

MVUE를 찾는 방법

정의

- 충분통계량의 기댓값을 구하기
 1. 충분통계량의 기댓값을 구하여 함수를 직접적으로 정의하는 것
 - 1) 충분통계량의 기댓값을 구한 후, 이 기댓값의 함수
 - (1) $E(\psi(y_1)) = \theta$ 가 되도록 $\psi(y_1)$ 를 정의한다.

정의

- MLE 추정량을 통해 도출

1) MLE 추정량을 도출한 결과가 $\psi(y_1)$, 즉 y_1 에 대한 함수꼴로 나타나고

(1) $E[\psi(y_1)] = \theta$ 이면, $\psi(y_1)$ 는 MVUE이다.

2) 이 때 θ 를 참모수, $\theta_{mle} = \psi(y_1)$ 이고, $\hat{\theta}$ 를 MVUE라고 한다면

(1) $(\hat{\theta} - \theta_{mle}) \xrightarrow{p} 0$ 이고

(2) $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} N[0, (g'(\theta)^2) \sigma^2]$ 이다. (Δ -방법의 응용)

정의

- 조건부 기댓값을 구하기

1. 라오-블랙웰 정리에 따라 불편추정량을 충분통계량의 조건부 기댓값으로 나타내는 방법
2. 즉, $Y_1 = u(X_1, \dots, X_n)$ 에서 $E(Y_1) = \theta$ 인 불편추정량이라고 할 때
 - (1) 만약 $Y_2 = k(X_1, \dots, X_n)$ 가 X 의 충분통계량이라고 가정할 경우
 - (2) $E(Y_1|Y_2) = \psi(y_1)$ 는 θ 에 대한 MVUE가 된다.

예제

- 베르누이분포의 분산의 MVUE 구하기
 1. X_1, \dots, X_n 이 $b(1, \theta)$ 를 따르는 분포에서 추출한 확률표본이라고 하자.
 - 1) 이 때, $\frac{Y_1}{n} Y_1 = \sum x_i$ 라고 할 때
 - (1) $\frac{Y_1}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$ 는 θ 의 MVUE이다.
 - 2) $\text{Var}(Y_1) = \theta(1 - \theta)$ 의 MVUE를 구하면
 - (1) θ 의 MLE 추정량인 $\frac{Y_1}{n}$ 를 우선 고려할 수 있다.
 - (2) 따라서, $\psi(y_1) = \frac{Y_1}{n}(1 - \frac{Y_1}{n})$ 의 기댓값을 구하면
 - (3) $E[\psi(y_1)] = E[\frac{Y_1}{n}(1 - \frac{Y_1}{n})] = \frac{E[Y_1]}{n} - \frac{E[Y_1^2]}{n^2}$ 에서
 - $\frac{E[Y_1]}{n} = \theta$, $\frac{E[Y_1^2]}{n^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{n} + \theta^2$ 에서
 - $\frac{E[Y_1]}{n} - \frac{E[Y_1^2]}{n^2} = \theta - \frac{\theta(1-\theta)}{n} - \theta^2 = (n-1) \frac{\theta(1-\theta)}{n}$
 - 3) 이를 조정하여 $\theta(1 - \theta)$ 에 대한 함수로 만들면
 - (1) $E\left[\frac{n}{(n-1)} \psi(y_1)\right] = \theta(1 - \theta)$
 - (2) 이 때, $\tilde{\theta} = \frac{n}{(n-1)} \psi(y_1)$ 는 $\theta(1 - \theta)$ 에 대한 최소분산불편추정량이다.

예제

- 조건부 기댓값 기법

1. X_1, \dots, X_n 이 pdf $N(\theta, 1)$ 에서 추출한 확률표본이라고 하고,
$$\int_{-\infty}^c \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \theta)^2}{2}\right) dx = p(X \leq c) = \Phi(c - \theta)$$
 라고 하면

1) $\Phi(c - \theta)$ 의 불편추정량을 구하려고 할 때

(1) $u(x) = \begin{cases} 1, & x \leq c \\ 0, & x > c \end{cases}$ 인 함수를 정의하면 $u(x)$ 의 기댓값은

(2) $E[u(x)] = 1 \cdot P[x - \theta \leq c - \theta] + 0 \cdot P[x - \theta > c - \theta] = \Phi(c - \theta)$ 이다.

(3) 따라서, $u(x)$ 는 $\Phi(c - \theta)$ 에 대한 불편추정량 이다.

예제

- 조건부 기댓값 기법

1. X_1, \dots, X_n 이 pdf $N(\theta, 1)$ 에서 추출한 확률표본이라고 하고,
$$\int_{-\infty}^c \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \theta)^2}{2}\right) dx = p(X \leq c) = \Phi(c - \theta)$$
라고 하면

2) 이 때, $N(\theta, 1)$ 에서 θ 에 대한 완비충분통계량인 $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$ 의 분포와 X_1 의 결합 분포를 정의하면

(1) 이는 $N([\theta, \theta], [1, \frac{1}{n}])$ 인 이변량 정규이다. (단, $\rho = \frac{1}{\sqrt{n}}$)

(2) 따라서, 조건부 기댓값의 선형함수로 변환하면, 우리가 구하려는 조건부 기댓값 $E(u(x)|\bar{X})$ 를 구할 수 있다.

(3) 우선, $E(X|\bar{X})$ 를 구하면, 이 조건부 기댓값은

- $\theta + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (\bar{X} - \theta) = \bar{X}$ (평균)

- $\sigma_1^2(1 - \rho^2) = \frac{n-1}{n}$ (분산)

- 을 따르는 이변량 정규를 따른다.

예제

- 조건부 기댓값 기법

1. X_1, \dots, X_n 이 pdf $N(\theta, 1)$ 에서 추출한 확률표본이라고 하고,
$$\int_{-\infty}^c \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i - \theta)^2}{2}\right) dx = p(X \leq c) = \Phi(c - \theta) \text{ 라고 하면}$$

3) 이제, $E(u(X)|\bar{X})$ 를 구하면

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} u(X) \sqrt{\frac{n}{n-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n(x-\bar{x})^2}{2(n-1)}\right) dx = \int_{-\infty}^c \sqrt{\frac{n}{n-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n(x-\bar{x})^2}{2(n-1)}\right) dx$$

(2) $Z = \sqrt{\frac{n(x-\bar{x})^2}{(n-1)}}$ 로 변수변환을 실시하면, $c' = \frac{\sqrt{n}(c-\bar{x})}{\sqrt{n-1}}$ 일때

$$- \int_{-\infty}^{c'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \Phi(c') = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(c-\bar{x})}{\sqrt{n-1}}\right) \text{ 이고, 이것이 MVUE 이다.}$$