T 분포와 F분포

정의

- T분포

1. 개요

1) 자유도에 의해 통계적 성질이 완전히 결정되는 분포

2) 표준정규분포와 카이스퀘어분포의 결합분포를 변환한 분포이다.

2. Pdf의 유도

1) W ~ N(0,1) 이고, V ~ x^2(r)을 따를때, W와 V가 서로 독립이라면

(1) h(w,v) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)2^{\frac{r}{2}}}v^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{v}{2}}$

$(2)\ T=\frac{w}{\sqrt{v/r}}$ 로 정의하면, V=U 일 때 W = t · $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}}$

(3) 야코비안 |J| = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{r}} & \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}}$

정의

- T분포

2) 총 정리하여 결합 pdf를 변환하면

(1) G(t,u) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)2^{\frac{r}{2}}}u^{\frac{r}{2}-1}\ \exp\left(-\frac{u}{2}(1+\frac{t^2}{r})\right)\ |\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}}|$

(2) u로 적분하여 t에 대한 주변 pdf를 구하면

- g(t) = $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)2^{\frac{r}{2}}}u^{\frac{r}{2}-1}\ \exp\left(-\frac{u}{2}(1+\frac{t^2}{r})\right)\ |\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}}|du$ = $\frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi r}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot \frac{1}{(1+\frac{t^2}{r})^{\frac{(r-1)}{2}}}$

정의

- T 분포

3) t 분포의 평균과 분산을 구하면

(1) $E(T^k) = E(w^k(\frac{V}{r})^{-\frac{k}{2}}) = E\left(w^k\right) \cdot E[(\frac{V}{r})^{-\frac{k}{2}}] = E\left(w^k\right) \cdot \frac{2^{-k/2}\Gamma\left(\frac{r}{2}-\frac{k}{2}\right)}{T({}^{r}/_{2})r^{-k}/_{2}}$ 이므로

(2) $E(T) = 0 \cdot \frac{2^{-k/2}\Gamma\left(\frac{r}{2}-\frac{k}{2}\right)}{T({}^{r}/_{2})r^{-k}/_{2}} = 0$

(3) $E(T^2) = E(w^2) \cdot \frac{2^{-k/2}\Gamma\left(\frac{r}{2}-1\right)}{T({}^{r}/_{2})r^{-1}}$ = r/(r-2)

정의

- F분포

1. 개요

1) 자유도 r_1 과 r_2를 따르는 서로 독립인 x^2의 비율에서 파생된 분포

2. 분포의 유도

1) x^2 분포에서 추출한 확률변수 각각을 U와 V로 정의할 때, 결합 pdf는

(1) h(u,v) = $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)2^{\frac{r_1+r_2}{2}}} u^{\frac{r_1}{2}-1} v^{\frac{r_2}{2}-1} \exp -\frac{(U+V)}{2}$

(2) 확률변수 w = $\frac{U/r_1}{V/r_2}$, Z=V 라 정의하면

- 역함수 U = $\frac{r_1 zw}{r_2}$, V=Z

- |J| = det$\begin{bmatrix} \frac{r_1}{r_2}z & \frac{r_1}{r_2}w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{r_1}{r_2}z$

정의

- F분포

(3) g(w,z) = $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)2^{\frac{r_1+r_2}{2}}} u^{\frac{r_1}{2}-1} v^{\frac{r_2}{2}-1} \exp(-\frac{(U+V)}{2}) | \frac{r_1}{r_2} z |$

$$= \frac{({}^{r_1}/_{r_2})^{r_1/2} w^{\frac{r_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{r_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)2^{\frac{r_1+r_2}{2}}} Z^{\frac{r_1+r_2}{2}-1} \exp\left(-\frac{Z}{2}\left(\frac{r_1 w}{r_2}+1\right)\right)$$

2) 이 때, 적률을 구하면

(1) E(F^k) = $(\frac{r_2}{r_1})^k$E(U^k)E(V^{-k})

(2) E(F) = $(\frac{r_2}{r_1})$E(U)E(V^{-1}) = $\frac{r_2}{r_1} r_1 \frac{2^{-1}\Gamma\left(\frac{r_2}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{r_2}{2}\right)} = \frac{r_2}{r_2-2}$, (단, E($V^{-1}$)는 r_2>2k 일때만 역함수가 존재한다.)