

Анализа 2 – основне идеје доказа важнијих теорема и тврђења

1 Диференцирање

1.1 Диференцирање у нормираним векторским просторима

Теорема. (Извод сложене функције) Нека су X, Y , и Z нормирани векторски простори, $V \subseteq X$, $W \subseteq Y$ отворени скупови, $f : V \rightarrow Y$, $g : W \rightarrow Z$ и $a \in V$, $f(a) \in W$. Тада важи:

$$f\mathcal{D}a \wedge g\mathcal{D}f(a) \implies g \circ f\mathcal{D}a$$

и при томе је

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$$

Доказ. Доказ следи из дефиниције извода пресликавања и чињенице да је $o(O(h)) = o(h)$. \square

Теорема. (Извод инверзне функције) Нека су X и Y нормирани векторски простори, $V \subseteq X$ отворен скуп, $a \in V$ и $f : V \rightarrow Y$ пресликавање са следећим својствима:

- 1) $f\mathcal{D}a$
- 2) $Df(a)$ инвертибилан
- 3) у некој W околини тачке $b := f(a)$ пресликавање f има инверзно
- 4) $f^{-1}\mathcal{C}b$

Тада је $f^{-1}\mathcal{D}b$ и важи:

$$(Df^{-1})(b) = (Df(a))^{-1}$$

Доказ. Нека је $b = f(a)$, $a = f^{-1}(b)$. Показати да, пошто су транслације хомеоморфизми, важи $f(a + h) = b + t$ и $f^{-1}(b + t) = a + h$. Из непрекидности f^{-1} у b закључити чему је једнако $f^{-1}(b + t) - f^{-1}(b)$. Из услова $f\mathcal{D}a$ закључити чему је једнако $(f'(a))^{-1}t$ као и да је $o(h) = o(t)$. На основу претходних корака, и дефиниције извода, извести коначни закључак. \square

Тврђење. Ако је простор Банахов (комплетан нормиран векторски простор), скуп $GL(X)$ је отворен у $\mathcal{L}(X; X)$.

Доказ. Посматрати $A \in GL(X)$ и $h \in \mathcal{L}(X; X)$. Доказати да је и $A + h \in GL(X)$ односно да постоји $(A + h)^{-1}$. Искористити комплетност домена као и дефинисаност норме. \square

Напомена. Претходно тврђење важи и у нешто општијем случају, за $\mathcal{L}(X; Y)$, уколико је X Банахов, а Y нормирани векторски простор.

Теорема. (Теорема о коначном прираштају) Нека су X и Y нормирани векторски простори, $V \in X$ отворен и $f : V \rightarrow Y$ непрекидно. Ако је

$$[a, a + h] = \{a + th \mid 0 \leq t \leq 1\} \subseteq V$$

и ако је пресликавање f диференцијабилно у свим тачкама скупа

$$]a, a + h[= \{a + th \mid 0 < t < 1\}$$

онда важи

$$\|f(a + h) - f(a)\| \leq \sup_{x \in]a, a+h[} \|f'(x)\| \cdot \|h\|$$

Доказ. Доказати да теорема важи на сваком сегменту $[c_1, c_2] \subseteq]a, a + h[$. Претпоставити супротно,

$$\sup_{x \in [c_1, c_2]} \|f'(x)\| < \frac{\|\Delta f\|}{\|\Delta x\|}$$

Поделити интервал $[c_1, c_2]$ на два подинтервала и применити помоћну лему на њих. Продужити поступак, формирати низ интервала. Поново применити помоћну лему. Извести контрадикцију. \square

Напомена. Помоћна лема из претходне теореме је следећа неједнакост:

Ако за $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}_+$ важи $c \leq a + b$ и $\gamma = \alpha + \beta$, онда је

$$\frac{c}{\gamma} \leq \max\left\{\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}\right\}$$

Теорема. (Ојлерова теорема) Нека је X нормирани векторски простор над \mathbb{R} . Диференцијабилна функција $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ је хомогена степена $k > 0$ ако и само ако је

$$df(x) \cdot x = kf(x)$$

Доказ. Дефинишати помоћну функцију $\psi(t) = f(tx) - t^k f(x)$ и одатле доказати оба смера еквиваленције. \square

Тврђење. $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y)) \cong \mathcal{L}(X, X; Y)$

Доказ. Нека је $L \in \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y))$ произвољно. Дефинисати $\tilde{L} : X \times X \rightarrow Y$ као

$$\tilde{L}(\eta, \xi) := L(\eta)(\xi)$$

Доказати да је са $\varphi(L) = \tilde{L}$ добро дефинисан тражени изоморфизам. \square

Тврђење. $fD^n a \implies D^n f(a)$ је симетрично n -линеарно пресликавање.

Доказ. Приметити најпре да је довољно доказати за транспозиције, јер оне генеришу групу пермутација. Увести

$$F_{\zeta, \eta}(t) := f(a + t(\zeta + \eta)) - f(a + t\zeta) - f(a + t\eta) - f(a)$$

и доказати да је

$$D^2 f(a)(\zeta, \eta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_{\zeta, \eta}(t)}{t^2}.$$

Извести закључак из тога, чињенице да је F симетрично по ζ и η , као и

$$D^n f(a)(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = D_{\zeta_1} D_{\zeta_2} \dots D_{\zeta_n} f(a).$$

□

Теорема. Нека су X, Y нормирани векторски простори, $V \subseteq X$ отворен, $a \in V$, $fD^{n-1}V$ и $fD^n a$. Тада је

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)h^n + o(\|h\|^n), h \rightarrow 0$$

Доказ. Доказ извести индукцијом по n коришћењем Последице 2. теореме о коначном прираштају и чињенице да је $(Lx^n)' = nLx^{n-1}$. □

1.2 Унутрашње тачке екстремума

Тврђење. Нека је V отворен подскуп нормираног векторског простора X , $a \in V$, $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, $fD^n a$, $Df(a) = D^2 f(a) = \dots = D^{n-1} f(a)$, $D^n f(a) \neq 0$. Да би a била тачка локалног екстремума функције f :

- **неопходно** је да n буде паран број и да је $D^n f(a)$ семидефинитна форма.
- **довољно** је да су вредности $D^n f(a)h^n$ одвојене од 0 на јединичној свери $\|h\| = 1$.

Доказ. Применити Тејлорову формулу. □

Пример. (Ојлер–Лагранжове једначине)

1.3 Теорема о имплицитној функцији

Теорема. (Теорема о имплицитној функцији) Нека су X, Y и Z нормирани векторски простори, при чему је Y комплетан, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ и $W = B[x_0; \alpha] \times B[y_0; \beta] \subseteq X \times Y$. Претпоставимо да пресликавање $F : W \rightarrow Z$ испуњава следеће услове:

- (1) $F(x_0, y_0) = 0$
- (2) $FC(x_0, y_0)$
- (3) $D_2 F$ дефинисано на W и непрекидно у тачки (x_0, y_0)
- (4) $\exists (D_2 F(x_0, y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(Z; Y)$

Тада постоје околине U и V тачака x_0 и y_0 и пресликавање $f : U \rightarrow Y$ са својствима:

$$(a) \quad U \times V \subseteq W$$

$$(b) \quad [(x, y) \in U \times V \text{ и } F(x, y) = 0] \iff y = f(x)$$

$$(v) \quad fCx_0$$

Доказ. Пошто су транслагације хомеоморфизми, без умањења општости претпоставити да важи $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Дефинисати помоћну функцију $g_x : B[0; \beta] \rightarrow Y$ као

$$g_x(y) := y - (D_2F(0, 0))^{-1}F(x, y).$$

Користећи Теорему о коначном прираштају доказати да је g_x контракција и да слика неки комплетан скуп у себе. Применити Банахов став о фиксној тачки. Одатле извести закључак. \square

Теорема. (Теорема о инверзној функцији) Нека су X, Y нормирани векторски простори, при чему је Y комплетан, нека је $V \subseteq Y$ отворен скуп, $y_0 \in V$ и $g : V \rightarrow X$ пресликавање које има следећа својства:

$$(1) \quad g \in \mathcal{D}(V; X)$$

$$(2) \quad DgCy_0$$

$$(3) \quad \exists (Dg(y_0))^{-1} \in \mathcal{L}(X; Y)$$

Тада постоје околина $V_0 \subseteq Y$ тачке y_0 и околина $U_0 \subseteq X$ тачке $x_0 := g(y_0)$ такве да је $g : V_0 \rightarrow U_0$ бијекција, $g^{-1}Dx_0$ и важи

$$Dg^{-1}(x_0) = (Dg(y))^{-1}.$$

Доказ. Доказ следи из Теореме о имплицитној функцији примењене на функцију $F(x, y) = x - g(y)$. \square

Теорема. (Теорема о рангу) Нека је $V \subseteq \mathbb{R}^k$ отворен и $f : V \rightarrow \mathbb{R}^l$ пресликавање класе C^n , такво да је за све $x \in V$ $\text{rang} Df(x) = r$. Тада у околини сваке тачке $x_0 \in V$ и њене слике $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^l$ постоје локалне координате класе C^n у којима f има запис

$$f : (s_1, \dots, s_k) \rightarrow (s_1, \dots, s_r, 0, \dots, 0).$$

Краће речено, пресликавање константног ранга r локално изгледа као пројекција на \mathbb{R}^r .

Доказ. \square

Тврђење. Сваки дифеоморфизам класе C^1

$$\mathbb{R}^l \supseteq V \xrightarrow{f} f(V) \subseteq \mathbb{R}^l$$

може локално да се представи као композиција l простих дифеоморфизама.

Доказ. Индукцијом по k доказати да дифеоморфизам који мења највише k координата може локално да се представи као композиција k простих дифеоморфизама. \square

2 Многострукости

2.1 Подмногострукости у \mathbb{R}^n и условни екстремуми

Тврђење. За $M \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ следећа тврђења су еквивалента:

- (а) M је k -димензиона подмногострукост класе C^p
- (б) $(\forall p \in M)$ постоје отворене околине $p \in V$ и $0 \in U$ у \mathbb{R}^{k+l} и дифеоморфизам $g : U \rightarrow V$ класе C^p таква да је $g(V \cap M) = U \cap (\mathbb{R}^k \times 0)$
- (в) $(\forall p \in M)$ постоје отворене околине $p \in V$ у \mathbb{R}^{k+l} и $0 \in U$ у \mathbb{R}^k и имерзија $h : D \rightarrow V$ класе C^p таква да је $h : D \rightarrow V \cap M$ хомеоморфизам у релативној топологији на $V \cap M$ наслеђеној из \mathbb{R}^{k+l} .

Доказ. Како је k -дим подмногострукост у \mathbb{R}^{k+l} локално задата једначином $f(x) = 0$, где је f субмерзија и $\text{rang} Df(x) = l$, из Теореме о рангу закључити да је могуће изабрати локалне координате у којима f има запис

$$f(x_1, \dots, x_{k+l}) = (x_1, \dots, x_l).$$

Одатле директно закључити (б). Уз помоћ претходног, дефинисати тражену имерзију и закључити (в). \square

Тврђење. Нека је $h : D \rightarrow M$ локална параметризација околине тачке $p = h(0)$ и нека је $f : V \rightarrow \mathbb{R}^l$ субмерзија таква да је $M \cap V = f^{-1}(0)$. Тада важи да је $T_p M = \ker Df(p)$.

Доказ. Диференцирањем $f(h(t)) \equiv 0$ у тачки $t = 0$ и применом правила за извод композиције пресликавања закључити да је $T_p M \subseteq \ker Df(p)$. Одатле, применом Прве теореме о изоморфизму на пресликавање $Df(p)$ закључити да важи једнакост. \square

Теорема. Нека је $V \in \mathbb{R}^n$ отворен скуп, $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ функција класе C^1 и $M \subseteq V$ глатка подмногострукост. Да би тачка $p \in M$ била тачка условног локалног екстремума функције $f|_M$ неопходно је да буде испуњен бар 1 од следећих услова:

- (а) $df(p) = 0$ (тј. p је критична тачка за f)
- (б) $T_p M \subseteq T_p S$, где је $S := \{x \in V | f(x) = f(p)\}$

Доказ. Претпоставити да важи а) у теореме. Одатле директно закључити да је p кандидат за безусловни, а самим тим и условни екстремум. Даље, претпоставити да а) у теореме не важи. Доказати да је онда у некој околини тачке p функција f субмерзија, па је онда S $(n-1)$ -дим глатка подмногострукост, па има смисла $T_p S$. Узети $\gamma :]-\delta, +\delta[\rightarrow M$ такво да $\gamma(0) = p$. Из $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ извести $T_p M \subseteq T_p S$. \square

Напомена. Нека је M глобално задато једначином $g(x) = 0$ за неку субмерзију $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ и нека је p локални екстремум за $f|_M$. Са $\gamma : I \rightarrow M$ дата је нека крива која лежи на M и за коју важи $\gamma(0) = p$. Тада, $f \circ \gamma$ има локални екстремум у 0, тј. за $f \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ важи $(f \circ \gamma)'(0) = 0$ односно $\vec{\nabla} f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = 0$ за свако γ кроз p . Одатле следи $\vec{\nabla} f(p) \perp M$. Како је $\gamma \in M$, одатле следи $(g \circ \gamma)(t) = 0$ па када то диференцирамо по t добијамо да је $\vec{\nabla} g \perp M$. Коначно, добијамо систем $n+1$ једначина са $n+1$ непознатих који је одређен и који нам служи за одређивање условних екстремума:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} f(p) &= \lambda \vec{\nabla} g(p) \\ g(p) &= 0 \end{aligned}}$$

2.2 Апстрактне многострукости

Лема. Нека је $M \subseteq \mathbb{R}^{k+l}$ k -димензиона подмногострукост класе C^p , нека су V_1, V_2 околине (у \mathbb{R}^{k+l}) тачке $p \in M$ и нека су $h_1 : D_1 \rightarrow V_1, h_2 : D_2 \rightarrow V_2$ две локалне C^p параметризације скупова $V_1 \cap M$ и $V_2 \cap M$. Тада је

$$h_2 \circ h_1^{-1} : D_1 \cap h_1^{-1}(V_2) \rightarrow D_2 \cap h_2^{-1}(V_1)$$

дифеоморфизам класе C^p .

Доказ. Доказ леме следи из чињенице да је композиција дифеоморфизама дифеоморфизам. \square

Тврђење. Не постоји имерзија класе C^p где је $p \leq 1$ где $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ таква да је $h(\mathbb{R}) = \Gamma$.

Доказ. Из непрекидности h' извести контрадикцију. \square

Теорема. За свако отворено покривање $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ глатке многострукости M постоји разлагање јединице $\{\rho_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ такво да је $\text{supp} \rho_\lambda \subseteq U_\lambda$.

Теорема. За $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ као у претходној теорему постоји разлагање јединице $\{\rho_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ са компактним носачем, такво да $(\forall \sigma \in \Sigma)(\exists \lambda \in \Lambda) \text{supp} \rho_\sigma \subseteq U_\lambda$.

Теорема. (Витнијева) Свака глатка n -димензиона многострукост M може да се глатко уложи у \mathbb{R}^{2n+1} , тј. постоји C^∞ улагање $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$. Другим речима, свака апстрактна глатка многострукост је дифеоморфна подмногострукости у еуклидском простору.

Теорема. Свака компактна глатка многострукост M може глатко да се уложи у \mathbb{R}^l за довољно велико l .

Доказ. Нека је $\{(U_j, \varphi_j)_{1 \leq j \leq k}\}$ атлас на M , такав да је $\varphi_j(U_j) = B(0; 3)$ и да $V_j = \varphi_j^{-1}(B(0; 1))$ такође покривају M . За свако j конструисати функцију $h_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}$ помоћу

$$h_j(x) = \frac{g(4 - \|x\|^2)}{g(4 - \|x\|^2) + g(\|x\|^2 - 1)}$$

где је g дато са

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Дефинисати пресликавање

$$f : M \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_k \times \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_k =: \mathbb{R}^l$$

са

$$f(p) = \left(h_1(p)\varphi_1(p), \dots, h_k(p)\varphi_k(p), h_1(p), \dots, h_k(p) \right)$$

где је $n = \dim M$. Доказати да је f једно улагање. \square

2.3 Извод пресликавања $f : M \rightarrow N$