최대우도검정

정의

- 양측검정

1. $H_0 : \theta = \theta_0$ VS $H_1 : \theta \neq \theta_0$ 에 대해서

1) 우도함수와 로그우도함수는 각각

(1) L(θ) = $\prod_{i=1}^{n} f(X;\theta)$

(2) $l(\theta) = \sum_{i=1}^{n} log\, f(X;\theta)$

2) 이 때, $\hat{\theta}$를 θ의 mle 추정량이라고 하고, $\lim_{n\to\infty}[P_{\theta_0}\{L(\theta_0$,X) > L($\theta$,X)}] = 1 이므로,

(1) $\Lambda = \frac{L(\theta_0,x)}{L(\theta,x)} \leq 1$ 을 정의할 수 있다.

(2) 이 때, (1-a) = $P_{\theta_0}[\Lambda \leq \mathrm{c}]$ 로 가설검정을 수행하는 것을 우도비 검정이라고 한다.

정의

- x^2(a)를 따르는 -2logΛ

1. 로그우도 $l(\theta)$를 θ_0에 대해 2차 테일러 전개를 하면

1) $l(\hat{\theta})= l(\theta_0)+(\hat{\theta}- \theta_0)l'(\theta_0)+ \frac{1}{2}l''(\theta_n{}^*)(\hat{\theta}- \theta_0)^2$

(1)이 때, $-\frac{1}{n}l''^{(\theta_n{}^*)} \rightarrow I(\theta_0)$ 이고

(2) $\frac{1}{\sqrt{n}}l'(\theta_0)$ = $\sqrt{n}(\hat{\theta}- \theta_0)I(\theta_0)$ + Rn 이므로

(3) $l(\hat{\theta})$ = $l(\theta_0)+(\hat{\theta}- \theta_0)l'(\theta_0)+ \frac{1}{2}l''(\theta_n{}^*)$ = $l(\theta_0)$ + n$(\hat{\theta}- \theta_0)^2I(\theta_0)$- $\frac{1}{2}$n$(\hat{\theta}- \theta_0)^2I(\theta_0)$

(4) 위 식을 이항해서 정리하면 $l(\hat{\theta})$- $l(\theta_0)$ = $\frac{1}{2}$n$(\hat{\theta}- \theta_0)^2I(\theta_0)$

정의

- $x^2(1)$를 따르는 -2logΛ

1. 로그우도 $l(\theta)$를 θ_0에 대해 2차 테일러 전개를 하면

2) 한편 log(Λ)를 구하면

(1) -2log$\left[\frac{L(\hat{\theta},x)}{L(\theta_0,x)}\right]$ = 2[$l\left(\hat{\theta}\right)$-$l(\theta_0)$] = n($\hat{\theta}-\ \theta_0)^2 I(\theta_0)$={$\sqrt{nI(\theta_0)}(\hat{\theta}-\ \theta_0)$}^{2}

(2) 이 때,$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\ \theta_0) \rightarrow \mathrm{N}\left(0,\frac{1}{I(\theta_0)}\right)$ 이고,

(3) $\sqrt{nI(\theta_0)}(\hat{\theta}-\ \theta_0)$ 는 M($\sqrt{I(\theta_0)}$t) = $e^{\frac{1}{2I(\theta_0)}I(\theta_0)t^2}$ = $e^{\frac{1}{2}t^2}$ = N(0,1) 이므로

(4) $\{N(0,1)\}^2$ ~ $x^2(1)$ 을 따른다.

정의

- 왈드형 검정

1. -2logΛ 에 대한 증명을 하면서 한가지 통찰을 얻었다.

(1) $\sqrt{nI(\theta_0)}(\hat{\theta} - \theta_0)$ 는 M($\sqrt{I(\theta_0)}$t) = $e^{\frac{1}{2I(\theta_0)}I(\theta_0)t^2}$ = $e^{\frac{1}{2}t^2}$ = N(0,1) 이므로

(2) $\{N(0,1)\}^2$ ~ $x^2(1)$ 을 따른다.

2. 이 때, $I(\hat{\theta}) \xrightarrow{p} I(\theta_0)$ 이므로, 이를 이용하면

1) $\{\sqrt{nI(\hat{\theta})}(\hat{\theta} - \theta_0)\}^2$ ~ $x^2(1)$

정의

- 스코어형 검정

1. 스코어 벡터를 활용하여 $x^2(1)$로 수렴하는 방법

1) 이 때, 스코어 벡터는 다음과 같다.

(1) S(θ) = $[\frac{\partial \log f(x_1;\theta)}{\partial\theta},\cdots,\frac{\partial \log f(x_i;\theta)}{\partial\theta}]$

(2) 즉, 각 확률표본들의 스코어 함수들로 이루어진 벡터를 의미한다.

2) 로그우도의 미분 $\mathrm{l}'(\theta_0)$ = $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \log f(x_i;\theta)}{\partial\theta}$ 이므로

(1) 이 때 스코어 검정은 $\frac{\mathrm{l}'(\theta_0)}{\sqrt{nI(\theta_0)}}$ ~ $x^2(1)$ 가 된다.

(2) 즉, 로그우도의 미분을 피셔정보로 나눈 비율은

예제

- 베타분포에 대한 우도비 검정

1. $X_1, \dots, X_n$을 $\beta(0,1)$을 따르는 X에서 추출한 iid라고 하자.

1) 다음을 검정한다.

(1) $H_0 : \theta = 1$ VS $H_1 : \theta \neq 1$

1) 이 때, 우도 함수는

(1) $\prod_{i=1}^{n} \theta^{-1} \exp(-\theta) \exp(logn - 1) = \theta^{-n} \exp(-\theta) \exp(n(logn - 1))$이다.

(2) 이 때, θ 에 대한 베타분포의 mle 추정량은 $\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum logX_i}$이므로, 이를 대입하면

2) 우도비 검정 통계량은

(1) $\Lambda = \frac{L(\theta_0=1,x)}{L(\hat{\theta},x)} = \frac{1}{\frac{\hat{\theta}}{n}^{-n} \exp(-\frac{\hat{\theta}}{n}) \exp(n(logn - 1))} = \frac{1}{-\sum logX_i^{-n} \exp(-\sum logX_i) \exp(n(logn - 1))}$

예제

- 베타분포에 대한 우도비 검정

2. -2log(Λ) 를 구하면

1) $-2\log(-\sum logX_i{}^{n}\exp(\sum logX_i)\exp(-n(logn\ -1)))$
   = 2($\sum logX_i$-nlog(- $\sum logX_i$)-n+nlogn)

3. 왈드형 검정은

1) $\left[\sqrt{\frac{n}{\hat{\theta}^2}}\left(\hat{\theta}-1\right)\right]^2 = n\left\{1-\frac{1}{\hat{\theta}}\right\}^2$

4. 스코어형 검정은

1) $l'(1)= \sum logX_i$ + n 이므로
2) $\left\{\frac{\sum logX_i + \mathrm{n}}{\sqrt{n}}\right\}^2$ 이다.

예제

- 지수분포에 대한 우도비 검정

1. $X_1, \dots, X_n$을 θ>0 일 때 공통 pdf $f(x)$ = $\theta^{-1}\exp(-\frac{x}{\theta})$ 를 갖는 iid라고 하자.

1) 이 때, 우도 함수는

(1) $\prod_{i=1}^{n} \theta^{-1}\exp(-\frac{X_i}{\theta}) = \theta^{-n}\exp(-\frac{n}{\theta}\overline{x})$ 이다.

2) 우도비 검정 통계량은

(1) $\Lambda = \frac{L(\hat{\theta},x)}{L(\theta_0,x)} = \frac{\hat{\theta}^{-n}\exp\left(-\frac{n}{\hat{\theta}}\overline{x}\right)}{{\theta_0}^{-n}\exp(-\frac{n}{\theta_0}\overline{x})}$

(2) 이 때, θ 에 대한 지수분포의 mle 추정량은 $\overline{x}$ 이므로, 이를 대입하면

- $\frac{\overline{x}^{-n}\exp\left(-\frac{n}{\overline{x}}\overline{x}\right)}{{\theta_0}^{-n}\exp(-\frac{n}{\theta_0}\overline{x})} = \left(\frac{\overline{x}}{\theta_0}\right)^{-n}\exp\left(n\left(\frac{\overline{x}}{\theta_0} - 1\right)\right)$