몬테카를로 방법

정의

- 확률변수 U ~ 균등(0,1)을 따른다고 할 때, 연속형 확률변수 F에 대하여

1. X = $F^{-1}(U)$ 이면, X는 F를 분포함수로 갖는다.

- 채택-기각 생성 알고리즘

1. X의 pdf가 f(x)이고(목표 PDF)
   Y의 pdf가 g(x) 일때(재료 PDF)

1) X의 CDF는 알려져 있지 않지만, Y는 상대적으로 구하기 쉽고 f(x) ≤ $Mg(x)$ 가 성립할 때

(1) 다음의 과정을 거쳐 $F(x)$를 추정할 수 있다.

- U ~ 균등(0,1) 일 때, Y와 U를 생성한다.
- $U \leq \frac{f(Y)}{Mg(x)}$ 이면 Y=X 이고, 아니면 위로 돌아간다.
- 알고리즘 종료시, X는 pdf $f(x)$를 갖는다.

정의

- 채택-기각 생성 알고리즘

2) 증명

(1) $P[X \leq x] = P\left[Y \leq x | U \leq \frac{f(Y)}{Mg(y)}\right] = \frac{P\left[Y \leq x, U \leq \frac{f(Y)}{Mg(y)}\right]}{p\left[U \leq \frac{f(Y)}{Mg(y)}\right]}$

(2) $\frac{P\left[Y \leq x, U \leq \frac{f(Y)}{Mg(y)}\right]}{p\left[U \leq \frac{f(Y)}{Mg(y)}\right]} = \frac{\int_{-\infty}^{x} [\int_{0}^{f(Y)/Mg(y)} du] g(y) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} [\int_{0}^{f(Y)/Mg(y)} du] g(y) dy}$

(3) $\frac{\int_{-\infty}^{x} x \frac{f(Y)}{Mg(y)} g(y) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(Y)}{Mg(y)} g(y) dy} = \int_{-\infty}^{x} f(y) dy$

(4) 양변을 x로 미분하면 미적분학의 기본정리에 따라 x의 pdf가 나온다.

예제

- X ~ exponential(Λ) 라고 하고, U ~균등(0,1) 이라고 하자.

1. F(x) = U 라면, X = $F^{-1}(U)$ 에서 $F(X)$ = 1 -$e^{\lambda x}$ = u 이고, $F^{-1}(U)$ = $\frac{\log(1-u)}{\lambda}$ = x 이다.

1) 이를 통해 지수분포의 실현값을 구할 수 있다.

- 몬테카를로 적분

1. $g(y)$의 역도함수가 직접적으로 표현되지 않는 경우 수치적분으로 이를 구해야 한다.

1) $\mathrm{p} = \int_a^b \mathrm{g(x)}\,dx = (\mathrm{b}-\mathrm{a})\int_a^b \mathrm{g(x)}\frac{1}{(\mathrm{b}-\mathrm{a})}\,dx = (\mathrm{b}-\mathrm{a})E[\mathrm{g(x)}]$이다.

2) 위 식을 이용하여 pi를 추정하면

(1) $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)}\,dx = \arctan(x)$ 에서 $4\arctan(1) = \pi$

(2) X = 균등(0,1) 이고, Y = $4\sqrt{(1-x^2)}$ 이라고 정의하면 $\overline{Y} = \frac{1}{n}4\sqrt{(1-{y_i}^2)}$