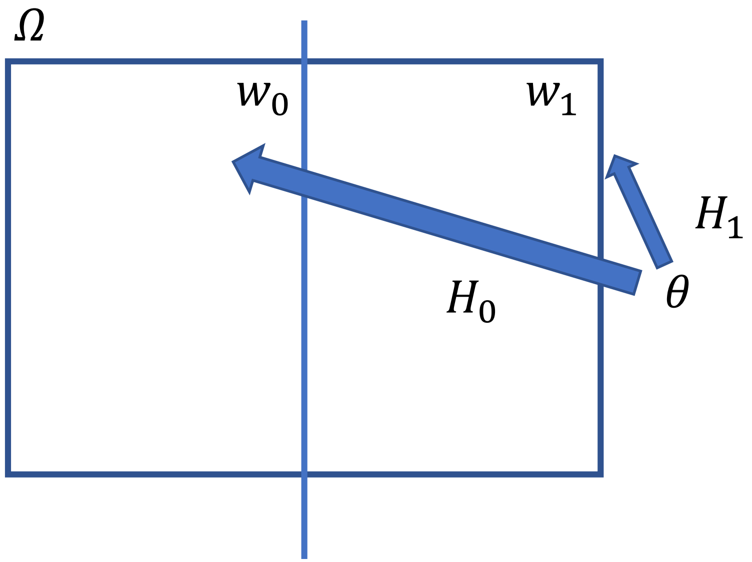
가설검정

정의

- 귀무가설과 대립가설

1. X가 $f(x;\theta)$의 pdf를 가질 때, w_0와 w_1의 합집합이 Ω 이고, $\theta \in w_0$ 이거나 $\theta \in w_1$이라고 하자.

1) 이 때, $\theta \in w_0$ 이면 귀무가설이라고 하고, $\theta \in w_1$이면 대립가설이라고 한다.



정의

- 기각역

1. $X_1, \dots, X_n$이 $f(x;\theta)$ 를 pdf로 가지는 확률변수에서 추출한 확률표본이라고 할 때

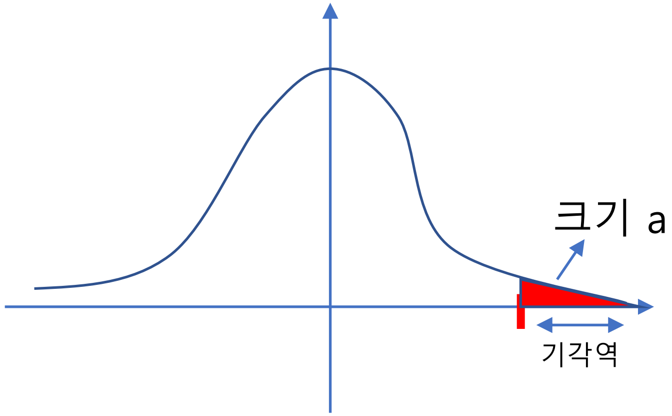
1) 어떤 가설 $H_0 : \theta \in w_0$ VS $H_1 : \theta \in w_1$ 의 검정에서

2) 표본의 공간 D = $\{X_1, \dots, X_n$의 범위$\}$라고 한다면, 어떤 부분공간 C에 대하여

(1) 이 때, $(X_1, \dots, X_n) \in$ C 이면 H_0 기각

(2) 또는, $(X_1, \dots, X_n) \in C^c$ 이면 H_0 유지 라고 규칙을 정한다면

3) 이 때 $(X_1, \dots, X_n)$ 이 속하는 공간 C를 기각역이라고 한다.



정의

- 1종 오류와 2종 오류

1. $(X_1, \dots, X_n) \in$ C 라서 H_0 를 기각했는데, 사실 $\theta \in w_0$ 였다면 1종 오류라고 한다.

2. $(X_1, \dots, X_n) \in C^c$ 라서 H_0 를 유지했는데, 사실 $\theta \in w_1$ 이었다면 2종 오류라고 한다.

H_0	**참**	**거짓**
기각	1종 오류	옳은 결정
채택	옳은 결정	2종 오류

정의

- 검정력과 크기 a

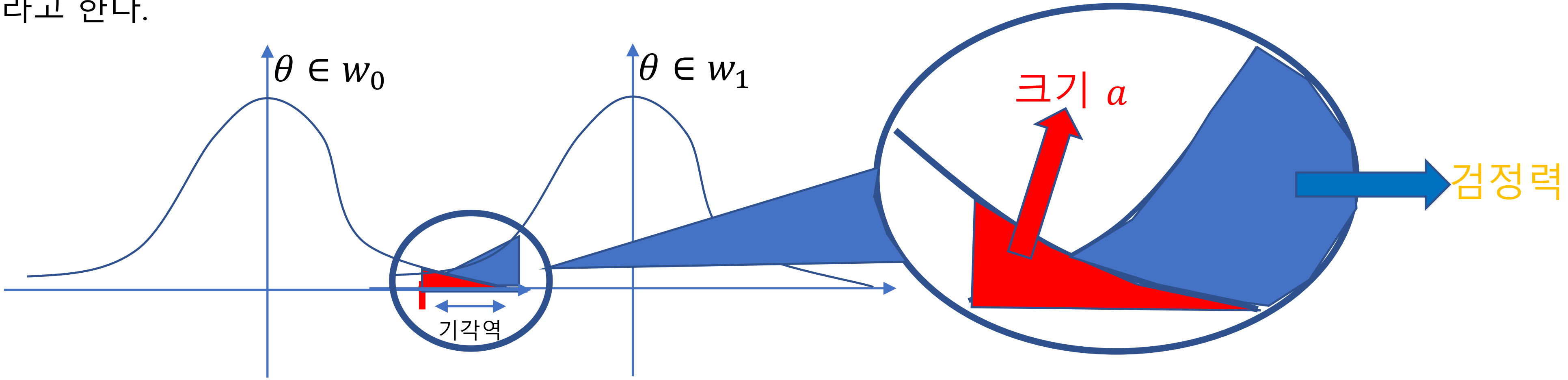
1. $\theta \in w_0$ 일때 기각역 C가 설정되었다고 하고,

1) $a = \max_{\theta \in w_0} p[(X_1, \dots, X_n) \in C]$ 이면 이를 크기 a라고 한다.

2) 즉, 귀무가설 H_0 가 참이라고 가정했을 때, 해당 가설 H_0 에서 기각역 C에 속하는 만큼의 확률을 a라고 한다. 이를 종종 유의수준이라고 표현한다.

2. 한편, 크기 a인 모든 기각역 C 중에서 H_1 이 참인데 H_0 를 유지하는 2종 오류를 최소화하는 기각역이 존재할 수 있다.

1) 즉, $\theta \in w_1$에 대하여 1- $p_{\theta \in w_1}$[2종 오류] = $p_{\theta \in w_1}[(X_1, \dots, X_n) \in C]$ 가 최대화되길 원하며, 2) 이 때 확률 $p_{\theta \in w_1}[(X_1, \dots, X_n) \in C]$ 을 검정력 이라고 한다.



예제

- X를 평균 μ와 분산 σ 를 갖는 확률변수라고 하자. 이 때
  H_0 :$\mu \in \mu_0$ VS H_1 :$\mu > \mu_0$ 을 검증하고자 한다.

1. X에서 추출한 $X_1, \dots, X_n$이 확률표본이고, $\bar{x}, s^2$을 각각 표본평균과 표본 분산이라 할때

1) $\frac{(\bar{x}-\mu_0)}{s/\sqrt{n}}$ ~ N(0,1) 인것을 이용하면

(1) $\frac{(\bar{x}-\mu_0)}{s/\sqrt{n}} \geq Z_a$ 이면 H_1 채택 에서 검정력 함수를 구하면

- $\gamma(\mu)$ =$\mathrm{p}(\bar{x} \geq Z_a\ s/\sqrt{n} + \mu_0)$ = $\mathrm{p}(\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \geq Z_a + \frac{\mu_0-\mu}{s/\sqrt{n}}) \approx 1 - \Phi(Z_a + \frac{\mu_0-\mu}{s/\sqrt{n}})$

정의

- 양측검정

1. 단방향이 아니라 양방향의 가설을 모두 만족하는지 확인하는 것
2. 크거나 작은 등, 방향을 일방향으로 확정할 수 없을때 사용한다.

3. X가 평균 μ, 분산 σ을 가진다고 할 때,

1) $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ 를 검증한다.

2) 이 때, $X_1, \dots, X_n$이 X에서 추출한 확률표본이고, $\overline{x}$, s^2을 각각 표본확률, 표본분산 이라고 할 때

(1) $\overline{x} \leq h$ 혹은 $\overline{x} \geq h$ 일 때 H_1 을 채택하는 것으로 실험을 정의한다.

(2) 이 때, 크기 a 는

- $a = \max_{\theta \in w_0} p[\overline{x} \leq h \; or \; \overline{x} \geq h] = \underset{\theta \in w_0}{p} [\overline{x} \leq h] + \underset{\theta \in w_0}{p} [\overline{x} \geq h]$ 이므로, a는 $\frac{a}{2}$ 로서 고려될 필요

정의

- 양측검정

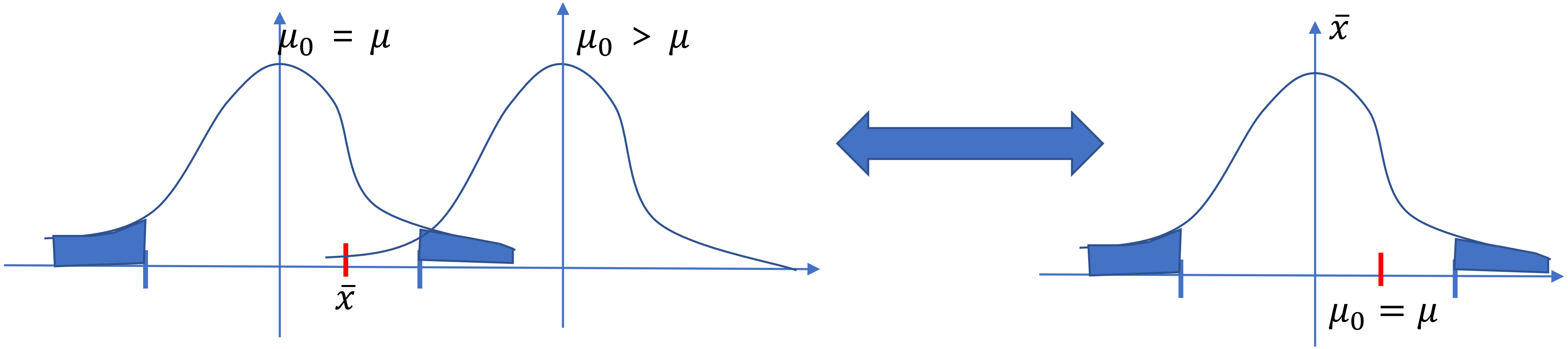
3) 이 때, 검정력 함수는 $\frac{(\bar{x}-\mu_0)}{s/\sqrt{n}}$ ~ N(0,1)을 이용하면

(1) $\gamma(\mu) = \mathrm{p}\left(\bar{x} \le \mu_0 - Z_{a/2}\sigma/\sqrt{n}\right) + \mathrm{p}\left(\bar{x} \le \mu_0 - Z_{a/2}\sigma/\sqrt{n}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} - Z_{a/2}\right) + \Phi\left(\frac{\mu_0-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + Z_{a/2}\right)$

4) 양측검정과 신뢰구간 사이에는 깊은 연관성이 있다.

(1) $\mu_0 - t_{\frac{a}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \le \bar{x} \le \mu_0 + t_{\frac{a}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$ 일때 H_0 를 채택하는 문제는

(2) $\mu_0 \in (\bar{x} - t_{\frac{a}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{a}{2},n-1}\frac{s}{\sqrt{n}})$ 일때 H_0 를 채택하는 문제로 변환할 수 있다.



정의

- 확률화 검정

1) $X_1, \dots, X_n$을 모수 θ를 가지는 확률표본이라고 하자.

2) 이 때, $H_0 : \theta = 0.1$, $H_1 : \theta > 0.1$ 이고, 기각역이 $[Y \geq \sum_1^{10} X_i] \geq 3$ 이고

$Y = \frac{(10\theta)^{\sum_1^{10} X_i} e^{-10\theta}}{\sum_1^{10} X_i!}$ 인 통계량이라고 한다면

(1) $\mathrm{P}(Y \geq 3) = 1 - \mathrm{P}(Y \leq 2)$ = 1 – 0.92 = 0.080

(2) $\mathrm{P}(Y \geq 4) = 1 - \mathrm{P}(Y \leq 3)$ = 1 – 0.981 = 0.019

3) 이 때, a를 정확히 0.05로 잡기를 원하는 경우, 베르누이 분포를 이용할 수 있다.

(1) W가 P(w=성공) = $\frac{\mathbf{0.050 - 0.019}}{\mathbf{0.080 - 0.019}}$ = $\frac{\mathbf{31}}{\mathbf{61}}$ 인 베르누이 분포를 따른다고 한다면

(2) 기각규칙은 $[Y \geq \sum_1^{10} X_i] \geq 4$ 이거나 $[Y \geq \sum_1^{10} X_i] = 3$ 이면서 w=성공

- P$(Y \geq 4)$ + P$(\{Y = 3\} \cap \{w = \text{성공}\})$
- 이 때, Y와 W는 독립이므로, P$(Y \geq 4)$ + P$(Y = 3) \cdot \mathrm{P}(w = \text{성공})$ = 0.019+0.061 $\cdot$ $\frac{\mathbf{31}}{\mathbf{61}}$ = 0.05
- 이 경우, $Y \geq 4$ 또는 $Y = 3$ 동시에 $w = \text{성공}$ 은 이 검정의 기각역이 된다.

예제

- 마일 단위 타이어 수명을 X, X가 μ=θ, σ=5000인 정규분포를 따른다고 한다.

1. 과거 경험에 의하면 θ=30000 인데, 제조사의 새 타이어는 35000이라고 주장한다.
2. 이 때, 검정력 $\gamma(30000) = 0.01, \gamma(35000) = 0.98$ 이 되도록 n과 c를 결정하라

1) $\gamma(30000)$ = 0.01이란 의미는, μ=30000이라는 가설 하에서 그 확률이 0.01이라는 의미
2) $\gamma(35000)$ = 0.98이란 의미는, μ=35000이라는 가설 하에서 그 확률이 0.98이라는 의미
3) 따라서, $\gamma(30000)$ = $p_{\theta=30000}[(X_1, \dots, X_n) \in \mathrm{C}]$ = $p\left(\frac{\mathrm{c}-30000}{5000/\sqrt{n}} \geq 2.326 = c\right) = 0.01$
4) 따라서, $\gamma(35000)$ = $p_{\theta=35000}[(X_1, \dots, X_n) \in \mathrm{C}]$ = $p\left(\frac{\mathrm{c}-35000}{5000/\sqrt{n}} \leq -2.05 = c\right) = 0.98$
5) 둘을 연립하여 n을 푼다.