순서통계량

정의

- 분포를 가정하지 않고 통계량을 측정하는 방법
- 확률변수 X에서 추출한 확률표본 $X_1, \dots, X_n$이 존재할 때

1) $Y_1, \dots, Y_n$에서

(1) *다*음의 경우로 확률변수를 정의한다면

- Y_1 = {X_n중 가장 작은것}
- …
- Y_n = {X_n중 n번째로 작은것}

(2) 변환 $X \to$ Y는 범위가

- {$(y_1, \dots, y_n) : a < y_1 < \cdots < y_n$<b}로 바뀐다

(3) 역함수는 $X_1, \dots, X_n$을 순서대로 정렬했을 때

- x_1 = $y_1, \dots, x_n$ = y_n 이므로, 그 야코비안은
- |J| = det$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}$ = det$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ =1

정의

- 확률변수 X에서 추출한 확률표본 $X_1, \dots, X_n$이 존재할 때

2) 한 편, 위와 같은 범위와 야코비안을 갖는 $Y_1, \dots, Y_n$은
각각이 $X_1, \dots, X_n$의 n개의 경우의 수를 갖는다.

(1) 변환한 Y_1의 pdf는 $\mathrm{f}(y_1)$이고, Y_n 의 pdf는 $\mathrm{f}(y_n)$ 이므로모든 확률변수의 결합분포는

(2) $\mathrm{f}(y_1) \dots \mathrm{f}(y_n) \sum 1 = \mathrm{n}!\, \mathrm{f}(y_1) \dots \mathrm{f}(y_n)$ 이다.

정의

- 순서통계량의 주변 PDF

1. $Y_1 < Y_2 < Y_3$를 X_1, X_2, X_3의 순서통계량이라고 할 때, 그 결합 pdf는

1) $3!\,\mathrm{f}(y_1)\mathrm{f}(y_2)\mathrm{f}(y_3)$ 이다. 이 때, y_2의 주변 pdf를 구하면

2) $3!\,\mathrm{f}(y_2)\int_{y_2}^{b}\int_{a}^{y_2}\mathrm{f}(y_1)\mathrm{f}(y_3)\,dy_1dy_3$ = $6\mathrm{f}(y_2)\mathrm{F}(y_2)[1-\mathrm{F}(y_2)]$

3) 위를 일반화 하면

(1) 어떤 순서통계량 y_k의 주변 pdf는

$$-\int_{y_k}^{b}\cdots\int_{y_{n-1}}^{b}\int_{a}^{y_k}\cdots\int_{a}^{y_2}\mathrm{f}(y_1)\cdots\mathrm{f}(y_n)\,dy_1\cdots dy_{k-1}\,dy_n\cdots dy_{k+1}$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[\mathrm{F}(y_k)]^{k-1}\,[1-\mathrm{F}(y_k)]^{n-k}\mathrm{f}(y_k)$$