균일 최강력 검정

정의

- 개요

1. 복합 대립가설에 대한 단순귀무가설을 최량기각역하에서 검증하는 것

1) 즉, 단순최강력검정이 단순가설 H_0 에 대한 단순가설 H_1을 검정하는 것이라면

2) 균일최강력검정은 단순가설 H_0 에 대해 복합대립가설 H_1을 검정한다.

정의

- 충분통계량과 균일최강력검정

1. $\mathrm{Y} = u(X_1, \ldots, X_n)$을 θ에 대한 충분통계량이라고 하자.

1) 정의에 따라 $\mathrm{L}(\theta; X_1, \ldots, X_n) = k_1(u(X_1, \ldots, X_n); \theta) k_2(X_1, \ldots, X_n)$ 으로 분해 가능하다.

2) 이 때, $H_0 : \theta = \theta_0$ VS $H_1 : \theta \neq \theta_0$의 최량검정을 실시하는 경우

(1) $\frac{\mathrm{L}(\theta_0; X_1, \ldots, X_n)}{\mathrm{L}(\theta_n; X_1, \ldots, X_n)} = \frac{k_1(u(X_1, \ldots, X_n); \theta_0) k_2(X_1, \ldots, X_n)}{k_1(u(X_1, \ldots, X_n); \theta_n) k_2(X_1, \ldots, X_n)} = \frac{k_1(u(X_1, \ldots, X_n); \theta_0)}{k_1(u(X_1, \ldots, X_n); \theta_n)}$

(2) 즉, $[\theta_0, \theta_n]$에 대한 충분통계량의 함수만으로 최량검정 실시가 가능하다.

정의

- 단조우도비

1. 어떤 통계량 $\mathrm{Y} = u(X_1, \ldots, X_n)$에 대하여
   Y를 충분통계량으로 활용하는 우도비 $\frac{\mathrm{L}(\theta_0; X_1, \ldots, X_n)}{\mathrm{L}(\theta_n; X_1, \ldots, X_n)}$ 가 g(Y)에서 단조감소를 보인다고 하자.

1) 이 때, $g(y)$에서 g가 마찬가지로 단조감소일경우 그 비율은 같다. 즉

2) $\frac{\mathrm{L}(\theta_0; X_1, \ldots, X_n)}{\mathrm{L}(\theta_n; X_1, \ldots, X_n)}$ = g(Y) 이다.

(1) 한편, 네이만-피어슨 정리에 따라 $\frac{\mathrm{L}(\theta_0; X_1, \ldots, X_n)}{\mathrm{L}(\theta_n; X_1, \ldots, X_n)} = g(y) \leq k$를 만족할 때

(2) $\alpha = P_{\theta_0}[g(Y) \geq C_Y]$ 인 최량기각역 C_Y를 정의할 수 있다.

(3) 이 때, $\alpha = P_{\theta_0}[Y \geq g^{-1}(C_Y)]$ 로 재정의 할 수 있고,
이는 다시 말해 충분통계량을 이용해 가설 검정을 수행할 수 있음을 암시한다.

정의

- 단조우도비와 완비충분통계량의 연계

1. 어떤 확률표본 $X_1, \dots, X_n$이 지수족을 갖는 pdf에서 추출한 확률표본이라고 하자.

   즉 $f(\mathrm{x}; \theta)$ = exp[p(θ)k(x) + H(x) + q(θ)] 이다.

1) 이 때, 우도비 $\frac{\mathrm{L}(\theta_0; X)}{\mathrm{L}(\theta_n; X)} = \frac{\exp[p(\theta_0)k(x) + H(x) + q(\theta_0)]}{\exp[p(\theta_n)k(x) + H(x) + q(\theta_n)]}$

   = exp{(p(θ_0) -p(θ_n))k(x) + H(x) + n(q(θ_0)-q(θ_n))}

2) 이는 다시말해 $\mathrm{Y} = \sum k(x_i)$라는 완비충분통계량을 가지는 분포이고

(1) g(Y)를 Y에 대한 함수라고 했을 때, 이에 대한 단조우도비를 갖는다.

(2) 따라서 $H_0 : \theta < \theta_0$ VS $H_1 : \theta > \theta_0$라는 가설을 검정할 경우

- α = $P_{\theta_0}[Y \geq g^{-1}(k)]$ 를 만족하는 최량기각역과 완비충분통계량 Y를 정의 가능하다.