldots = D^{n-1} f(a)$, $D^n f(a) \neq 0$. Да би a била тачка локалног екстремума функције f:

- **неопходно** је да n буде паран број и да је $D^n f(a)$ семидефинитна форма.
- **довољно** је да су вредности $D^n f(a) h^n$ одвојене од 0 на јединичној свери $\|h\| = 1$.

Доказ. Применити Тејлорову формулу. □

Пример. (Ојлер–Лагранжове једначине)

2.3 Теорема о имплицитној функцији

Теорема. (Теорема о имплицитној функцији) Нека су X, Y и Z нормирани векторски простори, при чему је Y комплетан, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ и $W = B]x_0; \alpha[\times B]y_0; \beta[\subseteq X \times Y$. Претпоставимо да пресликавање $F : W \to Z$ испуњава следеће услове:

(1) $F(x_0, y_0) = 0$

(2) $FC(x_0, y_0)$

(3) $D_2 F$ дефинисано на W и непрекидно у тачки (x_0, y_0)

(4) $\exists (D_2 F(x_0, y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(Z; Y)$

Тада постоје околине U и V тачака x_0 и y_0 и пресликавање $f : U \to Y$ са својствима:

(а) $U \times V \subseteq W$

(б) $[(x, y) \in U \times V \text{ и } F(x, y) = 0] \iff y = f(x)$

(в) fCx_0

Доказ. Пошто су транслације хомеоморфизми, без умањења општости претпоставити да важи $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Дефинисати помоћну функцију $g_x : B]0; \beta[\to Y$ као

$$g_x(y) := y - (D_2 F(0, 0))^{-1} F(x, y).$$

Користећи Теорему о коначном прираштају доказати да је g_x контракција и да слика неки комплетан скуп у себе. Применити Банахов став о фиксној тачки. Одатле извести закључак. □

Теорема. (Теорема о инверзној функцији) Нека су X, Y нормирани векторски простори, при чему је Y комплетан, нека је $V \subseteq Y$ отворен скуп, $y_0 \in V$ и $g : V \to X$ пресликавање које има следећа својства:

(1) $g \in \mathcal{D}(V; X)$

(2) $DgCy_0$

(3) $\exists (Dg(y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(X; Y)$

Тада постоје околина $V_0 \subseteq Y$ тачке y_0 и околина $U_0 \subseteq X$ тачке $x_0 := g(y_0)$ такве да је $g : V_0 \to U_0$ бијекција, $g^{-1}\mathcal{D}x_0$ и важи

$$Dg^{-1}(x_0) = (Dg(y))^{-1}.$$

Доказ. Доказ следи из Теореме о имплицитној функцији примењене на функцију $F(x, y) = x - g(y)$. □

Теорема. (Теорема о рангу) Нека је $V \subseteq \mathbb{R}^k$ отворен и $f : V \to \mathbb{R}^l$ пресликавање класе C^n, такво да је за све $x \in V$ $\operatorname{rang} Df(x) = r$. Тада у околини сваке тачке $x_0 \in V$ и њене слике $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^l$ постоје локалне координате класе C^n у којима f има запис

$$f : (s_1, \ldots, s_k) \to (s_1, \ldots, s_r, 0, \ldots, 0).$$

Краће речено, пресликавање константног ранга r локално изгледа као пројекција на $\mathbb{R}^r$.

Доказ. □

Тврђење. Сваки дифеоморфизам класе C^1

$$\mathbb{R}^l \supseteq V \xrightarrow{f} f(V) \subseteq \mathbb{R}^l$$

може локално да се представи као композиција l простих дифеоморфизама.

Доказ. Индукцијом по k доказати да дифеоморфизам који мења највише k координата може локално да се представи као композиција k простих дифеоморфизама. □

3 Многострукости

3.1 Подмногострукости у $\mathbb{R}^n$ и условни екстремуми

Тврђење. За $M \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ следећа тврђења су еквивалента:

(а) M је k - димензиона подмногострукост класе C^p

(б) $(\forall p \in M)$ постоје отворене околине $p \in V$ и $0 \in U$ у $\mathbb{R}^{k+l}$ и дифеоморфизам $g : U \to V$ класе C^p такав да је $g(V \cap M) = U \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$

(в) $(\forall p \in M)$ постоје отворене околине $p \in V$ у $\mathbb{R}^{k+l}$ и $0 \in U$ у $\mathbb{R}^k$ и имерзија $h : D \to V$ класе C^p таква да је $h : D \to V \cap M$ хомеоморфизам у релативној топологији на $V \cap M$ наслеђеној из R^{k+l}.

Доказ. Како је k-дим подмногострукост у $\mathbb{R}^{k+l}$ локално задата једначином $f(x) = 0$, где је f сумбмерзија и $\operatorname{rang} Df(x) = l$, из Теореме о рангу закључити да је могуће изабрати локалне координате у којима f има запис

$$f(x_1, \ldots, x_{k+l}) = (x_1, \ldots, x_l).$$

Одатле директно закључити (б). Уз помоћ претходног, дефинисати тражену имерзију и закључити (в). □

Тврђење. Нека је $h : D \to M$ локална параметризација околине тачке $p = h(0)$ и нека је $f : V \to \mathbb{R}^l$ субмерзија таква да је $M \cap V = f^{-1}(0)$. Тада важи да је $T_pM = \ker Df(p)$.

Доказ. Диференцирањем $f(h(t)) \equiv 0$ у тачки $t = 0$ и применом правила за извод композиције пресликавања закључити да је $T_pM \subseteq \ker Df(p)$. Одатле, применом Прве теореме о изоморфизму на пресликавање $Df(p)$ закључити да важи једнакост. $\square$

Теорема. Нека је $V \in \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $f : V \to \mathbb{R}$ функција класе C^1 и $M \subseteq V$ глатка подмногострукост. Да би тачка $p \in M$ била тачка условног локалног екстремума функције $f|_M$ неопходно је да буде испуњен бар 1 од следећих услова:

(а) $df(p) = 0$ (тј. p је критична тачка за f)

(б) $T_pM \subseteq T_pS$, где је $S := \{x \in V | f(x) = f(p)\}$

Доказ. Претпоставити да важи a) у теореми. Одатле директно закључити да је p кандидат за безусловни, а самим тим и условни екстремум. Даље, претпоставити да a) у теореми не важи. Доказати да је онда у некој околини тачке p функција f субмерзија, па је онда S $(n-1)$ - дим глатка подмногострукост, па има смисла T_pS. Узети $\gamma :]-\delta, +\delta[\to M$ такво да $\gamma(0) = p$. Из $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ извести $T_pM \subseteq T_pS$. $\square$

Напомена. Нека је M глобално задато једначином $g(x) = 0$ за неку субмерзију $g : V \to \mathbb{R}$ и нека је p локални екстремум за $f|_M$. Са $\gamma : I \to M$ дата је нека крива која лежи на M и за коју важи $\gamma(0) = p$. Тада, $f \circ \gamma$ има локални екстремум у 0, тј. за $f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ важи $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ односно $\overrightarrow{\nabla f}(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0$ за свако γ кроз p. Одатле следи $\overrightarrow{\nabla f}(p) \perp M$. Како је $\gamma \in M$, одатле следи $(g \circ \gamma)(t) = 0$ па када то диференцирамо по t добијамо да је $\overrightarrow{\nabla g} \perp M$. Коначно, добијамо систем $n+1$ једначина са $n+1$ непознатих који је одређен и који нам служи за одређивање условних екстремума:

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla f}(p) &= \lambda \overrightarrow{\nabla g}(p) \\ g(p) &= 0 \end{aligned}}$$

3.2 Апстрактне многострукости

Лема. Нека је $M \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ k - димензиона подмногострукост класе C^p, нека су V_1, V_2 околине (у $\mathbb{R}^{k+l}$) тачке $p \in M$ и нека су $h_1 : D_1 \to V_1$, $h_2 : D_2 \to V_2$ две локалне C^p параметризације скупова $V_1 \cap M$ и $V_2 \cap M$. Тада је

$$h_2 \circ {h_1}^{-1} : D_1 \cap {h_1}^{-1}(V_2) \to D_2 \cap {h_2}^{-1}(V_1)$$

дифеоморфизам класе C^p.

Доказ. Доказ леме следи из чињенице да је композиција дифеоморфизама дифеоморфизам. $\square$

Тврђење. Не постоји имерзија класе C^p где је $p \leq 1$ где $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ таква да је $h(\mathbb{R}) = \Gamma$.

Доказ. Из непрекидности h' извести контрадикцију. $\square$

Теорема. За свако отворено покривање $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ глатке многострукости M постоји разлагање јединице $\{\rho_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ такво да је $\mathrm{supp}\rho_\lambda \subseteq U_\lambda$.

Теорема. За $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ као у претходној теореми постоји разлагање јединице $\{\rho_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ са компактним носачем, такво да $(\forall \sigma \in \Sigma)(\exists \lambda \in \Lambda)\ \mathrm{supp}\rho_\sigma \subseteq U_\lambda$.

Теорема. (Витнијева) Свака глатка n-димензиона многострукост M може да се глатко уложи у $\mathbb{R}^{2n+1}$, тј. постоји C^∞ улагање $f : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$. Другим речима, свака апстрактна глатка многострукост је дифеоморфна подмногострукости у еуклидском простору.

Теорема. Свака компактна глатка многострукост M може глатко да се уложи у $\mathbb{R}^l$ за довољно велико l.

Доказ. Нека је $\{(U_j, \varphi_j)_{1\le j\le k}\}$ атлас на M, такав да је $\varphi_j(U_j) = B(0;3)$ и да $V_j = {\varphi_j}^{-1}(B(0;1))$ такође покривају M. За свако j конструисати функцију $h_j : U_j \to \mathbb{R}$ помоћу

$$h(x) = \frac{g(4 - \|x\|^2)}{g(4 - \|x\|^2) + g(\|x\|^2 - 1)}$$

где је g дато са

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$

Дефинисати пресликавање

$$f : M \to \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{k} =: \mathbb{R}^l$$

са

$$f(p) = \Big(h_1(p)\varphi_1(p), \dots, h_k(p)\varphi_k(p), h_1(p), \dots, h_k(p)\Big)$$

где је $n = \dim M$. Доказати да је f једно улагање.

□

3.3 Извод пресликавања $f : M \to N$

Лема. Деривација D на $C^\infty(p)$ пресликавања које је константно у некој околини тачке p је 0.

Доказ. Применити Лајбницово правило и из хомогености (деривација је линеарно пресликавање, дакле и хомогено) закључити да је довољно доказати $D1 = 0$. □

Лема. Нека је $f \in C^\infty_{\mathbb{R}}(U)$ и $p \in U$. Тада постоје лопта $B := B(p, \varepsilon) \subseteq U$ и функције $g_1, g_2, \dots, g_n \in C^\infty_{\mathbb{R}}(U)$ такве да:

1. $g_j(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(p)$
2. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(p) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j - p_j)g_j(x)$

Доказ. За $x \in B$ (B као у поставци) можемо написати

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \int_0^1 \frac{1}{dt} f(p + t(x-p))dt \\ &= f(p) + \sum_{j=1}^{n}(x_j - p_j)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j} f(p + t(x-p))dt \end{aligned}$$

Узети да је $g_j = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j} f(p + t(x-p))dt$. □

Теорема. Нека је $U \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен скуп и $p \in U$. За сваку деривацију $D : C^\infty(p) \to C^\infty(p)$ алгебре $C^\infty(p)$ постоји јединствени вектор $\xi \in T_pU$ такав да је $Df(p) = df(p) \cdot \xi$.

Доказ. Написати $f(x)$ као у претходној леми, и применити деривацију на тај запис. Добијемо

$$Df(x) = \sum_{j=1}^{n}(D\pi_j(x) \cdot g_j(x) + (x_j - p_j) \cdot Dg_j(x)),$$

Применом овога у тачки p имамо:

$$Df(p) = \sum_{j=1}^{n} D\pi_j(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = df(p) \cdot \xi,$$

за $\xi = (D\pi_1, D\pi_2, \dots, D\pi_n)$. □

Напомена. Претходна теорема нам даје еквиваленцију геометријског и алгебарског (аналитичког) приступа дефиницији тангнетног простора многострукости.
Последица. T_pM је векторски простор, јер је линеарна комбинација деривација такође деривација.
Последица. $\dim M = n \implies \dim T_pM = n$

Доказ. Нека је $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ локална карта и $p \in U$. Тада је $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p$ база за $T_{\varphi(p)}U$, па је $(\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_p, \dots, (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p$ база за T_pM. □

4 Интеграција

4.1 Апстрактни интеграли

Лема. Векторски потпростор $\mathcal{E}$ простора $\mathbb{R}^T$ је решетка акко важи

$$f \in \mathcal{E} \implies |f| \in \mathcal{E}.$$

Доказ. Искористити везу између апсолутне вредности и максимума и мимимума. □

Тврђење. Радонов интеграл је уједно и елементарни интеграл.

Доказ. По дефиницији је радонов интеграл линеаран, тако да је довољно доказати да за опадајући низ функција f_n са компактним носачем који тежи 0 важи и да је $I(f_n) \to 0$, кад $n \to \infty$. Нека је K_n носач функције f_n. Како је f_n опадајући низ који тежи нули, следи да је $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$. Из Динијеве теореме (0 је непрекидна функција) следи да $f_n \rightrightarrows 0$, па за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такво да $n \geq n_0 \implies f_n\,|_{K_1} < \varepsilon$.

На крају, нека је $\psi \in C_C(T)$ функција за коју је $0 \leq \psi \leq 1$ и $\psi\,|_{K_1} \equiv 1$ (таква функција постоји због Урисонове леме). Због $\mathrm{supp} f_n \subseteq K_1$, важи

$$f_n = f_n \cdot \chi_{K_1} \leq f_n \cdot \psi \leq \varepsilon\psi.$$

Из позитивности и линеарности Радоновог интеграла имамо $I(f_n) \leq \varepsilon I(\psi)$, па је онда и $I(f_n) \to 0$, кад $n \to \infty$. □

Напомена. Простор $C_C(T)$ је простор непрекидних функција $f : T \to \mathbb{R}$ које имају компактан носач, при чему је T локално компактан метрички (или Хаусдорфов) простор.
Пример. Још неки примери елементарног интеграла су:

- Диракова делта функција $\delta_a : C_C(T) \to \mathbb{R}$, $\delta_a(f) := f(a)$ (валуација у тачки).
- Риманов интеграл
- Риман-Стилтјесов интеграл

Лема. За Радонов интеграл $I : C_C(T) \to \mathbb{R}$ важи:

1. $f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$
2. $|I(f)| \leq I(|f|)$

Доказ. За први део тврђења применити линеарност и позитивност I. За други део применити први део и $-|f| \leq f \leq |f|$. □

Тврђење. Нека је T локално компактан Хаусдорфов простор, $K \subseteq T$ компактан подскуп и $C(T;K)$ скуп функција и $C_C(T)$ којима је носач у K. Тада је рестрикција

$$I : C(T;K) \to \mathbb{R}$$

Радоновог интеграла непрекидна у односу на норму

$$\|f\|_K := \sup\{|f(t)| \mid t \in K\}.$$

Доказ. Нека је $\psi \in C_C(T)$ функција за коју је $0 \leq \psi \leq 1$ и $\psi\ |_K \equiv 1$. Тада је

$$(\forall f \in C(T;K))(\forall t \in T)|f(t)| \leq \|f\|_K \cdot \psi(t),$$

па је $|I(f)| \leq I(|f|) \leq I(\psi) \cdot \|f\|_K$. □

Теорема. (Фубини) Нека су S и T комапктни Хаусдорфови простори и нека су

$$I_S : C(S) \to \mathbb{R}, I_T : C(T) \to \mathbb{R}$$

Радонови интеграли. Тада постоји јединствен Радонов интеграл

$$I : C(S \times T) \to \mathbb{R}$$

такав да је

$$I(f \otimes g) = I(f) \cdot I(g).$$

Напомена. Тензорски производ функција $f : S \to \mathbb{R}$ и $g : T \to \mathbb{R}$ је функција $f \otimes g : S \times T \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f \otimes g(s,t) := f(s) \cdot g(t)$$

Дефинишемо и простор $C(S) \otimes C(T)$ као

$$C(S) \otimes C(T) := \Big\{ \sum_j f_j \otimes g_j \mid f_j \in C(S), g_j \in C(T) \Big\},$$

где је наведена сума коначна.

Доказ. Из претходног тврђења следи да је Радонов интеграл на компактним просторима непрекидан, па је и равномерно непрекидан по Канторовој теореми. Из Стон-Вајерштрасове теореме следи да је $\overline{C(S) \otimes C(T)} = C(S \times T)$, па доказ тврђења следи из Принципа продужења равномерно непрекидног пресликавања са комплетним кодоменом (одатле следи и јединственост). $\square$

Последица. (Фубинијева теорема за Риманов интеграл) Нека је $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2$ n-димензиони квадар, представљен као производ k–димензионог квадра $\mathcal{J}_1$ и $(n-k)$–димензионог квадра $\mathcal{J}_2$. Тада, за непрекидну функцију $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ важи:

$$\int_{\mathcal{J}} = \int_{\mathcal{J}_2} \left(\int_{\mathcal{J}_1} f(x,y)dx \right) dy = \int_{\mathcal{J}_1} \left(\int_{\mathcal{J}_2} f(x,y)dy \right) dx.$$

Доказ. Због линеарности Римановог интеграла и претходне теореме, довољно је доказати тврђење за $f = f_1 \otimes f_2$, за $f_i : \mathcal{J}_i \to \mathbb{R}, i \in \{1,2\}$ непрекидне функције. Сада директно следи доказ из дефиниције Римановог интеграла по квадру $\mathcal{J}$. $\square$

4.2 Нормирани простор интеграбилних функција

Лема. Релација еквиваленције на скупу $\mathcal{D}(T, \mathcal{E}, I) := \{f \in D(T, \mathcal{E}, I) \mid \overline{I}(|f|) < +\infty\}$, дефинисана са

$$f \sim g \iff f = g \text{ скоро свуда на T.}$$

је конгруенција (тј. сагласна је са операцијама векторског простора). Количнички простор је нормирани векторски простор, са нормом

$$\|[f]\|_1 := \overline{I}(|f|),$$

која је добро дефинисана.

Доказ. Наведена норма је очигледно псеудо–норма (задовољава неједнакост троугла и симетричност). Њена добра дефинисаност је јасна, ако је $[f] = [g]$, онда је $f = g$ скоро свуда на T, па је и $\overline{I}(|f|) = \overline{I}(|g|)$. Треба још доказати да је $[\alpha f + \beta g] = \alpha[f] + \beta[g]$. Хомогеност је јасна, па је довољно доказати само линеарност, која ће следети из чињенице да је унија два скупа мере нула такође скуп мере нула. $\square$

Последица. $(\widetilde{D}(T, \mathcal{E}, I), \|\cdot\|_1)$ је нормирани векторски простор.
Напомена. Пресликавање $I : \widetilde{D}(T, \mathcal{E}, I) \to \mathbb{R}$ је непрекидно линеарно пресликавање, јер је $|I(f)| \leq I(|f|) =: \|f\|_1$.

4.3 Комплетирање метричког простора и Лебегов интеграл

Теорема. За сваки метрички простор (M_0, d_0) постоји комплетан метрички простор (M, d) и инјективно пресликавање $i : M_0\ toM$ са својствима:

1. $d(i(x), i(y)) = d_0(x,y), \forall x, y \in M_0$
2. $i(M_0)$ је густ у M.

Доказ. На простору $X \subseteq M_0^{\mathbb{N}}$, свих Кошијевих низова у M_0, дефинисати релацију еквиваленције

$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \iff \lim_{n\to\infty} d_0(a_n, b_n) = 0.$$

На простору $M := X/_\sim$ дефинишемо метрику $d([a_n], [b_n]) := \lim_{n\to\infty} (a_n, b_n)$.

Добра дефинисаност метрике d следи из адитивности по лимесу, а лако је и доказати да d јесте метрика. Дефинишимо улагање $i : M_0 \to M$ са $i(x) := [\{x\}]$, где је $\{x\}$ константан низ. Посматрајмо $x \in M$. Тада је $x = [x_n]$, за неки низ x_n у M_0 и важи $i(x_n) \to x$, одакле следи да је $i(M_0)$ густ у M. Треба још доказати да је M комплетан. Нека је x_n Кошијев низ у M. Из $\overline{i(M_0)} = M$ следи да постоји $a_n \in M_0$ за које је $d(i(a_n), x_n) < \frac{1}{n}$. Закључујемо да ако је x_n Кошијев, онда је и $i(a_n)$ Кошијев (као низ константних низова у M). Међутим, одатле следи и да је a_n Кошијев у M_0, па a_n дефинише тачку у M и важи $x_n \to a$. $\square$

Напомена. Ово се може и применити да од нормираног векторског простора добијемо Банахов простор. Доказ се може извести елегантније, због чињенице да је дуал увек комплетан и због чињенице да постоји линеарно улагање нормираног векторског простора у дуал дуала.

Последица. Комплетирање простора $(C(\mathcal{J}), \|\cdot\|_1)$ назива се простором функција интеграбилних по Лебегу. Како је интеграл равномерно непрекидан, онда се он може (из Принципа продужења равномерно непрекидне функције са комплетним кодоменом) продужити до пресликавања које називамо Лебеговим интеграло.

4.4 Класа функција интеграбилних по Риману

Лема. $f \in \mathcal{R}(\mathcal{J}) \implies f$ је ограничена на $\mathcal{J}$

Доказ. Претпоставити супротно, и закључитида за сваку поделу постоји квадар на којем је функција неограничена, тј. постоје тачке ζ, η из тог квадра такве да је $|f(\zeta) - f(\eta)|$ произвољно велико. Узети две поделе са уоченим тачкама које се разликују само на том квадру, једну са уоченом тачком ζ, а другу са η. Извести контрадикцију из Кошијевог критеријума постојања лимеса по филтеру. $\square$

Пример. График непрекидне функције $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$ је скуп Лебегове мере 0.

Доказ. Најпре, тврђење се може доказати из равномерне непрекидности у случају да је E затворен квадар. Да бисмо ово проширили на произвољан скуп $E \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$, довољно је да покријемо график функције са пребројиво много скупова мере 0. Посматрајмо скуп $S := \mathbb{Q}^{k-1} \cap E$. Он је густ у E и пребројив, па је довољно доказати да је у некој околини сваке тачке из S, график рестрикције на ту околину скуп мере 0. То је очигледно, јер око сваке тачке скупа S можемо посматрати затворен квадар који је садржан у E, а на том квадру је график рестрикције мере 0, због разматрања на почетку задатка. Пребројива унија скупова мере 0 је скуп мере 0, па је и график целе функције f мере 0. $\square$

Пример. Нека је $0 < l < k$ и $\pi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ пројекција $\mathbb{R}^k$ на неки $l-$димензиони потпростор. Ако је $E \subseteq \mathbb{R}^k$ скуп такав да је $\pi(E)$ скуп мере нула у $\mathbb{R}^l$, онда је и E скуп мере 0 у $\mathbb{R}^k$.

Доказ. Претходни пример можемо доказати и када је кодомен $\mathbb{R}^n$. Лако је видети да је $E \subseteq \pi(E) \times \mathbb{R}^{k-l}$. Применимо претходни задатак на константну функцију, одакле следи да је $\pi(E) \times \mathbb{R}^{k-l}$ скуп мере 0. Тада је и E скуп мере 0, као подскуп скупа мере 0. $\square$

Теорема. (Дарбуова) За сваку ограничену функцију $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ важи:

$$\overline{\int_{\mathcal{J}}} f(x)dx = \lim_{\mathscr{F}_{\mathcal{J}}} S(f, \mathcal{P})$$
$$\underline{\int_{\mathcal{J}}} f(x)dx = \lim_{\mathscr{F}_{\mathcal{J}}} s(f, \mathcal{P})$$

Доказ. Довољно је доказати једно од наведених тврђења (друго следи применом на $-f$). Означимо $\underline{I} = \underline{\int_{\mathcal{J}}}$ Нека је $\mathcal{P}_\varepsilon$ подела таква да је $s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) > \underline{I} - \varepsilon$. Посматрати Γ_ε, скуп свих тачака које леже на граници неког од квадара поделе $\mathcal{P}_\varepsilon$ и доказати да је он Лебегове мере 0. Онда постоји $\lambda_\varepsilon > 0$ такво да је за сваку поделу чији је параметар мањи од λ_ε, збир запремина квадара који секу Γ_ε мањи од ε. Нека је $\mathcal{P}$ таква подела и нека је $\mathcal{P}'$ подела која садржи све тачке подела $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}_\varepsilon$. Тада је

$$\underline{I} - \varepsilon < s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < s(f, \mathcal{P}') \leq \underline{I}.$$

Закључити да у разлици $s(f, \mathcal{P}') - s(f, \mathcal{P})$ учествују само сабирци који одговарају квадрима који секу Γ_ε, па је $|s(f, \mathcal{P}') - s(f, \mathcal{P})| < 2M\varepsilon$, где је $|f| \leq M$. На крају доказати да је $\underline{I} = s(f, P) < (2M + 1)\varepsilon$, одакле следи тврђење. $\square$

Последица. (Дарбуов критеријум интеграбилности по Риману)

$$f \in \mathcal{R}(\mathcal{J}) \iff f \text{ је ограничена и } \underline{\int} f(x)dx = \overline{\int} f(x)dx$$

Лема. Нека је $T \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f : T \to \mathbb{R}$ ограничена функција и $\varepsilon > 0$. Тада је скуп

$$F := \{t \in T \mid \omega(f; T) \geq \varepsilon\}$$

затворен у T

Доказ. Доказати да је комплемент $T \setminus F$ отворен. $\square$

Теорема. (Лебегов критеријум интеграбилности по Риману) Функција $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ је интеграбилна по Риману акко је ограничена и непрекидна скоро свуда у смилсу Лебега (тј. ако је скуп прекида $E = \{x \in \mathcal{J} \mid \omega(f; x) > 0\}$ мере 0.)

Доказ. ($\implies$) Најпре, закључити да је довољно доказати

$$(\forall n \in \mathbb{N}) E_n := \left\{x \in \mathcal{J} \mid \omega(f; x) > \frac{1}{n}\right\} \text{ је мере 0.}$$

Нека је $\mathcal{P}$ подела таква да је $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{n}$ и нека је $P_n := \{\mathcal{J} \in \mathcal{P} \mid \mathcal{J} \cap E_n \neq \emptyset\}$. Одатле извести закључак да је $\displaystyle\sum_{I \in P_n} \mu(I) < \varepsilon$, па је E_n мере 0 (P_n покривају E_n).

($\impliedby$) Посматрати $E_\varepsilon := \{x \in \mathcal{J} \mid \omega(f; x) \geq \frac{\varepsilon}{2\mu(J)}\}$. Као подскуп скупа E, овај скуп је мере нула, а због претходне леме је и затворен, па ће бити и компактан. Онда постоји коначна фамилија квадара која га покрива и за коју је $\mu(J_1) + \mu(J_2) + \ldots + \mu(J_k) < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$. За $t \in \mathcal{J} \setminus \bigcup_{i=1}^k J_k$ важи $\omega(f; t) < \frac{\varepsilon}{2\mu(J)}$, тј. за свако такво t постоји квадар I_t такав да је $\sup_{I_t} f - \inf_{I_t} f < \frac{\varepsilon}{2\mu(J)}$. Како је скуп $t \in \mathcal{J} \setminus \bigcup_{i=1}^k J_k$ затоврен, можемо издвојити коначно потпокривање I_t. На крају, разлику $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P})$ представити као $\sum (M_i - m_i)\mu(K_i)$ и раздвојити је на сумирање по квадрима J_i и I_t, одакле ћемо добити $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$. $\square$

Последица. Нека је $E \subseteq \mathbb{R}^K$ ограничен скуп садржан у квадру $\mathcal{J}$. Тада је

$$\chi_E \in \mathcal{R}(\mathcal{J}) \iff \partial E \text{ је скуп мере } 0.$$

Доказ. ∂E је скуп прекида функције χ_E. □

Тврђење. Нека је $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}^k$ $k-$димензиони квадар. Тада је простор $(C(\mathcal{J}), \|\cdot\|_1)$ густ у $(\mathcal{R}(\mathcal{J}), \|\cdot\|_1)$.

Доказ. Покрити скуп прекида пребројивом унијом квадара $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, чији је збир запремина мањи од $\frac{\varepsilon}{2M}$. Идеја је да *непрекидно* пређемо са квадра J_n на остатак простора, а то ћемо урадити конструисањем функције φ_n која је једнака 0 на J_n, варира између 0 и 1 на квадру $\widetilde{J}_n$ који је двапут веће запремине од J_n и садржи га, и једанака је 1 ван $\widetilde{J}_n$. Комбиновањем свих тих функција добијамо функцију g, за коју важи

$$\|f-g\|_1 = \int_{\bigcup \widetilde{J}_n} |f-g| < \varepsilon.$$

□

Тврђење. Фубинијева теорема важи за класу функција интеграбилних по Риману.

Доказ. Следи из раније доказане теореме за непрекидне функције и принципа продужења непрекидног пресликавања $\int_{I\times J} : C(I\times J) \to \mathbb{R}$ на скуп $\mathcal{R}(I\times J)$, у коме је $C(I\times J)$ густ. □

Напомена. Пре смо Фубинија доказали за Риманов интеграл непрекидне функције, сада смо доказали за Риманов интеграл функције интеграбилне по Риману.
Теорема. Нека је $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}^k$ $k-$дим квадар и $E \subseteq \mathcal{J}$ скуп мерљив по Жордану. Представимо $\mathcal{J}$ као производ $\mathcal{J} = \mathcal{J}_x \times \mathcal{J}_y$ квадара $\mathcal{J}_x \subseteq \mathbb{R}^l$ и $\mathcal{J}_y \subseteq \mathbb{R}^{k-l}$. Тада је за свако $y_0 \in \mathcal{J}_y$ пресек $E_{y_0} := \{(x,y) \in E \mid y = y_0\}$ скупа E и $l-$димензионе равни $y = y_0$ мерљив по Жордану и важи

$$\mu_k(E) = \int_{\mathcal{J}_y} \mu_l(E_y)dy,$$

где је μ_k (односно μ_l) Жорданова мера у $\mathbb{R}^k$ (односно $\mathbb{R}^l$)

Доказ. Следи из Фубинијеве теореме примењене на функцији $\chi_E(x,y) = \chi_{E_y}(x)$ □

4.5 Смена променљиве у интегралу

Теорема. Нека су D_t и D_x органичени отворени скупови у $\mathbb{R}^k$, $\varphi : D_t \to D_x$ дифеоморфизам (класе C^1), $\varphi' : D_t \to \mathbb{R}^{k\times k}$ његова матрица првог извода и $f \in \mathcal{R}(D_x)$ функција чији је носач $\text{supp} f := \overline{\{x \in D_x \mid f(x) \neq 0\}}$ компактан у D_x. Тада важи:

(1) $(f\circ\varphi)|\det\varphi'| \in \mathcal{R}(D_t)$

(2) $\int_{D_x} f(x)dx = \int_{D_t} f\circ\varphi(t)|\det\varphi'(t)|dt$

Напомена. Докажимо прво 4 помоћне леме.

Лема. Нека су D_t, D_x, φ као у теореми, $E_t \subseteq D_t$, $E_x := \varphi(E_t) \subseteq D_x$. Тада важи:

(1) Ако је E_t скуп мере нула у смислу Лебега, онда је такав и E_x.

(2) Ако је Жорданова мера скупова E_t и $\overline{E_t}$ нула, онда је и Жорданова мера скупова E_x и $\overline{E_x}$ нула.

(3) Ако је скуп E_t мерљив по Жордану и $\overline{E_t} \subseteq D_t$ онда је и скуп E_x мерљив по Жордану и $\overline{E_x} \subseteq D_x$.

Доказ. Приметити да се сваки отворен скуп $D \in \mathbb{R}^k$ може представити као пребројива унија квадара чије се унутрашњости међусобно не секу. Како је пребројива унија скупова мере нула скуп мере нула, доказати (1) под претпоставком да је $E_t \subseteq J$ за неко J. Нека је $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ покривање скупа E_t квадрима таквим да је $\sum \mu(I_j) < \epsilon$. Применом Теореме о коначном прираштају и претходног закључити да се сваки скуп $\varphi(I_j)$ налази у квадру $\tilde{I}_j$ таквом да је $\mu(\tilde{I}_j) = M^k \mu(I_j)$. Одатле извести (1).

Део (2) следи из (1) јер је $\overline{E}_t$, а самим тим и његова непрекидна слика $\overline{E}_x$, компактан скуп, а сваки компактан скуп мере нула у Лебеговом смислу има Жорданову меру нула.

Део (3) извести из чињенице да дифеоморфизам слика унутрашње тачке у унутрашње тачке, што је последица Теореме о инверзној функцији, односно извести закључак из $\partial E_x = \varphi(\partial E_t)$. □

Последица. Под условима Теореме о смени променљиве, интеграл у тачки (2) постоји.

Доказ. Следи из Лебегове теореме о интеграбилности и претходне леме. □

Лема. (једнодимензиони случај) Нека је $\varphi : I_t \to I_x$ дифеоморфизам интервала $I_t \subseteq \mathbb{R}$ на интервал $I_x \subseteq \mathbb{R}$ и нека $f \in \mathcal{R}(I_x)$ и важи

$$\int_{I_x} f(x)dx = \int_{I_t} f \circ \varphi(t)|\varphi'(t)|dt$$

Доказ. Доказати применом Њутн - Лајбницове формуле из Анализе 1. □

Напомена. Код смене променљиве за функције једне променљиве у уобичајеном облику немамо апсолутну вредност код φ'. То није у колизији, због тога што се у у тој апсолутној вредности само крије знак који "обрће"границе интервала.

Напомена. Појава $|\cdot|$ сугерише везу интеграције и оријентације. Не можемо интегралити по објектима који нису оријентабилни. Но, ипак постоји метода да се заобиђе ова препрека, уз помоћ чињенице да сваку неоријентабилна многострукост има дволисно оријентабилно наткривање, по којем онда можемо вршити интеграцију.

Лема. Теорема о смени променљиве у интегралу важи за просте дифеоморфизме.

Доказ. Ова лема је у суштини последица претходне леме и Фубинијеве теореме. Претпоставити ради једноставности записа да φ мења само последњу (k - ту) координату. Квадре $J_x \supseteq D_x$ и $J_t \supseteq D_t$ у $\mathbb{R}^k$ представити као Декартов производ квадра у $\mathbb{R}^{k-1}$ и интервала. Применити Фубинијеву теорему на интеграл функције $f\chi_{D_x}$ по квадру J_x имајући у виду да је φ прост дифеоморфизам те је $\det \varphi' = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_k}$. □

Лема. Ако Теорема о смени променљиве важи за дифеоморфизме

$$\psi : D_s \to D_t, \qquad \varphi : D_t \to D_x$$

онда важи и за композицију $\varphi \circ \psi : D_s \to D_x$.

Доказ. Доказ извести из $\det(\varphi \circ \psi)' = \det \varphi' \cdot \det \psi'$ и две примене Теорема о смени променљиве: прво на функцију f и дифеоморфизам φ, а затим на $f \circ \varphi |\det \varphi'|$ и дифеоморфизам ψ. $\square$

Можемо сада довршити доказ прве теореме.

Доказ. (Доказ теореме о смени променљиве у интегралу) Доказ завршити коришћењем Тврђења о представљању дифеоморфизма као композиције простих, међутим обратити пажњу на *локално* у њему. Идеја да се докаже да теорема важи на целом D_t јесте да се D_t подели на мање скупове на којима теорема важи. Овде ће бити неопходно применити Лебегову лему о компактности на скуп $\operatorname{supp}(f \circ \varphi \cdot |\det \varphi'|)$. $\square$

Напомена. Интуиција за мало другачији доказ: Нека је J квадар, $f : J \to \mathbb{R}$ непрекидна функција и $\varphi : J \to \varphi(J)$ дифеоморфизам класе C^1. Посматрајмо шта је $\int_{\varphi(J)} f(x)dx$. Поделимо квадар J на квадре J_l. Тада је

$$\int_{\varphi(J)} f(x)dx = \sum_l \int_{\varphi(J_l)} f(x)dx$$

Даље имамо да је

$$\min_{\varphi(J_l)} f \int_{\varphi(J_l)} 1dx \leq \int_{\varphi(J_l)} f(x)dx \leq \max_{\varphi(J_l)} f \int_{\varphi(J_l)} 1dx$$

односно

$$\min_{\varphi(J_l)} f \leq \frac{1}{\mu(\varphi(J_l))} \int_{\varphi(J_l)} f(x)dx \leq \max_{\varphi(J_l)} f$$

Из непрекидности f, применом теореме о средњој вредности закључити да постоји ξ_l такво да

$$f(\xi_l) = \frac{1}{\mu(\varphi(J_l))} \int_{\varphi(J_l)} f(x)dx$$

Следи да је

$$\int_{\varphi(J)} f(x)dx = \sum_l f(\xi_l)\mu(\varphi(J_l))$$

Узмимо $\tau_l \in J_l$ такво да $\xi_l = \varphi(\tau_l)$. Тада је

$$\int_{\varphi(J)} f(x)dx = \sum_l f \circ \varphi(\tau_l)\mu(\varphi(J_l))$$

Доказати још да је $\mu(\varphi(J_l)) = |\det \varphi| \cdot \mu(J_l)$. У случају да је φ линеарно, доказ извести користећи теорему о јединствености детерминанте. У случају да φ није линеарно представити га као $\varphi \approx C + \varphi'$, где је φ' линеарно а $C = \varphi(x_0)$ транслација, стога не мења запремину.

5 Векторска поља и диференцијалне форме

Тврђење. За $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$ и глатко пресликавање $F : M \to N$ важи:

(1) $F^*(\alpha + \beta) = F^*\alpha + F^*\beta$

(2) $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$

Другим речима, ако дефинишемо

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{j=0}^{\dim M} \Omega^j(M)$$

и слично $\Omega^*(N)$ онда је

$$F^* : (\Omega^*(N), +, \wedge) \to (\Omega^*(M), +, \wedge)$$

хомоморфизам алгебри.

Доказ. (1) $F^*(\alpha + \beta)X = (\alpha + \beta)(F_*X) = \alpha(F_*X) + \beta(F_*X) = (F^*\alpha + F^*\beta)X$

(2)

$$\begin{aligned}
F^*(\alpha \wedge \beta)(X, Y) &= (\alpha \wedge \beta)(F_*(X), F_*(Y)) \\
&= \begin{vmatrix} \alpha(F_*(X)) & \alpha(F_*(Y)) \\ \beta(F_*(X)) & \beta(F_*(Y)) \end{vmatrix} \\
&= \alpha(F_*(X)) \cdot \beta(F_*(Y)) - \alpha(F_*(Y)) \cdot \beta(F_*(X)) \\
&= F^*(\alpha)X \cdot F^*(\beta)Y - F^*(\alpha)Y \cdot F^*(\beta)X \\
&= \begin{vmatrix} F^*(\alpha)X & F^*(\alpha)Y \\ F^*(\beta)X & F^*(\beta)Y \end{vmatrix} \\
&= (F^*(\alpha) \wedge F^*(\beta))(X, Y)
\end{aligned}$$

□

Напомена. Pullback се такође слаже и са спољашњим диференцијалом, односно важи

$$F^* \circ d = d \circ F^*$$

за $F : U \to V$ пресликавање класе C^∞, где су $U \in \mathbb{R}^n$ и $V \in \mathbb{R}^k$. Захваљујући овоме, могуће је дефинисати $d : \Omega^l(M) \to \Omega^{l+1}(M)$ за произвољну многострукост.

Тврђење. (Лајбницово правило) Нека су $\alpha \in \Omega^l(M)$ и $\beta \in \Omega^k(M)$ две форме. Тада важи

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^l \alpha \wedge d\beta$$

Доказ. Због линеарности d довољно је доказати формулу за $\alpha = f(x)dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$ и $\beta = g(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$. Применити дефиницију d и извести закључак. □

Теорема. $\alpha \in \Omega^l(M) \implies d(d\alpha) = 0$

Доказ. Два пута применити дефиницију d на $f dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$ и искористити антикомутативност $\wedge$. □

Последица. $\mathrm{Im}\, d \subseteq \mathrm{Ker}\, d$

Тврђење. Ако је $F : M \to N$ дифеоморфизам, онда је $F* : {\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}}^l(N) \to {\mathrm{H}_{\mathrm{dR}}}^l(M)$ изоморфизам.

Доказ. Искористити чињеницу да је $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$. Одатле закључити $(F^{-1})^* = (F^*)^{-1}$. $\square$

Тврђење. За свако непрекидно пресликавање $f : M \to N$ глатких многострукости постоји глатко пресликавање $F : M \to N$ такво да је $f \simeq F$.

Доказ. Извести из Вајерштрасове теореме о апроксимацији и разлагања јединице. $\square$

Тврђење. (Картанова формула) $\phi_t : M \to M$ глатка (по t) фамилија глатких пресликавања. Нека је $X(\phi_t(p)) := \frac{d\phi_t}{dt}(p)$ (пишемо краће: X). За $\alpha \in \Omega^l(M)$ важи:

$$\frac{d}{dt}{\phi_t}^*\alpha = {\phi_t}^*(X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha))$$

Доказ. Индукцијом по l. $\square$

Последица. Нека су $f_0, f_1 : M \to N$, ${f_0}^*, {f_1}^* : {\mathrm{H_{dR}}}^*(N) \to {\mathrm{H_{dR}}}^*(M)$. Тада важи

$$f_0 \simeq f_1 \implies f_0^* = f_1^*$$

Последица. Ако је $M \simeq N$ онда је ${\mathrm{H_{dR}}}^*(M) \cong {\mathrm{H_{dR}}}^*(N)$.

Напомена. Многострукост M је повезана ако и само ако је ${\mathrm{H_{dR}}}^0(M) = \mathbb{R}$.

Напомена. Општије: ${\mathrm{H_{dR}}}^0(M) = \mathbb{R}^m$, где је m број компоненти повезаности M.

Напомена. Ако $l \in \{0, n\}$ онда важи ${\mathrm{H_{dR}}}^l(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$, иначе ${\mathrm{H_{dR}}}^l(\mathbb{S}^n) = 0$.

Тврђење. Не постоји глатко пресликавање $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1} := \partial\mathbb{B}^n$ такво да је $f(x) = x$ за све $x \in \mathbb{S}^n$. Односно, не постоји глатка ретракција $\mathbb{B}^n$ на $\partial\mathbb{B}^n$.

Доказ. Дефинисати $j : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{B}^n$ као $j(x) = x$. Претпоставити супротно, да постоји тражена ретракција $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$, тд. $\forall a \in \mathbb{S}^{n-1}$ $f(a) = a$. Посматрати $f \circ j$ и ${\mathrm{H_{dR}}}^{n-1}$ посматраних објеката ($\mathbb{S}^{n-1}$ и $\mathbb{B}^n$) и извести констрадикцију. $\square$

Напомена. Не постоји непрекидна ретракција многострукости на границу.

Теорема. (Брауерова теорема о фиксној тачки)
Свако непрекидно пресликавање $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ има бар једну фиксну тачку. Другим речима

$$f \in C(\mathbb{B}^n, \mathbb{B}^n) \implies (\exists x_0 \in \mathbb{B}^n) f(x_0) = x_0$$

Доказ. Претпоставити супротно, да $\forall x \in \mathbb{B}^n$ важи $f(x) \neq x$. Дефинисати $r(x) = \frac{f(x)-x}{\|f(x)-x\|}$, $r : \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$. Показати да је r ретракција. Одатле, на основу претходног, извести контрадикцију. $\square$

6 Дуални поглед на диференцијалне форме

Тврђење. $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0, \operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0$.

Доказ. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B}) = 0$, $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\nabla} f)$. □

Напомена. Вектор $\overrightarrow{\nabla}$ може да се схвати као аналогија диференцијала d, а претходно тврђење као $d \circ d = 0$. Успоставити изоморфизам између диференцијалних форми и одговарајућих простора глатких функција на којима дефинишемо $\operatorname{grad}, \operatorname{rot}, \operatorname{div}$ и доказати да ће сви дијаграми комутирати.

Тврђење. Свака 1−форма у $\mathbb{R}^n$ је облика $\omega^1_{\overrightarrow{B}} := \langle \overrightarrow{B}, \cdot \rangle$, за јединствено $\overrightarrow{B}$ и свака 2−форма у $\mathbb{R}^3$ је облика $\omega^2_{\overrightarrow{B}} := (\overrightarrow{B}, \cdot, \cdot)$ за јединствено $\overrightarrow{B}$.

Доказ. Следи из чињенице да су то потпростори целог простора исте димензије као и цео простор. □

Напомена. Претходно тврђење оправдава следећу дефиницију:

$$d\omega^0_f =: \omega^1_{\operatorname{grad} f}$$
$$d\omega^1_{\overrightarrow{B}} =: \omega^2_{\operatorname{rot}\overrightarrow{B}}$$
$$d\omega^2_{\overrightarrow{B}} =: \omega^3_{\operatorname{div}\overrightarrow{B}}$$

Из ове дефиниције је јасно да $\operatorname{div} \circ \operatorname{rot} = 0, \operatorname{rot} \circ \operatorname{grad} = 0$ следи из $d \circ d = 0$.

Пример. $\omega^1_{\overrightarrow{A}} \wedge \omega^1_{\overrightarrow{B}} = \omega^2_{\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}}$, $\omega^1_{\overrightarrow{A}} \wedge \omega^2_{\overrightarrow{B}} = \omega^3_{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}$

Доказ. Написати $\omega^1_{\overrightarrow{A}}$ као $A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$ и слично са осталим формама и доказати у координатном запису. □

7 Фуријеова анализа

Лема. Нека је $\{e_1, \dots, e_n\}$ ортонормиран систем и f произвољан вектор. Тада је вектор

$$h = f - \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j$$

ортогоналан на простор $\mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_n\})$.

Доказ. Доказати да за свако l важи $\langle h, e_l \rangle = 0$ и из линеарности закључити тражено. □

Последица. Сваки вектор f може да се напише као

$$f = f_e + h$$

где је $f_e \in \mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_n\})$ и h ортогонално на $\mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_n\})$.

Лема. (Питагорина теорема) Нека је $g \perp h$ и $f = g + h$. Тада је

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2$$

Доказ. Расписати $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle g + h, g + h \rangle$. □

Последица. Ако је $f_1, \dots, f_n$ ортогоналан систем и $f = f_1 + \dots + f_n$, онда је

$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \dots + \|f_n\|^2$$

Последица. Ако је $e_1, \dots, e_n$ ортонормиран систем и $f = c_1e_1 + \dots + c_ne_n$, онда је

$$\|f\|^2 = |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2$$

Тврђење. Нека је $e_1, \dots, e_n$ ортонормиран систем и f произвољан вектор. Тада је

$$f_e := \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j$$

најближи вектор у $\mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_n\})$ вектору f.

Доказ. Применом Питагорине теореме доказати да важи $\|f - g\|^2 \geq \|f - f_e\|^2$ $\square$

Тврђење. (Беселова неједнакост) Ако је $e_1, \dots, e_n$ ортонормирани систем, онда за сваки вектор f важи

$$\sum_{j=1}^{n} |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

Доказ. Записати f као $f = f_e + h$, где је $f_e \perp h$ и $f_e = \sum_{j=1}^{n} \langle f, e_j \rangle e_j$. Применити питагорину теорему. $\square$

Теорема. Ако је $\{e_1, e_2, \dots\}$ ортонормиран систем, следећи искази су еквивалентни:

а) систем $\{e_1, e_2, \dots\}$ је потпун

б) за сваки вектор f важи

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

в) за сваки вектор f важи *Парсевалова једнакост*:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$$

Доказ. Тривијално из претходних тврђења. $\square$

Последица. Ортонормирани систем вектора је потпун ако и само ако је база.

Доказ. $\boxed{\Leftarrow}$: важи увек

$\boxed{\Rightarrow}$: је а) $\Longrightarrow$ б) у претходној теореми $\square$

Пример. Систем $\{1, x, x^2, \dots\}$ је потпун у пред - Хилбертовом простору $C_{\mathbb{C}}[-1, 1]$ са скаларним производом $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$, али он није база!

Теорема. Нека је X Хилбертов простор, $\{e_1, e_2 \dots\}$ ортонормиран систем и $f \in X$ произвољан вектор. Тада важи:

(1) Фуријеов ред $\sum_{n=1}^{\infty}\langle f, e_n\rangle e_n$ конвергира ка неком вектору $f_e \in X$.

(2) $f = f_e + h$, где је $h \perp \mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_n\})$

Доказ. (1) На основу Беселове неједнакости $\sum |\langle f, e_n\rangle|^2$ конвергира. На основу Питагорине теореме закључити да $\sum\langle f, e_n\rangle e_n$ задовољава Кошијев критеријум, па због комплетности простора и конвергира.

(2) Доказати да за свако j важи $\langle h, e_j\rangle = 0$

$\square$

Теорема. Нека је X пред - Хилбертов простор и $\{f_1, f_2, \dots\}$ систем линеарно независних вектора.

(1) Да би овај систем био потпун неопходно је да у X не постоји вектор који је различит од 0 и ортогоналан на све f_j.

(2) Ако је простор X Хилбертов, услов из (1) је и довољан за потпуност система.

Доказ. (1) Претпоставити супротно и на основу Питагорине теореме извести контрадикцију.

(2)

$\square$

Пример. Нека је $f : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ непрекидна функција, таква да је $\forall n$

$$\int_{-1}^{1} x^n f(x) dx = 0$$

Тада је на основу претходне и Прве Вајерштрасове теореме , $f \equiv 0$.