비중심 x^2분포와 F분포

정의

- 개요

1. $X_1, \ldots, X_n$이 i=1,2, … , n 이라고 할 때, N(μ_i, σ^2)인 서로 iid인 확률변수라고 하자.

1) 통계량 Y = $\frac{\sum {X_i}^2}{\sigma^2}$이라 할 때, 만약 μ_i가 0이면 Y ~ x^2(n)이다.

2) 하지만 만약 μ_i ≠0 이라면?

정의

- 하지만 만약 μ_i ≠0 이라면? : 비중심 분포

1. 앞서 정의한 Y의 MGF를 구하면

1) $\mathrm{E}(e^{tY}) = \mathrm{E}\left(e^{t\frac{\sum X_i{}^2}{\sigma^2}}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(e^{t\frac{X_i{}^2}{\sigma^2}}\right)$

2) 이 때 $\mathrm{E}\left(e^{t\frac{X_i{}^2}{\sigma^2}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(t\frac{X_i{}^2}{\sigma^2} - \frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma^2}\right) dx_i$

(1) Exp 부분을 풀면

- $t\frac{X_i{}^2}{\sigma^2} - \frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma^2} = -\frac{X_i{}^2(1-2t)}{2\sigma^2} + \frac{2x_i\mu_i}{2\sigma^2} - \frac{\mu_i{}^2}{\sigma^2} = \frac{t\mu_i{}^2}{\sigma^2(1-2t)} - \frac{(1-2t)}{2\sigma^2}\left(x_i - \frac{\mu_i}{1-2t}\right)^2$

(2) 정리한 Exp항을 원래 식에 대입하면

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{t\mu_i{}^2}{\sigma^2(1-2t)} - \frac{(1-2t)}{2\sigma^2}\left(x_i - \frac{\mu_i}{1-2t}\right)^2\right) dx_i = \exp\left[\frac{t\mu_i{}^2}{\sigma^2(1-2t)}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{(1-2t)}{2\sigma^2}\left(x_i - \frac{\mu_i}{1-2t}\right)^2\right) dx_i$

정의

- 하지만 만약 μ_i ≠0 이라면? : 비중심 분포

(2) 정리한 Exp항을 원래 식에 대입하면

- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{t{\mu_i}^2}{\sigma^2(1-2t)} - \frac{(1-2t)}{2\sigma^2}\left(x_i - \frac{\mu_i}{1-2t}\right)^2\right) dx_i = \exp\left[\frac{t{\mu_i}^2}{\sigma^2(1-2t)}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{(1-2t)}{2\sigma^2}\left(x_i - \frac{\mu_i}{1-2t}\right)^2\right) dx_i$

(3) 이 때, 적분식에 $\sqrt{\frac{1-2t}{1-2t}}$를 곱해주면

- $\exp\left[\frac{t{\mu_i}^2}{\sigma^2(1-2t)}\right] \sqrt{\frac{1}{1-2t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1-2t}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{(1-2t)}{2\sigma^2}\left(x_i - \frac{\mu_i}{1-2t}\right)^2\right) dx_i$

- 이 때, $\frac{\sqrt{1-2t}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{(1-2t)}{2\sigma^2}\left(x_i - \frac{\mu_i}{1-2t}\right)^2\right)$ 는 평균이 $\frac{\mu_i}{1-2t}$, 분산이 $\frac{(1-2t)}{\sigma^2}$인 정규분포이고, 따라서 적분 = 1이다.

정의

- 하지만 만약 $\mu_i \neq 0$ 이라면? : 비중심 분포

2. 위 식을 정리하면

1) $E(e^{tY}) = \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{t\frac{{X_i}^2}{\sigma^2}}\right) = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left[\frac{t\sum{\mu_i}^2}{\sigma^2(1-2t)}\right]$, $t < \frac{1}{2}$

2) 따라서 확률변수 Y = $\frac{\sum{X_i}^2}{\sigma^2}$는 위의 MGF를 갖는 분포이다.

3) 이 때, $\sum{\mu_i}^2 = \theta$로 놓으면, $\frac{1}{(1-2t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left[\frac{t\theta}{\sigma^2(1-2t)}\right]$ 와 같고,

   θ=0일 때 이는 일반적인 x^2(n)의 MGF와 같다.

4) 또한 Y = $\frac{\sum{X_i}^2}{\sigma^2}$에 대한 비중심모수는 $\frac{\theta}{\sigma^2} = \frac{\sum{\mu_i}^2}{\sigma^2}$인데,

   이는 X_i를 그 모평균들인 μ_i로 대치 하여 계산 가능함을 암시한다.

(1) 예를들어, 실2차형태 $\frac{Q}{\sigma^2} \sim x^2$(n, θ) 인 비중심 x^2를 따르는데

(2) 이 때 θ = $\frac{Q(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n)}{\sigma^2}$인, X_i 가 아닌 μ_i에 대한 실2차형태인경우 단순히 X_i 를 μ_i로 대치한 제곱합이 된다.

정의

- 비중심 F분포

1. 개요

1) 앞서 살펴본 비중심 x^2로 우도비를 정의하면, 이를 비중심 F분포라고 한다.
2) 즉, 자유도 r_1, r_2와 비중심모수 θ를 가지는 F(r_1, r_2, θ)를 따른다.