이항 분포

정의

- 이항분포

1. 표본공간이 성공 혹은 실패로 이루어져 있는 이산형 분포

1) X(성공) = 1 or X(실패) = 0

2) PMF는 다음과 같다.

$$\text{(1) } p(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{(1-x)} & x = \{0,1\} \\ 0 & else \end{cases}$$

3) 기댓값은

(1) μ=E(x)= $\sum xp[x] = 0 \cdot (1-p)^0 + 1 \cdot p^1 = p$

(2) $\sigma = var(x) = E[x - E(x)]^2 = \sum [x - E(x)]^2 p[x]$

- $[1-p]^2 \cdot p^1 [1-p]^0 + [0-p]^2 \cdot p^0 [1-p]^1 = [1-p]^2 \cdot p + p^2 [1-p]$=p(1-p)

정의

- 베르누이 분포

1) 이항분포의 시행을 여러 번 반복할 때 도출되는 분포

(1) 확률변수 X를 베르누이 확률실험의 성공횟수라고 하자. 즉

- S = {1,0,0,1,1,0}일 때, X(S) = 3

(2) 이 때, 이런 실험을 n번 반복하면 성공이 x회일때 실패는 n-x회 일어난다.

- $\begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}$ = $\frac{n!}{(n-x)!}$ 이 일어날 수 있는 총 경우의 수이고

- 베르누이 시행은 독립 시행이기 때문에

$\mathrm{p}(x, n-x) = \mathrm{p}(x) \cdot p(n-x)$ 이다. 이는 $p^x(1-p)^{(n-x)}$ 와 동등하다.

정의

- 베르누이 확률 분포

(3) 위 확률이 $\begin{bmatrix} n \\ x \end{bmatrix}$ 의 경우의 수만큼 존재하므로

- $\mathrm{p}(x) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-x)!} \cdot p^x (1-p)^{(n-x)} \; x = \{0,1,\dots,n\} \\ 0 \;\; else \end{cases}$

2) 이항분포의 mgf는 다음과 같이 구한다.

(1) M(t) = $E(e^{tx})$ = $\sum e^{tx}\, p(x)$ = $\sum e^{tx} \frac{n!}{(n-x)!} \cdot p^x (1-p)^{(n-x)}$

(2) $\sum e^{tx} \frac{n!}{(n-x)!} \cdot p^x (1-p)^{(n-x)}$ = $\sum \frac{n!}{(n-x)!} \cdot (pe^t)^x (1-p)^{(n-x)}$

(3) 위는[(1-p)+ $pe^t]^n$ 과 동등하다.

(4) 따라서, M′(0) = $\frac{\partial[(1-p)+\ pe^t]}{\partial t} = n \cdot [(1-p)+\ pe^t]^{n-1} \cdot pe^t$ = np

(5) M″(0) = $n \cdot (n-1) \cdot [(1p)+\ pe^t]^{n-2} \cdot pe^t + n \cdot [(1-p)+\ pe^t]^{n-1} \cdot p^{2}e^{2t} = np(1-p)$