이산형 분포의
모수에 대한 신뢰구간

정의

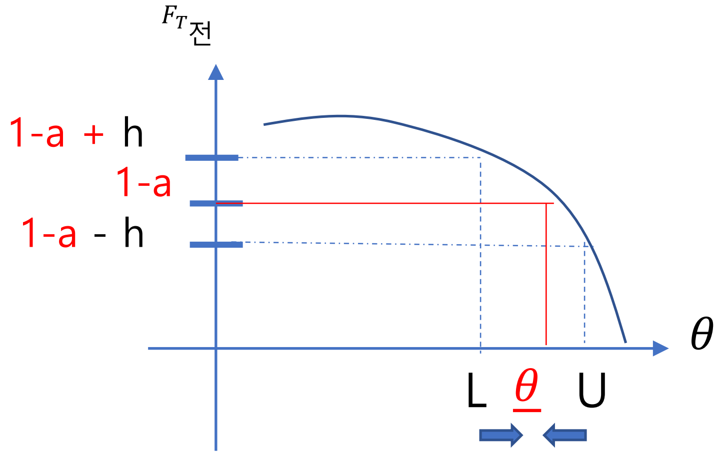
- $\theta \in \Omega$ 이고, $X_1, \ldots, X_n$이 pmf(x; θ)를 갖는 확률표본이라고 하자.

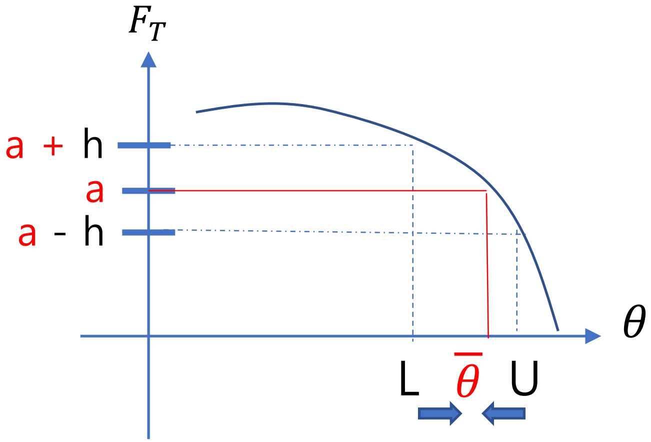
1. T = T($x_1, \ldots, x_n$)을 cdf(t; θ) 를 갖는 θ의 추정량이고, 모든 t에 대해 θ의 연속인 비증가 함수이다.

1) $T_{전}$이 T의 범위 t에서 1차시 이전 범위를 갖는 통계량이라고 한다면,
그 상한과 하한 $\overline{\theta}$, $\underline{\theta}$ 는

(1) F($T_{전}$; $\underline{\theta}$) = 1-a_2 , F(T; $\overline{\theta}$) = a_1 이다.

(2) 이 때, (1-a) = P($\theta \in [\overline{\theta}, \underline{\theta}$]) 인 신뢰구간이다.





정의

- 이분법 알고리즘의 절차

1. 이분법 알고리즘의 목적은 <u>상한과 하한을 점점 좁혀</u> 참모수 $[\overline{\theta}, \underline{\theta}]$에 가깝게 하는 것이다.

1) $f(x)$ = d의 근을 구하기 위하여, a<b의 구간이 근을 포함한다고 할 때

(1) $\frac{a+b}{2} = c$ 라고 할 때,

(2) $f(c)$ > d 라면, a<b에서 a를 c로 교체한다

(3) $f(c)$ < d 라면, b를 c로 교체한다.

2) a-b 가 사전에 정한 역치 이하가 될 때까지 알고리즘을 반복한다.

예제

- 베르누이 비율에 대한 신뢰구간 구하기

1. X가 n = 30, $\overline{X}$ = 0.6 성공 확률이 θ인 베르누이 분포를 갖는다고 하자.
   Ω = (0,1) 이라고 하고, $X_1, \ldots, X_n$는 그 확률표본이다.

1) $\overline{X}$ 는 θ의 불편추정량이고, $\mathrm{n}\overline{X}$ 의 cdf는 (n, θ)인 베르누이 분포를 따르므로
2) 알고리즘을 작성하면(단, a=0.05 가정)

예제

- 베르누이 비율에 대한 신뢰구간 구하기

(1) 하한 구하기

- F($\bar{X}_{전}$; $\underline{\theta}$) = $\sum_{j=0}^{17} \frac{n!}{(n-j)!} \cdot p^j (1-p)^{(n-j)}$ = 0.95, 이번 받침은 이번 받침은 0<j<17이 된다.
- Iter 1 : F($bin(30{,}0.4) < 17$) =0.9787, F($bin(30{,}0.45) < 17$) =0.9286

  따라서 $\frac{0.4+0.45}{2}$ = 0.425 = $\underline{\hat{\theta}}$, P($\underline{\hat{\theta}}$ = 0.425) = 0.96 > 0.95 이므로,

  a = 0.4를 0.425로 교체한다.

- Iter 2 : F($bin(30{,}0.425) < 17$) = 0.96, F($bin(30{,}0.45) < 17$) =0.9286

  따라서 $\frac{0.425+0.45}{2}$ = 0.4375 = $\underline{\hat{\theta}}$, P($\underline{\hat{\theta}}$ = 0.4375) = 0.945 < 0.95 이므로

  b = 0.45를 0.4375로 교체한다.

- Iter 3 : F($bin(30{,}0.425)$ < 17) = 0.96, F($bin(30{,}0.4375) < 17$) =0.945

  따라서 $\frac{0.425+0.4375}{2}$ = 0.43125 = $\underline{\hat{\theta}}$, P($\underline{\hat{\theta}}$ = 0.4375) = 0.953 > 0.95 이므로

  a = 0.425를 0.43125로 교체한다.
- Iter n :$\underline{\hat{\theta}}$ = 0.434일 때 a-b가 역치 이하로 떨어지므로, 알고리즘을 중단한다.

예제

- 베르누이 비율에 대한 신뢰구간 구하기

(2) 상한 구하기

- F($\overline{X}$; $\overline{\theta}$) = $\sum_{j=0}^{18} \frac{n!}{(n-j)!} \cdot p^j (1-p)^{(n-j)}$ = 0.05 , 이번 받침은 0<j<18이 된다.
- Iter 1 : F($bin(30{,}0.7) < 18$) =0.1594, F($bin(30{,}0.8) < 18$) =0.1594

  따라서 $\frac{0.7+0.8}{2}$ = 0.75 = $\hat{\overline{\theta}}$, P($\hat{\overline{\theta}}$ = 0.75) = 0.0506 > 0.05 이므로,

  a = 0.7를 0.75로 교체한다.

- Iter 2 : F($bin(30{,}0.75) < 18$) = 0.0506, F($bin(30{,}0.8) < 18$) =0.1594

  따라서 $\frac{0.75+0.8}{2}$ = 0.775 = $\hat{\overline{\theta}}$, P($\hat{\overline{\theta}}$ = 0.775) = 0.023 < 0.05 이므로

  b = 0.8를 0.775로 교체한다.

- Iter 3 : F($bin(30{,}0.75) < 18$) = 0.0506, F($bin(30{,}0.8) < 18$) =0.023

  따라서$\frac{0.75+0.775}{2}$= 0.7625 =$\hat{\overline{\theta}}$, P($\hat{\overline{\theta}}$= 0.7625) = 0.0353 < 0.05 이므로

  b = 0.775를 0.7625로 교체한다.
- Iter n : $\hat{\overline{\theta}}$ = 0.750일 때 a-b가 역치 이하로 떨어지므로, 알고리즘을 중단한다.

예제

- 베르누이 비율에 대한 신뢰구간 구하기

(3) :$\underline{\hat{\theta}}$ = 0.434 , $\hat{\bar{\theta}}$ = 0.750 일 때 해가 수렴하므로, θ의 90% 신뢰구간은

- 0.9= P($\theta \in [0.434,$ 0.750])