확률변수의 선형결합

정의

- $X = \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \cdots \\ \vec{x}_n \end{bmatrix}$ 이고, $\vec{a}$ = $\begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}$ 일 때

1) T= $\vec{a}X$=$\sum a_i\vec{x}_i$ 이다.

2) T = $\vec{a}X$ 를 정의하고, W = $\vec{b}Y$로 정의할 때

(1) E(T) = E($\sum a_i\vec{x}_i$) = $\sum a_i E(\vec{x}_i)$ 로 정의할 수 있다. (기댓값의 선형 결합)

(2) $\mathrm{cov}(\mathrm{T}, \mathrm{W})$ = E($\sum_i \sum_j [a_i\vec{x}_i - a_i E(\vec{x}_i)][\ b_j\vec{y}_j - b_j E(\vec{y}_j)]$)

- E($\sum_i \sum_j [a_i\vec{x}_i - a_i E(\vec{x}_i)][\ b_j\vec{y}_j - b_j E(\vec{y}_j)]$) =$\sum_i \sum_j a_i b_j E[\vec{x}_i - E(\vec{x}_i)][\vec{y}_j - E(\vec{y}_j)]$(분산의 선형결합)

정의

(3) var(T) = cov(T, T) 이므로

- $\sum_i \sum_j a_i a_j E[\vec{x}_i - E(\vec{x}_i)][\vec{x}_j - E(\vec{x}_j)]$
- $\{a_1(a_1 + \cdots + a_n) \cdot (\vec{x}_1 - E(\vec{x}_1))[(\vec{x}_1 - E(\vec{x}_1)) + (\vec{x}_2 - E(\vec{x}_2)) + \cdots + (\vec{x}_n - E(\vec{x}_n))]\} + \{\cdots\}$
- $\{{a_1}^2(\vec{x}_1 - E(\vec{x}_1))^2) + (a_1 a_2 + \cdots + a_1 a_n)(\vec{x}_1 - E(\vec{x}_1))[(\vec{x}_2 - E(\vec{x}_2)) + \cdots + (\vec{x}_n - E(\vec{x}_n))]\} + \{\cdots\}$
- $\sum_i {a_i}^2 [\vec{x}_i - E(\vec{x}_i)]^2 + \sum_{i \neq j} \sum a_i a_j E[\vec{x}_i - E(\vec{x}_i)][\vec{x}_j - E(\vec{x}_j)]$

- 위 식을 정리하면

$\sum_i {a_i}^2 Var(\vec{x}_i) + \sum_{i \neq j} \sum a_i a_j \mathrm{cov}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$ 이다.

예제

- 표본평균의 벡터 $\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \cdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$ 이 동일한 평균 μ 과 분산 σ^2을 따르는 iid인 경우

1) $\mathrm{E}(\bar{x}) = \mathrm{E}\left(\sum \frac{1}{n} x_i\right) = \frac{1}{n} \sum \mathrm{E}(x_i) = \mu$

2) $\mathrm{var}(\bar{x}) = \sum \frac{1}{n^2} \mathrm{var}(x_i) = \frac{\sigma^2}{n}$