최대우도법

정의

- 모수 θ에 의존하는 pdf $f(x|\theta)$를 갖는 X가 존재할 때,

1) X에서 추출한 확률표본 $X_1, \ldots, X_n$이 각각 pdf $f(x_i|\theta)$ 를 가진다고 한다면

(1) 우도 함수 $\mathrm{L}(\theta|\mathrm{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$ 라고 정의할 때, 이를 최대화시키는

$$\max \mathrm{L}(\theta|\mathrm{x})$$

를 최대우도법 이라고 한다.

정의

- 최대우도추정량의 계산 방법

1. 계산의 편의성을 위해 우도함수에 Log를 씌운 로그우도함수를 정의한다.

1) $\log[L(\theta|x)] = \log[\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)]$
$= \sum\{log\,[f(x_i|\theta)]\} = \log[f(x_1|\theta)] + \ldots + \log[f(x_n|\theta)]$

2. 안장점이 없는 함수의 경우 함수의 미분값 = 0인 지점에서 최대/최솟값을 가진다.

1) 즉, 우도함수를 모수로 미분하고, 이를 0으로 둔 방정식을 풀면 최댓값을 구할 수 있다.

2) $\frac{\partial \log[L(\theta|x)]}{\partial\theta}$ = 0으로 두고, 이 결과물을 θ에 대한 식으로 정리한다.

정의

- 최대우도법의 증명

1. 정칙조건을 우선 정의하면

1) 모수 θ에 따라 pdf는 명확히 구분된다. 즉 pdf $\mathrm{f}(x|\theta') \neq \mathrm{f}(x|\theta'')$ 이다.

2) $f(x_i|\theta)$ $(\mathrm{i} = 1,2,3,\dots,\mathrm{n})$은 모두 공통 범위를 갖는다.

3) 점θ_0는 Ω 내부에 있는 점이다.

정의

- 최대우도법의 증명

2. θ_0를 θ의 참모수라고 가정할 때, $\lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}[\mathrm{L}(\theta_0|\mathrm{x}) > \mathrm{L}(\theta|\mathrm{x})] = 1$ 이다.

1) 위 부등식에서 Log를 취하면 $\log[\mathrm{L}(\theta_0|\mathrm{x})] > \log[\mathrm{L}(\theta|\mathrm{x})]$

(1) $\frac{1}{\mathrm{n}}\sum\{log\,[f(x_i|\theta_0)]\} > \frac{1}{\mathrm{n}}\sum\{log\,[f(x_i|\theta)]\}$,

$$\frac{1}{\mathrm{n}}\sum\{log\,[\frac{f(x_i|\theta)}{f(x_i|\theta_0)}]\} < 0$$

(2) 이 때, -log(x) 는 단조 블록(Convex) 함수이므로, 대수의 법칙과 젠센 부등식을 활용하면

- $\frac{1}{\mathrm{n}}\sum\{log\,[\frac{f(x_i|\theta)}{f(x_i|\theta_0)}]\} \rightarrow E_{\theta_0}[\log[[\frac{f(x_1|\theta)}{f(x_1|\theta_0)}]]$ (대수의 법칙)
- $E_{\theta_0}[\log[[\frac{f(x_1|\theta)}{f(x_1|\theta_0)}]] < \log E_{\theta_0}[\frac{f(x_1|\theta)}{f(x_1|\theta_0)}]$ (젠센 부등식)

(3) 그런데, $E_{\theta_0}[\frac{f(x_1|\theta)}{f(x_1|\theta_0)}] = \int[\frac{f(x_1|\theta)}{f(x_1|\theta_0)}]f(x_1|\theta_0)dx_1 = \int f(x_1|\theta)\,x_1 = 1$

(4) $\log E_{\theta_0}[\frac{f(x_1|\theta)}{f(x_1|\theta_0)}] = \log(1) = 0$ 이므로, $\frac{1}{\mathrm{n}}\sum\{log\,[\frac{f(x_i|\theta)}{f(x_i|\theta_0)}]\} < 0$ 은 참이다.

2. 따라서 $\log[\mathrm{L}(\theta_0|\mathrm{x})] > \log[\mathrm{L}(\theta|\mathrm{x})]$ 는 참이고, $\lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}[\mathrm{L}(\theta_0|\mathrm{x}) > \mathrm{L}(\theta|\mathrm{x})] = 1$ 도 참이다.

예제

- 최대우도추정

1. $x_1, \dots, x_n$ 을 pdf $f(x_1, x_2, x_3\,) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, \theta < x < \infty, -\infty < \theta < \infty \\ 0,\ else \end{cases}$ 를 따르는 분포에서 추출한 확률표본이라고 하자. MLE 추정량을 구하라.

1) 결합 분포의 로그 우도 함수 L(θ|x) 를 정의하면

(1) $\sum \log[e^{-(x_i-\theta)}]$ $=-\sum(x_i - \theta)$ = $-\sum(x_i) + n\theta$

2) θ로 미분하면 $\frac{\partial[-\sum(x_i)+n\theta]}{\partial\theta}$ =n

(1) n>0 이므로, 이 함수는 증가 함수이다.

(2) $\frac{\partial[-\sum(x_i)+n\theta]}{\partial\theta}$ =n = 0일때 최댓값을 가지므로, min(x_i)가 최대우도추정량이 된다.