Анализа 2 – основне идеје доказа важнијих теорема и тврђења

1 Диференцирање

1.1 Диференцирање у нормираним векторским просторима

Теорема. (Извод сложене функције) Нека су X, Y, и Z нормирани векторски простори, $V \subseteq X$, $W \subseteq Y$ отворени скупови, $f : V \to Y$, $g : W \to Z$ и $a \in V$, $f(a) \in W$. Тада важи:

$$f\mathcal{D}a \wedge g\mathcal{D}f(a) \implies g \circ f\mathcal{D}a$$

и при томе је

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

Доказ. Доказ следи из дефиниције извода пресликавања и чињенице да је $o(O(h)) = o(h)$. □

Теорема. (Извод инверзне функције) Нека су X и Y нормирани векторски простори, $V \subseteq X$ отворен скуп, $a \in V$ и $f : V \to Y$ пресликавање са следећим својствима:

1) $f\mathcal{D}a$

2) $Df(a)$ инвертибилан

3) у некој W околини тачке $b := f(a)$ пресликавање f има инверзно

4) $f^{-1}Cb$

Тада је $f^{-1}\mathcal{D}b$ и важи:

$$(Df^{-1})(b) = (Df(a))^{-1}$$

Доказ. Нека је $b = f(a), a = f^{-1}(b)$. Показати да, пошто су транслације хомеоморфизми, важи $f(a + h) = b + t$ и $f^{-1}(b + t) = a + h$. Из непрекидности f^{-1} у b закључити чему је једнако $f^{-1}(b + t) - f^{-1}(b)$. Из услова $f\mathcal{D}a$ закључити чему је једнако $(f'(a))^{-1}t$ као и да је $o(h) = o(t)$. На основу претходних корака, и дефиниције извода, извести коначни закључак. □

Тврђење. Ако је простор Банахов (комплетан нормиран векторски простор), скуп $GL(X)$ је отворен у $\mathcal{L}(X; X)$.

Доказ. Посматрати $A \in GL(X)$ и $h \in \mathcal{L}(X; X)$. Доказати да је и $A + h \in GL(X)$ односно да постоји $(A + h)^{-1}$. Искористити комплетност домена као и дефинисаност норме. □

Напомена. Претходно тврђење важи и у нешто општијем случају, за $\mathcal{L}(X;Y)$, уколико је X Банахов, а Y нормирани векторски простор.

Теорема. (Теорема о коначном прираштају) Нека су X и Y нормирани векторски простори, $V \in X$ отворен и $f : V \to Y$ непрекидно. Ако је

$$[a, a+h] = \{a + th \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq V$$

и ако је пресликавање f диференцијабилно у свим тачкама скупа

$$]a, a+h[= \{a + th \mid 0 < t < 1\}$$

онда важи

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq \sup_{x \in]a,a+h[} \|f'(x)\| \cdot \|h\|$$

Доказ. Доказати да теорема важи на сваком сегменту $[c_1, c_2] \subseteq]a, a+h[$. Претпоставити супротно,

$$\sup_{x \in [c_1,c_2]} \|f'(x)\| < \frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta x\|}$$

Поделити интервал $[c_1, c_2]$ на два подинтервала и применити помоћну лему на њих. Продужити поступак, формирати низ интервала. Поново применити помоћну лему. Извести контрадикцију. □

Напомена. Помоћна лема из претходне теореме је следећа неједнакост:

Ако за $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}_+$ важи $c \leq a + b$ и $\gamma = \alpha + \beta$, онда је

$$\frac{c}{\gamma} \leq \max\{\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\}$$

Теорема. (Ојлерова теорема) Нека је X нормирани векторски простор над $\mathbb{R}$. Диференцијабилна функција $f : X \to \mathbb{R}$ је хомогена степена $k > 0$ ако и само ако је

$$df(x) \cdot x = kf(x)$$

Доказ. Дефинишати помоћну функцију $\psi(t) = f(tx) - t^k f(x)$ и одатле доказати оба смера еквиваленције. □

Тврђење. $\mathcal{L}(X;\mathcal{L}(X;Y)) \cong \mathcal{L}(X,X;Y)$

Доказ. Нека је $L \in \mathcal{L}(X;\mathcal{L}(X;Y))$ произвољно. Дефинисати $\tilde{L} : X \times X \to Y$ као

$$\tilde{L}(\eta, \xi) := L(\eta)(\xi)$$

Доказати да је са $\varphi(L) = \tilde{L}$ добро дефинисан тражени изоморфизам. □

Тврђење. $fD^n a \implies D^n f(a)$ је симетрично n-линеарно пресликавање.

Доказ. Приметити најпре да је довољно доказати за транспозиције, јер оне генеришу групу пермутација. Увести

$$F_{\zeta,\eta}(t) := f(a+t(\zeta+\eta)) - f(a+t\zeta) - f(a+t\eta) - f(a)$$

и доказати да је

$$D^2 f(a)(\zeta,\eta) = \lim_{t\to 0} \frac{F_{\zeta,\eta}(t)}{t^2}.$$

Извести закључак из тога, чињенице да је F симетрично по ζ и η, као и

$$D^n f(a)(\zeta_1,\zeta_2,\dots,\zeta_n) = D_{\zeta_1} D_{\zeta_2} \dots D_{\zeta_n} f(a).$$

□

Теорема. Нека су X, Y нормирани векторски простори, $V \subseteq X$ отворен, $a \in V$, $f\mathcal{D}^{n-1}V$ и $f\mathcal{D}^n a$. Тада је

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)h^n + o(\|h\|^n), h \to 0$$

Доказ. Доказ извести индукцијом по n коришћењем Последице 2. теореме о коначном прираштају и чињенице да је $(Lx^n)' = nLx^{n-1}$. □

1.2 Унутрашње тачке екстремума

Тврђење. Нека је V отворен подскуп нормираног векторског простора X, $a \in V$, $f : V \to \mathbb{R}$, $fD^n a$, $Df(a) = D^2 f(a) = \ldots = D^{n-1} f(a)$, $D^n f(a) \neq 0$. Да би a била тачка локалног екстремума функције f:

- **неопходно** је да n буде паран број и да је $D^n f(a)$ семидефинитна форма.
- **довољно** је да су вредности $D^n f(a)h^n$ одвојене од 0 на јединичној сфери $\|h\| = 1$.

Доказ. Применити Тејлорову формулу. □

Пример. (Ојлер–Лагранжове једначине)

1.3 Теорема о имплицитној функцији

Теорема. (Теорема о имплицитној функцији) Нека су X, Y и Z нормирани векторски простори, при чему је Y комплетан, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ и $W = B]x_0;\alpha[\times B]y_0;\beta[\subseteq X \times Y$. Претпоставимо да пресликавање $F : W \to Z$ испуњава следеће услове:

(1) $F(x_0, y_0) = 0$

(2) $FC(x_0, y_0)$

(3) $D_2 F$ дефинисано на W и непрекидно у тачки (x_0, y_0)

(4) $\exists (D_2 F(x_0, y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(Z; Y)$

Тада постоје околине U и V тачака x_0 и y_0 и пресликавање $f : U \to Y$ са својствима:

(a) $U \times V \subseteq W$

(б) $[(x,y)\in U\times V$ и $F(x,y)=0] \iff y=f(x)$

(в) fCx_0

Доказ. Пошто су транслације хомеоморфизми, без умањења општости претпоставити да важи $x_0=0$ и $y_0=0$. Дефинисати помоћну функцију $g_x : B]0;\beta[\to Y$ као

$$g_x(y) := y - (D_2F(0,0))^{-1}F(x,y).$$

Користећи Теорему о коначном прираштају доказати да је g_x контракција и да слика неки комплетан скуп у себе. Применити Банахов став о фиксној тачки. Одатле извести закључак. $\square$

Теорема. (Теорема о инверзној функцији) Нека су X,Y нормирани векторски простори, при чему је Y комплетан, нека је $V\subseteq Y$ отворен скуп, $y_0\in V$ и $g:V\to X$ пресликавање које има следећа својства:

(1) $g\in\mathcal{D}(V;X)$

(2) $DgCy_0$

(3) $\exists(Dg(y_0))^{-1}\in\mathcal{L}(X;Y)$

Тада постоје околина $V_0\subseteq Y$ тачке y_0 и околина $U_0\subseteq X$ тачке $x_0:=g(y_0)$ такве да је $g:V_0\to U_0$ бијекција, $g^{-1}\mathcal{D}x_0$ и важи

$$Dg^{-1}(x_0)=(Dg(y))^{-1}.$$

Доказ. Доказ следи из Теореме о имплицитној функцији примењене на функцију $F(x,y)=x-g(y)$. $\square$

Теорема. (Теорема о рангу) Нека је $V\subseteq\mathbb{R}^k$ отворен и $f:V\to\mathbb{R}^l$ пресликавање класе C^n, такво да је за све $x\in V$ $\mathrm{rang}Df(x)=r$. Тада у околини сваке тачке $x_0\in V$ и њене слике $y_0=f(x_0)\in\mathbb{R}^l$ постоје локалне координате класе C^n у којима f има запис

$$f:(s_1,\dots,s_k)\to(s_1,\dots,s_r,0,\dots,0).$$

Краће речено, пресликавање константног ранга r локално изгледа као пројекција на $\mathbb{R}^r$.

Доказ. $\square$

Тврђење. Сваки дифеоморфизам класе C^1

$$\mathbb{R}^l\supseteq V\xrightarrow{f} f(V)\subseteq\mathbb{R}^l$$

може локално да се представи као композиција l простих дифеоморфизама.

Доказ. Индукцијом по k доказати да дифеоморфизам који мења највише k координата може локално да се представи као композиција k простих дифеоморфизама. $\square$

2 Многострукости

2.1 Подмногострукости у $\mathbb{R}^n$ и условни екстремуми

Тврђење. За $M \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ следећа тврђења су еквивалента:

(а) M је k - димензиона подмногострукост класе C^p

(б) $(\forall p \in M)$ постоје отворене околине $p \in V$ и $0 \in U$ у $\mathbb{R}^{k+l}$ и дифеоморфизам $g : U \to V$ класе C^p такав да је $g(V \cap M) = U \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$

(в) $(\forall p \in M)$ постоје отворене околине $p \in V$ у $\mathbb{R}^{k+l}$ и $0 \in U$ у $\mathbb{R}^k$ и имерзија $h : D \to V$ класе C^p таква да је $h : D \to V \cap M$ хомеоморфизам у релативној топологији на $V \cap M$ наслеђеној из R^{k+l}.

Доказ. Како је k-дим подмногострукост у $\mathbb{R}^{k+l}$ локално задата једначином $f(x) = 0$, где је f сумбмерзија и $\text{rang} Df(x) = l$, из Теореме о рангу закључити да је могуће изабрати локалне координате у којима f има запис

$$f(x_1, \ldots, x_{k+l}) = (x_1, \ldots, x_l).$$

Одатле директно закључити (б). Уз помоћ претходног, дефинисати тражену имерзију и закључити (в). $\square$

Тврђење. Нека је $h : D \to M$ локална параметризација околине тачке $p = h(0)$ и нека је $f : V \to \mathbb{R}^l$ субмерзија таква да је $M \cap V = f^{-1}(0)$. Тада важи да је $T_pM = \ker Df(p)$.

Доказ. Диференцирањем $f(h(t)) \equiv 0$ у тачки $t = 0$ и применом правила за извод композиције пресликавања закључити да је $T_pM \subseteq \ker Df(p)$. Одатле, применом Прве теореме о изоморфизму на пресликавање $Df(p)$ закључити да важи једнакост. $\square$

Теорема. Нека је $V \in \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $f : V \to \mathbb{R}$ функција класе C^1 и $M \subseteq V$ глатка подмногострукост. Да би тачка $p \in M$ била тачка условног локалног екстремума функције $f|_M$ неопходно је да буде испуњен бар 1 од следећих услова:

(а) $df(p) = 0$ (тј. p је критична тачка за f)

(б) $T_pM \subseteq T_pS$, где је $S := \{x \in V | f(x) = f(p)\}$

Доказ. Претпоставити да важи a) у теореми. Одатле директно закључити да је p кандидат за безусловни, а самим тим и условни екстремум. Даље, претпоставити да a) у теореми не важи. Доказати да је онда у некој околини тачке p функција f субмерзија, па је онда S $(n-1)$ - дим глатка подмногострукост, па има смисла T_pS. Узети $\gamma :]-\delta, +\delta[\to M$ такво да $\gamma(0) = p$. Из $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ извести $T_pM \subseteq T_pS$. $\square$

Напомена. Нека је M глобално задато једначином $g(x) = 0$ за неку субмерзију $g : V \to \mathbb{R}$ и нека је p локални екстремум за $f|_M$. Са $\gamma : I \to M$ дата је нека крива која лежи на M и за коју важи $\gamma(0) = p$. Тада, $f \circ \gamma$ има локални екстремум у 0, тј. за $f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ важи $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ односно $\overrightarrow{\nabla} f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0$ за свако γ кроз p. Одатле следи $\overrightarrow{\nabla} f(p) \perp M$. Како је $\gamma \in M$, одатле следи $(g \circ \gamma)(t) = 0$ па када то диференцирамо по t добијамо да је $\overrightarrow{\nabla} g \perp M$. Коначно, добијамо систем $n+1$ једначина са $n+1$ непознатих који је одређен и који нам служи за одређивање условних екстремума:

$$\boxed{\begin{array}{c} \overrightarrow{\nabla} f(p) = \lambda \overrightarrow{\nabla} g(p) \\ g(p) = 0 \end{array}}$$

2.2 Апстрактне многострукости

Лема. Нека је $M \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ k - димензиона подмногострукост класе C^p, нека су V_1, V_2 околине (у $\mathbb{R}^{k+l}$) тачке $p \in M$ и нека су $h_1 : D_1 \to V_1$, $h_2 : D_2 \to V_2$ две локалне C^p параметризације скупова $V_1 \cap M$ и $V_2 \cap M$. Тада је

$$h_2 \circ {h_1}^{-1} : D_1 \cap {h_1}^{-1}(V_2) \to D_2 \cap {h_2}^{-1}(V_1)$$

дифеоморфизам класе C^p.

Доказ. Доказ леме следи из чињенице да је композиција дифеоморфизама дифеоморфизам. □

Тврђење. Не постоји имерзија класе C^p где је $p \leq 1$ где $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ таква да је $h(\mathbb{R}) = \Gamma$.

Доказ. Из непрекидности h' извести контрадикцију. □

Теорема. За свако отворено покривање $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ глатке многострукости M постоји разлагање јединице $\{\rho_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ такво да је $\mathrm{supp}\rho_\lambda \subseteq U_\lambda$.

Теорема. За $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ као у претходној теореми постоји разлагање јединице $\{\rho_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ са компактним носачем, такво да $(\forall\sigma \in \Sigma)(\exists\lambda \in \Lambda)$ $\mathrm{supp}\rho_\sigma \subseteq U_\lambda$.

Теорема. (Витнијева) Свака глатка n-димензиона многострукост M може да се глатко уложи у $\mathbb{R}^{2n+1}$, тј. постоји C^∞ улагање $f : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$. Другим речима, свака апстрактна глатка многострукост је дифеоморфна подмногострукости у еуклидском простору.

Теорема. Свака компактна глатка многострукост M може глатко да се уложи у $\mathbb{R}^l$ за довољно велико l.

Доказ. Нека је $\{(U_j, \varphi_j)_{1\leq j\leq k}\}$ атлас на M, такав да је $\varphi_j(U_j) = B(0; 3)$ и да $V_j = {\varphi_j}^{-1}(B(0; 1))$ такође покривају M. За свако j конструисати функцију $h_j : U_j \to \mathbb{R}$ помоћу

$$h(x) = \frac{g(4 - \|x\|^2)}{g(4 - \|x\|^2) + g(\|x\|^2 - 1)}$$

где је g дато са

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Дефинисати пресликавање

$$f : M \to \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{k} =: \mathbb{R}^l$$

са

$$f(p) = \Big(h_1(p)\varphi_1(p), \ldots, h_k(p)\varphi_k(p), h_1(p), \ldots, h_k(p)\Big)$$

где је $n = \dim M$. Доказати да је f једно улагање.

□

2.3 Извод пресликавања $f : M \to N$

Лема. Деривација D на $C^\infty(p)$ пресликавања које је константно у некој околини тачке p је 0.

Доказ. Примнити Лајбницово правило и из хомогености (деривација је линеарно пресликавање, дакле и хомогено) закључити да је довољно доказати $D1 = 0$. $\square$

Лема. Нека је $f \in C^\infty_{\mathbb{R}}(U)$ и $p \in U$. Тада постоје лопта $B := B(p, \varepsilon) \subseteq U$ и функције $g_1, g_2, \dots, g_n \in C^\infty_{\mathbb{R}}(U)$ такве да:

1. $g_j(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(p)$
2. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(p) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(x_j - p_j)g_j(x)$

Доказ. За $x \in B$ (B као у поставци) можемо написати

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \int_0^1 \frac{1}{dt} f(p + t(x-p))dt \\ &= f(p) + \sum_{j=1}^{n}(x_j - p_j)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j} f(p + t(x-p))dt \end{aligned}$$

Узети да је $g_j = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j} f(p + t(x-p))dt$. $\square$

Теорема. Нека је $U \subseteq \mathbb{R}^n$ отворен скуп и $p \in U$. За сваку деривацију $D : C^\infty(p) \to C^\infty(p)$ алгебре $C^\infty(p)$ постоји јединствени вектор $\xi \in T_pU$ такав да је $Df(p) = df(p) \cdot \xi$.

Доказ. Написати $f(x)$ као у претходној леми, и применити деривацију на тај запис. Добијемо

$$Df(x) = \sum_{j=1}^{n}(D\pi_j(x) \cdot g_j(x) + (x_j - p_j) \cdot Dg_j(x)),$$

Применом овога у тачки p имамо:

$$Df(p) = \sum_{j=1}^{n} D\pi_j(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = df(p) \cdot \xi,$$

за $\xi = (D\pi_1, D\pi_2, \dots, D\pi_n)$. $\square$

Напомена. Претходна теорема нам даје еквиваленцију геометријског и алгебарског (аналитичког) приступа дефиницији тангнетног простора многострукости.
Последица. T_pM је векторски простор, јер је линеарна комбинација деривација такође деривација.
Последица. $\dim M = n \implies \dim T_pM = n$

Доказ. Нека је $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ локална карта и $p \in U$. Тада је $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ база за $T_{\varphi(p)}U$, па је $(\varphi^{-1})_*\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, (\varphi^{-1})_*\dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, (\varphi^{-1})_*\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ база за T_pM. $\square$

3 Интеграција

3.1 Апстрактни интеграли

Лема. Векторски потпростор $\mathcal{E}$ простора $\mathbb{R}^T$ је решетка акко важи

$$f \in \mathcal{E} \implies |f| \in \mathcal{E}.$$

Доказ. Искористити везу између апсолутне вредности и максимума и мимимума. □

Тврђење. Радонов интеграл је уједно и елементарни интеграл.

Доказ. По дефиницији је радонов интеграл линеаран, тако да је довољно доказати да за опадајући низ функција f_n са компактним носачем који тежи 0 важи и да је $I(f_n) \to 0$, кад $n \to \infty$. Нека је K_n носач функције f_n. Како је f_n опадајући низ који тежи нули, следи да је $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$. Из Динијеве теореме (0 је непрекидна функција) следи да $f_n \rightrightarrows 0$, па за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такво да $n \geq n_0 \implies f_n |_{K_1} < \varepsilon$.

На крају, нека је $\psi \in C_C(T)$ функција за коју је $0 \leq \psi \leq 1$ и $\psi |_{K_1} \equiv 1$ (таква функција постоји због Урисонове леме). Због $\operatorname{supp} f_n \subseteq K_1$, важи

$$f_n = f_n \cdot \chi_{K_1} \leq f_n \cdot \psi \leq \varepsilon\psi.$$

Из позитивности и линеарности Радоновог интеграла имамо $I(f_n) \leq \varepsilon I(\psi)$, па је онда и $I(f_n) \to 0$, кад $n \to \infty$. □

Напомена. Простор $C_C(T)$ је простор непрекидних функција $f : T \to \mathbb{R}$ које имају компактан носач, при чему је T локално компактан метрички (или Хаусдорфов) простор.
Пример. Још неки примери елементарног интеграла су:

- Диракова делта функција $\delta_a : C_C(T) \to \mathbb{R}$, $\delta_a(f) := f(a)$ (валуација у тачки).
- Риманов интеграл
- Риман-Стилтјесов интеграл

Лема. За Радонов интеграл $I : C_C(T) \to \mathbb{R}$ важи:

1. $f \leq g \implies I(f) \leq I(g)$
2. $|I(f)| \leq I(|f|)$

Доказ. За први део тврђења применити линеарност и позитивност I. За други део применити први део и $-|f| \leq f \leq |f|$. □

Тврђење. Нека је T локално компактан Хаусдорфов простор, $K \subseteq T$ компактан подскуп и $C(T; K)$ скуп функција и $C_C(T)$ којима је носач у K. Тада је рестрикција

$$I : C(T; K) \to \mathbb{R}$$

Радоновог интеграла непрекидна у односу на норму

$$\|f\|_K := \sup\{|f(t)| \mid t \in K\}.$$

Доказ. Нека је $\psi \in C_C(T)$ функција за коју је $0 \leq \psi \leq 1$ и $\psi \mid_K \equiv 1$. Тада је

$$(\forall f \in C(T;K))(\forall t \in T)|f(t)| \leq \|f\|_K \cdot \psi(t),$$

па је $|I(f)| \leq I(|f|) \leq I(\psi) \cdot \|f\|_K$. □

Теорема. (Фубини) Нека су S и T комапктни Хаусдорфови простори и нека су

$$I_S : C(S) \to \mathbb{R}, I_T : C(T) \to \mathbb{R}$$

Радонови интеграли. Тада постоји јединствен Радонов интеграл

$$I : C(S \times T) \to \mathbb{R}$$

такав да је

$$I(f \otimes g) = I(f) \cdot I(g).$$

Напомена. Тензорски производ функција $f : S \to \mathbb{R}$ и $g : T \to \mathbb{R}$ је функција $f \otimes g : S \times T \to \mathbb{R}$ дефинисана са

$$f \otimes g(s,t) := f(s) \cdot g(t)$$

Дефинишемо и простор $C(S) \otimes C(T)$ као

$$C(S) \otimes C(T) := \Big\{ \sum_j f_j \otimes g_j \mid f_j \in C(S), g_j \in C(T) \Big\},$$

где је наведена сума коначна.

Доказ. Из претходног тврђења следи да је Радонов интеграл на компактним просторима непрекидан, па је и равномерно непрекидан по Канторовој теореми. Из Стон-Вајерштрасове теореме следи да је $\overline{C(S) \otimes C(T)} = C(S \times T)$, па доказ тврђења следи из Принципа продужења равномерно непрекидног пресликавања са комплетним кодоменом (одатле следи и јединственост). □

Последица. (Фубинијева теорема за Риманов интеграл) Нека је $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2$ n-димензиони квадар, представљен као производ k–димензионог квадра $\mathcal{J}_1$ и $(n-k)$–димензионог квадра $\mathcal{J}_2$. Тада, за непрекидну функцију $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ важи:

$$\int_{\mathcal{J}} = \int_{\mathcal{J}_2} \left(\int_{\mathcal{J}_1} f(x,y)dx \right) dy = \int_{\mathcal{J}_1} \left(\int_{\mathcal{J}_2} f(x,y)dy \right) dx.$$

Доказ. Због линеарности Римановог интеграла и претходне теореме, довољно је доказати тврђење за $f = f_1 \otimes f_2$, за $f_i : \mathcal{J}_i \to \mathbb{R}, i \in \{1,2\}$ непрекидне функције. Сада директно следи доказ из дефиниције Римановог интеграла по квадру $\mathcal{J}$. □

3.2 Класа интеграбилних функција

3.3 Нормирани простор интеграбилних функција

3.4 Комплетирање метричког простора и Лебегов интеграл

3.5 Простор функција интеграбилних по Риману

3.6 Смена промењиве у интегралу

4 Векторска поља и диференцијалне форме