완비성과 유일성

정의

- 개요

1. 연속형 또는 이산형 확률변수 z가 분포족 $\{\mathrm{h}(\mathrm{z};\theta):\ \theta \in \Omega\}$ 중 하나를 pdf 또는 pmf로 취하는 확률변수라고 하자.

1) 이 때, $\theta \in \Omega$에 대해서

(1) 조건 $\mathrm{E}[u(z)] = 0$ (단, $u(z)$는 θ 와 무관한 z에 대한 어떤 함수)을 만족시키는 유일한 경우가

(2) $\theta \in \Omega$인 모든 점에서 $u(z) = 0$인 경우 뿐이라면

(3) $\{\mathrm{h}(\mathrm{z};\theta):\ \theta \in \Omega\}$ 를 완비족이라고 한다.

정의

- 개요

2. 완비성은 유일한 최소분산불편추정량을 도출하는데 활용한다.

1) $X_1, \ldots, X_n$이 pdf $f(x;\ \theta)$를 따르는 iid 확률표본이고,

$Y_1 = u(X_1, \ldots, X_n)$을 충분 통계량이라 하면

2) $E(Y_2) = \ \theta$인 Y_2를 불편추정량이라고 할 때, E($Y_2|Y_1$) = $\varphi(y_1)$ 을 구할 수 있다.

(1) 이 때 E[$\varphi(y_1)$] = θ를 $\theta \in \Omega$인 모든 점에서 만족하고,

(2) 이와는 다른 어떤 함수 $\emptyset(y_1)$가 존재한다고 가정하고,

E[$\emptyset(y_1)$] = θ를 만족한다고 하자.

정의

- 개요

2. 완비성은 유일한 최소분산불편추정량을 도출하는데 활용한다.

3) $f(y_1) = \varphi(y_1) - \emptyset(y_1)$ 라고 할 때,

(1) $\mathrm{E}[f(y_1)] = E[\varphi(y_1) - \emptyset(y_1)] = 0$ 이다.

(2) 여기에 더해, y_1이 속한 분포족이 완비인 경우에는 완비성의 정의에 따라

- $\varphi(y_1) - \emptyset(y_1) = 0$ 이다.
- 즉, 최저 분산을 만족하는 유일한 MVUE는 $\varphi(y_1)$가 된다.

정의

- 레만-셰페 정리

1. $X_1, \dots, X_n$이 pdf $f(x;\,\theta)$를 따르는 iid 확률표본이고

1) $Y_1 = u(X_1, \dots, X_n)$은 θ에 대한 충분 통계량이며

2) 이 때 Y_1이 따르는 분포의 분포족이 완비족이라고 가정하자.

3) 모수 θ 에 대한 불편추정량 $\hat{\theta} = \varphi(y_1)$, 즉 y_1의 함수라고 하자.

4) 이 때, $\hat{\theta} = \varphi(y_1)$ 는 θ에 대한 유일한 MVUE이다.

2\. 즉, 충분통계량의 분포가 완비족의 하나일 경우, 그 불편추정량은 유일한 MVUE가 된다는 정리이다.

3\. 이 때, 충분통계량의 분포가 완비족이 하나일 경우, 이를 완비충분통계량이라 한다.

예제

- 완비성

1. $X_1, \ldots, X_n$이 pmf $\frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$를 따르는 iid 확률표본이라고 하자

1) 이 때, $Y_1 = \sum x_i$는 인수분해 정리에 따라 θ의 충분통계량이다.

(1) 이 때, Y_1 은 푸아송 분포의 가법성에 따라 $g(y_1;\theta) = \frac{\theta^{y_1} e^{-n\theta}}{y_1!}$ 을 따른다.

2) 이 때, 이 통계량의 분포족 $\{g(y_1;\theta) : \theta > 0\}$ 을 생각하고, u(y_1)를 정의하면

(1) E[u(y_1)] = $\sum$ u(y_1) $\frac{\theta^{y_1} e^{-n\theta}}{y_1!}$ 을 계산하면

(2) $\sum$ u(y_1) $\frac{\theta^{y_1} e^{-n\theta}}{y_1!}$ = u(0)$e^{-n\theta}$ + u(1) $\frac{\theta e^{-n\theta}}{1!}$ + u(2) $\frac{\theta^2 e^{-n\theta}}{2!}$ + …

= $e^{-n\theta}$\{u(0) + u(1)+ u(2)+ …\} = 0

3) 위 전개식에서 $e^{-n\theta}$는 명백히 0이 아니므로, 이 식이 0이기 위한 조건은 오직

(1) u(0) = u(1)=u(2) = ⋯=0 이어야 한다.