감마분포의 친족분포들

정의

- *카이제곱 분포*

1. $\alpha = r/2$, $\beta = 2$일 때의 감마분포를 가지는 확률변수 X를 카이제곱분포라고 한다.

1) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)2^{\frac{r}{2}}} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx, & 0 < x < \infty \\ 0 \ else \end{cases}$

2) 감마분포의 가법성은 그대로 카이제곱 분포에서도 활용이 가능하다.

2. 카이제곱분포의 평균 분산은 다음과 같다.

1) E(x) = $\frac{r}{2} \cdot 2 = r$

2) Var(x) = $\frac{r}{2} \cdot 4$=2r

정의

- 베타분포

1. 결합 pdf $f(x_1, x_2)$가 독립인 두 확률변수 x_1, x_2의 결합 pdf라고 할 때

(1) x_1, x_2가 $\Gamma(a)$, $\Gamma(\beta)$를 따른다고 한다면

$$\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} {x_1}^{a-1} {x_2}^{\beta-1} e^{-x_1-x_2}$$

2. 이 때, $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = \frac{x_1}{x_1 + x_2}$ 로 놓으면

(1) $x_1 = y_1 y_2$, $x_2 = y_1(1 - y_2)$ 이고,

(2) $|J| = \det\begin{bmatrix} y_2 & y_1 \\ (1 - y_2) & -y_1 \end{bmatrix} = -y_1 y_2 - y_1(1 - y_2) = -y_1$

(3) 범위는 $0 < y_1 < \infty$, $0 < y_2 < \infty$

정의

- 베타분포

2. 변환을 실시하면

1) pdf $f(y_1, y_2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}[y_1 y_2]^{\alpha-1}[y_1(1- y_2)]^{\beta-1}e^{-y_1}|- y_1|$

$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{y_1}^{\alpha+\beta-1}{y_2}^{\alpha-1}(1- y_2)^{\beta-1}e^{-y_1}$

3. 각각의 변수에 대한 주변 PDF를 구하면

1) $f(y_2) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{y_1}^{\alpha+\beta-1}{y_2}^{\alpha-1}(1- y_2)^{\beta-1}e^{-y_1}\,dy_1$

$= \frac{{y_2}^{\alpha-1}(1- y_2)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty {y_1}^{\alpha+\beta-1}e^{-y_1}dy_1 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{y_2}^{\alpha-1}(1- y_2)^{\beta-1}$

2) $f(y_1) = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{y_1}^{\alpha+\beta-1}{y_2}^{\alpha-1}(1- y_2)^{\beta-1}e^{-y_1}\,dy_2$

$= \frac{{y_1}^{\alpha+\beta-1}e^{-y_1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty {y_2}^{\alpha-1}(1- y_2)^{\beta-1}dy_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}{y_1}^{\alpha+\beta-1}e^{-y_1}$

정의

- 디리클레 분포

1. 감마분포를 따르는 $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \cdots, \overrightarrow{x_n}$이 β=1일 때

1) 이 벡터의 총합인 Σx_i 로 정의되는 감마분포의 무한 결합 분포를 디리클레 분포라고 한다.

(1) $f\left(x_1, x_{2,} \cdots, x_n; a_{1,} \cdots, a_n\right) = \begin{cases} \prod_0^{k=1} \frac{1}{\Gamma(a_i)} {x_i}^{a_i - 1} e^{-x_i}, \\ 0, \ else \end{cases}$

(2) $y_i = \frac{x_i}{x_1, x_{2,} \cdots, x_{k+1}}, where\ (i = 1,2,3, \cdots$,k), $y_{k+1} = x_1, x_{2,} \cdots, x_{k+1}$ 라고 정의할 때

(3) 역함수는 $x_1 = y_1 y_{k+1}$, $x_2 = y_2 y_{k+1}$, $\cdots$, $x_k = y_k y_{k+1}$, $x_{k+1} = y_{k+1}$(1- y_1- $y_2 - \cdots - y_k$)

정의

- 디리클레 분포

\- 따라서 야코비안 |J| = det$\begin{bmatrix} y_{k+1} & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 & y_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & y_{k+1} & y_k \\ -y_{k+1} & \cdots & \cdots & -y_{k+1} & (1- y_1 - \cdots - y_k) \end{bmatrix}$

\- 위 야코비 행렬에서, 각 행을 마지막 행에 계속 더하면 다음과 같은 행렬이 된다.

$$\det\begin{bmatrix} y_{k+1} & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ 0 & \ddots & \cdots & 0 & y_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & y_{k+1} & y_k \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = y_{k+1}^{k}$$

정의

- 디리클레 분포

2) 정리하여 변환을 적으면

(1) $\prod_0^{k=1} \frac{1}{\Gamma(a_i)} {x_i}^{a_i-1} e^{-x_i} = \frac{{y_{k+1}}^{a_1+\cdots+a_{k+1}-1}[{y_1}^{a_1-1}\cdots{y_k}^{a_k-1}(1-y_1-\cdots-y_k)^{a_{k+1}-1}]e^{-y_{k+1}}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\cdots\Gamma(a_{k+1})}$

(2) 쓸모없는 y_{k+1}을 적분하여 없애면

$$-\int_0^\infty \frac{{y_{k+1}}^{a_1+\cdots+a_{k+1}-1}[{y_1}^{a_1-1}\cdots{y_k}^{a_k-1}(1-y_1-\cdots-y_k)^{a_{k+1}-1}]e^{-y_{k+1}}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\cdots\Gamma(a_{k+1})} dy_{k+1}$$

$$= \frac{[{y_1}^{a_1-1}\cdots{y_k}^{a_k-1}(1-y_1-\cdots-y_k)^{a_{k+1}-1}]}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\cdots\Gamma(a_{k+1})} \int_0^\infty {y_{k+1}}^{a_1+\cdots+a_{k+1}-1} e^{-y_{k+1}}\, dy_{k+1}$$

$$= \frac{\Gamma(a_1+a_2+\cdots+a_{k+1})}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)\cdots\Gamma(a_{k+1})} {y_1}^{a_1-1}\cdots {y_k}^{a_k-1}(1-y_1-\cdots-y_k)^{a_{k+1}-1}$$