스튜던트의 정리

정의

- $\bar{x}$는 N(μ, $\frac{\sigma^2}{n}$)을 따른다.

1. $x_1, \cdots, x_n$을 N(μ_i, σ_i^2)을 따르는 확률변수라고 하고, a_1, ⋯, a_n이 상수일 때
   Y = $a \cdot x = \sum a_i\, x_i$ 이다
   (1) $M_y(T) = e^{ta_1\mu_1+\frac{1}{2}t^2a_1^2\sigma_1^2} \cdot e^{ta_2\mu_2+\frac{1}{2}t^2a_2^2\sigma_2^2} \cdot \cdots \cdot e^{ta_n\mu_n+\frac{1}{2}t^2a_n^2\sigma_n^2}$
   $= e^{t\left(a_1\mu_1+\frac{1}{2}t^2a_1^2\sigma_1^2+\cdots+a_n\mu_n\right)+\frac{1}{2}t^2(a_1^2\sigma_1^2+\cdots+a_n^2\sigma_n^2)} = e^{t(\sum a_i\mu_i)+\frac{1}{2}t^2(\sum a_i^2\sigma_i^2)}$

    \- 이는 N($\sum a_i\,\mu_i$, $\sum a_i^2\,\sigma_i^2$)을 따르는 정규분포이다.

   (2) 이 때, a= n^{-1} 이라면 N($\sum n^{-1}\,\mu_i = \mu$, $\sum n^{-2}\,\sigma_i^2 = \frac{\sigma_i^2}{n}$) 이다.

정의

- $\bar{x}$와 s^2은 서로 독립이다.

1. X = $[x_1, \dots, x_n]$ 이고, $x_1, \dots, x_n$이 모두 IID일 때,

1) X는 다변량 정규분포 N($\mu \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$, $\sigma^2 \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$)을 따른다.

2) V^T = $\begin{bmatrix} \frac{1}{n} \\ \dots \\ \frac{1}{n} \end{bmatrix}$일 때, $V^T X$ = $\bar{x}$이다.

3) Y = $\begin{bmatrix} x_1 - \bar{x} \\ \dots \\ x_n - \bar{x} \end{bmatrix}$일 때, 변환 W = $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ Y \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} V^T \\ I - V^T \end{bmatrix}$ ·X 이므로, W는 다변량 정규벡터의 선형변환이다.

(1) E(W) = Aμ-b = $\begin{bmatrix} V^T \\ I - IV^T \end{bmatrix} \cdot \mu \cdot 1$ = $\begin{bmatrix} \mu \\ \mu - \mu = 0 \end{bmatrix}$ 이고

(2) $\Sigma = \mathrm{A}\Sigma A^T =$ $\begin{bmatrix} V^T \\ I - IV^T \end{bmatrix} \cdot \sigma^2 I \cdot [V^T \quad I - IV^T]$

= $\begin{bmatrix} V^T \\ I - IV^T \end{bmatrix} \cdot [\sigma^2 V^T \quad \sigma^2 I - \sigma^2 V^T]$ = $\begin{bmatrix} \sigma^2 V^T & \cancel{\sigma^2 V^T} - \sigma^2 V^T \\ \cancel{\sigma^2 V^T} - \sigma^2 V^T & \sigma^2 I - \sigma^2 V^T \end{bmatrix}$ = $\sigma^2 \begin{bmatrix} V^T & 0 \\ 0 & I - V^T \end{bmatrix}$

정의

- $\frac{(n-1)s^2}{6^2}$은 x^2(n-1)을 따른다.

1) $V = \sum[\frac{x_i-\mu}{6^2}]^2$은 $N(0,1)^2$ ~ x^2(n) 을 따른다.

(1) 즉, V = $\sum[\frac{(x_i-\overline{x})+(\overline{x}-\mu)}{6^2}]^2$ 일 때,

(2) 교차항은 0이 되므로, 이는 $\sum[\frac{(x_i-\overline{x})}{6^2}]^2$ + $[\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu)}{6^2}]^2$와 같다.

- $\sum[\frac{(x_i-\overline{x})}{6^2}]^2$ = $\sum N(0,1)^2$ ~ x^2(n) = $\frac{(n-1)s^2}{6^2}$ 이고,

- $[\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu)}{6^2}]^2 = N(0,1)^2 \sim x^2$(1) 이다.

(3) 이들의 mgf를 구하면

- E(e^{tV}) E($e^{t\{\sum[\frac{(x_i-\overline{x})}{6^2}]^2+[\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu)}{6^2}]^2\}}$) = E($e^{t\sum[\frac{(x_i-\overline{x})}{6^2}]^2}$) E($e^{t[\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu)}{6^2}]^2}$)

= E($e^{t\frac{(n-1)s^2}{6^2}}$)E($e^{t[\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu)}{6^2}]^2}$)= E($e^{t\frac{(n-1)s^2}{6^2}}$) $(1-2\text{t})^{-1/2}$

정의

- 확률변수 T = $\frac{(\bar{x}-\mu)}{s/\sqrt{n}}$ 은 t분포를 따른다.

1. T = $\frac{(\bar{x}-\mu)}{s/\sqrt{n}}$ 에서, 분자와 분모를 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 으로 나누면

1) $\frac{\frac{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{n}}}{\frac{\frac{s}{\sqrt{n}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}} = \frac{\frac{(\bar{x}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{s}{\sigma}}$, 분모 부분의 분자와 분모에 $\sqrt{n-1}$을 곱해준다.

2) $\frac{\frac{(\bar{x}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma\sqrt{n-1}}}$ 분모를 다시 정리해주면

(1) $\frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{s^2(n-1)}}{\sqrt{6^2(n-1)}} = \frac{\sqrt{s^2(n-1)}}{\sqrt{6^2}}\sqrt{\frac{1}{(n-1)}}$

3) 따라서 $\frac{\frac{(\bar{x}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{s\sqrt{n-1}}{\sigma\sqrt{n-1}}} = \frac{\frac{(\bar{x}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{\sqrt{s^2(n-1)}}{\sqrt{6^2}}\sqrt{\frac{1}{(n-1)}}}$,

(1)이 때, $\bar{x}$는 N(μ, $\frac{6^2}{n}$)을 따르므로, $\frac{(\bar{x}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ~ N(0,1) 을 따른다.

(2) 이 때, $\frac{\sqrt{s^2(n-1)}}{\sqrt{6^2}}$ ~ x^2(n-1) 을 따른다.

(3) 즉, $\frac{\frac{(\bar{x}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\frac{\sqrt{s^2(n-1)}}{\sqrt{6^2}}\sqrt{\frac{1}{(n-1)}}} = \frac{W}{\sqrt{\frac{V}{(n-1)}}} \sim T(n-1)$이다.