이항 확률변수의 변환

정의

- $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$를 확률벡터라고 할 때, Y = $\begin{bmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \end{bmatrix}$의 관계가 성립된다면

1. x_1, x_2의 cdf를 이용하여 $Y_1 = g(x_1)$, $Y_2 = g(x_2)$의 cdf를 구할 수 있다.

2. PDF의 변환을 구하는 방법은 다음의 순서를 따른다.

1) 역함수를 구한다
2) 역함수의 범위를 구한다.
3) $\frac{F_{x_1,x_2}(x_1,x_2)}{\partial y} = f_{x_1,x_2}(x_1,x_2) \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$ 이므로, $\frac{\partial x}{\partial y}$에 해당하는 야코비안 변환(행렬)을 구한다.
4) 위 야코비안 변환행렬의 부피 변환을 구하기 위해 행렬식을 구한다.

정의

3. Mgf의 변환을 구할때는 다음의 순서를 따른다.

1) X와 Y의 관계식을 이용해 mgf를 구성할 때 Y = $x_1 + x_2$ 라고 한다면

(1) $e^{ty} = e^{t(x_1+x_2)}$

(2) 이를 x_1과 x_2의 mgf 적분에 투입한다.

- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x_1+x_2)} f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2)\, dx_1\, dx_2 = [\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_1} f_{x_1}(x_1)\, dx_1][\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx_2} f_{x_2}(x_2)\, dx_2]$

- 위와 같이, 두 개의 적분으로 분해하여 결합하면 계산이 간편해진다.

예제

- x_1,x_2의 결합 pdf가 $f(x)$ $\begin{cases} \frac{1}{4}\,e^{-\frac{(x_1+x_2)}{2}} & 0<x_1<\infty \quad 0<x_2<\infty \\ 0 & else \end{cases}$

1) $y_1=\frac{1}{2}(x_1-x_2)$ 라고 할 때, $y_2=x_2$라고 정하면
2) $x_2=y_2$, $x_1=2y_1+y_2$
(1) 이 때, pdf를 구하면

- 범위는 $0<2y_1+y_2<\infty$ 이므로, $\frac{1}{2}y_2<y_1<\infty$이고 또 $-2y_1<y_2<\infty$ 이다.
- $f_{y_1,y_2}(y_1,y_2)= f_{x1,x2}(2y_1+y_2,y_2)$ 이므로, $f_{y_1,y_2}(y_1,y_2)$ $\begin{cases} \frac{1}{4}\,e^{-\frac{(2y_1+y_2+y_2)}{2}}\cdot|J| & \frac{1}{2}y_2<y_1<\infty \\ & -2y_1<y_2<\infty \\ 0 & \end{cases}$
- 이 때, |J| = $\begin{bmatrix} \frac{\partial x1}{\partial y_1} & \frac{\partial x1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x2}{\partial y_1} & \frac{\partial x2}{\partial y_2} \end{bmatrix}$의 행렬식이다. 따라서 $\begin{bmatrix} \frac{\partial 2y_1+y_2}{\partial y_1} & \frac{\partial 2y_1+y_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y2}{\partial y_1} & \frac{\partial y2}{\partial y_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=2$

예제

(2) 이 때, y_1만의 주변확률밀도함수를 구하면

$$- pdf\ y_1 = \begin{cases} \int_{-2y_1}^{0} \frac{1}{4}\ e^{-\frac{(2y_1+y_2+y_2)}{2}} \cdot |2|\, dy_2 & \text{If } -\infty_1 < y_2 < 0 \\ \int_{0}^{\infty} \frac{1}{4}\ e^{-\frac{(2y_1+y_2+y_2)}{2}} \cdot |2|\, dy_2 & \text{If } 0 < y_2 < \infty \end{cases}$$

예제

- $x_{1,}x_2$의 결합 pdf가 $f(x)$ $\begin{cases} e^{-(x_1+x_2)} & 0 < x_1 < \infty \;\; 0 < x_2 < \infty \\ 0 & else \end{cases}$

- $y_1 = x_1 + x_2$ 일 때, y_1 의 MGF를 구하라

1) $y_2 = x_2$라고 하면, 이 때 역함수는

(1) $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_2$

2) 범위를 정하면

(1) $0 < x_1 < \infty$ 에서 $0 < y_1 - y_2 < \infty$, $\therefore y_2 < y_1 < \infty$

(2) $0 < x_2 < \infty$ 에서 $0 < y_2 < \infty$

예제

3) MGF를 구하기 위해, 우선 y_1의 주변 pdf를 구하면

(1) $f_{y_1,y_2}(y_1, y_2)= f_{x1,x2}(y_1 - y_2, y_2) = e^{-(x_1+x_2)} \cdot |J|$ $\quad 0 < y_2 < \infty$

$y_2 < y_1 < \infty$

(2) $|J| = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1 - y_2}{\partial y_1} & \frac{\partial y_1 - y_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial y_1} & \frac{\partial y_2}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = |1|$

(3) $f_{y_1} = \int_0^{y_1} e^{-y_1} \cdot |1| \, dy_2 = y_1 e^{-y_1}$

4) 위에서 구한 pdf를 이용하여 MGF를 구하면

(1)M(t) $= \int_0^{y_1} e^{ty_1} y_1 e^{-y_1} \, dy_1 = \int_0^{y_1} y_1 e^{y_1(t-1)} \, dy_1$

(2) 부분적분법으로 위를 풀면

- $\left[y_1 \cdot e^{y_1(t-1)} \cdot \frac{1}{(t-1)} \right]_0^{\infty}$ - $\left[e^{y_1(t-1)} \cdot \frac{1}{(t-1)^2} \right]_0^{\infty} = -\frac{1}{(t-1)^2}$