

# Анализа 2 – основне идеје доказа важнијих теорема и тврђења

## 1 Непрекидност

**Тврђење.** (Коши–Шварцова неједнакост) Ако је  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  позитивна хермитска форма, онда је

$$|\langle x, y \rangle|^2 = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

*Доказ.* Нека су  $x, y \in X$  и  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Због позитивности  $0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle$ . Расписати претходни израз, заменити  $\alpha = \frac{-\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$  и извести тражено. У случају да је  $\alpha \in \mathbb{C}$  показати да је  $|\langle x, y \rangle| = (\operatorname{Re} \langle x, \alpha y \rangle)^2$ . Свести на први случај.  $\square$

**Тврђење.** Нека је  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : Y \rightarrow Z$  и  $fCa, gCf(a)$ . Тада је  $g \circ fCa$ .

*Доказ.* Искористити карактеризацију непрекидности:

$$(\forall V \in \mathcal{F}_{f(a)})(\exists U \in \mathcal{F}_a)f(U) \subseteq V.$$

$\square$

**Тврђење.** За линеарно пресликавање  $L : X \rightarrow Y$  нормираних векторских простора следећи искази су еквивалентни:

а)  $L$  је непрекидно у једној тачки

б)  $L$  је непрекидно

в)  $L$  је равномерно непрекидно

г)  $L$  је Липшицово

д)  $\sup_{\|x\|=1} \|L(x)\| < \infty$

*Доказ.* Приметити да г)  $\implies$  в)  $\implies$  б)  $\implies$  а) увек важи. Даље, д)  $\implies$  г) следи из дефиниције  $\operatorname{lip} f$ . Потребно је још доказати а)  $\implies$  д). Како из  $LCa$  следи да је  $L$  ограничено на некој лопти  $B[a; \rho]$ , тј. ограничено је и на  $S[a; \rho]$ . Представити  $S[a; \rho]$  као  $a + \rho S[0; 1]$  и одале извести закључак.  $\square$

**Напомена.** Уколико је  $L$  вишелинеарно пресликавање, онда се на сличан начин може дефинисати  $\|L\|_\infty$ . Тада важи:  $L$  је непрекидно акко је  $\|L\|_\infty < \infty$ . Примери овога су множење, детерминанта, множење скаларом, векторски производ, хермитски производ, мешовити, слагање непрекидних линеарних пресликавања, ...

**Тврђење.** Нека је  $(X, d_\infty) = \prod_{j=1}^k (X_j, d_j)$ ,  $A_j \subseteq X_j$ ,  $A = \prod_{j=1}^k A_j$ . Тада важи:

- (1) Пројекције  $\pi_j : X \rightarrow X_j$  су отворена пресликавања.
- (2) Унутрашњост скупа  $A$  је производ унутрашњости скупова  $A_j$ . Специјално,  $A$  је отворен акко је отворен „по координатама”.
- (3) Затворење скупа  $A$  је производ затворења скупова  $A_j$ . Специјално,  $A$  је затворен акко је затворен „по координатама”.

*Доказ.* Искористити да је  $B(a, \delta) = \prod_{j=1}^k B(a_j, \delta)$  □

**Теорема.** Нека су  $X$  и  $Y$  метрички простори. За  $f : X \rightarrow Y$  следећи искази су еквивалентни:

- а)  $f$  је непрекидно
- б) За сваки отворен скуп  $V \subseteq Y$  скуп  $f^{-1}(V) \subseteq X$  је отворен
- в) За сваки затворен скуп  $G \subseteq Y$  скуп  $f^{-1}(G)$  је затворен
- г) За сваки подскуп  $A \subseteq X$  је  $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

*Доказ.* а)  $\implies$  г) : Доказати да за  $a \in \overline{A}$  важи  $f(a) \in \overline{f(A)}$ . Искористити непрекидност у тачки  $a$ .

г)  $\implies$  в) : Доказати да је  $f^{-1}(G)$  једнако  $\overline{f^{-1}(G)}$ .

в)  $\implies$  б) : Искористити затвореност  $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$ .

б)  $\implies$  а) : Доказати да  $f^{-1}(W) \in \mathcal{F}_a$  где је  $V \subseteq W$  и  $V$  отворен, а  $a \in X$  и  $W \in \mathcal{F}_{f(a)}$ . □

**Тврђење.** (Принцип продужења једнакости) Нека су  $X, Y$  метрички простори,  $f, g : X \rightarrow Y$  непрекидна пресликавања,  $A \subseteq X$ . Тада важи:

- (1) Скуп  $S = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$  је затворен
- (2)  $f|_A = g|_A \implies f|_{\overline{A}} = g|_{\overline{A}}$

*Доказ.* (1)  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow d(f(x), g(x)) = 0$ . Тада  $S = (d(f, g))^{-1}(\{0\})$  затворен због непрекидности  $d(f, g)$ .

- (2)  $f|_A = g|_A \implies A \subseteq S \implies \overline{A} \subseteq \overline{S} = S \implies f|_{\overline{A}} = g|_{\overline{A}}$  □

**Тврђење.** (Принцип продужења неједнакости) Нека је  $X$  метрички простор,  $A \subseteq X$  и  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна пресликавања. Тада важи:

- 1) Скуп  $V = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\}$  је отворен
- 2) Скуп  $V = \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\}$  је затворен
- 3)  $f|_A \leq g|_A \implies f|_{\overline{A}} \leq g|_{\overline{A}}$
- 4)  $\sup f(A) = \sup f(\overline{A})$  (аналогно и за  $\inf$ )

*Доказ.* Дефинисати пресликавање  $\varphi := g - f : X \rightarrow \mathbb{R}$  и за 1) и 2) посматрати инверзне слике скупова  $[0, \infty)$  и  $]0, \infty)$ . Под 3) се доказује као у претходном тврђењу. 4) следи из 3) ако узмемо да је  $g = C$  где је  $C$  константа којом је ограничена рестриција  $f$  на  $A$ .  $\square$

**Напомена.** У претходном тврђењу кодомен функција  $f$  и  $g$  је  $\mathbb{R}$  због тога што нам је због неједнакости потребно уређење на кодомену.

**Последица.**  $\text{diam}(A) = \text{diam}(\overline{A})$ ,  $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$

*Доказ.* Следи из принципа продужења неједнакости.  $\square$

**Тврђење.** (Смена променљиве у лимесу) Нека су  $X, Y$  метрички простори,  $A \subseteq X$ ,  $a \in \overline{A}$ . Тачка  $\xi \in Y$  је гранична вредност пресликавања  $f$  у тачки  $a$ . Нека је  $\varphi : M \rightarrow X$  хомеоморфизам метричког простора  $M$  на  $X$ . Тада је

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{t \rightarrow \varphi^{-1}(a)} f \circ \varphi(t)$$

*Доказ.* Формирајмо низ  $t_n \in \varphi^{-1}(A)$  који тежи ка  $\varphi^{-1}(a)$ . Тада  $f(\varphi(t_n)) \rightarrow \xi$  због непрекидности  $\varphi$  у  $a$  и због  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \xi$ .  $\square$

**Тврђење.** (Принцип продужења неједнакости) Нека је  $A \subseteq X$ ,  $a \in \overline{A}$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ . Тада важи:

$$(1) (\exists B)(B \subseteq A \wedge a \in \overline{B} \wedge f|_B \leq g|_B) \implies \alpha \leq \beta$$

$$(2) \alpha < \beta \implies (\exists V \in \mathcal{F}_a^0) f|_{A \cap V} \leq g|_{A \cap V}$$

*Доказ.* (1) Формирати низ  $B \ni b_n \rightarrow a$  и применити сагласност лимеса са  $\leq$ .

(2) Постоји  $\gamma, \alpha < \gamma < \beta$ . Како су  $(-\infty, \gamma)$  и  $(\gamma, +\infty)$  околине тачака  $\alpha$  и  $\beta$ , редом, ти интервали су уједно и елементи филтера (пробушених) околина тачака  $\alpha$  и  $\beta$ , редом. Из чињенице да је филтер затворен у односу на пресек, извести закључак.  $\square$

## 1.1 Комплетност

**Тврђење.** Равномерно непрекидна слика Кошијевог низа је Кошијев низ.

*Доказ.* Применити дефиницију.  $\square$

**Тврђење.** Подскуп  $A \subseteq X$  комплетног простора  $X$  је комплетан ако је затворен.

*Доказ.*  $\Rightarrow$  Доказати да је  $A = \overline{A}$  преко конвергентног низа.

$\Leftarrow$  Из затворености сваки Кошијев низ је конвергентан у  $A$ .  $\square$

**Напомена.** Примери простора који нису комплетни су незатворени подскупови комплетних.

**Тврђење.** Производ  $(X, d_\infty) = \prod_{j=1}^k (X_j, d_j)$  је комплетан ако и само ако су сви  $X_j$  комплетни.

*Доказ.* Нека је  $\pi_j : X \rightarrow X_j$ . Доказати да низови  $\pi_j a_n$  конвергирају у просторима  $X_j$ , где је  $a_n$  низ у  $X$ . За други смер, утопити  $X_j$  у  $X$  као  $i : X_j \rightarrow X_j \times \{c_1\} \times \{c_2\} \dots$   $\square$

**Теорема.** (Канторова карактеризација комплетности) Метрички простор  $(X, d)$  је комплетан ако и само ако сваки опадајући низ непразних затворених подскупова чији низ дијаметара тези нули има непразан пресек.

*Доказ.*  $\Rightarrow$  Претпоставимо да је простор комплетан. Нека је  $F_n$  низ подскупова из услова теореме. Формирамо низ  $a_n \in F_n$ . Покази да је тај низ Кошијев, па је због комплетности и конвергентан, стога пресек је  $a_\infty$  па није празан.

$\Leftarrow$  Нека је  $a_n$  Кошијев низ у  $X$ . Дефинисати  $F_n := \overline{\{a_n, a_{n+1}, \dots\}}$ , па како  $X$  има Канторово својство, пресек није празан, тј постоји  $a_\infty \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ .  $\square$

**Теорема.** (Продужење непрекидног пресликавања) Нека су  $X, Y$  метрички простори,  $A \in X$ ,  $\bar{A} = X$  (тј.  $A$  густ у  $X$ ) и  $f : A \rightarrow Y$  непрекидно пресликавање. Тада важи:

- (1) Постоји непрекидно пресликавање  $F : X \rightarrow Y$  са особиним  $F|_A = f$  ако и само ако  $(\forall x \in X) \exists \lim_{t \rightarrow x} f(t) =: g(x)$ . При томе је  $F \equiv g$  (јединственост продужења).
- (2) Ако је  $f$  равномерно непрекидно и  $Y$  комплетан, онда постоји равномерно непрекидно  $F : X \rightarrow Y$  са особиним  $F|_A = f$ .

*Доказ.* (1) Један смер је тривијалан. За други смер искористити својство непрекидне функције  $f(U) \subseteq V$ , примењено на одговарајућу околину тачке.

- (2) Нека је  $x \in X$  произвољна тачка и  $a_n$  низ у  $A$  који тежи ка  $x$ . Тада је  $a_n$  Кошијев, па је  $f(a_n)$  такође Кошијев (јер је  $Y$  комплетан и  $f$  равномерно непрекидно), па је  $f(a_n)$  конвергентан. Да бисмо могли да кажемо  $F(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ , морамо доказати да ова дефиниција не зависи од избора низа. Претпоставимо да  $b_n \rightarrow x$ . Доказати тада  $d_X(a_n, b_n) \rightarrow 0$  и одатле, из равномерне непрекидности, закључити да  $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \rightarrow 0$ , одакле следи добра дефиниција (ово је смислено због карактеризације лimesа у тачки преко лimesа низа).  $\square$

**Теорема.** (Банахова теорема о фиксној тачки) Нека је  $X$  комплетан метрички простор,  $f : X \rightarrow X$  контракција,  $0 < q = \text{lip} f < 1$ . Тада  $f$  има тачно једну фиксну тачку, тј. постоји јединствена тачка  $a_\infty \in X$  таква да је  $f(a_\infty) = a_\infty$ .

Тачка  $a_\infty$  је гранична вредност низа дефинисаног рекурентно:  $a_0$  произвољно,  $a_{n+1} = f(a_n)$  (низ сукцесивних апроксимација) и при томе важи

$$d(a_n, a_\infty) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(a_0, a_1)$$

*Доказ.* Почети од  $d(a_{n+2}, a_{n+1}) = d(f(a_{n+1}), f(a_n)) \leq q d(a_{n+1}, a_n)$ . Помножити неједнакост са  $q^{-(n+1)}$ . Закључити да је низ  $q^{-n} d(a_{n+1}, a_n)$  опадајући. Проценити  $d(a_{n+1}, a_n)$  са  $d(a_1, a_0)$ . Проценити  $d(a_m, a_n)$  (супремум тога) и закључити да је  $a_n$  Кошијев. Тад је фиксна тачка лimes тог низа. Доказати јединственост супротном претпоставком.  $\square$

**Теорема.** Нормирани векторски простор  $X$  је комплетан ако и само ако је сваки апсолутно конвергентан ред у њему конвергентан.

*Доказ.*  $\Rightarrow$  Нека је  $X$  комплетан и  $\sum_{n=0}^{\infty} \|a_k\| < \infty$ . Нека је  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ . Доказати да је  $s_n$  Кошијев.

$\Leftarrow$  Нека је  $a_n$  Кошијев у  $X$ . Тада постоји  $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$  тд.  $\|a_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n+1)}\| \leq 2^{-n}$ . Такво  $\varphi$  конструишемо на следећи начин

$$\begin{aligned} A_n &= \{a_n, a_{n+1}, \dots\} \\ \varphi(0) &:= \min\{n \in \mathbb{N} \mid \text{diam}(A_n) < 2^0\} \\ \varphi(n+1) &:= \min\{k \in \mathbb{N} \mid k > \varphi(n) \wedge \text{diam}(A_k) < 2^{-(n+1)}\} \end{aligned}$$

Пошто  $\sum 2^{-n}$  конвергира, закључити и да  $a_{\varphi(n)}$  конвергира. Искористити чињеницу да је Кошијев низ који има конвергентан подниз и сам конвергентан. Следи комплетност  $X$ .  $\square$

**Теорема.**  $B_Y(X)$  је Банахов ако и само ако је  $Y$  Банахов.

*Доказ.*  $\Rightarrow$  Нека је  $B_Y(X)$  комплетан и  $b_n$  низ у  $Y$ . Хоћемо да искористимо претходну теорему, тј. претпоставимо да ред са општим чланом  $b_n$  апсолутно конвергира. Дефинишимо  $f_n : X \rightarrow Y$ ,  $f_n(x) \equiv b_n$ . Закључити да ред са општим чланом  $f_n$  конвергира (у  $B_Y(X)$ ), па одатле извести закључак да  $\sum b_n$  конвергира.

$\Leftarrow$  Слична идеја као у директном смеру. Искористити још и поредбени принцип.  $\square$

**Последица.**  $\mathcal{L}(X; Y)$  је комплетан ако и само ако је  $Y$  комплетан.

*Доказ.* Доказ следи из претходног и тога да је  $\mathcal{L}(X; Y) \hookrightarrow B_Y(S)$  изоморфизам на затворен подскуп, где је  $S = \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ .  $\square$

**Напомена.** Ако је  $X$  нормирани векторски простор над пољем  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , онда је његов дуал  $X^* := \mathcal{L}(X; \mathbb{K})$  комплетан.

**Напомена.** У коначно димензионом случају  $X \cong X^*$ , тј важи Рисова теорема о репрезентацији

$$(\forall \alpha \in X^*)(\exists a \in X)(\forall v \in X) \alpha(v) = \langle v, a \rangle$$

**Напомена.** У бесконачно димензионом случају не мора да важи претходно,  $X$  не мора бити комплетан, а  $X^*$  је увек комплетан.

**Напомена.** Ако је  $X$  Хилбертов, онда је  $X \cong X^*$ .

## 1.2 Компактност

**Тврђење.** Компактан метрички простор је комплетан.

*Доказ.* Следи из чињенице да ако Кошијев низ има конвергентан подниз, онда је и сам конвергентан.  $\square$

**Тврђење.**

- (1) Компактан скуп је затворен
- (2) Затворен подскуп компактног скупа је компактан

*Доказ.* (1) Раније доказано за комплетност

(2) Тривијално □

**Тврђење.** Непрекидна слика компактног скупа је компактан.

*Доказ.* Конструисати низ  $b_n$  у  $f(X)$ . Наћи његов конвергентан подниз. □

**Последица.** Непрекидна реална функција на компактном скупу је ограничена и достиже  $\min$  и  $\max$ .

**Тврђење.** Производ метричких простора је компактан ако и само ако су такви простори фактори.

*Доказ.*  $\Rightarrow$  пројекције су непрекидне сурјекције па су им слике компактне  
 $\Leftarrow$  принцип дијагонализације □

**Тврђење.** Компактан скуп је ограничен.

*Доказ.* Непрекидност  $f : A \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = d(x, a)$  □

**Тврђење.** Нека су  $X$  и  $Y$  метрички простори,  $X$  компактан,  $f : X \rightarrow Y$  непрекидна бијекција. Тада је  $f$  хомеоморфизам, тј. пресликавање  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  је такође непрекидно.

*Доказ.* Нека је  $F \subseteq X$  затворен подскуп. Тада је  $F$  компактан, па је и  $f(F)$  компактан, односно  $f(F)$  је затворен. Закључак следи из чињенице да је непрекидна слика затвореног скупа затворена акко је пресликавање непрекидно. □

**Напомена.** Пресликавање  $\varphi : [0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{S}^1$  дато као  $\varphi(t) := e^{it}$  је непрекидна бијекција која није хомеоморфизам.

**Теорема.** (Канторова) Непрекидно пресликавање на компакту је равномерно непрекидно.

*Доказ.* Претпоставити супротно, да је  $X$  компактан,  $f : X \rightarrow Y$  непрекидно, али није равномерно. Негирати услов равномерне непрекидности и узети  $\delta = \frac{1}{n}$ . Извести контрадикцију. □

**Лема.** Свака норма

$$\|\cdot\| : \mathbb{K}^r \rightarrow \mathbb{R}$$

на векторском простору  $\mathbb{K}^r$  је Липшицово пресликавање нормираног векторског простора  $(\mathbb{K}^r, |\cdot|)$  са стандардном еуклидском нормом.

*Доказ.* Представити  $x = (x_1, \dots, x_r)$  као линеарну комбинацију базних вектора. Применом Коши-Шварцове неједнакости закључити да је  $\|x\| \leq C|x|$ , односно даље,  $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq C|x - y|$ . □

**Тврђење.** Нека је  $\|\cdot\|$  произвољна норма. Тада

$$(\exists m, M \in (0, \infty)) (\forall x \in \mathbb{K}^r) \quad m|x| \leq \|x\| \leq M|x|$$

где је  $|\cdot|$  стандардна еуклидска норма на  $\mathbb{K}^r$ .

*Доказ.* Пошто је јединична сфера компактан скуп,  $\|\cdot\|$  достиже минимум и максимум на њему. Важи

$$m \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq M$$

□

**Напомена.** На  $k - \dim$  простору све норме су еквивалентне.

**Последица.** Свака два нормирана векторска простора исте коначне димензије су алгебарски и тополошки изоморфна.

**Напомена.** Димензија је једина инваријанта коначно димензионог векторског простора.

**Тврђење.** Метрички простор је тотално ограничен (пред-компактан) ако и само ако сваки низ у њему има Кошијев подниз.

*Доказ.*  $\Rightarrow$  Нека је  $X$  тотално ограничен и нека је  $a \in X^{\mathbb{N}}$ . Нека је  $E_1$  1-мрежа. Тада се за неко  $e_1 \in E_1$  у лопти  $B_1 = B[e_1; 1[$  налази бесконачно много чланова низа  $a_n$ . Даље, понављати поступак за  $\frac{1}{n}$ -мреже. Добија се низ лопти  $B_n$  таквих да је свака следећа садржана у претходној. Тразени низ дефинисати као  $a \circ \varphi$  где је  $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$  дато са:

$$\varphi(0) = 0, \varphi(n+1) = \min a^{-1}(B_n \cap (\varphi(n), +\infty))$$

$\Leftarrow$  Претпоставити супротно, да  $X$  није тотално ограничен. Известити контрадикцију. □

**Последица.** Метрички простор је компактан ако и само ако је комплетан и тотално ограничен.

**Тврђење.** Подскуп  $A \subseteq X$  комплетног метричког простора  $X$  је релативно компактан, односно његово затворање је компактно, ако и само ако је тотално ограничен.

*Доказ.* Из компактности  $\overline{A}$  закључити да је  $\overline{A}$  комплетан и тотално ограничен. Применом продужења неједнакости закључити да је и  $A$  тотално ограничен. □

**Напомена.** Сваки компактан подскуп у Хаусдорфовом простору је релативно компактан

**Лема.** (Лебегова) Нека је  $X$  компактан метрички простор и  $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  његово отворено покривање. Тада  $(\exists \delta > 0)$  са својством да је свака отворена лопта полупречника  $\delta$  садржана у неком  $V_\lambda$ .

*Доказ.* Покријмо  $X$  неком  $\frac{1}{2}r_a$ -мрежом, таквом да је за свако  $a \in X$ ,  $B(a, r_a)$  садржано у неком  $V_\lambda$ . Тада постоји коначна подмрежа, која покрива  $X$ . Доказати да  $\delta := \min \frac{1}{2}r_a$  испуњава услове задатка. □

**Тврђење.** Сваки тотално ограничен простор је сепарабилан. Специјално, компактан простор је сепарабилан.

*Доказ.* Нека је  $E_n$  коначна  $\frac{1}{n}$ -мрежа. Посматрати скуп  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  и закључити да је  $\overline{E} = X$ . □

**Тврђење.** Простор је сепарабилан ако и само ако сваки отворени покривач има пребројив потпокривач.

### 1.3 Простор непрекидних пресликавања

**Тврђење.**  $X$  компактан  $\implies C(X; Y) \subseteq B(X; Y)$

*Доказ.* Закључити из тога да функција  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  која слика  $x \mapsto d(b, f(x))$  на компакту достиже минимум и максимум.  $\square$

**Тврђење.**  $C_Y(X)$  је затворен у  $B_Y(X)$ .

*Доказ.* Нека је  $f_n : X \rightarrow Y$  низ у  $C_Y(X)$ . Нека  $f_n \rightarrow f_\infty$  кад  $n \rightarrow \infty$ . Доказати да је  $f_\infty \in C_Y(X)$ , односно да је  $(\forall a \in X) f_n C a$ . Искористити дефиницију непрекидности у тачки.  $\square$

**Последица.** Ако је  $X$  компактан и  $Y$  комплетан, онда је и  $C_Y(X)$  комплетан.

*Доказ.* Због тога што, ако је  $X$  компактан тада је  $C(X; Y) \subseteq B(X; Y)$ . Ако је  $Y$  комплетан, тада је  $B(X; Y)$  комплетан. Према претходном  $C(X; Y)$  је затворен у  $B(X; Y)$ , па стога закључујемо да је и комплетан као затворен подскуп комплетног скупа.  $\square$

**Теорема.** (Дини) Нека је  $X$  компактан метрички простор и  $f_n$  монотон низ у  $C_{\mathbb{R}}(X)$  такав да важи:

$$(1) (\forall x \in X) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x)$$

$$(2) f_\infty \in C_{\mathbb{R}}(X)$$

Тада  $f_n \rightrightarrows f_\infty$  (тј.  $f_n \rightarrow f_\infty$  у  $(C_{\mathbb{R}}(X), d_\infty)$ ).

*Доказ.* На кодомену  $\mathbb{R}$  метрика је дефинисана уз помоћ  $|\cdot|$ , даље на  $C_{\mathbb{R}}(X)$  имамо норму  $\|g\|_\infty := \max_{x \in X} |g(x)|$  и равномерна метрика је  $d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$ . Посматрајмо низ функција:  $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_n(x) = |f_\infty(x) - f_n(x)|$ . Доказ спровести у два корака:

1) Из особина низа  $g_n$  закључити да  $\|g_n\|_\infty \searrow$ .

2) Формирати низ  $F_n = \{x \in X | g_n(x) \geq \epsilon\}$ . Он је затворен. Доказати да важи  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_\infty = 0$ . Одатле следи тражено.

Могуће је и посматрати низ отворених скупова  $U_n = \{x \in X | g_n(x) < \epsilon\}$ . Ово је отворени покривач компактног простора  $X$ , одакле следи да имамо коначан потпокривач. Како је  $g_n$  опадајући низ, одабиром максималног  $n$  из коначног потпокривача следи да је  $\|g_n\|_\infty < \epsilon$ , а како је  $\epsilon$  произвољно, одатле следи доказ.  $\square$

**Теорема.** (Коровкинова) Нека је  $X$  компактан метрички простор и  $S \subseteq C_{\mathbb{R}}(X)$  подскуп, такав да је њиме генерисани векторски простор минимизирајући. Ако је

$$P_n : C_{\mathbb{R}}(X) \rightarrow C_{\mathbb{R}}(X)$$

низ позитивних линеарних пресликавања такав да  $(\forall f \in S) P_n f \rightrightarrows f$ , тада важи

$$(\forall f \in C_{\mathbb{R}}(T)) P_n f \rightrightarrows f$$

*Доказ.* Због линеарности униформне конвергенције и линеарности  $P_n$  можемо да претпоставимо да је  $S = M$ . Нека је  $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$ . Извести доказ у три корака:



1) Нека је  $\epsilon > 0$ . Тада

$$(\forall a \in X)(\exists g \in M)g(a) \leq f(a) + \epsilon \wedge g > f$$

2)  $(\forall \epsilon > 0) \exists$  коначан низ  $g_1, \dots, g_r \in M$  такав да је  $f < \inf\{g_1, \dots, g_r\} \leq f + \epsilon$

3) Применом претходног, доказати да је  $\|P_n f - f\|_\infty = \sup_{x \in X} |P_n f - f| < \epsilon$ .

□

*Пример.* (Бернштајнови полиноми)  $B_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$

$$B_n f(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f\left(\frac{j}{n}\right) x^j (1-x)^{n-j}$$

Нека је  $S = \{e_0, e_1, e_2\}$ ,  $e_0(x) = 1$ ,  $e_1(x) = x$ ,  $e_2(x) = x^2$  и нека је  $M$  векторски простор са базом  $\{e_0, e_1, e_2\}$ .  $M \subseteq C[0, 1]$ ,  $M$  је минимизирајући. Важи да  $B_n e_j \rightrightarrows e_j$  за све  $j \in \{0, 1, 2\}$ . По Коровкиној теореме закључујемо:

$$(\forall f \in C[0, 1]) B_n f \rightrightarrows f$$

.

**Последица.** (Прва Вајерштрасова теорема) Скуп полинома је густ у  $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ .

*Доказ.* Хомеоморфизам  $\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$  где је  $\varphi(t) = bt + a(1-t)$  дефинише линеарну изометрију  $\varphi^* : C[a, b] \rightarrow C[0, 1]$  са  $\varphi^* f = f \circ \varphi$ . Даље разматрање своди се на претходни пример. □

**Напомена.** Профињење Прве Вајерштрасове теореме је развој у степени ред.

**Теорема.** (Стон - Вајерштрасов став)

- Реални облик: Ако је  $\mathcal{A}$  подалгебра алгебре  $C_{\mathbb{R}}(X)$  која садржи 1 и разликује тачке, тј. важи  $(\forall x, y \in X) x \neq y \implies (\exists f \in \mathcal{A}) f(x) \neq f(y)$ , онда је  $\mathcal{A}$  густа у  $C_{\mathbb{R}}(X)$ :  $\overline{\mathcal{A}} = C_{\mathbb{R}}(X)$ .
- Комплексни облик: Ако је  $\mathcal{A}$  подалгебра алгебре  $C_{\mathbb{C}}(X)$  која садржи 1 и разликује тачке и затворена је за конјуговање, тј.  $f \in \mathcal{A} \implies \overline{f} \in \mathcal{A}$ , онда је  $\mathcal{A}$  густа у  $C_{\mathbb{C}}(X)$ .

*Доказ.* Спровести доказ из следећих корака:

1)  $f \in \mathcal{A} \implies |f| \in \overline{\mathcal{A}}$

2)  $f, g \in \mathcal{A} \implies \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in \overline{\mathcal{A}}$

3) За произвољне  $x_0 \neq y_0 \in X$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  постоји  $f \in \mathcal{A}$  такво да је  $f(x_0) = \lambda$ ,  $f(y_0) = \mu$ .

4) За свако  $h \in C_{\mathbb{R}}(X)$ ,  $x_0 \in X$  и  $\epsilon > 0$ , постоји  $g \in \overline{\mathcal{A}}$ , такво да је  $g(x_0) = h(x_0)$  и  $g \leq h + \epsilon$ . Применити компактност  $X$  и извести закључак.

□

**Последица.** (Друга Вајерштрасова теорема)

- Алгебра генерисана скупом  $\{e^{int}\}$  је густа у  $C_{\mathbb{C}}(2\pi)$ .
- Алгебра генерисана скупом  $\{1, \cos nt, \sin nt\}_{n \in \mathbb{N}}$  је густа у  $C_{\mathbb{R}}(2\pi)$ .

**Напомена.** Профићење Друге Вајерштрасове теореме јесте развој у Фуријеов ред.

**Теорема.** (Арцела - Асколијева теорема) Нека је  $X$  сепарабилан и  $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  низ који је:

1. ограничен по тачкама, тј.  $(\forall x \in M) \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$
2. равностепено непрекидан

Тада низ  $f_n$  има подниз који равномерно конвергира на сваком компактном подскупу.

*Доказ.* Пошто је  $X$  сепарабилан, постоји пребројив густ подскуп  $S \subset X$ . Поређајмо његове тачке у низ  $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ . Дефинишимо низ подскупова  $N_k \subset \mathbb{N}$  индуктивно. Нека је  $N_0 = \mathbb{N}$ . Нека је  $N_k$  дефинисано. Према услову 1. постоји бесконачан скуп  $N_{k+1} \subset N_k$ , такав да постоји

$$\lim_{N_{k+1} \ni n \rightarrow \infty} f_n(x_{k+1})$$

Формирајмо  $N := \{n_1, n_2, \dots\}$  где је  $n_k$   $k$ -ти елемент из скупа  $N_k$  за свако  $k$  (дијагонални избор). Из конструкције следи да за свако  $x \in S$  постоји

$$\lim_{N \ni n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Нека је  $K \subset M$  компактан подскуп. Покрити  $K$  са коначно много отворених лопти, које су довољно малог полупречника таквог да је за свако  $n$  вредност  $|f_n(x) - f_n(y)|$  произвољно мала (ово је могуће због равностепене непрекидности). Искористити сада и да постоји тачка у пресеку  $S$  и сваке такве лопте. На крају довршити доказ оценом  $|f_n(x) - f_m(x)|$  уз помоћу неједнакости троугла, Кошијевог услова (у комплетном простору  $\mathbb{C}$ ).  $\square$

**Напомена.** У Арцела - Асколијевој теореме  $X$  може бити и компактан, пошто је компактност јаче својство од сепарабилности.

## 1.4 Повезаност

**Теорема.** За тополошки простор  $(X, \tau)$  следећи искази су еквивалентни:

- а)  $X$  не може да се представи као унија 2 дисјунктна непразна отворена скупа
- б)  $X$  не може да се представи као унија 2 дисјунктна непразна затворена скупа
- в) Једини подскупови у  $X$  који су и отворени и затворени су  $\emptyset$  и  $X$
- г) Свако непрекидно пресликавање  $X \rightarrow \{0, 1\}$  (где је  $\{0, 1\}$  метрички простор са дискретном метриком  $d(0, 1) = 1, d(0, 0) = d(1, 1) = 0$ ) је константно

*Доказ.* а)  $\Leftrightarrow$  б) : Претпоставити супротно. Закључак следи из чињенице да ако је  $A$  отворен тада је  $B = X \setminus A$  затворен и обрнуто.

а)  $\Rightarrow$  в) : Претпоставити супротно, да постоји  $A \subset X$  који је и отворен и затворен и непразан. Тада се  $X$  може представити као унија два отворена дисјунктна скупа  $A$  и  $X \setminus A$  одакле следи контрадикција сем ако  $A$  није празан.

в)  $\Rightarrow$  а) : Слично претходном.

а)  $\Rightarrow$  г) : Претпоставити супротно, да  $f$  није константно. Доказати да тада не важи а). Контрапозиција.

г)  $\Rightarrow$  а) : Претпоставити  $\neg$  а). Користећи чињеницу да је инверзна слика отвореног скупа отворен скуп закључити  $\neg$  г).  $\square$

**Тврђење.** Ако је  $S$  повезан скуп и  $S \subseteq A \subseteq \overline{S}$ , онда је и  $A$  повезан.

*Доказ.* Посматрати непрекидно пресликавање  $f : A \rightarrow \{0, 1\}$  које због повезаности мора бити const. Закључак следи из принципа продужења једнакости.  $\square$

**Тврђење.** Ако је  $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  фамилија повезаних скупова и  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \neq \emptyset$ , онда је  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$  повезан скуп.

*Доказ.* Конструисати непрекидно пресликавање  $f : \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \rightarrow \{0, 1\}$ . На сваком  $S_\lambda$  оно је const. Посто је пресек њих непразан, мора бити const и на целој унији.  $\square$

**Напомена.** Важи и уопштење:  $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  повезани и  $(\exists \lambda_0)(\forall \lambda \in \Lambda) S_\lambda \cap S_{\lambda_0} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$  повезан (теорема „цветић“).

**Напомена.** Претходна два тврђења важе и за путну повезаност, али не и за просту повезаност (посматрати две дужи међусобно залепљене у крајевима, унија те две дужи је круг, који није просто повезан, али обе дужи јесу просто повезане и пресек им је непразан).

**Последица.** Декартов производ повезаних метричких простора је повезан.

*Доказ.* Представити  $M \times N = \bigcup_{a \in M} \{a\} \times N = (\bigcup_{a \in M} \{a\} \times N) \cup (M \times \{y_0\})$ . Даље, следи на основу претходног.  $\square$

**Тврђење.** Непрекидна слика повезаног скупа је повезан скуп.

*Доказ.* Следи из дефиниције и сурјективности  $f : X \rightarrow f(S)$ .  $\square$

**Тврђење.** Путно повезан скуп је повезан.

*Доказ.* Показати да је непрекидно  $\varphi : S \rightarrow \{0, 1\}$  константно. Закључити да је  $\varphi \circ \gamma = \text{const}$  где је  $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$  непрекидно такво да је  $\gamma(0) = s_0, \gamma(1) = x$ . Одатле следи  $\varphi(x) = \varphi(s_0)$ , тј.  $\varphi = \text{const}$ .  $\square$

*Пример.* (Бесконачна метла) Нека је  $L_n$  дуж која спаја тачке  $(0, 0)$  и  $(1, \frac{1}{n})$  и нека је  $L_\infty = [0, 1]$  (на  $x$ -оси). Нека је  $M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$  и  $A = M \cup \{(1, 0)\}$ . Тада је  $M \subseteq A \subseteq \overline{M}$ , па је  $A$  повезан, али не и путно повезан.

**Тврђење.** Непрекидна слика путно повезаног скупа је путно повезан.

*Доказ.* Конструисати  $f \circ \gamma$ . Посматрати шта је то пресликавање у 0 и 1.  $\square$

**Напомена.** Претходни доказ и доказ сличног тврђења за обичну повезаност су на неки начин дуални („метод обрнутих стрелица“).

## 2 Диференцирање

### 2.1 Диференцирање у нормираним векторским просторима

**Теорема.** (Извод сложене функције) Нека су  $X, Y$ , и  $Z$  нормирани векторски простори,  $V \subseteq X$ ,  $W \subseteq Y$  отворени скупови,  $f : V \rightarrow Y$ ,  $g : W \rightarrow Z$  и  $a \in V$ ,  $f(a) \in W$ . Тада важи:

$$f\mathcal{D}a \wedge g\mathcal{D}f(a) \implies g \circ f\mathcal{D}a$$

и при томе је

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

*Доказ.* Доказ следи из дефиниције извода пресликавања и чињенице да је  $o(O(h)) = o(h)$ .  $\square$

**Теорема.** (Извод инверзне функције) Нека су  $X$  и  $Y$  нормирани векторски простори,  $V \subseteq X$  отворен скуп,  $a \in V$  и  $f : V \rightarrow Y$  пресликавање са следећим својствима:

- 1)  $f\mathcal{D}a$
- 2)  $Df(a)$  инвертибилан
- 3) у некој  $W$  околини тачке  $b := f(a)$  пресликавање  $f$  има инверзно
- 4)  $f^{-1}\mathcal{C}b$

Тада је  $f^{-1}\mathcal{D}b$  и важи:

$$(Df^{-1})(b) = (Df(a))^{-1}$$

*Доказ.* Нека је  $b = f(a)$ ,  $a = f^{-1}(b)$ . Показати да, пошто су трансформације хомеоморфизми, важи  $f(a + h) = b + t$  и  $f^{-1}(b + t) = a + h$ . Из непрекидности  $f^{-1}$  у  $b$  закључити чему је једнако  $f^{-1}(b + t) - f^{-1}(b)$ . Из услова  $f\mathcal{D}a$  закључити чему је једнако  $(f'(a))^{-1}t$  као и да је  $o(h) = o(t)$ . На основу претходних корака, и дефиниције извода, извести коначни закључак.  $\square$

**Тврђење.** Ако је простор Банахов (комплетан нормиран векторски простор), скуп  $GL(X)$  је отворен у  $\mathcal{L}(X; X)$ .

*Доказ.* Посматрати  $A \in GL(X)$  и  $h \in \mathcal{L}(X; X)$ . Доказати да је и  $A + h \in GL(X)$  односно да постоји  $(A + h)^{-1}$ . Искористити комплетност домена као и дефинисаност норме.  $\square$

**Напомена.** Претходно тврђење важи и у нешто општијем случају, за  $\mathcal{L}(X; Y)$ , уколико је  $X$  Банахов, а  $Y$  нормирани векторски простор.

**Теорема.** (Теорема о коначном прираштају) Нека су  $X$  и  $Y$  нормирани векторски простори,  $V \subseteq X$  отворен и  $f : V \rightarrow Y$  непрекидно. Ако је

$$[a, a + h] = \{a + th \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq V$$

и ако је пресликавање  $f$  диференцијабилно у свим тачкама скупа

$$]a, a + h[ = \{a + th \mid 0 < t < 1\}$$

онда важи

$$\|f(a + h) - f(a)\| \leq \sup_{x \in ]a, a + h[} \|f'(x)\| \cdot \|h\|$$

*Доказ.* Доказати да теорема важи на сваком сегменту  $[c_1, c_2] \subseteq ]a, a + h[$ . Претпоставити супротно,

$$\sup_{x \in [c_1, c_2]} \|f'(x)\| < \frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta x\|}$$

Поделити интервал  $[c_1, c_2]$  на два подинтервала и применити помоћну лему на њих. Продужити поступак, формирати низ интервала. Поново применити помоћну лему. Извести контрадикцију.  $\square$

**Напомена.** Помоћна лема из претходне теореме је следећа неједнакост:

Ако за  $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}_+$  важи  $c \leq a + b$  и  $\gamma = \alpha + \beta$ , онда је

$$\frac{c}{\gamma} \leq \max \left\{ \frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta} \right\}$$

**Последица.** Ако је  $V$  отворен и повезан скуп,  $f : V \rightarrow Y$  диференцијабилна и  $Df \equiv 0$ , онда је  $f \equiv \text{const}$ .

*Доказ.* Доказати најпре да је  $V$  путно повезан (ово важи у нормираним векторским просторима). Из конвексности лопти закључити да мора бити  $f$  бити константно на лопти, и искористити да сваки пут можемо покрити са коначно много лопти.  $\square$

**Последица.** Нека је  $f$  као у поставци Теореме о коначном прираштају и  $L \in \mathcal{L}(X; Y)$ . Тада је:

$$\|f(a + h) - f(a) - Lh\| \leq \sup_{x \in (a, a+h)} \|f'(x) - L\| \cdot \|h\|.$$

*Доказ.* Применити теорему на  $F : V \rightarrow Y$ ,  $F(x) := f(x) - L(x)$ .  $\square$

**Теорема.** (Ојлерова теорема) Нека је  $X$  нормирани векторски простор над  $\mathbb{R}$ . Диференцијабилна функција  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  је хомогена степена  $k > 0$  ако и само ако је

$$df(x) \cdot x = kf(x)$$

*Доказ.* Дефинисати помоћну функцију  $\psi(t) = f(tx) - t^k f(x)$ , где  $\psi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  и одатле доказати оба смера еквиваленције.  $\square$

**Тврђење.** Нека је  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_l$ ,  $V \subseteq X$  отворен и  $f \mathcal{D}_Y V$ . Тада важи:

$$f \in C_Y^1(V) \iff (\forall j) D_j f \in C_Y(V).$$

*Доказ.* Доказати да важи еквиваленција:

$$Df(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} Df(a) \iff (\forall j) D_j f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} D_j f(a),$$

оценом норме  $\|Df(x) - Df(a)\|$  одозго и одоздо.  $\square$

**Теорема.** Нека је  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_l$ ,  $a$  унутрашња тачка скупа  $V \subseteq X$ . Ако пресликавање  $f : V \rightarrow Y$  има све парцијалне изводе у  $a$  и непрекидни су у тачки  $a$ , онда је пресликавање  $f$  диференцијабилно у тачки  $a$ .

*Доказ.* Дефинисати  $Lh := \sum_{j=1}^n D_j f(a) h_j$  и доказати да је  $L = Df(a)$  применом последице 2 Теореме о коначном прираштају и непрекидности  $D_j f$  у тачки  $a$ .  $\square$

**Последица.** Пресликавање је непрекидно диференцијабилно акко су му сви парцијални изводи непрекидни.

**Тврђење.**  $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y)) \cong \mathcal{L}(X, X; Y)$

*Доказ.* Нека је  $L \in \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y))$  произвољно. Дефинисати  $\tilde{L} : X \times X \rightarrow Y$  као

$$\tilde{L}(\eta, \xi) := L(\eta)(\xi)$$

Доказати да је са  $\varphi(L) = \tilde{L}$  добро дефинисан тражени изоморфизам.  $\square$

**Тврђење.**  $f D^n a \implies D^n f(a)$  је симетрично  $n$ -линеарно пресликавање.

*Доказ.* Приметити најпре да је довољно доказати за транспозиције, јер оне генеришу групу пермутација. Увести

$$F_{\zeta, \eta}(t) := f(a + t(\zeta + \eta)) - f(a + t\zeta) - f(a + t\eta) - f(a)$$

и доказати да је

$$D^2 f(a)(\zeta, \eta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_{\zeta, \eta}(t)}{t^2}.$$

Извести закључак из тога, чињенице да је  $F$  симетрично по  $\zeta$  и  $\eta$ , као и

$$D^n f(a)(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = D_{\zeta_1} D_{\zeta_2} \dots D_{\zeta_n} f(a).$$

$\square$

**Теорема.** (Тејлорова формула) Нека су  $X, Y$  нормирани векторски простори,  $V \subseteq X$  отворен,  $a \in V$ ,  $f D^{n-1} V$  и  $f D^n a$ . Тада је

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)h^n + o(\|h\|^n), h \rightarrow 0$$

*Доказ.* Доказ извести индукцијом по  $n$  коришћењем Последице 2. теореме о коначном прираштају и чињенице да је  $(Lx^n)' = nLx^{n-1}$ .  $\square$

**Напомена.** Запис  $f^{(n)}(a)x^n$  значи да је  $D^n f(a)$   $n$ -линеарна симетрична форма која делује на вектор  $x^n = \underbrace{(x, x, \dots, x)}_n$ .

## 2.2 Унутрашње тачке екстремума

**Тврђење.** Нека је  $V$  отворен подскуп нормираног векторског простора  $X$ ,  $a \in V$ ,  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f D^n a$ ,  $Df(a) = D^2 f(a) = \dots = D^{n-1} f(a)$ ,  $D^n f(a) \neq 0$ . Да би  $a$  била тачка локалног екстремума функције  $f$ :

- **неопходно** је да  $n$  буде паран број и да је  $D^n f(a)$  семидефинитна форма.
- **довољно** је да су вредности  $D^n f(a)h^n$  одвојене од 0 на јединичној свери  $\|h\| = 1$ .

*Доказ.* Применити Тејлорову формулу.  $\square$

*Пример.* (Ојлер–Лагранжове једначине)

## 2.3 Теорема о имплицитној функцији

**Теорема.** (Теорема о имплицитној функцији) Нека су  $X, Y$  и  $Z$  нормирани векторски простори, при чему је  $Y$  комплетан,  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$  и  $W = B[x_0; \alpha] \times B[y_0; \beta] \subseteq X \times Y$ . Претпоставимо да пресликавање  $F : W \rightarrow Z$  испуњава следеће услове:

- (1)  $F(x_0, y_0) = 0$
- (2)  $FC(x_0, y_0)$
- (3)  $D_2F$  дефинисано на  $W$  и непрекидно у тачки  $(x_0, y_0)$
- (4)  $\exists (D_2F(x_0, y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(Z; Y)$

Тада постоје околине  $U$  и  $V$  тачака  $x_0$  и  $y_0$  и пресликавање  $f : U \rightarrow Y$  са својствима:

- (а)  $U \times V \subseteq W$
- (б)  $[(x, y) \in U \times V \text{ и } F(x, y) = 0] \iff y = f(x)$
- (в)  $fCx_0$

*Доказ.* Пошто су транслације хомеоморфизми, без умањења општости претпоставити да важи  $x_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ . Дефинисати помоћну функцију  $g_x : B[0; \beta] \rightarrow Y$  као

$$g_x(y) := y - (D_2F(0, 0))^{-1}F(x, y).$$

Користећи Теорему о коначном прираштају доказати да је  $g_x$  контракција и да слика неки комплетан скуп у себе. Применити Банахов став о фиксној тачки. Одатле извести закључак.  $\square$

**Теорема.** (Теорема о инверзној функцији) Нека су  $X, Y$  нормирани векторски простори, при чему је  $Y$  комплетан, нека је  $V \subseteq Y$  отворен скуп,  $y_0 \in V$  и  $g : V \rightarrow X$  пресликавање које има следећа својства:

- (1)  $g \in \mathcal{D}(V; X)$
- (2)  $DgCy_0$
- (3)  $\exists (Dg(y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(X; Y)$

Тада постоје околина  $V_0 \subseteq V$  тачке  $y_0$  и околина  $U_0 \subseteq X$  тачке  $x_0 := g(y_0)$  такве да је  $g : V_0 \rightarrow U_0$  бијекција,  $g^{-1}Dx_0$  и важи

$$Dg^{-1}(x_0) = (Dg(y_0))^{-1}.$$

*Доказ.* Доказ следи из Теореме о имплицитној функцији примењене на функцију  $F(x, y) = x - g(y)$ .  $\square$

**Последица.** Ако је  $f : V \rightarrow Y$  локални дифеоморфизам, онда је за сваки отворен скуп  $U \subseteq V$  скуп  $f(U)$  отворен.

*Доказ.* За сваку тачку  $x_0 \in U$  постоји отворена околина и онда применом теореме следи да и око тачке  $f(x_0)$  постоји отворена околина (на којој важе ставке теореме, које нама овде нису од значаја).  $\square$

**Теорема.** (Теорема о рангу) Нека је  $V \subseteq \mathbb{R}^k$  отворен и  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^l$  пресликавање класе  $C^n$ , такво да је за све  $x \in V$   $\text{rang} Df(x) = r$ . Тада у околини сваке тачке  $x_0 \in V$  и њене слике  $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^l$  постоје локалне координате (дифеоморфизми) класе  $C^n$  у којима  $f$  има запис

$$f : (s_1, \dots, s_k) \rightarrow (s_1, \dots, s_r, 0, \dots, 0).$$

Краће речено, пресликавање константног ранга  $r$  локално изгледа као пројекција на  $\mathbb{R}^r$ .

*Доказ.* Идеја доказа је да „исправимо” координате за првих  $r$  координата. Најпре, како је пермутација координата дифеоморфизам, можемо да претпоставимо да је главни минор матрице  $Df$  несингуларан, тј.  $\det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq r} \neq 0$ . Дефинишимо пресликавање  $\varphi$  са

$$\varphi_j(x_1, \dots, x_k) := \begin{cases} f_j(x_1, \dots, x_k), & 1 \leq j \leq r \\ x_j, & r < j \leq k \end{cases}$$

Оно јесте локални дифеоморфизам, јер је  $\det D\varphi \neq 0$ . Из теореме о инверзној функцији следи да у некој околини постоји  $\varphi^{-1}$  и важи

$$f_j \circ \varphi^{-1}(s_1, \dots, s_k) = \begin{cases} s_j, & 1 \leq j \leq r \\ g_j(s_1, \dots, s_k), & r < j \leq l \end{cases}$$

где је  $g_j = f_j \circ \varphi^{-1}$ . Сада закључити како изгледа матрица првог извода  $D(f \circ \varphi^{-1})$  и због чињенице да је  $\varphi$  локални дифеоморфизам закључити да је она истог ранга као и  $Df$ , као и да је  $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0$  за елементе доњег десног минора, одакле следи да  $g_j(s_1, \dots, s_k)$  зависи само од  $s_1, \dots, s_r$ . На крају, дефинисати  $\psi$  са

$$\psi_j(y) := \begin{cases} y_j, & 1 \leq j \leq r \\ y_j - g_j(y_1, \dots, y_r), & r < j \leq l \end{cases}$$

Закључити да је  $\psi$  локални изоморфизам и да је  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  тражена композиција. □

**Тврђење.** Сваки дифеоморфизам класе  $C^1$

$$\mathbb{R}^l \supseteq V \xrightarrow{f} f(V) \subseteq \mathbb{R}^l$$

може локално да се представи као композиција  $l$  простих дифеоморфизама.

*Доказ.* Индукцијом по  $k$  доказати да дифеоморфизам који мења највише  $k$  координата може локално да се представи као композиција  $k$  простих дифеоморфизама. □

## 3 Многострукости

### 3.1 Подмногострукости у $\mathbb{R}^n$ и условни екстремуми

**Тврђење.** За  $M \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$  следећа тврђења су еквивалента:

- (а)  $M$  је  $k$  - димензиона подмногострукост класе  $C^p$
- (б)  $(\forall p \in M)$  постоје отворене околине  $p \in V$  и  $0 \in U$  у  $\mathbb{R}^{k+l}$  и дифеоморфизам  $g : V \rightarrow U$  класе  $C^p$  такав да је  $g(V \cap M) = U \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$



(в)  $(\forall p \in M)$  постоје отворене околине  $p \in V$  у  $\mathbb{R}^{k+l}$  и  $0 \in U$  у  $\mathbb{R}^k$  и имерзија  $h : D \rightarrow V$  класе  $C^p$  таква да је  $h : D \rightarrow V \cap M$  хомеоморфизам у релативној топологији на  $V \cap M$  наслеђеној из  $\mathbb{R}^{k+l}$ .

*Доказ.* Како је  $k$ -дим подмногострукост у  $\mathbb{R}^{k+l}$  локално задата једначином  $f(x) = 0$ , где је  $f$  субмерзија и  $\text{rang} Df(x) = l$ , из Теореме о рангу закључити да је могуће изабрати локалне координате у којима  $f$  има запис

$$f(x_1, \dots, x_{k+l}) = (x_1, \dots, x_l).$$

Одатле директно закључити (б). Уз помоћ претходног, дефинисати тражену имерзију и закључити (в).  $\square$

**Тврђење.** Нека је  $h : D \rightarrow M$  локална параметризација околине тачке  $p = h(0)$  и нека је  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^l$  субмерзија таква да је  $M \cap V = f^{-1}(0)$ . Тада важи да је  $T_p M = \ker Df(p)$ .

*Доказ.* Диференцирањем  $f(h(t)) \equiv 0$  у тачки  $t = 0$  и применом правила за извод композиције пресликавања закључити да је  $T_p M \subseteq \ker Df(p)$ . Одатле, применом Прве теореме о изоморфизму на пресликавање  $Df(p)$  закључити да важи једнакост.  $\square$

**Тврђење.** Тангентни простор (у тачки  $p$ ) је скуп свих вектора тангентних на криве које садрже тачку  $p$  и леже на многострукости.

*Доказ.* За један смер искористити да је  $f \circ \gamma = 0$  и диференцирати израз у тачки 0 (то одговара тачки  $p$  на многострукости). За други смер закључити да је  $Dh(0) : \mathbb{R}^k \rightarrow T_p M$  изоморфизам, одакле следи да за сваки тангентни вектор  $\xi$  постоји вектор  $\eta \in \mathbb{R}^k$ , такав да је  $\xi = Dh(0) \cdot \eta$ . Дефинисати праву  $l(s) = s \cdot \eta$  у  $\mathbb{R}^k$  и доказати да је  $\gamma = h \circ l$  тражена крива (треба доказати да је  $\gamma'(0) = \xi$ ).  $\square$

**Теорема.** Нека је  $V \in \mathbb{R}^n$  отворен скуп,  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  функција класе  $C^1$  и  $M \subseteq V$  глатка подмногострукост. Да би тачка  $p \in M$  била тачка условног локалног екстремума функције  $f|_M$  неопходно је да буде испуњен бар 1 од следећих услова:

(а)  $df(p) = 0$  (тј.  $p$  је критична тачка за  $f$ )

(б)  $T_p M \subseteq T_p S$ , где је  $S := \{x \in V | f(x) = f(p)\}$

*Доказ.* Претпоставити да важи а) у теореме. Одатле директно закључити да је  $p$  кандидат за безусловни, а самим тим и условни екстремум. Даље, претпоставити да а) у теореме не важи. Доказати да је онда у некој околини тачке  $p$  функција  $f$  субмерзија, па је онда  $S$   $(n-1)$ -дим глатка подмногострукост, па има смисла  $T_p S$ . Узети  $\gamma : ]-\delta, +\delta[ \rightarrow M$  такво да  $\gamma(0) = p$ . Из  $(f \circ \gamma)'(0) = 0$  извести  $T_p M \subseteq T_p S$ .  $\square$

**Напомена.** Нека је  $M$  глобално задато једначином  $g(x) = 0$  за неку субмерзију  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$  и нека је  $p$  локални екстремум за  $f|_M$ . Са  $\gamma : I \rightarrow M$  дата је нека крива која лежи на  $M$  и за коју важи  $\gamma(0) = p$ . Тада,  $f \circ \gamma$  има локални екстремум у 0, тј. за  $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  важи  $(f \circ \gamma)'(0) = 0$  односно  $\vec{\nabla} f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0$  за свако  $\gamma$  кроз  $p$ . Одатле следи  $\vec{\nabla} f(p) \perp M$ . Како је  $\gamma \in M$ , одатле следи  $(g \circ \gamma)(t) = 0$  па када то диференцирамо по  $t$  добијамо да је  $\vec{\nabla} g \perp M$ . Коначно, добијамо систем  $n+1$  једначина са  $n+1$  непознатих који је одређен и који нам служи за одређивање условних екстремума:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\nabla} f(p) = \lambda \vec{\nabla} g(p) \\ g(p) = 0 \end{array}}$$

**Теорема.** Нека је  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  отворен,  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  класе  $C^2$ ,  $M \subseteq V$  подмногострукост задата са  $M = g^{-1}(0)$  ( $0 \in \mathbb{R}^l$ ), где је  $g$  субмерзија из дефиниције подмногострукости. Тада билинеарно пресликавање  $D^2L(p, \lambda^0)$  нам даје информацију о типу и постојању условног локалног екстремума функције  $f$ .

### 3.2 Апстрактне многострукости

**Лема.** Нека је  $M \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$   $k$ -димензиона подмногострукост класе  $C^p$ , нека су  $V_1, V_2$  околине (у  $\mathbb{R}^{k+l}$ ) тачке  $p \in M$  и нека су  $h_1 : D_1 \rightarrow V_1$ ,  $h_2 : D_2 \rightarrow V_2$  две локалне  $C^p$  параметризације скупова  $V_1 \cap M$  и  $V_2 \cap M$ . Тада је

$$h_2 \circ h_1^{-1} : D_1 \cap h_1^{-1}(V_2) \rightarrow D_2 \cap h_2^{-1}(V_1)$$

дифеоморфизам класе  $C^p$ .

*Доказ.* Доказ леме следи из чињенице да је композиција дифеоморфизама дифеоморфизам.  $\square$

**Тврђење.** Пројективни простор  $\mathbb{R}P^n := \mathbb{R}^{n+1}/\sim$  је глатка многострукост димензије  $n$ .

*Доказ.* Посматрати  $\widetilde{U}_j = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_j \neq 0\}$ ,  $U_j = \pi(U_j)$ , где је  $\pi$  природна пројекција. Дефинисати  $\varphi_j([x_0 : x_1 : \dots : x_n]) := (\frac{x_0}{x_j}, \frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}) \in \mathbb{R}^n$ . Карте  $(U_j, \varphi_j)$  чине тражени атлас на  $\mathbb{R}P^n$ .  $\square$

**Тврђење.** Не постоји имерзија класе  $C^p$  где је  $p \leq 1$  где  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  таква да је  $h(\mathbb{R}) = \Gamma$ .

*Доказ.* Из непрекидности  $h'$  извести контрадикцију.  $\square$

**Теорема.** За свако отворено покривање  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  глатке многострукости  $M$  постоји разлагање јединице  $\{\rho_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  такво да је  $\text{supp } \rho_\lambda \subseteq U_\lambda$ .

**Теорема.** За  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  као у претходној теореми постоји разлагање јединице  $\{\rho_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$  са компактним носачем, такво да  $(\forall \sigma \in \Sigma)(\exists \lambda \in \Lambda) \text{ supp } \rho_\sigma \subseteq U_\lambda$ .

**Теорема.** (Витнијева) Свака глатка  $n$ -димензиона многострукост  $M$  може да се глатко уложи у  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , тј. постоји  $C^\infty$  улагање  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ . Другим речима, свака апстрактна глатка многострукост је дифеоморфна подмногострукости у еуклидском простору.

**Теорема.** Свака компактна глатка многострукост  $M$  може глатко да се уложи у  $\mathbb{R}^l$  за довољно велико  $l$ .

*Доказ.* Нека је  $\{(U_j, \varphi_j)_{1 \leq j \leq k}\}$  атлас на  $M$ , такав да је  $\varphi_j(U_j) = B(0; 3)$  и да  $V_j = \varphi_j^{-1}(B(0; 1))$  такође покривају  $M$ . За свако  $j$  конструисати функцију  $h_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}$  помоћу

$$h(x) = \frac{g(4 - \|x\|^2)}{g(4 - \|x\|^2) + g(\|x\|^2 - 1)}$$

где је  $g$  дато са

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Дефинисати пресликавање

$$f : M \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_k \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_k =: \mathbb{R}^l$$

са

$$f(p) = \left( h_1(p)\varphi_1(p), \dots, h_k(p)\varphi_k(p), h_1(p), \dots, h_k(p) \right)$$

где је  $n = \dim M$ . Доказати да је  $f$  једно улагање, најпре закључити да је оно ранга  $n$ , одакле следи да је имерзија. На крају, приметити да је довољно доказати да је инјекција.  $\square$

### 3.3 Извод пресликавања $f : M \rightarrow N$

**Лема.** Деривација  $D$  на  $C^\infty(p)$  пресликавања које је константно у некој околини тачке  $p$  је 0.

*Доказ.* Применити Лајбницово правило и из хомогености (деривација је линеарно пресликавање, дакле и хомогено) закључити да је довољно доказати  $D1 = 0$ .  $\square$

**Лема.** Нека је  $f \in C_\mathbb{R}^\infty(U)$  и  $p \in U$ . Тада постоје лопта  $B := B(p, \varepsilon) \subseteq U$  и функције  $g_1, g_2, \dots, g_n \in C_\mathbb{R}^\infty(U)$  такве да:

1.  $g_j(p) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$
2.  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(p) + \sum_{j=1}^n (x_j - p_j)g_j(x)$

*Доказ.* За  $x \in B$  ( $B$  као у поставци) можемо написати

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \int_0^1 \frac{1}{dt} f(p + t(x - p)) dt \\ &= f(p) + \sum_{j=1}^n (x_j - p_j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j} f(p + t(x - p)) dt \end{aligned}$$

Узети да је  $g_j = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j} f(p + t(x - p)) dt$ .  $\square$

**Теорема.** Нека је  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  отворен скуп и  $p \in U$ . За сваку деривацију  $D : C^\infty(p) \rightarrow C^\infty(p)$  алгебре  $C^\infty(p)$  постоји јединствени вектор  $\xi \in T_p U$  такав да је  $Df(p) = df(p) \cdot \xi$ .

*Доказ.* Написати  $f(x)$  као у претходној леми, и применити деривацију на тај запис. Добијемо

$$Df(x) = \sum_{j=1}^n (D\pi_j(x) \cdot g_j(x) + (x_j - p_j) \cdot Dg_j(x)),$$

Применом овога у тачки  $p$  добијамо резултат, за  $\xi = (D\pi_1, D\pi_2, \dots, D\pi_n)$ .  $\square$

**Напомена.** Претходна теорема нам даје еквиваленцију геометријског и алгебарског (аналитичког) приступа дефиницији тангентног простора многострукости.

**Последица.**  $T_p M$  је векторски простор, јер је линеарна комбинација деривација такође деривација.

**Последица.**  $\dim M = n \implies \dim T_p M = n$

*Доказ.* Нека је  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  локална карта и  $p \in U$ . Тада је  $\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p, \frac{\partial}{\partial x_2}\big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\big|_p$  база за  $T_{\varphi(p)}U$ , па је  $(\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x_1}\big|_p, (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x_2}\big|_p, \dots, (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x_n}\big|_p$  база за  $T_p M$ .  $\square$

**Тврђење.** Ако је  $M$  глатка многострукост димензије  $n$ , онда је  $TM$  је глатка многострукост димензије  $2n$ .

*Доказ.* Посматрати карте  $\varphi \times \varphi_* : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  на  $TM$ .  $\square$

## 4 Интеграција

### 4.1 Апстрактни интеграл

**Лема.** Векторски потпростор  $\mathcal{E}$  простора  $\mathbb{R}^T$  је решетка акко важи

$$f \in \mathcal{E} \implies |f| \in \mathcal{E}.$$

*Доказ.* Искористити везу између апсолутне вредности и максимума и минимума.  $\square$

**Тврђење.** Радонов интеграл је уједно и елементарни интеграл.

*Доказ.* По дефиницији је Радонов интеграл линеаран, тако да је довољно доказати да за опадајући низ функција  $f_n$  са компактним носачем који тежи 0 важи и да је  $I(f_n) \rightarrow 0$ , кад  $n \rightarrow \infty$ . Нека је  $K_n$  носач функције  $f_n$ . Како је  $f_n$  опадајући низ који тежи нули, следи да је  $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$ . Из Динијеве теореме (0 је непрекидна функција) следи да  $f_n \rightrightarrows 0$ , па за произвољно  $\varepsilon > 0$  постоји  $n_0 \in \mathbb{N}$ , такво да  $n \geq n_0 \implies f_n|_{K_1} < \varepsilon$ .

На крају, нека је  $\psi \in C_C(T)$  функција за коју је  $0 \leq \psi \leq 1$  и  $\psi|_{K_1} \equiv 1$  (таква функција постоји због Урисонове леме). Због  $\text{supp } f_n \subseteq K_1$ , важи

$$f_n = f_n \cdot \chi_{K_1} \leq f_n \cdot \psi \leq \varepsilon \psi.$$

Из позитивности и линеарности Радоновог интеграла имамо  $I(f_n) \leq \varepsilon I(\psi)$ , па је онда и  $I(f_n) \rightarrow 0$ , кад  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Напомена.** Простор  $C_C(T)$  је простор непрекидних функција  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  које имају компактан носач, при чему је  $T$  локално компактан метрички (или Хаусдорфов) простор.

*Пример.* Још неки примери елементарног интеграла су:

- Диракова делта функција  $\delta_a : C_C(T) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\delta_a(f) := f(a)$  (валуација у тачки).
- Риманов интеграл
- Риман-Стилтјесов интеграл

**Лема.** За Радонов интеграл  $I : C_C(T) \rightarrow \mathbb{R}$  важи:

$$1. f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$$

$$2. |I(f)| \leq I(|f|)$$

*Доказ.* За први део тврђења применити линеарност и позитивност  $I$ . За други део применити први део и  $-|f| \leq f \leq |f|$ .  $\square$

**Напомена.** Претходна лема важи и за елементаран интеграл, једино на шта се ослањамо су позитивност и линеарност  $I$ .

**Тврђење.** Нека је  $T$  локално компактан Хаусдорфов простор,  $K \subseteq T$  компактан подскуп и  $C(T; K)$  скуп функција и  $C_C(T)$  којима је носач у  $K$ . Тада је рестрикција

$$I : C(T; K) \rightarrow \mathbb{R}$$

Радоновог интеграла непрекидна у односу на норму

$$\|f\|_K := \sup\{|f(t)| \mid t \in K\}.$$

*Доказ.* Нека је  $\psi \in C_C(T)$  функција за коју је  $0 \leq \psi \leq 1$  и  $\psi|_K \equiv 1$ . Тада је

$$(\forall f \in C(T; K))(\forall t \in T)|f(t)| \leq \|f\|_K \cdot \psi(t),$$

па је  $|I(f)| \leq I(|f|) \leq I(\psi) \cdot \|f\|_K$ .  $\square$

**Напомена.** Идеја доста ових доказа јесте да ограничимо интеграл са  $I(\psi)$ , што је константа.

**Теорема.** (Фубини) Нека су  $S$  и  $T$  компактни Хаусдорфови простори и нека су

$$I_S : C(S) \rightarrow \mathbb{R}, I_T : C(T) \rightarrow \mathbb{R}$$

Радонови интеграли. Тада постоји јединствен Радонов интеграл

$$I : C(S \times T) \rightarrow \mathbb{R}$$

такав да је

$$I(f \otimes g) = I_S(f) \cdot I_T(g).$$

**Напомена.** Тензорски производ функција  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g : T \rightarrow \mathbb{R}$  је функција  $f \otimes g : S \times T \rightarrow \mathbb{R}$  дефинисана са

$$f \otimes g(s, t) := f(s) \cdot g(t)$$

Дефинишемо и простор  $C(S) \otimes C(T)$  као

$$C(S) \otimes C(T) := \left\{ \sum_j f_j \otimes g_j \mid f_j \in C(S), g_j \in C(T) \right\},$$

где је наведена сума коначна.

*Доказ.* Из претходног тврђења следи да је Радонов интеграл на компактним просторима непрекидан, па је и равномерно непрекидан по Канторовој теорему. Из Стоун-Вајерштра-сове теореме следи да је  $\overline{C(S) \otimes C(T)} = C(S \times T)$ , па доказ тврђења следи из Принципа продужења равномерно непрекидног пресликавања са комплетним кодоменом (одатле следи и јединственост).

Уверимо се да  $C(S) \otimes C(T)$  јесте подалгебра алгебре  $C(S \times T)$  која садржи 1 и разликује тачке. Јасно је да јесте алгебра и да садржи 1 ( $1 = 1 \otimes 1$ ). Да бисмо доказали да раздваја тачке, треба доказати:

$$(\forall (s_1, t_1), (s_2, t_2) \in S \times T)(\exists f \in C(S) \otimes C(T))(s_1, t_1) \neq (s_2, t_2) \implies f((s_1, t_1)) \neq f((s_2, t_2)).$$

Идеја је да узмемо  $f = \varphi \times \psi$ , где су  $\varphi \in C(S)$ ,  $\psi \in C(T)$ . Одаберимо их тако да је  $\varphi(s_1) = \psi(t_1) = 0$ ,  $\varphi(s_2) = \psi(t_2) = 1$  (тада се разликују вредности  $\varphi \times \psi$ ). Можемо узети  $\varphi(s) = \frac{d(s, s_1)}{d(s_1, s_2)}$  и слично за  $\psi$ . Ако су  $S, T$  локално компактни Хаусдорфови простори, конструкција таквих функција је компликованија, треба најпре раздвојити тачке  $s_1$  и  $s_2$  и потом применити Урисонову лему.  $\square$

**Последица.** (Фубинијева теорема за Риманов интеграл) Нека је  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2$   $n$ -димензиони квадар, представљен као производ  $k$ -димензионог квадра  $\mathcal{J}_1$  и  $(n-k)$ -димензионог квадра  $\mathcal{J}_2$ . Тада, за непрекидну функцију  $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  важи:

$$\int_{\mathcal{J}} f = \int_{\mathcal{J}_2} \left( \int_{\mathcal{J}_1} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathcal{J}_1} \left( \int_{\mathcal{J}_2} f(x, y) dy \right) dx.$$

*Доказ.* Због линеарности Римановог интеграла и претходне теореме, довољно је доказати тврђење за  $f = f_1 \otimes f_2$ , за  $f_i : \mathcal{J}_i \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, 2\}$  непрекидне функције. Сада директно следи доказ из дефиниције Римановог интеграла по квадрату  $\mathcal{J}$ .  $\square$

## 4.2 Нормирани простор интеграбилних функција

**Лема.** Релација еквиваленције на скупу  $\mathcal{D}(T, \mathcal{E}, I) := \{f \in D(T, \mathcal{E}, I) \mid \bar{I}(|f|) < +\infty\}$ , дефинисана са

$$f \sim g \iff f = g \text{ скоро свуда на } T.$$

је конгруенција (тј. сагласна је са операцијама векторског простора). Количнички простор је нормирани векторски простор, са нормом

$$\| [f] \|_1 := \bar{I}(|f|),$$

која је добро дефинисана.

*Доказ.* Наведена норма је очигледно псеудо-норма (задовољава неједнакост троугла и симетричност). Њена добра дефинисаност је јасна, ако је  $[f] = [g]$ , онда је  $f = g$  скоро свуда на  $T$ , па је и  $\bar{I}(|f|) = \bar{I}(|g|)$ . Треба још доказати да је  $[\alpha f + \beta g] = \alpha[f] + \beta[g]$ . Хомогеност је јасна, па је довољно доказати само линеарност, која ће следити из чињенице да је унија два скупа мере нула такође скуп мере нула.  $\square$

**Последица.**  $(\tilde{D}(T, \mathcal{E}, I), \|\cdot\|_1)$  је нормирани векторски простор.

**Напомена.** Пресликавање  $I : \tilde{D}(T, \mathcal{E}, I) \rightarrow \mathbb{R}$  је непрекидно линеарно пресликавање, јер је  $|I(f)| \leq I(|f|) =: \|f\|_1$ .

## 4.3 Комплетирање метричког простора и Лебегов интеграл

**Теорема.** За сваки метрички простор  $(M_0, d_0)$  постоји комплетан метрички простор  $(M, d)$  и инјективно пресликавање  $i : M_0 \rightarrow M$  са својствима:

$$1. \ d(i(x), i(y)) = d_0(x, y), \forall x, y \in M_0$$

2.  $i(M_0)$  је густ у  $M$ .

*Доказ.* На простору  $X \subseteq M_0^{\mathbb{N}}$ , свих Кошијевих низова у  $M_0$ , дефинисати релацију еквиваленције

$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d_0(a_n, b_n) = 0.$$

На простору  $M := X/\sim$  дефинишемо метрику  $d([a_n], [b_n]) := \lim_{n \rightarrow \infty} d_0(a_n, b_n)$ .

Добра дефинисаност метрике  $d$  следи из адитивности по лimesу, а лако је и доказати да  $d$  јесте метрика. Дефинишимо улагање  $i : M_0 \rightarrow M$  са  $i(x) := [\{x\}]$ , где је  $\{x\}$  константан низ. Посматрајмо  $x \in M$ . Тада је  $x = [x_n]$ , за неки низ  $x_n$  у  $M_0$  и важи  $i(x_n) \rightarrow x$ , одакле следи да је  $i(M_0)$  густ у  $M$ . Треба још доказати да је  $M$  комплетан. Нека је  $x_n$  Кошијев низ у  $M$ . Из  $i(M_0) = M$  следи да постоји  $a_n \in M_0$  за које је  $d(i(a_n), x_n) < \frac{1}{n}$ . Закључујемо да ако је  $x_n$  Кошијев, онда је и  $i(a_n)$  Кошијев (као низ константних низова у  $M$ ). Међутим, одатле следи и да је  $a_n$  Кошијев у  $M_0$ , па  $a_n$  дефинише тачку у  $M$  и важи  $x_n \rightarrow a$ .  $\square$

**Напомена.** Ово се може и применити да од нормираног векторског простора добијемо Банахов простор. Доказ се може извести елегантније, због чињенице да је дуал увек комплетан и због чињенице да постоји линеарно улагање нормираног векторског простора у дуал дуала.

**Последица.** Комплетирање простора  $(C(\mathcal{J}), \|\cdot\|_1)$  назива се простором функција интегралних по Лебегу. Како је интеграл равномерно непрекидан, онда се он може (из Принципа продужења равномерно непрекидне функције са комплетним кодоменом) продужити до пресликавања које називамо Лебеговим интегралом.

## 4.4 Класа функција интегралних по Риману

**Лема.**  $f \in \mathcal{R}(\mathcal{J}) \implies f$  је ограничена на  $\mathcal{J}$

*Доказ.* Претпоставити супротно, и закључити да за сваку поделу постоји квадар на којем је функција неограничена, тј. постоје тачке  $\zeta, \eta$  из тог квадрата такве да је  $|f(\zeta) - f(\eta)|$  произвољно велико. Узети две поделе са уоченим тачкама које се разликују само на том квадрату, једну са уоченом тачком  $\zeta$ , а другу са  $\eta$ . Извести контрадикцију из Кошијевог критеријума постојања лimesа по филтеру.  $\square$

*Пример.* График непрекидне функције  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$  је скуп Лебегове мере 0.

*Доказ.* Најпре, тврђење се може доказати из равномерно непрекидности у случају да је  $E$  затворен квадар. Да бисмо ово проширили на произвољан скуп  $E \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$ , довољно је да покријемо график функције са пребројиво много скупова мере 0. Посматрајмо скуп  $S := \mathbb{Q}^{k-1} \cap E$ . Он је густ у  $E$  и пребројив, па је довољно доказати да је у некој околини сваке тачке из  $S$ , график рестрикције на ту околину скуп мере 0. То је очигледно, јер око сваке тачке скупа  $S$  можемо посматрати затворен квадар који је садржан у  $E$ , а на том квадрату је график рестрикције мере 0, због разматрања на почетку задатка. Пребројива унија скупова мере 0 је скуп мере 0, па је и график целе функције  $f$  мере 0.  $\square$

*Пример.* Нека је  $0 < l < k$  и  $\pi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$  пројекција  $\mathbb{R}^k$  на неки  $l$ -димензиони потпростор. Ако је  $E \subseteq \mathbb{R}^k$  скуп такав да је  $\pi(E)$  скуп мере нула у  $\mathbb{R}^l$ , онда је и  $E$  скуп мере 0 у  $\mathbb{R}^k$ .

*Доказ.* Претходни пример можемо доказати и када је кодомен  $\mathbb{R}^n$ . Лако је видети да је  $E \subseteq \pi(E) \times \mathbb{R}^{k-l}$ . Применимо претходни задатак на константну функцију, одакле следи да је  $\pi(E) \times \mathbb{R}^{k-l}$  скуп мере 0. Тада је и  $E$  скуп мере 0, као подскуп скупа мере 0.  $\square$

**Теорема.** (Дарбуова) За сваку ограничену функцију  $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  важи:

$$\overline{\int_{\mathcal{J}} f(x) dx} = \lim_{\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{J}} S(f, \mathcal{P})$$

$$\underline{\int_{\mathcal{J}} f(x) dx} = \lim_{\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{J}} s(f, \mathcal{P})$$

*Доказ.* Довољно је доказати једно од наведених тврђења (друго следи применом на  $-f$ ). Означимо  $\underline{I} = \underline{\int_{\mathcal{J}}}$ . Нека је  $\mathcal{P}_\varepsilon$  подела таква да је  $s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) > \underline{I} - \varepsilon$ . Посматрати  $\Gamma_\varepsilon$ , скуп свих тачака које леже на граници неког од квадрата поделе  $\mathcal{P}_\varepsilon$  и доказати да је он Лебегове мере 0. Онда постоји  $\lambda_\varepsilon > 0$  такво да је за сваку поделу чији је параметар мањи од  $\lambda_\varepsilon$ , збир запремина квадрата који секу  $\Gamma_\varepsilon$  мањи од  $\varepsilon$ . Нека је  $\mathcal{P}$  таква подела и нека је  $\mathcal{P}'$  подела која садржи све тачке подела  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}_\varepsilon$ . Тада је

$$\underline{I} - \varepsilon < s(f, \mathcal{P}_\varepsilon) < s(f, \mathcal{P}') \leq \underline{I}.$$

Закључити да у разлици  $s(f, \mathcal{P}') - s(f, \mathcal{P})$  учествују само сабирци који одговарају квадратима који секу  $\Gamma_\varepsilon$ , па је  $|s(f, \mathcal{P}') - s(f, \mathcal{P})| < 2M\varepsilon$ , где је  $|f| \leq M$ . На крају доказати да је  $\underline{I} = s(f, \mathcal{P}) < (2M + 1)\varepsilon$ , одакле следи тврђење.  $\square$

**Последица.** (Дарбуов критеријум интеграбилности по Риману)

$$f \in \mathcal{R}(\mathcal{J}) \iff f \text{ је ограничена и } \int_{\mathcal{J}} f(x) dx = \overline{\int_{\mathcal{J}} f(x) dx}$$

**Лема.** Нека је  $T \subseteq \mathbb{R}^n$  и  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена функција и  $\varepsilon > 0$ . Тада је скуп

$$F := \{t \in T \mid \omega(f; T) \geq \varepsilon\}$$

затворен у  $T$

*Доказ.* Доказати да је комплемент  $T \setminus F$  отворен.  $\square$

**Теорема.** (Лебегов критеријум интеграбилности по Риману) Функција  $f : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$  је интеграбилна по Риману акко је ограничена и непрекидна скоро свуда у смилсу Лебега (тј. ако је скуп прекида  $E = \{x \in \mathcal{J} \mid \omega(f; x) > 0\}$  мере 0.)

*Доказ.* ( $\implies$ ) Најпре, закључити да је довољно доказати

$$(\forall n \in \mathbb{N}) E_n := \left\{x \in \mathcal{J} \mid \omega(f; x) > \frac{1}{n}\right\} \text{ је мере 0.}$$

Нека је  $\mathcal{P}$  подела таква да је  $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{n}$  и нека је  $P_n := \{\mathcal{J} \in \mathcal{P} \mid \mathcal{J} \cap E_n \neq \emptyset\}$ . Одатле извести закључак да је  $\sum_{I \in P_n} \mu(I) < \varepsilon$ , па је  $E_n$  мере 0 ( $P_n$  покривају  $E_n$ ).

( $\impliedby$ ) Посматрати  $E_\varepsilon := \{x \in \mathcal{J} \mid \omega(f; x) \geq \frac{\varepsilon}{2\mu(\mathcal{J})}\}$ . Као подскуп скупа  $E$ , овај скуп је мере нула, а због претходне леме је и затворен, па ће бити и компактан. Онда постоји коначна фамилија квадрата која га покрива и за коју је  $\mu(J_1) + \mu(J_2) + \dots + \mu(J_k) < \frac{\varepsilon}{4\|f\|_\infty}$ . За  $t \in \mathcal{J} \setminus \bigcup_{i=1}^k J_k$  важи  $\omega(f; t) < \frac{\varepsilon}{2\mu(\mathcal{J})}$ , тј. за свако такво  $t$  постоји квадрат  $I_t$  такав да је  $\sup_{I_t} f - \inf_{I_t} f < \frac{\varepsilon}{2\mu(\mathcal{J})}$ . Како је скуп  $t \in \mathcal{J} \setminus \bigcup_{i=1}^k J_k$  затворен, можемо издвојити коначно потпокривање  $I_t$ . На крају, разлику  $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P})$  ( $\mathcal{P}$  је подела таква да се сваки од квадрата  $J_i$  и  $I_t$  може представити као унија квадрата из  $\mathcal{P}$ ) представити као  $\sum (M_i - m_i)\mu(K_i)$  и раздвојити је на сумање по квадратима  $J_i$  и  $I_t$ , одакле ћемо добити  $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$ .  $\square$



**Последица.** Нека је  $E \subseteq \mathbb{R}^K$  ограничен скуп садржан у квадрату  $\mathcal{J}$ . Тада је

$$\chi_E \in \mathcal{R}(\mathcal{J}) \iff \partial E \text{ је скуп мере } 0.$$

*Доказ.*  $\partial E$  је скуп прекида функције  $\chi_E$ . □

**Тврђење.** Нека је  $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}^k$   $k$ -димензиони квадар. Тада је простор  $(C(\mathcal{J}), \|\cdot\|_1)$  густ у  $(\mathcal{R}(\mathcal{J}), \|\cdot\|_1)$ .

*Доказ.* Покрити скуп прекида пребројивом унијом квадрата  $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , чији је збир запремина мањи од  $\frac{\varepsilon}{2M}$ . Идеја је да *непрекидно* пређемо са квадрата  $J_n$  на остатак простора, а то ћемо урадити конструисањем функције  $\varphi_n$  која је једнака 0 на  $J_n$ , варира између 0 и 1 на квадрату  $\tilde{J}_n$  који је двапут веће запремине од  $J_n$  и садржи га, и једнака је 1 ван  $\tilde{J}_n$ . Комбиновањем свих тих функција добијамо функцију  $g$ , за коју важи

$$\|f - g\|_1 = \int_{\bigcup \tilde{J}_n} |f - g| < \varepsilon.$$

□

**Тврђење.** Фубинијева теорема важи за класу функција интеграбилних по Риману.

*Доказ.* Следи из раније доказане теореме за непрекидне функције и принципа продужења непрекидног пресликавања  $\int_{I \times J} : C(I \times J) \rightarrow \mathbb{R}$  на скуп  $\mathcal{R}(I \times J)$ , у коме је  $C(I \times J)$  густ. □

**Напомена.** Пре смо Фубинија доказали за Риманов интеграл непрекидне функције, сада смо доказали за Риманов интеграл функције интеграбилне по Риману.

**Теорема.** (Кавалеријев принцип) Нека је  $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}^k$   $k$ -дим квадар и  $E \subseteq \mathcal{J}$  скуп мерљив по Жордану. Представимо  $\mathcal{J}$  као производ  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_x \times \mathcal{J}_y$  квадрата  $\mathcal{J}_x \subseteq \mathbb{R}^l$  и  $\mathcal{J}_y \subseteq \mathbb{R}^{k-l}$ . Тада је за свако  $y_0 \in \mathcal{J}_y$  пресек  $E_{y_0} := \{(x, y) \in E \mid y = y_0\}$  скупа  $E$  и  $l$ -димензионе равни  $y = y_0$  мерљив по Жордану и важи

$$\mu_k(E) = \int_{\mathcal{J}_y} \mu_l(E_y) dy,$$

где је  $\mu_k$  (односно  $\mu_l$ ) Жорданова мера у  $\mathbb{R}^k$  (односно  $\mathbb{R}^l$ )

*Доказ.* Следи из Фубинијеве теореме примењене на функцији  $\chi_E(x, y) = \chi_{E_y}(x)$  □

## 4.5 Смена променљиве у интегралу

**Теорема.** Нека су  $D_t$  и  $D_x$  органичени отворени скупови у  $\mathbb{R}^k$ ,  $\varphi : D_t \rightarrow D_x$  дифеоморфизам (класе  $C^1$ ),  $\varphi' : D_t \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$  његова матрица првог извода и  $f \in \mathcal{R}(D_x)$  функција чији је носач  $\text{supp } f := \overline{\{x \in D_x \mid f(x) \neq 0\}}$  компактан у  $D_x$ . Тада важи:

$$(1) (f \circ \varphi) |\det \varphi'| \in \mathcal{R}(D_t)$$

$$(2) \int_{D_x} f(x) dx = \int_{D_t} f \circ \varphi(t) |\det \varphi'(t)| dt$$

**Напомена.** Докажимо прво 4 помоћне леме.

**Лема.** Нека су  $D_t, D_x, \varphi$  као у теорему,  $E_t \subseteq D_t$ ,  $E_x := \varphi(E_t) \subseteq D_x$ . Тада важи:

$$(1) \text{ Ако је } E_t \text{ скуп мере нула у смислу Лебега, онда је такав и } E_x.$$

- (2) Ако је Жорданова мера скупова  $E_t$  и  $\overline{E_t}$  нула, онда је и Жорданова мера скупова  $E_x$  и  $\overline{E_x}$  нула.
- (3) Ако је скуп  $E_t$  мерљив по Жордану и  $\overline{E_t} \subseteq D_t$  онда је и скуп  $E_x$  мерљив по Жордану и  $\overline{E_x} \subseteq D_x$ .

*Доказ.* Приметити да се сваки отворен скуп  $D \in \mathbb{R}^k$  може представити као пребројива унија квадрата чије се унутрашњости међусобно не секу. Како је пребројива унија скупова мере нула скуп мере нула, доказати (1) под претпоставком да је  $E_t \subseteq J$  за неко  $J$ . Нека је  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  покривање скупа  $E_t$  квадрима таквим да је  $\sum \mu(I_j) < \epsilon$ . Применом Теореме о коначном прираштају и претходног закључити да се сваки скуп  $\varphi(I_j)$  налази у квадрату  $\tilde{I}_j$  таквом да је  $\mu(\tilde{I}_j) = M^k \mu(I_j)$ . Одатле извести (1).

Део (2) следи из (1) јер је  $\overline{E_t}$ , а самим тим и његова непрекидна слика  $\overline{E_x}$ , компактан скуп, а сваки компактан скуп мере нула у Лебеговом смислу има Жорданову меру нула.

Део (3) извести из чињенице да дифеоморфизам слика унутрашње тачке у унутрашње тачке, што је последица Теореме о инверзној функцији, односно извести закључак из  $\partial E_x = \varphi(\partial E_t)$ .  $\square$

**Последица.** Под условима Теореме о смени променљиве, интеграл у тачки (2) постоји.

*Доказ.* Следи из Лебегове теореме о интеграбилности и претходне леме.  $\square$

**Лема.** (једнодимензиони случај) Нека је  $\varphi : I_t \rightarrow I_x$  дифеоморфизам интервала  $I_t \subseteq \mathbb{R}$  на интервал  $I_x \subseteq \mathbb{R}$  и нека  $f \in \mathcal{R}(I_x)$  и важи

$$\int_{I_x} f(x) dx = \int_{I_t} f \circ \varphi(t) |\varphi'(t)| dt$$

*Доказ.* Доказати применом Њутн - Лајбницеове формуле из Анализе 1.  $\square$

**Напомена.** Код смене променљиве за функције једне променљиве у уобичајеном облику немамо апсолутну вредност код  $\varphi'$ . То није у колизији, због тога што се у у тој апсолутној вредности само крије знак који „обрће” границе интервала.

**Напомена.** Појава  $|\cdot|$  сугерише везу интеграције и оријентације. Не можемо интегралити по објектима који нису оријентабилни. Но, ипак постоји метода да се заобиђе ова препрека, уз помоћ чињенице да сваку неоријентабилна многострукост има дволисно оријентабилно наткривање, по којем онда можемо вршити интеграцију.

**Лема.** Теорема о смени променљиве у интегралу важи за просте дифеоморфизме.

*Доказ.* Ова лема је у суштини последица претходне леме и Фубинијеве теореме. Претпоставити ради једноставности записа да  $\varphi$  мења само последњу ( $k$  - ту) координату. Квадре  $J_x \supseteq D_x$  и  $J_t \supseteq D_t$  у  $\mathbb{R}^k$  представити као Декартов производ квадрата у  $\mathbb{R}^{k-1}$  и интервала. Применити Фубинијеву теорему на интеграл функције  $f \chi_{D_x}$  по квадрату  $J_x$  имајући у виду да је  $\varphi$  прост дифеоморфизам те је  $\det \varphi' = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_k}$ .  $\square$

**Лема.** Ако Теорема о смени променљиве важи за дифеоморфизме

$$\psi : D_s \rightarrow D_t, \quad \varphi : D_t \rightarrow D_x$$

онда важи и за композицију  $\varphi \circ \psi : D_s \rightarrow D_x$ .

*Доказ.* Доказ извести из  $\det(\varphi \circ \psi)' = \det \varphi' \cdot \det \psi'$  и две примене Теорема о смени променљиве: прво на функцију  $f$  и дифеоморфизам  $\varphi$ , а затим на  $f \circ \varphi | \det \varphi' |$  и дифеоморфизам  $\psi$ .  $\square$

Можемо сада довршити доказ прве теореме.

*Доказ.* (Доказ теореме о смени променљиве у интегралу) Доказ завршити коришћењем Тврђења о представљању дифеоморфизма као композиције простих, међутим обратити пажњу на *локално* у њему. Идеја да се докаже да теорема важи на целом  $D_t$  јесте да се  $D_t$  подели на мање скупе на којима теорема важи. Овде ће бити неопходно применити Лебегову лему о компактности на скуп  $\text{supp}(f \circ \varphi \cdot | \det \varphi' |)$ .  $\square$

**Напомена.** Интуиција за мало другачији доказ: Нека је  $J$  квадар,  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  непрекидна функција и  $\varphi : J \rightarrow \varphi(J)$  дифеоморфизам класе  $C^1$ . Посматрајмо шта је  $\int_{\varphi(J)} f(x) dx$ . Поделимо квадар  $J$  на квад्रे  $J_l$ . Тада је

$$\int_{\varphi(J)} f(x) dx = \sum_l \int_{\varphi(J_l)} f(x) dx$$

Даље имамо да је

$$\min_{\varphi(J_l)} f \int_{\varphi(J_l)} 1 dx \leq \int_{\varphi(J_l)} f(x) dx \leq \max_{\varphi(J_l)} f \int_{\varphi(J_l)} 1 dx$$

односно

$$\min_{\varphi(J_l)} f \leq \frac{1}{\mu(\varphi(J_l))} \int_{\varphi(J_l)} f(x) dx \leq \max_{\varphi(J_l)} f$$

Из непрекидности  $f$ , применом теореме о средњој вредности закључити да постоји  $\xi_l$  такво да

$$f(\xi_l) = \frac{1}{\mu(\varphi(J_l))} \int_{\varphi(J_l)} f(x) dx$$

Следи да је

$$\int_{\varphi(J)} f(x) dx = \sum_l f(\xi_l) \mu(\varphi(J_l))$$

Узмимо  $\tau_l \in J_l$  такво да  $\xi_l = \varphi(\tau_l)$ . Тада је

$$\int_{\varphi(J)} f(x) dx = \sum_l f \circ \varphi(\tau_l) \mu(\varphi(J_l))$$

Доказати још да је  $\mu(\varphi(J_l)) = | \det \varphi | \cdot \mu(J_l)$ . У случају да је  $\varphi$  линеарно, доказ извести користећи теорему о јединствености детерминанте. У случају да  $\varphi$  није линеарно представити га као  $\varphi \approx C + \varphi'$ , где је  $\varphi'$  линеарно а  $C = \varphi(x_0)$  транслација, стога не мења запремину.

## 5 Диференцијалне форме

**Тврђење.** За  $\alpha \in \Omega^k(M)$ ,  $\beta \in \Omega^l(M)$  и глатко пресликавање  $F : M \rightarrow N$  важи:

$$(1) \quad F^*(\alpha + \beta) = F^*\alpha + F^*\beta$$

$$(2) F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$$

Другим речима, ако дефинишемо

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{j=0}^{\dim M} \Omega^j(M)$$

и слично  $\Omega^*(N)$  онда је

$$F^* : (\Omega^*(N), +, \wedge) \rightarrow (\Omega^*(M), +, \wedge)$$

хомоморфизам алгебри.

$$\text{Доказ.} \quad (1) F^*(\alpha + \beta)X = (\alpha + \beta)(F_*X) = \alpha(F_*X) + \beta(F_*X) = (F^*\alpha + F^*\beta)X$$

(2)

$$\begin{aligned} F^*(\alpha \wedge \beta)(X, Y) &= (\alpha \wedge \beta)(F_*(X), F_*(Y)) \\ &= \begin{vmatrix} \alpha(F_*(X)) & \alpha(F_*(Y)) \\ \beta(F_*(X)) & \beta(F_*(Y)) \end{vmatrix} \\ &= \alpha(F_*(X)) \cdot \beta(F_*(Y)) - \alpha(F_*(Y)) \cdot \beta(F_*(X)) \\ &= F^*(\alpha)X \cdot F^*(\beta)Y - F^*(\alpha)Y \cdot F^*(\beta)X \\ &= \begin{vmatrix} F^*(\alpha)X & F^*(\alpha)Y \\ F^*(\beta)X & F^*(\beta)Y \end{vmatrix} \\ &= (F^*(\alpha) \wedge F^*(\beta))(X, Y) \end{aligned}$$

□

**Тврђење.** Pullback се такође слаже и са спољашњим диференцијалом, односно важи

$$F^* \circ d = d \circ F^*$$

за  $F : U \rightarrow V$  пресликавање класе  $C^\infty$ , где су  $U \in \mathbb{R}^n$  и  $V \in \mathbb{R}^k$ . Захваљујући овоме, могуће је дефинисати  $d : \Omega^l(M) \rightarrow \Omega^{l+1}(M)$  за произвољну многострукост.

*Доказ.*

$$d(F^*\alpha) = d(\alpha \circ F_*) = d\alpha \cdot dF_* = d\alpha \cdot F_* = F^*(d\alpha)$$

□

**Тврђење.** (Лајбницово правило) Нека су  $\alpha \in \Omega^l(M)$  и  $\beta \in \Omega^k(M)$  две форме. Тада важи

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^l \alpha \wedge d\beta$$

*Доказ.* Докажимо најпре за  $M = U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Због линеарности  $d$  довољно је доказати формулу за  $\alpha = f(x)dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$  и  $\beta = g(x)dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ . Применити дефиницију  $d$  и извести закључак.

Када је  $M$  произвољна многострукост, нека је  $\varphi : M \rightarrow U$  локална карта. Имамо

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &:= \varphi^*d((\varphi^{-1})^*(\alpha \wedge \beta)) \\ &= \varphi^*d((\varphi^{-1})^*\alpha \wedge (\varphi^{-1})^*\beta) \\ &= \varphi^*(d(\varphi^{-1})^*\alpha \wedge (\varphi^{-1})^*\beta + (-1)^l (\varphi^{-1})^*\alpha \wedge d(\varphi^{-1})^*\beta) \\ &= \varphi^*d(\varphi^{-1})^*\alpha \wedge (\varphi^{-1})^*\beta + (-1)^l \varphi^*(\varphi^{-1})^*\alpha \wedge d(\varphi^{-1})^*\beta \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^l \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

□

**Теорема.** (Основни идентитет хомолошке алгебре)  $\alpha \in \Omega^l(M) \implies d(d\alpha) = 0$

*Доказ.* Два пута применити дефиницију  $d$  на  $f dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_l}$  и искористити антикомутативност  $\wedge$ .  $\square$

**Последица.**  $\text{Im } d \subseteq \text{Ker } d$

**Тврђење.** Нека  $F : M \rightarrow N$  и  $G : N \rightarrow S$ . Тада важи:

1.  $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$
2.  $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$

*Доказ.* Први део тврђења је запис извода сложене функције, а други из:

$$\begin{aligned} (G \circ F)^* \alpha &= \alpha((G \circ F)_*) \\ &= \alpha(G_* \circ F_*) \\ &= F^* \alpha(G_*) \\ &= G^* \circ F^* \alpha \end{aligned}$$

□

**Последица.** Ако је  $F : M \rightarrow N$  дифеоморфизам, онда је  $F^* : H_{\text{dR}}^l(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^l(M)$  изоморфизам.

**Тврђење.**  $(H_{\text{dR}}^*(M), +, \wedge)$  је прстен, где је  $\wedge : H_{\text{dR}}^l \times H_{\text{dR}}^k \rightarrow H_{\text{dR}}^{l+k}$  индуковано пресликавањем  $\wedge : \Omega^l(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+l}(M)$ .

*Доказ.* Довољно је доказати да је  $[\alpha] \wedge [\beta] = [\alpha \wedge \beta]$  добро дефинисано. Претпоставити  $\alpha_1 = \alpha + d\zeta$ ,  $\beta_1 = \beta + d\eta$  и доказати да је  $[\alpha_1] \wedge [\beta_1] = [\alpha \wedge \beta]$ . □

**Тврђење.** За свако непрекидно пресликавање  $f : M \rightarrow N$  глатких многострукости постоји глатко пресликавање  $F : M \rightarrow N$  такво да је  $f \simeq F$ .

*Доказ.* Извести из Вајерштрасове теореме о апроксимацији и разлагања јединице. □

**Тврђење.**  $X \lrcorner (\alpha \wedge \beta) = X \lrcorner \alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge X \lrcorner \beta$

**Тврђење.** (Картанова формула)  $\phi_t : M \rightarrow M$  глатка (по  $t$ ) фамилија глатких пресликавања. Нека је  $X(\phi_t(p)) := \frac{d\phi_t}{dt}(p)$  (пишемо краће:  $X$ ). За  $\alpha \in \Omega^l(M)$  важи:

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* \alpha = \phi_t^* (X \lrcorner d\alpha + d(X \lrcorner \alpha))$$

*Доказ.* Индукцијом по  $l$ .

(БИ) Докажимо за  $l = 0$ , тј.  $\alpha = f \in C^\infty(M)$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_t^* f &= \frac{d}{dt} f(\phi_t) \\ &= f'(\phi_t) \phi_t' \\ &= \phi_t^* df(X) \end{aligned}$$

што је крај доказа, јер је  $d(X \lrcorner f) = 0$  и  $X \lrcorner df = df(X)$ .

(ИХ) Претпоставимо да тврђење важи за  $l$ -форме.

(ИК) Због линеарности  $d$ , довољно је доказати тврђење за  $\beta = df \wedge \alpha$ , где је  $\alpha \in \Omega^l(M)$ .

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* (df \wedge \alpha) = \frac{d}{dt} \phi_t^* df \wedge \alpha + df \wedge \frac{d}{dt} \phi_t^* \alpha,$$

□

**Последица.** Нека су  $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ ,  $f_0^*, f_1^* : H_{\text{dR}}^*(N) \rightarrow H_{\text{dR}}^*(M)$ . Тада важи

$$f_0 \simeq f_1 \implies f_0^* = f_1^*$$

*Доказ.* Доказати да је  $f_0^* \alpha - f_1^* \alpha \in \text{Im} d$ , уз помоћ Картанове формуле, комутирања  $d$  и  $f_t^*$  и комутирања  $d$  и интеграла. □

**Последица.** Ако је  $M \simeq N$  онда је  $H_{\text{dR}}^*(M) \cong H_{\text{dR}}^*(N)$ .

**Напомена.** Многострукост  $M$  је повезана ако и само ако је  $H_{\text{dR}}^0(M) = \mathbb{R}$ .

**Напомена.** Општије:  $H_{\text{dR}}^0(M) = \mathbb{R}^m$ , где је  $m$  број компоненти повезаности  $M$ .

**Напомена.** Ако  $l \in \{0, n\}$  онда важи  $H_{\text{dR}}^l(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$ , иначе  $H_{\text{dR}}^l(\mathbb{S}^n) = 0$ .

**Тврђење.** Не постоји глатко пресликавање  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} := \partial \mathbb{B}^n$  такво да је  $f(x) = x$  за све  $x \in \mathbb{S}^n$ . Односно, не постоји глатка ретракција  $\mathbb{B}^n$  на  $\partial \mathbb{B}^n$ .

*Доказ.* Дефинисати  $j : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{B}^n$  као  $j(x) = x$ . Претпоставити супротно, да постоји тражена ретракција  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ , тд.  $\forall a \in \mathbb{S}^{n-1} f(a) = a$ . Посматрати  $f \circ j$  и  $H_{\text{dR}}^{n-1}$  посматраних објеката  $(\mathbb{S}^{n-1}$  и  $\mathbb{B}^n)$  и извести контрадикцију из чињенице да се идентитета не може факторисати кроз 0. □

**Напомена.** Не постоји непрекидна ретракција многострукости на границу.

**Теорема.** (Брауерова теорема о фиксној тачки)

Свако непрекидно пресликавање  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$  има бар једну фиксну тачку. Другим речима

$$f \in C(\mathbb{B}^n, \mathbb{B}^n) \implies (\exists x_0 \in \mathbb{B}^n) f(x_0) = x_0$$

*Доказ.* Претпоставити супротно, да  $\forall x \in \mathbb{B}^n$  важи  $f(x) \neq x$ . Дефинисати  $r(x) = \frac{f(x)-x}{\|f(x)-x\|}$ ,  $r : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ . Показати да је  $r$  ретракција. Одатле, на основу претходног, извести контрадикцију. □

**Напомена.** Диференцијална форма  $\alpha \in \Omega^l(M)$  има „примитивну” форму ако и само ако је  $[\alpha] = 0$  у  $H_{\text{dR}}^l(M)$ . Ово значи да тражење примитивне функције зависи од топологије простора.

## 5.1 Дуални поглед на диференцијалне форме

**Тврђење.**  $\text{div} \circ \text{rot} = 0, \text{rot} \circ \text{grad} = 0$ .

*Доказ.*  $\text{div}(\text{rot} \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0, \text{rot}(\text{grad} f) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$ . □

**Напомена.** „Вектор”  $\vec{\nabla}$  може да се схвати као аналогича диференцијала  $d$ , а претходно тврђење као  $d \circ d = 0$ . Успоставити изоморфизам између диференцијалних форми и одговарајућих простора глатких функција на којима дефинишемо  $\text{grad}, \text{rot}, \text{div}$  и доказати да ће сви дијаграми комутирати.

**Тврђење.** Свака 1-форма у  $\mathbb{R}^n$  је облика  $\omega_B^1 := \langle \vec{B}, \cdot \rangle$ , за јединствено  $\vec{B}$  и свака 2-форма у  $\mathbb{R}^3$  је облика  $\omega_B^2 := (\vec{B}, \cdot, \cdot)$  за јединствено  $\vec{B}$ .

*Доказ.* Следи из чињенице да су то потпростори целог простора, исте димензије као и цео простор.  $\square$

**Напомена.** Претходно тврђење оправдава следећу дефиницију:

$$\begin{aligned} d\omega_f^0 &=: \omega_{\text{grad} f}^1 \\ d\omega_{\vec{B}}^1 &=: \omega_{\text{rot } \vec{B}}^2 \\ d\omega_{\vec{B}}^2 &=: \omega_{\text{div } \vec{B}}^3 \end{aligned}$$

Из ове дефиниције је јасно да  $\text{div} \circ \text{rot} = 0$ ,  $\text{rot} \circ \text{grad} = 0$  следи из  $d \circ d = 0$ .

*Пример.*  $\omega_A^1 \wedge \omega_B^1 = \omega_{A \times B}^2$ ,  $\omega_A^1 \wedge \omega_B^2 = \omega_{A \cdot B}^3$

*Доказ.* Написати  $\omega_A^1$  као  $A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$  и слично са осталим формама и доказати у координатном запису.  $\square$

## 5.2 Стоксова теорема

**Тврђење.** Нека је  $M$  глатка многострукост димензије  $n$  и  $\omega \in \Omega^n(M)$ ,  $\varphi : M \rightarrow M$ . Тада је:

$$\varphi^* \omega = \det(\varphi_*) \omega.$$

*Доказ.* Следи из чињенице да су обе стране антисиметричне  $n$ -линеарне форме које се подударају на бази  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .  $\square$

**Напомена.** Нека је  $L : V^n \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -линеарна антисиметрично пресликавање различито од 0 у свакој тачки. База  $e_1, e_2, \dots, e_n$  задаје оријентацију ако је  $L(e_1, e_2, \dots, e_n) > 0$ . Такође, важи:

(а) Нека је  $A$  матрица димензија  $n \times n$ . Онда је:

$$L(Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n) = \det(A) L(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

(б) Ако две базе задају исту оријентацију, онда је:

$$L(e_1, e_2, \dots, e_n) > 0 \iff L(f_1, f_2, \dots, f_n) > 0.$$

Дакле, избор таквог пресликавања  $L$  (за које можемо сматрати да је детерминанта), одређује оријентацију векторског простора  $V$ .

**Напомена.** Ако је многострукост оријентабилна, онда је дефиниција интеграла форме по локалној карти добра.

*Доказ.* Теорема о смени променљиве у интегралу.  $\square$

**Тврђење.** Интеграл  $n$ -форме по оријентабилној многострукости не зависи од разлагања јединице нити од атласа који задаје исту оријентацију.



*Доказ.* Нека су  $\{(U_j, \varphi_j)\}, \{\rho_j\}, j \in J$  и  $\{(V_i, \psi_i)\}, \{\chi_i\}, i \in I$  два атласа исте оријентације и разлагања јединице.

$$\begin{aligned}\sum_{j \in J} \int_{U_j} \rho_j \omega &= \sum_{j \in J} \int_{U_j} \left( \sum_{i \in I} \chi_i \right) \rho_j \omega \\ &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \int_{U_j} \chi_i \rho_j \omega \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_{U_j \cap V_i} \chi_i \rho_j \omega \\ &= \sum_{i \in I} \int_{V_i} \chi_i \omega\end{aligned}$$

Захтев да атласи морају задавати исте оријентације се крије између првог и другог реда, када се формално испише све.  $\square$

**Тврђење.** Многострукост  $M$  димезније  $n$  је оријентабилна акко постоји  $n$ -форма  $\omega$  таква да је  $(\forall p \in M)(\forall e_1, e_2, \dots, e_n \in T_p M) \omega_p(e_1, e_2, \dots, e_n) \neq 0$ .

*Доказ.*  $\implies$  Користити разлагање јединице и „повући” форму  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  из  $\mathbb{R}^n$  на  $M$ , уз помоћ локалне карте.

$\Leftarrow$  Нека је дат произвољан атлас, тада је  $(\varphi_j^{-1})^* \omega = f_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ . Закључити да  $f_j$  мора бити различито од нуле, и у зависности од знака  $f_j$  дефинисати атлас  $\{(U_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ , са

$$\psi_j = \begin{cases} \varphi_j, & f_j > 0 \\ \varphi_j \circ \sigma, & f_j < 0 \end{cases},$$

где је  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_2, x_1, \dots, x_n)$  (мењамо оријентацију).

Ово тврђење представља глобалну нелинеарну верзију једног од претходних тврђења за задавање оријентације помоћу  $n$ -форме на векторском простору.  $\square$

**Напомена.** Специјално, када многострукост можемо прекрити једном картом  $\varphi : M \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ , онда је  $\int_M \omega = \int_V v^* \omega$ , за  $v = \varphi^{-1}$ . У координатама:

$$\int_M \omega = \int_V \omega \left( \frac{\partial u}{\partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t_n} \right) dt_1 dt_2 \dots dt_n.$$

За  $n = 1$  и  $n = 2$ , као и форме  $\omega_f^1$  и  $\omega_f^2$  добијамо криволинијски и површински интеграл друге врсте.

**Напомена.** Ако је  $M$  многострукост, онда је и  $\partial M$  многострукост, кодимензије 1.

**Напомена.** Граница у тополошком смислу и у смислу многострукости нису исти појам.

**Напомена.** Како дифеоморфизам слика границу на границу, следи да је матрица првог извода смене координата на крову коцке облика

$$(\varphi \circ \psi^{-1})'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Одавде следи да је граница оријентабилне многострукости такође оријентабилна. Интерпретација тога каква је оријентација зависи од знака  $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ .

**Напомена.** Дуално можемо дефинисати оријентацију на многострукости преко диференцијалних форми. Тангентни простор у тачки  $p \in \partial M$  је дефинисан као „гурање” одговарајућег простора из  $\mathbb{R}^n$  и  $\hat{n}$  је вектор спољашње нормале при том пресликавању. Ако је  $\omega$  форма која задаје оријентацију на  $M$ , онда је  $\hat{n} \lrcorner \omega$  форма која задаје оријентацију на  $\partial M$ . Обрнуто не важи:  $N = M \times [0, 1]$ , где је  $M$  Мебијусова трака. Доказати да је  $\partial N$  Клајнова боца.

**Теорема.** (Стоксова) Нека је  $M$  компактна оријентабилна глатка многострукост димензије  $n$  и нека је оријентација на рубу индукована унутрашњим изводом дуж спољашње нормале. Тада за сваку  $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$  важи:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

*Доказ.* Закључити да је довољно доказати засебно за карту  $U$ .

- (1) Нека је  $U$  отворена коцка. Тада је  $\partial U = \emptyset$ , па је интеграл са десне стране 0. Форма  $\rho\omega$  је облика  $\sum_i a_i(x) dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n$ . Из Фубинијеве теореме примењене на  $d(\rho\omega)$  и чињенице да је  $\text{supp}(\rho\omega)$  компактно садржан у  $U$ , закључити да је и лева страна 0.
- (2) Нека је  $U$  коцка са кровом. Аналогно извести закључак, с тим што сада  $a_i(1)$  не мора бити нула и оно учествује у интеграцији.

Детаљи:

- Ово је доказ за коцку, за формалан доказ морамо користити pullback.
- Доказати да разлагање јединице на  $M$  индукује разлагање јединице на  $\partial M$ .
- Треба оправдати да ово јесте заправо наслеђена оријентација.
- Користили смо да је  $\text{supp}(\rho\omega)$  компактно садржан у  $U$ , а рекли смо да је разлагање јединице потчињено атласу, што у општем случају не мора да важи истовремено. Међутим, како је многострукост компактна и носач је затворен (из дефиниције), следи да је и  $\text{supp}(\rho\omega)$  компактан, као затворен подскуп компактног скупа. Ако носач није компактан и ако многострукост није компактна, теорема не мора да важи.

□

**Последица.**  $\partial M = 0 \implies \int_M d\omega = 0$

**Последица.** Ако је  $M$  компактна оријентисана многострукост без границе и  $\dim M = n$ , пресликавање  $\int_M : \Omega^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$  индукује пресликавање  $\int_M : H_{\text{dR}}^n \rightarrow \mathbb{R}$

**Теорема.** (Де Рамова) Нека је  $M$  компактна оријентисана многострукост без границе и  $\dim M = n$ . Онда је пресликавање

$$\int_M : H_{\text{dR}}^l(M) \times H_{\text{dR}}^{n-l}(M) \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \mapsto \int_M (\alpha \wedge \beta)$$

недегенерисана билинеарна форма.

**Последица.** Ако је  $M$  компактна оријентисана многострукост без границе и  $\dim M = n$ . Онда је  $\int_M : H_{\text{dR}}^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$  изоморфизам. Специјално:

$$H_{\text{dR}}^n(M) \cong \mathbb{R}.$$

**Тврђење.** Ако је  $\partial$  оператор границе сингуларне  $l$ –коцке, онда је  $\partial \circ \partial = 0$ .

**Напомена.** Ако је  $H_{\text{dR}}^1(M) = 0$ , онда је  $M$  просто повезан (обрнуто не мора да важи). У том случају, можемо тражити примитивну форму произвољне 1–форме са  $f(x, y) = \int_{\gamma} Pdx + Qdy$ , где је  $\gamma$  крива која се завршава у  $(x, y)$  (тада ће ова дефиниција бити добра, тј. неће зависити од  $\gamma$ ). Слично можемо резоновати при испитивању соленидности векторског поља.

**Тврђење.** На свакој глаткој многострукости постоји Риманова метрика.

*Доказ.* Нека је  $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j \in J}$  атлас. Дефинишемо

$$g_p^j = \varphi_j^*(p) \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

што нам даје локалну дефиницију. Глобално дефинишемо као

$$g_p = \sum_{j \in J} \rho_j(p) g_p^j$$

□

**Напомена.** Ако је задата Риманова метрика на многострукости, могуће је дефинисати форму канонске запремине (површине). Нека је  $X_i = (\varphi^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x_i}$  и  $G = \det(g(X_i, X_j))$  детерминанта Грамове матрице Риманове метрике. Тада је

$$\mu := \varphi^*(\sqrt{G} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$$

једна таква форма. Специјално, ако је могуће покрити многострукост једном картом (или покрити до на скуп мере 0), онда можемо рачунати њену површину као

$$\int_{\varphi(U)} \sqrt{G} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Ово је аналогно рачунању површине регуларне елементарне површи ( $G = \det I$ ).

**Тврђење.** Форма

$$\omega = \sum_{j=0}^n (-1)^j x_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

је форма запремине на  $\mathbb{S}^n$  сагласна са Римановом метриком.

## 6 Фуријеова анализа

**Тврђење.**  $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$

*Доказ.* Посматрати произвољан карактер  $\gamma \in \text{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{S}^1)$ . Доказати, коришћењем инваријантности Харове мере у односу на транслацију, да је  $\gamma$  диференцијабилно (треба изразити  $\gamma(x)$  преко  $\int_x^{x+\varepsilon} \gamma(s)ds$ ). Из претходног поставити диференцијалну једначину и решавањем закључити да је  $\gamma(x) = e^{-itx}$ . Пресликавање  $\gamma \mapsto t$  је тражени изоморфизам.  $\square$

**Напомена.** Слично можемо закључити да је  $\widehat{\mathbb{S}^1} \cong \mathbb{Z}$ ,  $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{S}^1$  и  $\widehat{\mathbb{Z}_n} \cong \mathbb{Z}_n$ .

**Теорема.** (Понтрјагинова дуалност)  $\widehat{\widehat{G}} \cong G$

**Теорема.** (Компактно-дискретна дуалност) Ако је  $G$  компактна, онда је  $\widehat{G}$  дискретна. Ако је  $G$  дискретна, онда је  $\widehat{G}$  компактна.

**Напомена.** Сваки систем линеарно независних вектора можемо ортонормирати тако да има исти линеарни омотач, Грам–Шмитовим поступком.

**Лема.** Нека је  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ортонормиран систем и  $f$  произвољан вектор. Тада је вектор

$$h = f - \sum_{j=1}^n \langle f, e_j \rangle e_j$$

ортogonalан на простор  $\mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_n\})$ .

*Доказ.* Доказати да за свако  $l$  важи  $\langle h, e_l \rangle = 0$  и из линеарности закључити тражено.  $\square$

**Последица.** Сваки вектор  $f$  може да се напише као

$$f = f_e + h$$

где је  $f_e \in \mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_n\})$  и  $h$  ортогонално на  $\mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_n\})$ .

**Лема.** (Питагорина теорема) Нека је  $g \perp h$  и  $f = g + h$ . Тада је

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2$$

*Доказ.* Расписати  $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle g + h, g + h \rangle$ .  $\square$

**Последица.** Ако је  $f_1, \dots, f_n$  ортогоналан систем и  $f = f_1 + \dots + f_n$ , онда је

$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \dots + \|f_n\|^2$$

**Последица.** Ако је  $e_1, \dots, e_n$  ортонормиран систем и  $f = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$ , онда је

$$\|f\|^2 = |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2$$

**Тврђење.** Нека је  $e_1, \dots, e_n$  ортонормиран систем и  $f$  произвољан вектор. Тада је

$$f_e := \sum_{j=1}^n \langle f, e_j \rangle e_j$$

најближи вектор у  $\mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_n\})$  вектору  $f$ .

*Доказ.* Применом Питагорине теореме доказати да важи  $\|f - g\|^2 \geq \|f - f_e\|^2$  □

**Тврђење.** (Беселова неједнакост) Ако је  $e_1, \dots, e_n$  ортонормирани систем, онда за сваки вектор  $f$  важи

$$\sum_{j=1}^n |\langle f, e_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2$$

*Доказ.* Записати  $f$  као  $f = f_e + h$ , где је  $f_e \perp h$  и  $f_e = \sum_{j=1}^n \langle f, e_j \rangle e_j$ . Применити питагорину теорему. □

**Теорема.** Ако је  $\{e_1, e_2, \dots\}$  ортонормиран систем, следећи искази су еквивалентни:

а) систем  $\{e_1, e_2, \dots\}$  је потпун

б) за сваки вектор  $f$  важи

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$$

в) за сваки вектор  $f$  важи *Парсевалова једнакост*:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2$$

*Доказ.* Тривијално из претходних тврђења. □

**Последица.** Ортонормирани систем вектора је потпун ако и само ако је база.

*Доказ.*  $\boxed{\Leftarrow}$  : важи увек

$\boxed{\Rightarrow}$  : је а)  $\Rightarrow$  б) у претходној теорему □

*Пример.* Систем  $\{1, x, x^2, \dots\}$  је потпун у пред-Хилбертовом простору  $C_{\mathbb{C}}[-1, 1]$  са скаларним производом  $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ , али он није база!

**Теорема.** Нека је  $X$  Хилбертов простор,  $\{e_1, e_2, \dots\}$  ортонормиран систем и  $f \in X$  произвољан вектор. Тада важи:

(1) Фуријеов ред  $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$  конвергира ка неком вектору  $f_e \in X$ .

(2)  $f = f_e + h$ , где је  $h \perp \mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_n\})$

*Доказ.* (1) На основу Беселове неједнакости  $\sum |\langle f, e_n \rangle|^2$  конвергира. На основу Питагорине теореме закључити да  $\sum \langle f, e_n \rangle e_n$  задовољава Кошијев критеријум, па због комплетности простора и конвергира.

(2) Доказати да за свако  $j$  важи  $\langle h, e_j \rangle = 0$

□

**Теорема.** Нека је  $X$  пред-Хилбертов простор и  $\{f_1, f_2, \dots\}$  систем линеарно независних вектора.

(1) Да би овај систем био потпун неопходно је да у  $X$  не постоји вектор који је различит од 0 и ортогоналан на све  $f_j$ .

(2) Ако је простор  $X$  Хилбертов, услов из (1) је и довољан за потпуност система.

*Доказ.* (1) Претпоставити супротно и на основу Питагорине теореме извести контрадикцију са потпуношћу система.

(2) Грам-Шмитовим поступком ортонормирати систем. На основу претходне теореме закључити да се сваки вектор  $f \in X$  може записати као  $f = f_e + h$ , где је  $f_e = \sum \langle f, e_n \rangle e_n$  и  $h \perp \mathcal{L}(\{e_1, \dots, e_n\})$ . Следи да је  $h = 0$ . Извести крајњи закључак из претходног.

□

*Пример.* Нека је  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  непрекидна функција, таква да је  $\forall n$

$$\int_{-1}^1 x^n f(x) dx = 0$$

Тада је на основу претходне и Прве Вајерштрасове теореме,  $f \equiv 0$ .

*Пример.* Систем  $\{1, x, x^2, \dots\}$  је линеарно независан и потпун у пред-Хилбертовом простору  $C_{\mathbb{C}}[-1, 1]$  са скаларним производом  $\int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx = \langle f, g \rangle$  али није база у том простору! Претпоставити супротно, нека јесте база. Тада се свако  $f \in C_{\mathbb{C}}[-1, 1]$  може записати као ред  $f(x) = \sum c_n x^n$ .

Обратити пажњу да се конвергенција тог реда односи на конвергенцију у норми издученој скаларним производом задатим раније. Како општи члан конвергентног реда тежи нули, закључити да  $\|c_n x^n\| \rightarrow 0$ . Даље, из дефиниције скаларног производа закључити да је  $\|c_n x^n\| = |c_n| \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$  и да због  $\|c_n x^n\| \rightarrow 0$ , за довољно велико  $n$  важи  $|c_n| < \sqrt{2n+1}$ .

Користећи ову неједнакост доказати да степени ред  $\sum c_n x^n$  конвергира на интервалу  $] -1, 1[$ . Односно, тада је функција  $g : ] -1, 1[ \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  добро дефинисана функција. Пошто посматрамо конвергенције у различитим нормама, мора се пажљиво приступати детаљу на крају овог доказа. Није очигледно да је  $f = g$ . То се може показати имајући у виду следеће:  $\int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} |f - g|^2 \leq \|f - \sum c_n x^n\|^2 \rightarrow 0$ . Одатле следи да је  $f \in C^{\infty}] -1, 1[$ , међутим то није тачно, те добијамо контрадикцију.

**Теорема.** Свака функција из  $\mathcal{R}^2[-\pi, \pi]$  може произвољно добро да се апроксимира у норми  $\|\cdot\|_2$ :

(а) функцијом која је ограничена на  $] -\pi, \pi[$  и интеграбилна на  $[-\pi, \pi]$

(б) део по део константном функцијом

(в) непрекидном функцијом

(г) тригонометријском полиномом

*Доказ.* (а) Тврђење је нетривијално само ако се ради о несвојственом интегралу. Претпоставити да је несвојствен у граничним тачкама (случај унутрашњих разматра се аналогно).

(б) Интеграл ограничене интеграбилне функције може се произвољно добро апроксимирати доњом Дарбуовом сумом, те ово следи из претходног.

(в) Довољно је доказати да константне функције из претходног могу довољно добро да се апроксимирају непрекидним функцијама.

(г) Довољно је доказати да се непрекидна функција  $h$  из претходног може произвољно добро апроксимирати тригонометријским полиномом. Бирамо  $h_1$  тако да је непрекидна и  $h_1(x) = h(x)$  за  $x \in [-\pi, \pi - \delta]$  и  $h_1(-\pi) = h_1(\pi)$ . Одатле извести закључак на основу Друге Вајерштрасове теореме.

□

**Последица.** Нека је  $PC([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$  пред-Хилбертов простор део-по-део непрекидних функција. Тада важи:

(а) Тригонометријски Фуријеов ред произвољне функције  $f \in PC([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$  конвергира ка  $f$  у норми изведеној из скаларног производа

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

(б) Ако тригонометријски ред

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

конвергира ка функцији  $f$  у норми изведеној из скаларног производа, онда је он њен Фуријеов ред.

(в) Ако функције  $f, g \in PC([-\pi, \pi]; \mathbb{C})$  имају исти Фуријеов ред, онда је  $f \equiv g$ .

*Доказ.* (а) Последица чињенице да је сваки потпун ортонормиран систем база и чињенице да су парцијалне суме Фуријеовог реда сваког вектора линеарне комбинације ортонормираног система које најбоље апроксимирају тај вектор.

(б) Следи из опште чињенице о јединствености разлагања произвољног вектора  $f$  пред-Хилбертовог простора по ортонормираној бази.

(в) Из претходног.

□

**Лема.** (Риман–Лебегова) Нека је  $f : ]\alpha, \beta[ \rightarrow \mathbb{C}$  локално антеграбилна и нека је апсолутно интеграбилна у обичном Римановом или несвојственом смислу. Тада је

$$\lim_{\mathbb{R} \ni \lambda \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) e^{i\lambda x} dx = 0$$

*Доказ.* Прво, закључити да је довољно доказати тврђење за реалну функцију  $f$ . Даље, закључити да је довољно да се тврђење докаже за функцију  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , односно да можемо искључити тачке  $\alpha$  и  $\beta$  из домена. Тако можемо поступити са свим сингуларним тачкама. Посматрати доњу Дарбуову суму  $\sum m_j \Delta x_j$  и функцију  $g(x) = m_j$  за  $x_{j-1} \leq x \leq x_j$ . Закључити да је довољно доказати тврђење за  $g$  уместо  $f$ . За  $g$  дати интеграл се експлицитно израчунава.  $\square$

**Напомена.** Парцијална сума Фуријеовог реда  $\sum c_n e^{inx}$  се рачуна по формули

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\pi} (f * D_n)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} (D_n * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x-t) dt. \end{aligned}$$

**Теорема.** Нека функција  $f : ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{C}$  задовољава услове Риман-Лебегове леме и нека је  $0 < \delta < \pi$ . Тада за свако  $x \in ]-\pi, \pi[$  важи

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{-\pi}^{-\delta} f(x-t) D_n(t) dt + \int_{\delta}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt \right) = 0$$

*Доказ.* Конструисати помоћну функцију  $g$  са

$$g(t) = \begin{cases} f(x-t) (\sin \frac{t}{2})^{-1} & \delta \leq |t| \leq \pi \\ 0 & |t| > \pi \end{cases}$$

Извести закључак из чињенице да је  $D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}}$  и Риман-Лебегове леме.  $\square$

**Последица.** (Принцип локализације) Нека функције  $f, g : ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{C}$  задовољавају услове Риман-Лебегове леме и нека у некој околини  $V$  тачке  $x_0 \in ]-\pi, \pi[$  важи  $f|_V \equiv g|_V$ . Тада Фуријеови редови

$$f \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx_0}$$

и

$$g \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{inx_0}$$

функција  $f$  и  $g$  или оба дивергирају, или оба конвергирају ка истој вредности.

*Доказ.* Парцијална сума Фуријеовог реда функције  $f$  у тачки  $x_0$  је

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-t) D_n(t) dt$$

То лако добијамо из чињенице да за коначне суме интеграл и сума комутирају, као и чињенице да је  $D_n$   $2\pi$ -периодично. Даље, на основу пертходне теореме закључујемо да  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0)$  зависи само од рестрикције  $f|_V = g|_V$ .  $\square$

**Теорема.** (Динијев услов конвергенције Фуријеовог реда) Нека је  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -периодична функција која задовољава услове Риман-Лебегове леме. Ако  $f$  задовољава Динијев услов у тачки  $x$ , онда њен Фуријеов ред конвергира у тој тачки и важи

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}$$



*Доказ.* Написати парцијалну суму Фуријеовог реда у тачки  $x$  као

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (f(x-t) + f(x+t)) D_n(t) dt,$$

додати и одузети  $f(x_-) + f(x_+)$ , регруписати до интеграла на које можемо применити Риман–Лебегову лему, због Динијевог услова.  $\square$

**Напомена.** Не можемо да очекујемо да Фуријеов ред функције у тачки увек конвергира ка вредности  $f(x)$  функције у тој тачки. То је природно, функције се могу разликовати у пребројиво много тачака и да имају исте Фуријеове коефицијенте, јер су они дефинисани преко интеграла.

**Теорема.** (Фејерова) Нека је  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -периодична функција, апсолутно интегрална на  $[-\pi, \pi]$ . Тада важи:

$$(1) f \in C(\mathbb{R}) \implies \sigma_n \rightrightarrows f$$

$$(2) f \in Cx_0 \implies \sigma_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$$

где је

$$\sigma_n(x) := \frac{S_0(x) + \dots + S_n(x)}{n+1}$$

*Доказ.* Приметити најпре да је  $\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} (f * F_n)(x)$  и закључити

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi |f(x-t) - f(x)| F_n(t) dt.$$

Из Канторове теореме закључити да је  $f$  равномерно непрекидна, оценити  $F_n$  одозго и раздвојити интеграл на  $\int_{-\delta}^\delta + (\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_\delta^\pi)$ , па потом ограничити сваки од њих.  $\square$

**Напомена.** Претходна теорема нам даје још један доказ друге Вајерштрасове теореме о апроксимацији непрекидних  $2\pi$ -периодичних функција тригонометријским полиномима.

**Тврђење.** (Диференцирање Фуријеовог реда) Нека је  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  непрекидна део-по-део диференцијабилна функција, таква да је  $f(-\pi) = f(\pi)$ . Онда се њен Фуријеов ред може „диференцирати члан по члан”.

*Доказ.* Применити парцијалну интеграцију при рачунању коефицијената за Фуријеов ред функције  $f'$ .  $\square$

**Последица.** Претходно тврђење нам омогућава да испитујемо диференцијабилност функције рачунањем њеног интеграла. Наиме, ако је функција  $f$  као у претходној теорему класе  $C^{k-1}$  и сваки њен извод испуњава иста својства као у претходној теорему, онда за коефицијенте Фуријеовог реда функције  $f^{(k)}$  важи:

$$|c_n| = \frac{\gamma_n}{n^k} = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \text{ кад } n \rightarrow \infty.$$

*Доказ.* Закључити да  $\sum |\gamma_n|^2$  конвергира (из Беселове неједнакости) и применити  $\gamma_n = (in)^k c_n$ .  $\square$

**Напомена.** За функцију из претходне последице се може доказати да њен Фуријеов ред конвергира апсолутно и равномерно на  $[-\pi, \pi]$ , применом  $AG$  неједнакости и Вајерштра-совог става о равномерној и апсолутној конвергенцији.

**Тврђење.** (Интеграција Фуријеовог реда) Нека је  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$  део-по-део непрекидна. Онда се њен Фуријеов ред може интегралити члан по члан, при чему важи једнакост у свакој тачки.

*Доказ.* Применити тврђење о диференцирању Фуријеовог реда и претходну напомену на функцију

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - c_0x.$$

□