감마분포

정의

- 적분의 감마함수를 이용한 분포
- PDF 의 유도

1. $\int_0^\infty y^{a-1}e^{-y}\,dy$ 에서

1) $a = 1$: $\Gamma(1) = \int_{-\infty}^\infty e^{-y}\,dy = 1$ 이다.

2) $a > 1$: $\Gamma(a) = \int_{-\infty}^\infty y^{a-1}e^{-y}\,dy$에서 부분적분을 취해주면

(1) $\int_0^\infty y^{a-1}e^{-y}\,dy = -[y^{a-1}e^{-y}]_0^\infty - [(a-1)y^{a-2}e^{-y}]_0^\infty - \cdots - [(a-1)\cdots(2)y^1\,e^{-y}]_0^\infty - [(a-1)\cdots(2)(1)e^{-y}]_0^\infty$

정의

- $\int_0^{\infty} y^{a-1} e^{-y}\, dy$ 에서

3) 이 때, 각각의 항에서 $e^{-\infty} = 0$: $\infty^{a-1} = \infty$ or $e^{-0} = 1$: $0^{a-1} = 0$ 을 이용하면,

(1) $-\cancel{[y^{a-1} e^{-y}]}_0^{\infty} - \cancel{[(a-1) y^{a-2} e^{-y}]}_0^{\infty} - \cdots - \cancel{[(a-1)\cdots(2) y^{1} e^{-y}]}_0^{\infty}$

$-[(a-1)\cdots(2)(1)e^{-y}]_0^{\infty} = (a-1)\cdots(2)(1) = (a-1)!$

(2) 위 식을 다시 표현하면, $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$

정의

- $\Gamma(a) = \int_0^\infty y^{a-1}e^{-y}\,dy$ 에서

2. 이 때, y = $\frac{x}{\beta}$로 치환하고, |J| = $\frac{\partial \frac{x}{\beta}}{\partial x}$ = $\frac{1}{\beta}$ 로 하면

1) $\Gamma(a) = \int_0^\infty (\frac{x}{\beta})^{a-1} e^{-\frac{x}{\beta}} |\frac{1}{\beta}|\, dx$ 에서, 이항하면 $1 = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(a)\beta^a} x^{a-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx$ 이다.

정의

- 감마분포의 mgf

1. $E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\Gamma(a)\beta^a} x^{a-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(a)\beta^a} x^{a-1} e^{-x\frac{(1-\beta t)}{\beta}} dx$

1) 이 때, $x\frac{(1-\beta t)}{\beta}$ = u로 치환하면

(1) |J| = $\frac{\beta}{(1-\beta t)}$, x= $\frac{\beta}{(1-\beta t)}u$ 일 때

$$\int_0^\infty \frac{\frac{\beta}{(1-\beta t)}}{\Gamma(a)\beta^a} \left(\frac{\beta}{(1-\beta t)}u\right)^{a-1} e^{-u}\, du = \left(\frac{1}{(1-\beta t)}\right)^a \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(a)} u^{a-1} e^{-u}\, du = \left(\frac{1}{(1-\beta t)}\right)^a$$

(2) M′(t) = $\left(\frac{(-a)(-\beta)}{(1-\beta t)^{a+1}}\right)$, M′(0) = $a\beta$

(3) M″(t) = $\left(\frac{(-a)(-\beta)(-a-1)(-\beta)}{(1-\beta t)^{a+2}}\right)$, M″(0) = $a^2\beta^2 + a\beta^2$

(4) Var(X)는

\- $a^2\beta^2 + a\beta^2$ - $a^2\beta^2$ = $a\beta^2$

정의

- 감마분포는 가법성을 갖는다.

1. $x_1, \cdots, x_n$이 각각 독립이고, 각각 $\Gamma(a, \beta)$ 를 따르면, 그 결합분포 Σx_i는 $\Sigma\Gamma(\alpha_i, \beta_i)$ 를 따른다.