# T 분포와 F분포

# 정의

- T분포

1. 개요

1) 자유도에 의해 통계적 성질이 완전히 결정되는 분포

2) 표준정규분포와 카이스퀘어분포의 결합분포를 변환한 분포이다.

2. Pdf의 유도

1) W ~ N(0,1) 이고, V ~ $\chi^2(\mathrm{r})$을 따를때, W와 V가 서로 독립이라면

(1) h(w,v) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)2^{\frac{r}{2}}} v^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}$

*(2)* $T = \frac{w}{\sqrt{v/r}}$ 로 정의하면, V=U 일 때 W = t · $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}}$

(3) 야코비안 |J| = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{r}} & \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}}$

# 정의

- T분포

2) 총 정리하여 결합 pdf를 변환하면

(1) G(t,u) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)2^{\frac{r}{2}}} u^{\frac{r}{2}-1} \exp\left(-\frac{u}{2}(1+\frac{t^2}{r})\right) \left|\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}}\right|$

(2) u로 적분하여 t에 대한 주변 pdf를 구하면

- g(t) = $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)2^{\frac{r}{2}}} u^{\frac{r}{2}-1} \exp\left(-\frac{u}{2}(1+\frac{t^2}{r})\right) \left|\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{r}}\right| du = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi r}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \cdot \frac{1}{(1+\frac{t^2}{r})^{\frac{(r-1)}{2}}}$

# 정의

- T 분포

3) t 분포의 평균과 분산을 구하면

(1) $\mathrm{E}(T^k) = \mathrm{E}(w^k (\frac{V}{r})^{-\frac{k}{2}}) = \mathrm{E}\left(w^k\right) \cdot E[(\frac{V}{r})^{-\frac{k}{2}}] = \mathrm{E}\left(w^k\right) \cdot \frac{2^{-k/2}\Gamma\left(\frac{r}{2}-\frac{k}{2}\right)}{T(r/_2)r^{-k}/_2}$ 이므로

(2) $\mathrm{E}(\mathrm{T}) = 0 \cdot \frac{2^{-k/2}\Gamma\left(\frac{r}{2}-\frac{k}{2}\right)}{T(r/_2)r^{-k}/_2} = 0$

(3) $\mathrm{E}(T^2) = \mathrm{E}(w^2) \cdot \frac{2^{-k/2}\Gamma\left(\frac{r}{2}-1\right)}{T(r/_2)r^{-1}} = r/(r-2)$