# 균일 최강력 검정

# 정의

- 개요

1. 복합 대립가설에 대한 단순귀무가설을 최량기각역하에서 검증하는 것

1) 즉, 단순최강력검정이 단순가설 $H_0$ 에 대한 단순가설 $H_1$을 검정하는 것이라면

2) 균일최강력검정은 단순가설 $H_0$ 에 대해 복합대립가설 $H_1$을 검정한다.

# 정의

- 충분통계량과 균일최강력검정

1. $\mathrm{Y} = u(X_1, \ldots, X_n)$을 $\theta$에 대한 충분통계량이라고 하자.

1) 정의에 따라 $\mathrm{L}(\theta; X_1, \ldots, X_n) = k_1(u(X_1, \ldots, X_n); \theta)k_2(X_1, \ldots, X_n)$ 으로 분해 가능하다.

2) 이 때, $H_0 : \theta = \theta_0$ VS $H_1 : \theta \neq \theta_0$의 최량검정을 실시하는 경우

(1) $\dfrac{\mathrm{L}(\theta_0; X_1, \ldots, X_n)}{\mathrm{L}(\theta_n; X_1, \ldots, X_n)} = \dfrac{k_1(u(X_1, \ldots, X_n); \theta_0)\cancel{k_2(X_1, \ldots, X_n)}}{k_1(u(X_1, \ldots, X_n); \theta_n)\cancel{k_2(X_1, \ldots, X_n)}} = \dfrac{k_1(u(X_1, \ldots, X_n); \theta_0)}{k_1(u(X_1, \ldots, X_n); \theta_n)}$

(2) 즉, $[\theta_0, \theta_n]$에 대한 충분통계량의 함수만으로 최량검정 실시가 가능하다.

(3) 이는 인수분해 정리에 의해 모수에 의존하지 않는 $k_2(X_1, \ldots, X_n)$ 부분이 소거되기 때문에 가능하다.

# 정의

- 단조우도비

1. 어떤 통계량 Y = $u(X_1, \dots, X_n)$에 대하여
   Y를 충분통계량으로 활용하는 우도비 $\frac{L(\theta_0; X_1, \dots, X_n)}{L(\theta_n; X_1, \dots, X_n)}$ 가 g(Y)에서 단조감소를 보인다고 하자.

1) 이 때, $g(y)$에서 g가 마찬가지로 단조감소일경우 그 비율은 같다. 즉

2) $\frac{L(\theta_0; X_1, \dots, X_n)}{L(\theta_n; X_1, \dots, X_n)}$ = g(Y) 이다.

(1) 한편, 네이만-피어슨 정리에 따라 $\frac{L(\theta_0; X_1, \dots, X_n)}{L(\theta_n; X_1, \dots, X_n)} = g(y) \leq k$를 만족할 때

(2) $\alpha = P_{\theta_0}[g(Y) \geq C_Y]$ 인 최량기각역 $C_Y$를 정의할 수 있다.

(3) 이 때,

- $g$ 의 역함수를 $g^{-1}$ 라고 할 때 ⇒ $\alpha = P_{\theta_0}[Y \geq g^{-1}(C_Y)]$ 로 재정의 할 수 있고
- 이는 다시 말해 충분통계량을 이용해 가설 검정을 수행할 수 있음을 암시한다.

# 정의

- 단조우도비와 완비충분통계량의 연계

1. 어떤 확률표본 $X_1, \dots, X_n$이 지수족을 갖는 pdf에서 추출한 확률표본이라고 하자.

   즉 $f(x;\theta)$ = exp[p($\theta$)k(x) + H(x) + q($\theta$)] 이다.

1) 이 때, 우도비 $\Lambda = \frac{L(\theta_0;X)}{L(\theta_n;X)} = \frac{\exp[p(\theta_0)k(x) + H(x) + q(\theta_0)]}{\exp[p(\theta_n)k(x) + H(x) + q(\theta_n)]}$

   $= \exp\{(p(\theta_0) - p(\theta_n))k(x) + H(x) + n(q(\theta_0) - q(\theta_n))\}$

2) 이는 다시 말해 $Y = \sum k(x_i)$라는 완비충분통계량을 가지는 분포이다.

2. $\Lambda = g(Y)$를 Y에 대한 함수라고 했을 때, 이에 대한 단조우도비를 갖는다.

1) 따라서 $H_0 : \theta < \theta_0$ VS $H_1 : \theta > \theta_0$라는 가설을 검정할 경우, 앞에서 설명했듯이

*(1)* $\alpha = P_{\theta_0}[Y \geq g^{-1}(k)]$ 를 만족하는

(2) 완비충분통계량 Y와

(3) 최량기각역 $g^{-1}(k)$를 정의 가능하다.

# 예제

- pdf $f(x;\theta)$ = $\frac{1}{\theta}$ $e^{-\frac{x}{\theta}}$ 에서 n=2인 확률표본 $X_1$, $X_2$를 추출했다고 하자.

1. 복합가설 $H_0$ : $\theta$=2 VS $H_1$ : $\theta > 2$ 를 검정하면

*1)* $\Omega$ = {$\theta$ : $\theta \geq$ 2} 이고

2) C = {($x_1$, $x_2$: 9.5 < $x_1$, $x_2 < \infty$} 이며

3) 이 때 $P_{\theta=2}[X \in C]$ = $\int_0^{9.5}\int_0^{9.5-x_2}\frac{1}{2^2}e^{-\frac{-(x_1-x_2)}{\theta}}dx_1dx_2$ = 0.9562

4) 한편 $P_{\theta>2}[X \in C]$ 는 $\theta$ = 2를 제외한 모든 경우이므로 1 – 0.9562 =0.0438

# 예제

- 우도비와 최량기각역

*1.* $X_1, \dots, X_n$ ~ N(0, $\theta$) 에서 추출한 확률표본이라고 하자.

1) 가설 $H_0$ : $\theta$=$\theta_0$ VS $H_1$ : $\theta >_n \theta_0$을 검정하면

2) 우도비 $\frac{\mathrm{L}(\theta_0;X_1,\dots,X_n)}{\mathrm{L}(\theta_n;X_1,\dots,X_n)}$ = $\frac{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_0}}\right]^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{\sum x_i{}^2}{2\theta_0{}^2}\right)}{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_n}}\right]^{\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{\sum x_i{}^2}{2\theta_n{}^2}\right)}$ = $\left[\frac{\theta_0}{\theta_n}\right]^{\frac{n}{2}}\exp\left[\left(-\frac{\theta_0-\theta_n}{2\theta_0\theta_n}\right)\sum x_i{}^2\right]$

(1) 이 때, 정규분포는 $\mathrm{Y} = \sum x_i{}^2$를 충분통계량으로 갖고,

$\frac{\mathrm{Y}}{\theta_0}$ ~ $x^2(n)$ 이므로, 이 충분통계량의 함수로 최량기각역을 정의하면

*(2)* $P_{\theta_0}\left[\frac{\mathrm{Y}}{\theta_0} \le \frac{g^{-1}(k)}{\theta_0}\right]$ = $\alpha$ 인 최량기각역 c = $\frac{g^{-1}(k)}{\theta_0}$를 정의할 수 있다.

3) N = 15, $\alpha$ = 0.5, $\theta_0$ = 3일 경우

*(1)* $P_{\theta_0=3}\left[\frac{\mathrm{Y}}{3} \le \frac{g^{-1}(k)}{3}\right]$ 에서 $\frac{\mathrm{Y}}{3}$ ~ $x^2(15)$ 이므로,

*(2)* $\frac{g^{-1}(k)}{3}$ = $x^2{}_{0.05,15}$ = 25.1 이므로, 이를 벗어나면 $H_0$ 를 기각하고 $H_1$을 채택한다.