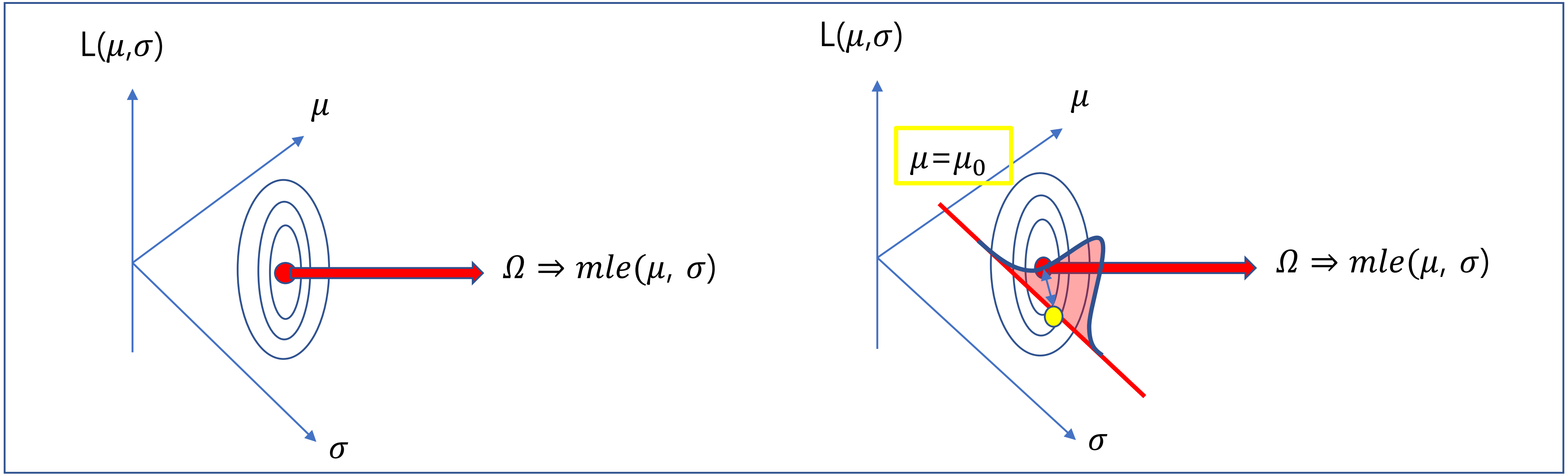
다중 모수의 최대우도검정

정의

- 개요

1. 어떤 모수들의 MLE값이 결정되면서 다른 모수의 MLE값에 영향을 미친다.
2. 이 때, 변화된 MLE값을 통해 특정 가설을 내세우는것이 유의미한 검정 차이를 만들어 내는지 확인할 수 있다.



정의

- 개요

3. 이 때, 이 두 MLE 추정량의 값의 비율 통계량

1) $\Lambda = \frac{L(\hat{\theta} \in \hat{w})}{L(\hat{\theta} \in \hat{\Omega})}$ 를 이용해 그 유의미성을 검정할 수 있는데

2) 이를 다중 모수에서의 최대우도검정이라고 한다.

정의

- 추정 방법

1. 제약 조건 $\begin{bmatrix} g_1(\theta) \\ \cdots \\ g_q(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_q \end{bmatrix}$ 가 주어졌을 때

1) L(Ω) : 제약조건이 없을때의 공간

2) L(w) : 제약조건이 부여될때의 공간

3) 위 공간 하에서, 공간 w는 전체 p차원에서 제약조건 q차원만큼 감소한 p-q 차원을 갖는다.

2. 이 때, 우도비 검정은

1) $\Lambda = \dfrac{\max_{\theta \in w} L(\theta)}{\max_{\theta \in \Omega} L(\theta)}$ 이고,

2) 스칼라와 마찬가지로 -2log(Λ) $\rightarrow x^2(q)$로 수렴한다.

예제

- $X_1, \dots, X_n$이 iid N(μ, σ^2) 이라고 할 때 H_0 :μ= μ_0 VS H_1 :$\mu \neq \mu_0$ 를 검증하면

1. L(Ω) 를 구하면

1) L(Ω) = $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2\right)$에서

(1) MLE 추정량을 구하면

- $\mu_{mle} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{x}$
- σ_{mle} = $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})^2$ = s

(1) MLE 추정량을 삽입하면

- $\max_{\theta \in \Omega} L(\theta)$ = $L(\hat{\Omega})$ = $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S} \exp\left(-\frac{1}{2}(\frac{X_i-\overline{x}}{s})^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{(s)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp(-\frac{n}{2})$

(2) 가설 평균 μ_0를 넣어 다시 추정한 MLE 추정량을 삽입하면

- $\sigma_{0,mle}$ = $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2$ (단, μ_0는 임의의 상수)
- $\max_{\theta \in w} L(\theta)$ = $L(\widehat{w})$ = $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{0,mle}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\frac{X_i-\mu_0}{s})^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{(\sigma_{0,mle})^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp(-\frac{n}{2})$

예제

- $X_1, \dots, X_n$이 iid N(μ, σ^2) 이라고 할 때 H_0 :$\mu = \mu_0$ VS H_1 :$\mu \neq \mu_0$ 를 검증하면

1. $L(\hat{\Omega})$ **와** $L(\hat{w})$ **를 정의하면**

1) L(Ω) = $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$에서

(1) MLE 추정량을 구하면

- $\mu_{mle} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{x}$
- $\sigma_{mle} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x})^2$ = s

(1) MLE 추정량을 삽입하면

- $\max_{\theta \in \Omega} L(\theta) = L(\hat{\Omega}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi S}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\overline{x}}{s}\right)^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{(s)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp(-\frac{n}{2})$

2) L(w) = $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$ 에서

(1) MLE 추정량을 구하면

- $\sigma_{0,mle} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2$ (단, μ_0는 임의의 상수)

(2) 가설 평균 μ_0를 넣어 다시 추정한 MLE 추정량을 삽입하면

- $\max_{\theta \in w} L(\theta) = L(\hat{w}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{0,mle}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\mu_0}{s}\right)^2\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{(\sigma_{0,mle})^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp(-\frac{n}{2})$

예제

- $X_1, \dots, X_n$이 iid N(μ, σ^2) 이라고 할 때 H_0 :μ= μ_0 VS H_1 :$\mu \neq \mu_0$ 를 검증하면

2. 우도비를 정의하면

1) $$\Lambda = \frac{\max_{\theta \in w} L(\theta)}{\max_{\theta \in \Omega} L(\theta)} = \frac{L(\hat{w})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{(s)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp(-\frac{n}{2})}{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \frac{1}{\left(\sigma_{0,mle}\right)^{\frac{n}{2}}} \cdot \exp(-\frac{n}{2})} = \left[\frac{\sigma_{0,mle}}{s}\right]^{\frac{2}{n}} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{x})^2}\right]^{\frac{2}{n}}$$

2) 이 때, $-2\log(\Lambda) \rightarrow x^2(q)$ 를 이용하여, 이 가설을 검정할 수 있다.

예제

- 3항 밀도함수 $f(x_1, x_2; p_1, p_2) = p_1{}^{x_1} p_2{}^{x_2} (1 - p_1 - p_2)^{(n - x_1 - x_2)}$이라고 할 때
- $[(x_{11}, x_{21}), \cdots, (x_{1n}, x_{2n})]$을 이 분포에서 추출한 확률표본이라고 하자.

  $H_0 : p_1 = p_2$ VS $H_1 : p_1 \neq p_2$를 검증하면

1. $T_j = \Sigma x_{ji}$ 라고 하면, 이 때

1) $L(\hat{\Omega})$ 를 구하면

(1) 1)$\hat{p}_{mle} = \frac{T_j}{n}$ *이다.(j=1,2)*

(2) $L(\hat{\Omega}) = \widehat{p_1}^{n\widehat{p_1}} \widehat{p_2}^{n\widehat{p_2}} (1 - \widehat{p_1} - \widehat{p_2})^{n(1 - \widehat{p_1} - \widehat{p_2})}$

2) $L(\widehat{w})$ 를 정의하면

(1) $L(w) = p^{T_1 + T_2}$ *(1-2p)*$^{n - T_1 + T_2}$

(2) 이 때 MLE를 구하면

- $\frac{\partial l(w)}{\partial p} = \frac{(T_1 + T_2)}{P} - \frac{(n - T_1 - T_2)}{1 - 2P} = 0$ 에서
- $\hat{p} = \frac{(T_1 + T_2)}{2n} = \frac{(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)}{2}$

(3) 따라서 $L(\widehat{w}) = \frac{(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)}{2}^{n(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)} (1 - \hat{p}_1 + \hat{p}_2)^{n(1 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2)}$

예제

- 3항 밀도함수 $f(x_1, x_2; p_1, p_2) = \ p_1{}^{x_1} p_2{}^{x_2}(1 - p_1 - p_2)^{(n - x_1 - x_2)}$이라고 할 때
- $[(x_{11}, x_{21}), \cdots, \ (x_{1n}, x_{2n})]$을 이 분포에서 추출한 확률표본이라고 하자.

  H_0 : $p_1 = \ p_2$ VS H_1 :$p_1 \neq p_2$를 검증하면

4)우도 함수를 정의하면

(1) $\Lambda = \frac{L(\hat{w})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{\widehat{p_1}^{n\widehat{p_1}} \widehat{p_2}^{n\widehat{p_2}} (1 - \widehat{p_1} - \widehat{p_2})^{n(1 - \widehat{p_1} - \widehat{p_2})}}{\frac{(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)}{2}^{n(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)} (1 - \hat{p}_1 + \hat{p}_2)^{n(1 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2)}} = \left[\frac{2\widehat{p_1}}{(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)}\right]^{n\widehat{p_1}} \left[\frac{2\widehat{p_2}}{(\hat{p}_1 + \hat{p}_2)}\right]^{n\widehat{p_2}}$

(2) 이 때, $-2\log(\Lambda) \rightarrow x^2(q)$ 를 이용하여, 이 가설을 검정할 수 있다.