충분통계량의 응용

정의

- 최소분산추정량의 추정

1. 최소분산추정량이란 모든 불편추정량 중 최소분산을 만족하는 추정량이다.

1) 충분 통계량으로 조건을 걸면 더 효율적인 불편 추정량을 구할 수 있다.

2. 기댓값의 성질에서, $\mathrm{E}[\mathrm{E}(x_2|x_1)] = E(x_2)$ 이고,$\mathrm{var}[\mathrm{E}(x_2|x_1)] \leq var(x_2)$ 임이 알려져 있다.

1) 불편추정량을 Y_2, 충분통계량을 Y_1으로 표현하고, 위 관계를 가져오면

(1) $\mathrm{E}[\mathrm{E}(Y_2|Y_1)] = \mathrm{E}[Y_2] = \theta$ 이고, $\mathrm{var}[\mathrm{E}(Y_2|Y_1)] \leq var(Y_2)$ 이므로

(2) 충분통계량으로 통제한 불편추정량은 그냥 불편추정량에 관한 함수보다 항상 분산이 작다.

정의

- 라오-블랙웰 정리

1. 어떤 정수 n에 대해 $X_1, \ldots, X_n$이 pdf $f(x;\ \theta)$ 또는 pmf $f(x;\ \theta)$ 를 갖는 분포에서 추출한 확률표본이라고 하자.

1) 이 때, $Y_1 = u_1\,(X_1, \ldots, X_n)$이 θ에 대한 충분통계량이고,

2) $Y_2\ =\ u_2(X_1, \ldots, X_n)$이 θ에 대한 불편추정량 이라고 하면

3) $\mathrm{E}(Y_2|Y_1)\ =\ \varphi(y_1)$ 이라는 함수로 정의할 경우, 이 통계량 $\varphi(y_1)$ 은

(1) θ에 대한 충분통계량 Y_1에 대한 함수이고

(2) θ의 불편추정량이고

(3) 일반 불편추정량 Y_2 보다 분산이 작다.

정의

- 라오-블랙웰 정리

2. MLE 추정량과 충분통계량의 관계

1) $X_1, \ldots, X_n$이 pdf 또는 pmf $f(x;\,\theta)$를 갖는 분포에서 추출한 확률표본이다.

(1) 만약 θ에 대한 충분통계량 $Y_1 = u_1(X_1, \ldots, X_n)$ 이 존재하고,

(2) θ에 대한 MLE 추정량 $\hat{\theta}$ 이 유일하게 존재할 경우

(3) $\hat{\theta}$는 Y_1으로 이루어진 함수이다.

2) 증명

(1) $f(Y_1;\,\theta)$이 Y_1의 pdf 또는 pmf라고 하자. 이 때 우도함수는

- $L(\theta; X) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta)$ 에서 $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta) = f(u_1(X_1, \ldots, X_n);\,\theta) \cdot H(X_1, \ldots, X_n)$

(2) 이 때, 우변에서 θ는 오직 $u_1(X_1, \ldots, X_n)$과만 연관이 되있으므로,

(3) 우도함수를 최대화하기 위해선 $u_1(X_1, \ldots, X_n)$이 θ에 대한 함수여야 한다.

정의

- 라오-블랙웰 정리

3. 라오-블랙웰 정리의 제약조건

1) X_1, X_2, X_3 를 θ>0인 지수분포에서 추출한 확률표본이라 하자.

pdf $f(x;\,\theta)$ = $\left(\frac{1}{\theta}\right)^3 e^{\frac{-(X_1+X_2+X_3)}{\theta}}$

2) 이 때, 인수분해 법칙에 따라 Y_1 = $\sum_{i=1}^{3} x_i$ 는 θ에 대한 충분통계량이다.

(1) 또한, E(Y_1) = $E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$ = 3θ

(2) 따라서 $\mathrm{E}\left(\frac{Y_1}{3}\right)$ 는 θ에 대한 최소분산불편추정량이다.

정의

- 라오-블랙웰 정리

3) 한편, $Y_2 = X_2 + X_3$ 이고 $Y_3 = X_3$ 라고 정의하면

(1) 역함수는 $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_2 - y_3$, $x_3 = y_3$ 이고

(2) 야코비안은 |1| 이다.

(3) 결합 pdf $f(y_1, y_2, y_3;\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^3 e^{\frac{-(y_1)}{\theta}}$

(4) y_1과 y_3 의 주변 pdf는 $f(y_1;\theta) = \int_0^{y_3} \left(\frac{1}{\theta}\right)^3 e^{\frac{-(y_1)}{\theta}} dy_2 = \left(\frac{1}{\theta}\right)^3 (y_1 - y_3) e^{\frac{-(y_1)}{\theta}}$

(5) y_3의 주변 pdf는 $\int_{y_2}^{\infty} \int_0^{y_1} \left(\frac{1}{\theta}\right)^3 e^{\frac{-(y_1)}{\theta}} dy_2 d\, y_1 = \left(\frac{1}{\theta}\right) e^{\frac{-(y_3)}{\theta}}$

4) $g(y_1|y_3) = \dfrac{\left(\frac{1}{\theta}\right)^3 (y_1 - y_3) e^{\frac{-(y_1)}{\theta}}}{\left(\frac{1}{\theta}\right) e^{\frac{-(y_3)}{\theta}}} = \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 (y_1 - y_3) e^{\frac{-(y_1 - y_3)}{\theta}}$ 이므로

(1) E$\left(\frac{Y_1}{3} | y_3\right)$ = E$\left(\frac{Y_1}{3} | y_3\right)$

정의

- 라오-블랙웰 정리

4) $g(y_1|y_3) = \dfrac{\left(\frac{1}{\theta}\right)^3 (y_1 - y_3) e^{\frac{-(y_1)}{\theta}}}{\left(\frac{1}{\theta}\right) e^{\frac{-(y_3)}{\theta}}} = \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 (y_1 - y_3) e^{\frac{-(y_1 - y_3)}{\theta}}$ 이므로

(1) $E(\frac{Y_1}{3} | y_3) = E(\frac{Y_1 - Y_3}{3} | y_3) + E(\frac{Y_3}{3} | y_3)$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \int_{y_3}^{\infty} \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 (y_1 - y_3)^2 e^{\frac{-(y_1 - y_3)}{\theta}} dy_1 + \frac{Y_3}{3}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \frac{\Gamma(3)\theta^3}{\theta^2} + \frac{Y_3}{3} = \frac{2\theta}{3} + \frac{Y_3}{3}$$

(2) 이 때 $\gamma(y_3) = E(\frac{2\theta}{3} + \frac{Y_3}{3}) = \theta$ 이고, 라오블랙웰 정리에 따라 $\frac{Y_1}{3}$ 보다 분산이 작다.

(3) 하지만, 충분통계량 이라고 간주하기에 $\gamma(y_3)$는 내부에 θ를 포함하고 있으므로, 충분통계량이 아니다. 따라서, θ의 MVUE로 간주할 수 없다.

예제

- MLE 추정량과 충분통계량의 관계

1. $X_1, \dots, X_n$이 $\Gamma(1, {}^{1}/_{\theta})$를 따르는 확률변수에서 추출한 iid 확률표본이라고 할 때

1) 이 분포의 우도함수는

(1) $L(\theta; X) = \theta^n e^{-\theta \sum x_i}$ 이다.

2) 로그 우도 함수는

(1) $l(\theta) = \mathrm{n}\log\theta - \theta \sum x_i$ 이고

(2) 이 때 $\frac{\partial l(\theta)}{\partial\theta} = \frac{\mathrm{n}}{\theta} - \sum x_i = 0$ 에서 $\hat{\theta} = \frac{\mathrm{n}}{\sum x_i} = \overline{x}$

3) 이 때, MLE $\hat{\theta}$는 충분통계량 Y = $\sum x_i$의 함수이다.

(1) $\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \mathrm{nE}\left(\frac{1}{\sum x_i}\right) = \mathrm{n}\int_0^\infty \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} t^{-1} t^{n-1} e^{-\theta t} dt$

(2) 이 때, z= θt로 변수변환하면

- $\theta \frac{n}{(n-1)!} \Gamma(n-1) = \theta \frac{n}{n-1}$

(3) 따라서 $\frac{(n-1)\hat{\theta}}{n} = \frac{(n-1)}{\sum x_i}$ 는 θ의 최소분산불편추정량이다.