MVUE를 찾는 방법

정의

- 충분통계량의 기댓값을 구하기

1. 충분통계량의 기댓값을 구하여 함수를 직접적으로 정의하는 것

1) 충분통계량의 기댓값을 구한 후, 이 기댓값의 함수

(1) $E\left(\psi(y_1)\right) = \theta$가 되도록 $\psi(y_1)$를 정의한다.

정의

- MLE 추정량을 통해 도출

1)MLE 추정량을 도출한 결과가 $\psi(y_1)$, 즉 y_1에 대한 함수꼴로 나타나고

(1) $\mathrm{E}[\psi(y_1)] = \theta$ 이면, $\psi(y_1)$는 MVUE이다.

2) 이 때 θ를 참모수 ,$\theta_{mle} = \psi(y_1)$ 이고, $\hat{\theta}$를 MVUE라고 한다면

(1) $(\hat{\theta} - \theta_{mle}) \xrightarrow{p} 0$ 이고

(2) $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D}$ N[0,$(g'(\theta)^2)\,\sigma^2$] 이다. (Δ –방법의 응용)

정의

- 조건부 기댓값을 구하기

1. 라오-블랙웰 정리에 따라 불편추정량을 충분통계량의 조건부 기댓값으로 나타내는 방법
2. 즉, $Y_1 = u(X_1, \ldots, X_n)$에서 E($Y_1$) = θ인 불편추정량이라고 할 때

(1) 만약 $Y_2 = k(X_1, \ldots, X_n)$가 X의 충분통계량이라고 가정할 경우

(2) E($Y_1|Y_2$) = $\psi(y_1)$는 θ에 대한 MVUE가 된다.

예제

- 베르누이분포의 분산의 MVUE 구하기

1. $X_1, \dots, X_n$이 b(1, θ)를 따르는 분포에서 추출한 확률표본이라고 하자.

1) 이 때, $\frac{Y_1}{n}$ Y_1 = $\sum x_i$ 라고 할 때

(1) $\frac{Y_1}{n}$ = $\frac{\sum x_i}{n}$ 는 θ의 MVUE이다.

2) Var(Y_1) = $\theta(1-\theta)$ 의 MVUE를 구하면

(1) θ의 MLE 추정량인 $\frac{Y_1}{n}$를 우선 고려할 수 있다.

(2) 따라서, $\psi(y_1)$ = $\frac{Y_1}{n}$(1-$\frac{Y_1}{n}$) 의 기댓값을 구하면

(3) E[$\psi(y_1)$] = $\mathrm{E}[\frac{Y_1}{n}\left(1-\frac{Y_1}{n}\right)]$ = $\frac{\mathrm{E}[Y_1]}{n} - \frac{\mathrm{E}\left[{Y_1}^2\right]}{n^2}$에서

- $\frac{\mathrm{E}[Y_1]}{n}$ = θ , $\frac{\mathrm{E}\left[{Y_1}^2\right]}{n^2}$= $\frac{\theta(1-\theta)}{n}$ $+\theta^2$ 에서

- $\frac{\mathrm{E}[Y_1]}{n} - \frac{\mathrm{E}\left[{Y_1}^2\right]}{n^2}$ = $\theta - \frac{\theta(1-\theta)}{n} - \theta^2$ = $(\mathrm{n}-1)\frac{\theta(1-\theta)}{n}$

3) 이를 조정하여 $\theta(1-\theta)$에 대한 함수로 만들면

(1) $\mathrm{E}\left[\frac{\mathrm{n}}{(\mathrm{n}-1)}\psi(y_1)\right]$ = $\theta(1-\theta)$

(2) 이 때, $\tilde{\theta} = \frac{\mathrm{n}}{(\mathrm{n}-1)}\psi(y_1)$ 는 $\theta(1-\theta)$에 대한 최소분산불편추정량이다.

예제

- *조건부 기댓값 기법*

1. $X_1, \ldots, X_n$이 pdf $N(\theta,1)$에서 추출한 확률표본이라고 하고,

$\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i-\theta)^2}{2}\right) dx$ = p(X ≤ c) = $\Phi(c-\theta)$ 라고 하면

1) $\Phi(c-\theta)$ 의 불편추정량을 구하려고 할 때

(1)u(x)= $\begin{cases} 1, & x \le c \\ 0, & x > c \end{cases}$ 인 함수를 정의하면 u(x)의 기댓값은

(2) E[u(x)] = 1· P[x- θ ≤c- θ] + 0· P[x- θ >c- θ] = $\Phi(c-\theta)$ 이다.

(3) 따라서, u(x)는 $\Phi(c-\theta)$ 에 대한 불편추정량 이다.

예제

- *조건부 기댓값 기법*

1. $X_1, \dots, X_n$이 pdf $N(\theta,1)$에서 추출한 확률표본이라고 하고,
   $\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i-\theta)^2}{2}\right) dx$ = p(X ≤ c) = $\Phi(c-\theta)$ 라고 하면

2) 이 때, $N(\theta$,1)에서 θ에 대한 완비충분통계량인 $\overline{X}$ = $\frac{\sum x_i}{n}$의 분포와 X_1의 결합 분포를 정의하면

(1) 이는 N([θ, θ] , [1, $\frac{1}{n}$]) 인 이변량 정규이다.(단, $\rho = \frac{1}{\sqrt{n}}$)

(2) 따라서, 조건부 기댓값의 선형함수로 변환하면, 우리가 구하려는 조건부 기댓값 E(u(x)|$\overline{X}$) 를 구할 수 있다.

(3) 우선, E($X|\overline{X}$)를 구하면, 이 조건부 기댓값은

- $\theta + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\overline{X} - \theta)$ = $\overline{X}$ (평균)
- $\sigma_1^2(1-\rho^2)$ = $\frac{n-1}{n}$ (분산)
- 을 따르는 이변량 정규를 따른다.

예제

- *조건부 기댓값 기법*

1. $X_1, \ldots, X_n$이 pdf $N(\theta$,1)에서 추출한 확률표본이라고 하고,

$\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x_i-\theta)^2}{2}\right) dx$ = p(X ≤ c) = $\Phi(c - \theta)$ 라고 하면

3) 이제, E(u(X)|$\overline{X}$) 를 구하면

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(X) \sqrt{\frac{n}{n-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n(x-\overline{x})^2}{2(n-1)}\right) dx$ = $\int_{-\infty}^{c} \sqrt{\frac{n}{n-1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n(x-\overline{x})^2}{2(n-1)}\right) dx$

(2) Z= $\sqrt{\frac{n(x-\overline{x})^2}{(n-1)}}$ 로 변수변환을 실시하면, c′=$\frac{\sqrt{n}(C-\bar{x})}{\sqrt{n-1}}$ 일때

- $\int_{-\infty}^{c'} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dx$ = $\Phi(c')$ = $\Phi(\frac{\sqrt{n}(C-\bar{x})}{\sqrt{n-1}})$ 이고, 이것이 MVUE 이다.