적률생성함수

정의

- X를 e^{tx}의 기댓값이 존재하는 확률변수라고 하면 $E(e^{tx})$로 표현할 수 있다.

1. 이 때

1) 이산형 확률분포라면 $E(e^{tx})$ = $\sum e^{tx}p[x] < \infty$
2) 연속형 확률분포라면 $E(e^{tx})$ = $\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{e^{tx}f(x)\,dx}$
3) 이때, t를 0 근방의 열린 구간으로 정의하면

(1) $E(e^{0x}) = E(1) = 1$ 이다.

4) 결국, $E(e^{tx})$ =M(t)로 정의하며, 이를 적률생성함수라고 한다.

정의

- 적률생성함수가 적률을 생성하는 이유의 증명

1. 매크로린 급수로 $\boldsymbol{e^{tx}}$를 전개하면

1) $\boldsymbol{e^{tx}} = 1 + \boldsymbol{te^{t0}} \cdot x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2!}}\boldsymbol{t^2 e^{t0}} \cdot \boldsymbol{x^2} + \frac{1}{3!}\boldsymbol{t^3 e^{t0}} \cdot \boldsymbol{x^3} + \ldots$

$= 1 + \boldsymbol{t} \cdot x + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2!}}\boldsymbol{t^2} \cdot \boldsymbol{x^2} + \frac{1}{3!}\boldsymbol{t^3} \cdot \boldsymbol{x^3} + \ldots$

2. 이 때, 양변에 기댓값을 씌워주면

1) $\mathrm{E}(\boldsymbol{e^{tx}}) = 1 + \boldsymbol{t} \cdot \mathrm{E}(x) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2!}}\boldsymbol{t^2} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x^2}) + \frac{1}{3!}\boldsymbol{t^3} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x^3}) + \ldots$

3. 양변을 t로 n계 미분하고, t=0을 대입하면

1) $n = 1:\ \mathrm{E}'(\boldsymbol{e^{tx}})|_{t=0} = 0 + \mathrm{E}(x) + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2!}}(t = 0) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x^2}) + \frac{3}{3!}(\boldsymbol{t} = \mathbf{0})^{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x^3}) + \ldots = \mathrm{E}(x)$

2) $n = 2:\ \mathrm{E}'(\boldsymbol{e^{tx}})|_{t=0} = 0 + 0 + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2!}} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x^2}) + \frac{3}{3!}(\boldsymbol{t} = \mathbf{0}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x^3}) + \ldots = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x^2})$

4. 즉, 각각을 매크로린 전개하고 t로 n계 미분 후 0으로 대입하면 각각의 적률이 나온다.

예제

- M(t) = $E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$ 라고 할 때

1) $f(x)$

$$\begin{cases} e^{-x} & 0 < \mathrm{x} < \infty \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

2) $\int_{-0}^{\infty} e^{tx} e^{-x}\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{x(t-1)}\, dx$이므로

(1) M(t) = $\left[e^{x(t-1)} \frac{1}{t-1}\right]_0^{\infty} = 1 \cdot \frac{1}{t-1} = (\mathrm{t}-1)^{-1}$

(2) 이 때, M(t)의 1계 미분은

- M′(t) = $\frac{(\mathrm{t}-1)^{-1}}{\Delta t} = -(\mathrm{t}-1)^{-2} = \frac{1}{-(\mathrm{t}-1)^2}$

(3) 위 함수를 0 근방에서 정의하면

- M′(0) = $\frac{1}{-(1)^2}$ = -1 (1차 적률)
- M″(0) = $2(\mathrm{t}-1)^{-3}$ = -2 (2차 적률)