

# Анализа 2 – основне идеје доказа важнијих теорема и тврђења

## 1 Диференцирање

### 1.1 Диференцирање у нормираним векторским просторима

**Теорема.** (Извод сложене функције) Нека су  $X, Y$ , и  $Z$  нормирани векторски простори,  $V \subseteq X$ ,  $W \subseteq Y$  отворени скупови,  $f : V \rightarrow Y$ ,  $g : W \rightarrow Z$  и  $a \in V$ ,  $f(a) \in W$ . Тада важи:

$$f\mathcal{D}a \wedge g\mathcal{D}f(a) \implies g \circ f\mathcal{D}a$$

и при томе је

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

*Доказ.* Доказ следи из дефиниције извода пресликавања и чињенице да је  $o(O(h)) = o(h)$ .  $\square$

**Теорема.** (Извод инверзне функције) Нека су  $X$  и  $Y$  нормирани векторски простори,  $V \subseteq X$  отворен скуп,  $a \in V$  и  $f : V \rightarrow Y$  пресликавање са следећим својствима:

- 1)  $f\mathcal{D}a$
- 2)  $Df(a)$  инвертибилан
- 3) у некој  $W$  околини тачке  $b := f(a)$  пресликавање  $f$  има инверзно
- 4)  $f^{-1}\mathcal{C}b$

Тада је  $f^{-1}\mathcal{D}b$  и важи:

$$(Df^{-1})(b) = (Df(a))^{-1}$$

*Доказ.* Нека је  $b = f(a)$ ,  $a = f^{-1}(b)$ . Показати да, пошто су трансформације хомеоморфизми, важи  $f(a + h) = b + t$  и  $f^{-1}(b + t) = a + h$ . Из непрекидности  $f^{-1}$  у  $b$  закључити чему је једнако  $f^{-1}(b + t) - f^{-1}(b)$ . Из услова  $f\mathcal{D}a$  закључити чему је једнако  $(f'(a))^{-1}t$  као и да је  $o(h) = o(t)$ . На основу претходних корака, и дефиниције извода, извести коначни закључак.  $\square$

**Тврђење.** Ако је простор Банахов (комплетан нормиран векторски простор), скуп  $GL(X)$  је отворен у  $\mathcal{L}(X; X)$ .

*Доказ.* Посматрати  $A \in GL(X)$  и  $h \in \mathcal{L}(X; X)$ . Доказати да је и  $A + h \in GL(X)$  односно да постоји  $(A + h)^{-1}$ . Искористити комплетност домена као и дефинисаност норме.  $\square$

**Напомена.** Претходно тврђење важи и у нешто општијем случају, за  $\mathcal{L}(X; Y)$ , уколико је  $X$  Банахов, а  $Y$  нормирани векторски простор.

**Теорема.** (Теорема о коначном прираштају) Нека су  $X$  и  $Y$  нормирани векторски простори,  $V \in X$  отворен и  $f : V \rightarrow Y$  непрекидно. Ако је

$$[a, a + h] = \{a + th \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq V$$

и ако је пресликавање  $f$  диференцијабилно у свим тачкама скупа

$$]a, a + h[ = \{a + th \mid 0 < t < 1\}$$

онда важи

$$\|f(a + h) - f(a)\| \leq \sup_{x \in ]a, a+h[} \|f'(x)\| \cdot \|h\|$$

*Доказ.* Доказати да теорема важи на сваком сегменту  $[c_1, c_2] \subseteq ]a, a + h[$ . Претпоставити супротно,

$$\sup_{x \in [c_1, c_2]} \|f'(x)\| < \frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta x\|}$$

Поделити интервал  $[c_1, c_2]$  на два подинтервала и применити помоћну лему на њих. Продужити поступак, формирати низ интервала. Поново применити помоћну лему. Известити контрадикцију.  $\square$

**Напомена.** Помоћна лема из претходне теореме је следећа неједнакост:

Ако за  $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}_+$  важи  $c \leq a + b$  и  $\gamma = \alpha + \beta$ , онда је

$$\frac{c}{\gamma} \leq \max\left\{\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right\}$$

**Теорема.** (Ојлерова теорема) Нека је  $X$  нормирани векторски простор над  $\mathbb{R}$ . Диференцијабилна функција  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  је хомогена степена  $k > 0$  ако и само ако је

$$df(x) \cdot x = kf(x)$$

*Доказ.* Дефинишати помоћну функцију  $\psi(t) = f(tx) - t^k f(x)$  и одатле доказати оба смера еквиваленције.  $\square$

**Тврђење.**  $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y)) \cong \mathcal{L}(X, X; Y)$

*Доказ.* Нека је  $L \in \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y))$  произвољно. Дефинисати  $\tilde{L} : X \times X \rightarrow Y$  као

$$\tilde{L}(\eta, \xi) := L(\eta)(\xi)$$

Доказати да је са  $\varphi(L) = \tilde{L}$  добро дефинисан тражени изоморфизам.  $\square$

**Тврђење.**  $fD^n a \implies D^n f(a)$  је симетрично  $n$ -линеарно пресликавање.

*Доказ.* Приметити најпре да је довољно доказати за транспозиције, јер оне генеришу групу пермутација. Увести

$$F_{\zeta, \eta}(t) := f(a + t(\zeta + \eta)) - f(a + t\zeta) - f(a + t\eta) - f(a)$$

и доказати да је

$$D^2 f(a)(\zeta, \eta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_{\zeta, \eta}(t)}{t^2}.$$

Извести закључак из тога, чињенице да је  $F$  симетрично по  $\zeta$  и  $\eta$ , као и

$$D^n f(a)(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = D_{\zeta_1} D_{\zeta_2} \dots D_{\zeta_n} f(a).$$

□

**Теорема.** Нека су  $X, Y$  нормирани векорски простори,  $V \subseteq X$  отворен,  $a \in V$ ,  $f \mathcal{D}^{n-1} V$  и  $f \mathcal{D}^n a$ . Тада је

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)h^n + o(\|h\|^n), h \rightarrow 0$$

*Доказ.* Доказ извести индукцијом по  $n$  коришћењем Последице 2. теореме о коначном прираштају и чињенице да је  $(Lx^n)' = nLx^{n-1}$ . □

**Теорема.** (Теорема о имплицитној функцији) Нека су  $X, Y$  и  $Z$  нормирани векторски простори, при чему је  $Y$  комплетан,  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$  и  $W = B[x_0; \alpha] \times B[y_0; \beta] \subseteq X \times Y$ . Претпоставимо да пресликавање  $F : W \rightarrow Z$  испуњава следеће услове:

- (1)  $F(x_0, y_0) = 0$
- (2)  $FC(x_0, y_0)$
- (3)  $D_2 F$  дефинисано на  $W$  и непрекидно у тачки  $(x_0, y_0)$
- (4)  $\exists (D_2 F(x_0, y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(Z; Y)$

Тада постоје околине  $U$  и  $V$  тачака  $x_0$  и  $y_0$  и пресликавање  $f : U \rightarrow Y$  са својствима:

- (а)  $U \times V \subseteq W$
- (б)  $[(x, y) \in U \times V \text{ и } F(x, y) = 0] \iff y = f(x)$
- (в)  $fC x_0$

*Доказ.* Пошто су translације хомеоморфизми, без умањења општости претпоставити да важи  $x_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ . Дефинисати помоћну функцију  $g_x : B[0; \beta] \rightarrow Y$  као

$$g_x(y) := y - (D_2 F(0, 0))^{-1} F(x, y).$$

Користећи Теорему о коначном прираштају доказати да је  $g_x$  контракција и да слика неки комплетан скуп у себе. Применити Банахов став о фиксној тачки. Одатле извести закључак. □

**Теорема.** (Теорема о инверзној функцији) Нека су  $X, Y$  нормирани векторски простори, при чему је  $Y$  комплетан, нека је  $V \subseteq Y$  отворен скуп,  $y_0 \in V$  и  $g : V \rightarrow X$  пресликавање које има следећа својства:

$$(1) \ g \in \mathcal{D}(V; X)$$

$$(2) \ DgCy_0$$

$$(3) \ \exists(Dg(y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(X; Y)$$

Тада постоје околина  $V_0 \subseteq Y$  тачке  $y_0$  и околина  $U_0 \subseteq X$  тачке  $x_0 := g(y_0)$  такве да је  $g : V_0 \rightarrow U_0$  бијекција,  $g^{-1}Dx_0$  и важи

$$Dg^{-1}(x_0) = (Dg(y))^{-1}.$$

*Доказ.* Доказ следи из Теореме о имплицитној функцији примењене на функцију  $F(x, y) = x - g(y)$ .  $\square$

**Теорема.** (Теорема о рангу) Нека је  $V \subseteq \mathbb{R}^k$  отворен и  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^l$  пресликавање класе  $C^n$ , такво да је за све  $x \in V$   $\text{rang} Df(x) = r$ . Тада у околини сваке тачке  $x_0 \in V$  и њене слике  $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^l$  постоје локалне координате класе  $C^n$  у којима  $f$  има запис

$$f : (s_1, \dots, s_k) \rightarrow (s_1, \dots, s_r, 0, \dots, 0).$$

Краће речено, пресликавање константног ранга  $r$  локално изгледа као пројекција на  $\mathbb{R}^r$ .

*Доказ.*  $\square$

**Тврђење.** Сваки дифеоморфизам класе  $C^1$

$$\mathbb{R}^l \supseteq V \xrightarrow{f} f(V) \subseteq \mathbb{R}^l$$

може локално да се представи као композиција  $l$  простих дифеоморфизама.

*Доказ.* Индукцијом по  $k$  доказати да дифеоморфизам који мења највише  $k$  координата може локално да се представи као композиција  $k$  простих дифеоморфизама.  $\square$

## 1.2 Подмногострукости у $\mathbb{R}^n$ и условни екстремуми

**Тврђење.** За  $M \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$  следећа тврђења су еквивалента:

- (а)  $M$  је  $k$ -димензиона подмногострукост класе  $C^p$
- (б)  $(\forall p \in M)$  постоје отворене околине  $p \in V$  и  $0 \in U$  у  $\mathbb{R}^{k+l}$  и дифеоморфизам  $g : U \rightarrow V$  класе  $C^p$  таква да је  $g(V \cap M) = U \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$
- (в)  $(\forall p \in M)$  постоје отворене околине  $p \in V$  у  $\mathbb{R}^{k+l}$  и  $0 \in U$  у  $\mathbb{R}^k$  и имерзија  $h : D \rightarrow V$  класе  $C^p$  таква да је  $h : D \rightarrow V \cap M$  хомеоморфизам у релативној топологији на  $V \cap M$  наслеђеној из  $\mathbb{R}^{k+l}$ .

*Доказ.* Како је  $k$ -дим подмногострукост у  $\mathbb{R}^{k+l}$  локално задата једначином  $f(x) = 0$ , где је  $f$  сумбмерзија и  $\text{rang} Df(x) = l$ , из Теореме о рангу закључити да је могуће изабрати локалне координате у којима  $f$  има запис

$$f(x_1, \dots, x_{k+l}) = (x_1, \dots, x_l).$$

Одатле директно закључити (б). Уз помоћ претходног, дефинисати тражену имерзију и закључити (в).  $\square$

**Тврђење.** Нека је  $h : D \rightarrow M$  локална параметризација околине тачке  $p = h(0)$  и нека је  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^l$  субмерзија таква да је  $M \cap V = f^{-1}(0)$ . Тада важи да је  $T_p M = \ker Df(p)$ .

*Доказ.* Диференцирањем  $f(h(t)) \equiv 0$  у тачки  $t = 0$  и применом правила за извод композиције пресликавања закључити да је  $T_p M \subseteq \ker Df(p)$ . Одатле, применом Прве теореме о изоморфизму на пресликавање  $Df(p)$  закључити да важи једнакост.  $\square$

**Теорема.** Нека је  $V \in \mathbb{R}^n$  отворен скуп,  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  функција класе  $C^1$  и  $M \subseteq V$  глатка подмногострукост. Да би тачка  $p \in M$  била тачка условног локалног екстремума функције  $f|_M$  неопходно је да буде испуњен бар 1 од следећих услова:

- (а)  $df(p) = 0$  (тј.  $p$  је критична тачка за  $f$ )
- (б)  $T_p M \subseteq T_p S$ , где је  $S := \{x \in V | f(x) = f(p)\}$

### 1.3 Апстрактне многострукости

Тополошки простор  $M$  је тополошка многострукост ако ...