체비셰프 부등식

정의

- 마코프 부등식

1. $A = \{x: u(x) \geqq c\}$ 일 때, pdf $f(x)$에서

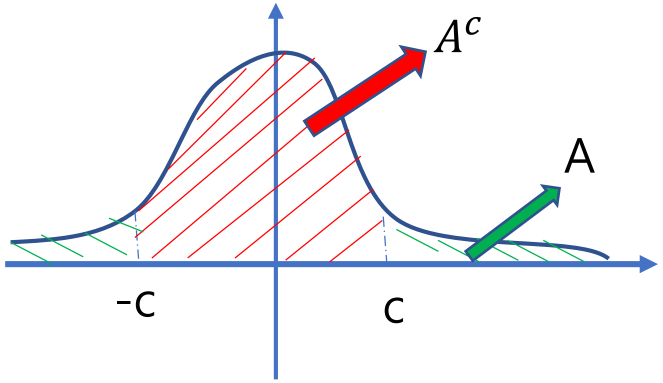
1) $E[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x)\, dx = \int_{A} u\,(x) f(x) dx + \int_{A^c} u\,(x) f(x) dx$,가 성립된다.

(1) 이 때,

- $\int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x)\, dx > \int_{A} u\,(x) f(x) dx$ 이고
- $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$로 놓아도, $x \in A$ 라면 $u(x) \geq c$ 이므로 $\int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x)\, dx > \mathrm{c} \int_{A} f(x)\, dx$ 이다.

(2) 이를 다시 정리하면

- $E[u(x)] \geq \mathrm{cP}(x \in A) = \mathrm{cP}(x \geq \mathrm{c})$ 이므로
- $\frac{E[u(x)]}{c} \geq \mathrm{P}(x \geq \mathrm{c})$ 이다.



정의

- 체비셰프 부등식

1. 마코프 부등식의 특수한 경우로, 평균과 분산의 관계를 다룬다.
2. 마코프 부등식 $\frac{E[u(x)]}{c} \geq \mathrm{P}(x \geq \mathrm{c})$ 에서

1) $u(x) = (x-\mu)^2, \mathrm{c} = (\mathrm{k}\sigma)^2$ 이라고 한다면

2) $\mathrm{P}((x-\mu)^2 \geq (\mathrm{k}\sigma)^2) \leq \frac{E[(x-\mu)^2]}{(\mathrm{k}\sigma)^2}$ 이다. (마코프 부등식의 응용)

3) $E[(x-\mu)^2] = \sigma^2$이므로, 식을 다시 고치면

$$\mathrm{P}((x-\mu) \geq \mathrm{k}\sigma) \leq \frac{1}{\mathrm{k}^2}$$

3. 체비셰프 부등식을 활용하면 확률변수 X의 평균이 있을 때,
X가 K표준편차보다 작거나 클 확률의 <u>상한을 나타낼 수 있다</u>.

정의

- 젠센 부등식

1. 함수 ø가 2차 미분 가능한 함수라고 가정하자.

1) $\mu = E(X)$에 대하여 ø 를 2차까지 테일러 전개하면

(1) $\emptyset(x) = \emptyset(\mu) + \emptyset'(\mu)(x-\mu) + \frac{1}{2}\emptyset''(a)(x-\mu)^2$

(2) 이 때, $\frac{1}{2}\emptyset''(a)(x-\mu)^2$는 음이 아니므로, 이 항을 제거하면

- $\emptyset(x) > \emptyset(\mu) + \emptyset'(\mu)(x-\mu)$ 이다.

2) 양변에 기댓값을 취하면

(1) $E[\emptyset(x)] > E[\emptyset(\mu) + \cancel{\emptyset'(\mu)(X-\mu)}]$

(2) $E[\emptyset(x)] > E[\emptyset(\mu)] \rightarrow$ $E[\emptyset(x)] > \emptyset[E(X)]$

예제

- X의 pdf가 $f(x)$ $\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\mathrm{h} < \mathrm{x} < \mathrm{h} \\ 0 & else \end{cases}$

1) 이 X의 기댓값 $\mathrm{E}(x) = \mu = 0$, $\mathrm{E}(x)^2 = 1$ 일 때

2) 이 X가 $\frac{3}{2}$ 표준편차보다 클 확률은

(1) $\mathrm{P}\left(\mathrm{E}(x - 0) < \frac{3}{2} \cdot 1\right) \leq \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{4}{9}$ ≈0.444

3) 이 때, 이 구간의 실제 확률을 구하면

(1) $\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2\sqrt{3}} dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} [x]_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.134$