다변량 확률변수의 변환

정의

- 다변량 확률변수에서 역변환이 정의될 때
- 역변환으로 함수를 재정의 하는 것을 변환이라고 한다.

1) $y_1 = u_1(x_1, \dots, x_n)$, $y_2 = u_2(x_1, \dots, x_n)$, … , $y_n = u_n(x_1, \dots, x_n)$이 역함수

(1) $x_1 = w_1(y_1, \dots, y_n)$, $x_2 = w_2(y_1, \dots, y_n)$, … , $x_n = w_n(y_1, \dots, y_n)$을 가질 때

(2) $\int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f[x_1, x_2 \cdots, x_n]\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f[w_1, w_2 \cdots, w_n] \cdot |J|\, dy_1\, dy_2 \cdots dy_n$

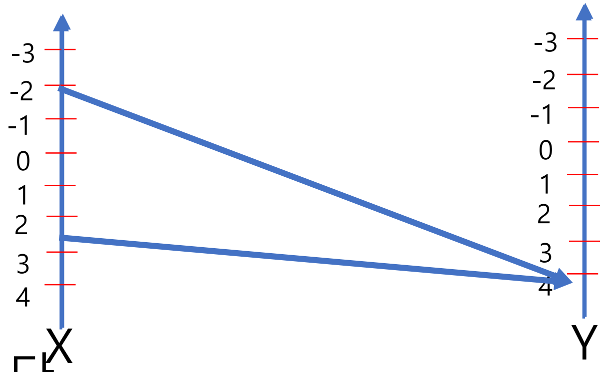
- 이 때, |J| $= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$ 이다.

정의

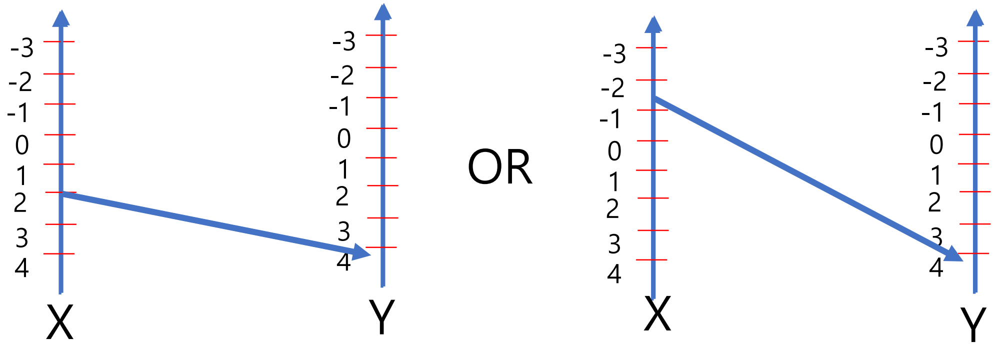
2) 한편, 다변량 확률분포의 특성상 전단사조건을 만족하지 못하는 경우가 있다.

(1) Y = x^2, x = $\sqrt{y}$ 라고 한다면

(2) X= $(2,-2) \rightarrow \sqrt{4}$ 에 대응한다.



(3) 이 경우, X를 둘로 쪼개서 대응시키면 일대일 대응이 가능하다.



(4) 이 때, CDF g(y)는

- $\int\cdots\int_A f[w_1, w_2 \cdots, w_n]\cdot|J|\, dy_1\, dy_2 \cdots dy_n + \int\cdots\int_{A^c} f[w_1, w_2 \cdots, w_n]\cdot|J|\, dy_1\, dy_2 \cdots dy_n$
- 로 쪼개진다.

예제

- $f(x_1, x_2, x_3\ ) = \begin{cases} 48x_1x_2x_3, 0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1 \\ x,\ else \end{cases}$ 이고
- $y_1 = \frac{x_1}{x_2}$, $y_2 = \frac{x_2}{x_3}$, $y_3 = x_3$ 일 때

1) 역변환을 구하면 $x_1 = y_1y_2y_3$, $x_2 = y_2y_3$, $x_3 = y_3$

(1) 범위는 $0 < y_1y_2y_3 < y_2y_3 < y_3 < 1$

(2) 야코비안은 $\det\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1y_2y_3}{\partial y_1} & \frac{\partial y_1y_2y_3}{\partial y_2} & \frac{\partial y_1y_2y_3}{\partial y_3} \\ \frac{\partial y_2y_3}{\partial y_1} & \frac{\partial y_2y_3}{\partial y_2} & \frac{\partial y_2y_3}{\partial y_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial y_1} & \frac{\partial y_3}{\partial y_2} & \frac{\partial y_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} y_2y_3 & y_1y_3 & y_1y_w \\ 0 & y_3 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = y_2{y_3}^2$

예제

- $f(x_1, x_2, x_3\ ) = \begin{cases} 48x_1x_2x_3, 0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1 \\ x,\ else \end{cases}$ 이고
- $y_1 = \frac{x_1}{x_2}$, $y_2 = \frac{x_2}{x_3}$, $y_3 = x_3$ 일 때

1) 변환의 결합 pdf는

(1) $f(x_1, x_2, x_3\ ) = \begin{cases} 48y_1{y_2}^2y_3^3 \cdot y_2{y_3}^2,\ 0 < y_i < 1 \\ 0,\ else \end{cases}$

2) 변환의 주변 pdf는

(1) $f(x_1) = \int_0^1\int_0^1 48y_1{y_2}^3y_3^5dy_2dy_3 = 48\int_0^1 \left[\frac{1}{4}y_1y_3^5\right]_0^1 dy_3 = 48\left[\frac{1}{24}y_1\right]_0^1 = 2y_1$

(2) $f(x_2)\ =\ \int_0^1\int_0^1 48y_1{y_2}^3y_3^5dy_1dy_3\ =\ 4{y_2}^3$

(3) $f(x_3) = \int_0^1\int_0^1 48y_1{y_2}^3y_3^5dy_1dy_2 = 6y_3^3$

(4) 이 때, $f(x_1, x_2, x_3\ ) \equiv f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot f(x_3)$ 이므로, 각 확률변수들은 서로 독립이다.