추정량의 질의 측정

정의

- 최소분산불편추정량

1. 추정량 Y = $u(X_1, \ldots, X_n)$이 θ의 불편추정량, 즉 E(Y) = θ이고
2. 이 때 Y의 분산이 다른 불편추정량들의 분산보다 작거나 같으면 Y를 최소분산불편추정량(MVUE)라고 한다.
3. 그러나, 이 정리만 가지고 MVUE를 정의하기엔 모든 불편추정량을 구하는 것을 불가능하다.

정의

- 손실함수와 위험함수

1. Y = $u(X_1, \ldots, X_n)$을 θ의 점추정을 위한 통계량이라고 하고, $\delta(y)$를 Y의 관측값들의 어떤 결정함수라고 하자.

1) 이 때, 참모수와 이 결정함수와의 차이를 나타내주는 함수를 손실함수라고 정의하고,

(1) 이를 $\mathcal{L}[\theta, \delta(y)]$ 로 표현한다.

2) 이 손실함수의 기댓값을 위험함수라고 하고,

(1) $\mathrm{R}[\theta, \delta(y)]$ = E[$\mathcal{L}[\theta, \delta(y)]$] $= \int \mathcal{L}[\theta, \delta(y)] f(y) dy$ 가 된다.

(2) 즉, 이는 통계량의 분포를 받침 함수로 하여 구하는 손실함수의 기댓값이 된다.

(3) 이 때, 위험함수를 통해 최대의 불편추정량을 결정하는 방법은

정의

- 손실함수와 위험함수

2) 이 손실함수의 기댓값을 위험함수라고 하고,

(1) 이 때, 위험함수를 통해 최대의 불편추정량을 결정하는 방법은

- 결정함수에 제약을 가해야 한다. 제약을 가하지 않고 모든 모수에 열려있는 경우 결정함수에 따라서 '가장 좋은 추정량 ' 의 기준이 변화할 수 있다.

- 최소최대원리를 따라 결정한다. 즉

$\max_\theta \mathrm{R}[\theta, \delta_0(y)] \le \max_\theta \mathrm{R}[\theta, \delta(y)]$ 인 $\delta_0(y)$를 최소최대 결정함수라고 한다.

정의

- 우도 원리

1. 동일한 개념에 대해 2개의 서로 다른 확률실험 A,B가 있다고 가정하자

1) 전제도 다르고, 목적도 다르지만 그때 구한 모수 θ 에 대한 추정량 $Y_{1,}Y_2$는 동일하다.

(1) 이 때, 확률실험 A가 가정한 분포의 경우 해당 추정량이 불편추정량이다.

(2) 이 때, 확률실험 B가 가정한 분포의 경우 해당 추정량이 편의추정량이다.

2. 이 경우, 편의추정량을 굳이 불편추정량으로 조정하지 않아도, 두 확률실험 A와 B 모두 모수 θ에 대해 동일한 추정값을 내야 한다.

(1) 왜냐하면, 비록 가정하는 분포는 다르지만 동일한 개념을 측정하고, 동일한 추정값을 도출했다면 두 우도함수는 비례관계, 즉

(2) $L_1(\theta) \propto L_2(\theta)$ 가 성립하기 때문이다.

예제

- 우도 원리의 예시

1. 통계학자 A와 B가 '성공' , '실패' 둘 중 하나가 관측되는 실험을 10회 반복했다.
   그리고, 실험 결과 10번 시행에서 모두 한번 성공하였다.

1) 이 때, A는 10번을 시행하기로 해서 한번의 성공을 관측하였다.
2) 이 때, B는 처음 성공할때까지 시행하기로 해서 10번째에 성공을 하였다.

2. A의 실험은 10번 반복에 대해 한번의 성공을 관측하는 베르누이 분포를 따른다.

1) Y ~ b(10, θ)
2) Pdf f(y) = $\frac{n!}{(n-x)!} \cdot p^x(1-p)^{(n-x)}$

예제

- 우도 원리의 예시

3. 한편, B는 기하분포를 따른다.
1) Y ~ 기하(k)
2) 이때 pdf는 $(1-\theta)^{z-1}\theta$

4. 이 때, θ에 대한 추정량을 $g_1(\theta) = \frac{Y}{n}$, $g_2(\theta) = \frac{1}{Z}$ 으로 잡고, 이 것이 불편추정량인지 따져보면
1) $\mathrm{E}\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{1}{10}\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{10}10\cdot\theta = \theta$ (불편추정량)
2) $\mathrm{E}\left(\frac{1}{Z}\right) = \sum_{z=1}^{\infty}\frac{1}{z}(1-\theta)^{z-1}\theta = \theta + \frac{1}{2}(1-\theta)\theta + \frac{1}{3}(1-\theta)^2\theta + \cdots$ (편의추정량)

5. 하나는 불편추정량, 하나는 편의 추정량이지만, 편의추정량을 불편추정량으로 만들 필요가 없다. 왜냐하면
1) $L_1(\theta) = \frac{10!}{(10-y)!}\cdot\theta^y(1-\theta)^{(10-y)}$와
2) $L_2(\theta) = (1-\theta)^{z-1}\theta$
3) 위에서 n = 10, y=1, z= 10일때 각각의 MLE 추정량은
(1) $\theta_1 = \frac{Y}{n} = \frac{1}{10}$
(2) $\theta_2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{10}$
(3) 두 분포의 PDF에서 동일한 MLE추정량을 도출할 수 있으므로 이 두 추정량은 우도원리에 따라 동일한 추론을 내려야한다.

예제

- $-\infty < \theta < \infty$에 대해서 $X_1, \ldots, X_{25}$를 X~N(θ,1) 분포에서 추출한 확률표본이라고 하자.

1. Y = $\bar{x}$ 일 때, 결정함수 $\delta_1(y)$ = y, $\delta_2(y)$ = 0 을 가정하자.

1) 이 때, 위험함수 R을 정의하면

(1) R[θ,$\delta_1(y)$] = E[(θ-$\delta_1(y))^2$]로 정의할 때 R[θ,$\delta_1(y)$] = E(($\theta-\mathrm{Y})^2$) = $\frac{\sigma^2}{25} = \frac{1}{25}$

(2) R[θ,$\delta_2(y)$] = E[($\theta-\delta_2(y))^2$]로 정의할 때 E[($\theta-\delta_2(y))^2$] = E(($\theta-0)^2$ = θ^2

2) 위에서 구한 위험함수에서

(1) 만약 참모수 θ=0 이면, R[θ,$\delta_1(y)$] > R[θ,$\delta_2(y)$] 이므로 $\delta_2(y)$가 $\delta_1(y)$보다 낫다.

(2) 만약 참모수가 |θ| $> \frac{1}{5}$이면, R[θ,$\delta_1(y)$] < R[θ,$\delta_2(y)$] 이므로 $\delta_1(y)$ 가 $\delta_2(y)$보다 낫다.

3) 따라서, 최소최대기준에 따라 좋은 추정량을 구하기 위해서는

(1) $E[\delta_i(y)]$ = θ 인 경우로 조건을 제한하면, θ=0 은 원천적으로 배제하기 때문에, 조건 하에 비교를 실시해야 한다.