2차 형태의 분포

정의

- 개요

1. 행렬 A = $\Gamma^T \wedge \Gamma$ 로 고유분해 하자.
1) 이 때, 고유값행렬 ∧는 대각행렬이므로 $\Gamma^T \wedge \Gamma$ = $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_i V_n^T$로 표현이 가능하다.

2. 또한, 대각합 연산자를 tr A로 정의할 때
1) $tr(aA + bB)$ = $\mathrm{a}trA + btrB$
2) $tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB)$ 이다.

3. 또한 Q = $X^T AX$를 2차형태라고 정의할 때, 이 기댓값
1) $\mathrm{E}(Q)$ = $A\Sigma + \mu^T A\mu$로 나타낼 수 있다.(단, μ는 평균, Σ는 공분산 행렬)
2) 이를 증명하면
(1) $\mathrm{E}(Q)$ = $\mathrm{E}(\mathrm{tr}[X^T AX])$ = $\mathrm{E}(\mathrm{tr}[AX^T X]) = \mathrm{tr}AE[X^T X] = trA(\Sigma + \mu^T \mu) = A\Sigma + \mu^T A\mu$이다.

정의

- 2차 형태 Q의 MGF

1. 2차형태 Q = $\sigma^{-2}X^TAX$가 존재할 때, Q의 mgf는

   M(t) = $\boldsymbol{\prod_{i=1}^{n}(1-2t\lambda_i)^{-1/2}}$ = $|I-2tA|^{-1/2}$ 을 갖는다.

2. 이를 증명하면

1) A = $\Gamma^T \wedge \Gamma$ = $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i V_i V_n^T$ 에서

(1) Q = $\sigma^{-2}X^TAX$ = $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sigma^{-2}{V_i}^2\,X^2$ = $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\sigma^{-1}V_iX)^2$ 이다.

(2) Γ^T = $[V_1 \cdots V_k]$ 라고 하고, w = $\sigma^{-1}\Gamma X$라고 하면

- 이 때 X~$N_n(0,\sigma^2 I)$ 이고, 정규직교기저의 성질에 따라 $\Gamma^T\Gamma = I$ 이므로
- W ~ $N_n(0, I_r)$ 이다.

2) Q = $\sigma^{-2}X^TAX$를 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i {w_i}^2$로 나타내면,

(1) ${w_i}^2$은 각각 $x^2(1)$을 따르고, 따라서

(2) E[exp{tQ}] = $\mathrm{E}\left[\exp\left\{\mathrm{t}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i {w_i}^2\right\}\right] = \prod_{i=1}^{n}(1-2t\lambda_i)^{-1/2}$ 이다.

3) 한편,$|I-2tA|^{-1/2} = |\Gamma^T\Gamma - 2t\Gamma^T \wedge \Gamma| = |\Gamma^T(I-2t\wedge)\Gamma| = |I-2t\wedge| = \prod_{i=1}^{n}(1-2t\lambda_i)^{-1/2}$ 이므로

(1) 이것이 바로 원하는 결과이다.

정의

- 2차 형태 Q의 응용

1. X =$[X_1, \dots, X_n]$ 이 $N_n(\mu, \Sigma)$라고 하자. $(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)$ 는 $x^2(n)$을 따른다.

1) $\Sigma = \Gamma^T \wedge \Gamma$로 고유분해하면

2) $\Sigma^{-1} = \Gamma^T \wedge^{-1} \Gamma = \Gamma^T \wedge^{-\frac{1}{2}} \Gamma\Gamma^T \wedge^{-\frac{1}{2}} \Gamma$ 이고

(1) 이 때 $(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu)$ 는

(2) $(X-\mu)^T\Gamma^T \wedge^{-1/2} \Gamma\Gamma^T \wedge^{-1/2} \Gamma(X-\mu)$ 와 같고

- $\Gamma\Gamma^T = I$, $(X-\mu)^T\Gamma^T \wedge^{-1/2} = [\wedge^{-\frac{1}{2}} \Gamma(X-\mu)]^T$ 이므로
- $[\wedge^{-\frac{1}{2}} \Gamma(X-\mu)]^T \cdot \mathrm{I} \cdot [\wedge^{-\frac{1}{2}} \Gamma(X-\mu)]$

(3) 이 때, $\mathrm{Y} = \mathrm{A}X + b \sim N_m(\mathrm{A}\mu + b, \mathrm{A}\Sigma A^T)$ 이므로

- $\wedge^{-\frac{1}{2}} \Gamma(X-\mu) \sim N_m(\wedge^{-\frac{1}{2}} \Gamma\mu - \wedge^{-\frac{1}{2}} \Gamma\mu, \wedge^{-\frac{1}{2}} \Gamma\Gamma^T \wedge \Gamma\Gamma^T \wedge^{-\frac{1}{2}}) = N_m(0, I)$

3) 따라서,$(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) = [\wedge^{-\frac{1}{2}} \Gamma(X-\mu)]^T \cdot \mathrm{I} \cdot [\wedge^{-\frac{1}{2}} \Gamma(X-\mu)]$ 에서

(1) $[N_m(0, I)]^T \cdot \mathrm{I} \cdot [N_m(0, I)] \sim x^2(n)$ 이므로

(2) 결론적으로 $(X-\mu)^T\Sigma^{-1}(X-\mu) \sim x^2(n)$ 이다.

정의

- A가 멱등행렬일때 성질

1. A가 $A^2 = A$인 멱등행렬이라고 할 때, 그 고윳값은 0 or 1 이다.

1) 이 때, λ를 고유벡터 V에 상응하는 고윳값이라고 할 때

2) $\lambda \mathrm{v} = A\mathrm{v} = A^2\mathrm{v} = \lambda A v = \lambda^2 \mathrm{v}$

(1) 이 때, $\lambda \mathrm{v} - \lambda^2 \mathrm{v} = 0$에서 $\lambda(\lambda - 1)\mathrm{v} = 0$ 이므로, $\vec{\mathrm{v}} \neq 0$일 때 $\lambda = 0$ or 1 이다.

(2) 반대로 λ = 0 or 1 일때 A는 멱등행렬이다.

2. A가 멱등행렬일경우 그 대각합은 A의 Rank와 일치한다.

1) $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr} \wedge \Gamma^T \Gamma = \mathrm{tr} \wedge = Rank(A)$ 이다.

2) 즉, A가 멱등행렬인 경우, 그 대각합은 A의 Rank와 같다.

정의

- A가 멱등행렬일때 성질

3. X =$[X_1, \dots, X_n]$ 이 iid $N(0, \sigma^2)$일 때, Rank가 r인 A가 멱등행렬이 조건은 Q = $X^T AX \sim x^2(r)$을 따르는 것이다.

1) 멱등행렬의 고윳값 $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ = 1이고

2) 조건에 따라 Q ~ $x^2(r)$을 따른다면

(1) 결합 MGF는 $\prod_{i=1}^{n}(1-2t\lambda_i)^{-1/2}$ 을 따른다.

(2) 이 때, $\lambda_1 \cdots \lambda_r$ = 1 이면 $\prod_{i=1}^{n}(1-2t\lambda_i)^{-1/2}$ = $(1-2t)^{-r/2}$ 이고 이는 $x^2(r)$의 mgf이다.

3) 따라서, A는 앞서 살펴본 멱등행렬의 성질에 따라 멱등행렬이다.