

균일 최강력 검정

정의

- 개요

1. 복합 대립가설에 대한 단순귀무가설을 최량기각역하에서 검증하는 것
 - 1) 즉, 단순최강력검정이 단순가설 H_0 에 대한 단순가설 H_1 을 검정하는 것이라면
 - 2) 균일최강력검정은 단순가설 H_0 에 대해 복합대립가설 H_1 을 검정한다.

정의

- 충분통계량과 균일최강력검정

1. $Y = u(X_1, \dots, X_n)$ 을 θ 에 대한 충분통계량이라고 하자.

1) 정의에 따라 $L(\theta; X_1, \dots, X_n) = k_1(u(X_1, \dots, X_n); \theta)k_2(X_1, \dots, X_n)$ 으로 분해 가능하다.

2) 이 때, $H_0 : \theta = \theta_0$ VS $H_1 : \theta \neq \theta_0$ 의 최량검정을 실시하는 경우

$$(1) \frac{L(\theta_0; X_1, \dots, X_n)}{L(\theta_n; X_1, \dots, X_n)} = \frac{k_1(u(X_1, \dots, X_n); \theta_0)k_2(X_1, \dots, X_n)}{k_1(u(X_1, \dots, X_n); \theta_n)k_2(X_1, \dots, X_n)} = \frac{k_1(u(X_1, \dots, X_n); \theta_0)}{k_1(u(X_1, \dots, X_n); \theta_n)}$$

(2) 즉, $[\theta_0, \theta_n]$ 에 대한 충분통계량의 함수만으로 최량검정 실시가 가능하다.

정의

- 단조우도비

1. 어떤 통계량 $Y = u(X_1, \dots, X_n)$ 에 대하여
Y를 충분통계량으로 활용하는 우도비 $\frac{L(\theta_0; X_1, \dots, X_n)}{L(\theta_n; X_1, \dots, X_n)}$ 가 $g(Y)$ 에서 단조감소를 보인다고 하자.

1) 이 때, $g(y)$ 에서 g 가 마찬가지로 단조감소일경우 그 비율은 같다. 즉

2) $\frac{L(\theta_0; X_1, \dots, X_n)}{L(\theta_n; X_1, \dots, X_n)} = g(Y)$ 이다.

(1) 한편, 네이만-피어슨 정리에 따라 $\frac{L(\theta_0; X_1, \dots, X_n)}{L(\theta_n; X_1, \dots, X_n)} = g(y) \leq k$ 를 만족할 때

(2) $\alpha = P_{\theta_0}[g(Y) \geq C_Y]$ 인 최량기각역 C_Y 를 정의할 수 있다.

(3) 이 때, $\alpha = P_{\theta_0}[Y \geq g^{-1}(C_Y)]$ 로 재정의 할 수 있고,
이는 다시 말해 충분통계량을 이용해 가설 검정을 수행할 수 있음을 암시한다.

정의

- 단조우도비와 완비충분통계량의 연계

1. 어떤 확률표본 X_1, \dots, X_n 이 지수족을 갖는 pdf에서 추출한 확률표본이라고 하자.

즉 $f(x; \theta) = \exp[p(\theta)k(x) + H(x) + q(\theta)]$ 이다.

1) 이 때, 우도비 $\frac{L(\theta_0; X)}{L(\theta_n; X)} = \frac{\exp[p(\theta_0)k(x) + H(x) + q(\theta_0)]}{\exp[p(\theta_n)k(x) + H(x) + q(\theta_n)]}$

$$= \exp\{(p(\theta_0) - p(\theta_n))k(x) + H(x) + n(q(\theta_0) - q(\theta_n))\}$$

2) 이는 다시말해 $Y = \sum k(x_i)$ 라는 완비충분통계량을 가지는 분포이고

(1) $g(Y)$ 를 Y 에 대한 함수라고 했을 때, 이에 대한 단조우도비를 갖는다.

(2) 따라서 $H_0 : \theta < \theta_0$ VS $H_1 : \theta > \theta_0$ 라는 가설을 검정할 경우

- $\alpha = P_{\theta_0}[Y \geq g^{-1}(k)]$ 를 만족하는 최량기각역과 완비충분통계량 Y 를 정의 가능하다.

예제

• pdf $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ 에서 $n=2$ 인 확률표본 X_1, X_2 를 추출했다고 하자.

1. 복합가설 $H_0 : \theta=2$ VS $H_1 : \theta > 2$ 를 검정하면

1) $\Omega = \{\theta : \theta \geq 2\}$ 이고

2) $C = \{(x_1, x_2 : 9.5 < x_1, x_2 < \infty)\}$ 이며

3) 이 때 $P_{\theta=2}[X \in C] = \int_0^{9.5} \int_0^{9.5-x_2} \frac{1}{2^2} e^{-\frac{-(x_1+x_2)}{2}} dx_1 dx_2 = 0.9562$

4) 한편 $P_{\theta>2}[X \in C]$ 는 $\theta = 2$ 를 제외한 모든 경우이므로 $1 - 0.9562 = 0.0438$

예제

- 우도비와 최량기각역

1. $X_1, \dots, X_n \sim N(0, \theta)$ 에서 추출한 확률표본이라고 하자.

1) 가설 $H_0 : \theta = \theta_0$ VS $H_1 : \theta > \theta_0$ 을 검정하면

$$2) \text{우도비 } \frac{L(\theta_0; X_1, \dots, X_n)}{L(\theta_n; X_1, \dots, X_n)} = \frac{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_0}}\right]^n \exp\left(-\frac{\sum x_i^2}{2\theta_0}\right)}{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_n}}\right]^n \exp\left(-\frac{\sum x_i^2}{2\theta_n}\right)} = \left[\frac{\theta_0}{\theta_n}\right]^{\frac{n}{2}} \exp\left[\left(-\frac{\theta_0 - \theta_n}{2\theta_0\theta_n}\right) \sum x_i^2\right]$$

(1) 이 때, 정규분포는 $Y = \sum x_i^2$ 를 충분통계량으로 갖고,
 $\frac{Y}{\theta_0} \sim \chi^2(n)$ 이므로, 이 충분통계량의 함수로 최량기각역을 정의하면

(2) $P_{\theta_0} \left[\frac{Y}{\theta_0} \leq \frac{g^{-1}(k)}{\theta_0} \right] = \alpha$ 인 최량기각역 $c = \frac{g^{-1}(k)}{\theta_0}$ 를 정의할 수 있다.

3) $N = 15, \alpha = 0.5, \theta_0 = 3$ 일 경우

(1) $P_{\theta_0=3} \left[\frac{Y}{3} \leq \frac{g^{-1}(k)}{3} \right]$ 에서 $\frac{Y}{3} \sim \chi^2(15)$ 이므로,

(2) $\frac{g^{-1}(k)}{3} = \chi^2_{0.05, 15} = 25.1$ 이므로, 이를 벗어나면 H_0 를 기각하고 H_1 을 채택한다.