확률 수렴

정의

- X_n이 $n \to \infty$ 임에 따라 다른 확률변수 X에 가까워 지는 현상

1. 좀더 형식적으로 표현하면

1) $\lim_{n\to\infty} p[|X_n - X \geq \varepsilon|]$= 0 이면 X_n은 X에 확률수렴한다고 표현한다.

2) 이를 $X_n \xrightarrow{p} X$ 로 표현한다.

정의

- 대수의 약법칙

1. $\{X_n\}$을 공통평균 μ 와 분산 $\sigma^2 < \infty$을 갖는 iid 변수의 열이라고 하자.

1) 이 때, $\overline{X} = n^{-1} \sum X_i$ 일 때, $\overline{X} \overset{p}{\rightarrow} \mu$ 이다.

(1) $\overline{X}$ ~ N(μ, $\frac{\sigma^2}{n}$) 이므로, 체비셰프 부등식을 활용하면

(2) $p[|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon]$ = $p\left[|\overline{X}_n - \mu\right| \geq \left({}^{\varepsilon\sqrt{n}}/_{\sigma}\right)\left({}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right)\right] \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0$

(3) 따라서 $\lim_{n\rightarrow\infty} p\left[\left||\overline{X}_n - \mu \geq \varepsilon\right|\right]$= 0 이므로 $\overline{X} \overset{p}{\rightarrow} \mu$ 이다.

정의

- $X_n \xrightarrow{p} X$ 이고 $Y_n \xrightarrow{p} Y$ 이면 $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$이다.

1. $|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq |(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geq \varepsilon$ 에서

1) $p[|(X_n + Y_n) - (X - Y)| \geq |(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geq \varepsilon] \leq P[|X_n - X| + |Y_n - Y| \geq \varepsilon]$
$\leq P[|X_n - X| \geq \varepsilon/2] + P[|Y_n - Y| \geq \varepsilon/2]$

2) 이 때, 마지막 부등식의 두개의 항은 0으로 수렴한다.

정의

- $X_n \xrightarrow{p} X$ 이고 a가 어떤 상수일 때, a$X_n \xrightarrow{p}$ aX

1.|X_n- X| + |Y_n- Y| ≥ |(X_n+ Y_n)-(X+ Y)| ≥ ε 에서

1) p[|$(aX_n\ +aX)$| ≥ ε] = p[a|($X_n\ +X$)| ≥ ε] = p[|($X_n\ +X$)| ≥ $\frac{\varepsilon}{|a|}$]

2) 이 때, $\frac{\varepsilon}{|a|} \rightarrow 0$ 이다.

정의

- $X_n \xrightarrow{p} a$ 이고 실함수 g가 a에서 연속이다. 그러면 $g(X_n) \xrightarrow{p} g(a)$

1. ε>0 이라 가정하자. g가 a에서 연속이므로 $|x - a| < \delta$면 $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$인 δ>0이 존재한다.

1) p[|g(X_n) – g(a)| ≥ ε] ≤ p[|X_n– a| ≥ δ]
2) 이 때, n → ∞ 일 때 마지막 항은 0으로 수렴한다.

정의

- $X_n \xrightarrow{p} X$이고 $Y_n \xrightarrow{p} Y$ 이면 X_nY_n = XY이다.

1. $X_nY_n = \frac{1}{2}{X_n}^2 + \frac{1}{2}{Y_n}^2 - \frac{1}{2}(X_n - Y_n)^2$
   $\xrightarrow{p} \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}(X - Y)^2 = XY$

정의

- 일치성

1. X를 cdf(x;θ)를 따른다고 하고, $X_1, \dots, X_n$이 확률표본이고 통계량 T_n=T($X_1, \dots, X_n$)이라고 할 때

1) $T_n \rightarrow \theta$ 일때 이를 일치 추정량이라고 한다.

2) 예를 들어, 표본분산의 일치성을 증명하면

(1) $X_1, \dots, X_n$을 평균 μ, 분산 σ인 정규분포에서 추출한 확률표본이고, S_n^2이 표본분산일 때

- $S_n^2 = \frac{\sum(X_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})^2 \xrightarrow{p} 1 \cdot E({X_i}^2)$ - μ^2 = σ