정규분포

정의

- 응용과 통계적 추론에서 특히 중요한 분포 및 분포족

1. I = $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$를 정의하면

1) 적분 계산을 위해, 이 적분을 제곱하면

(1) $I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz\right)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dzdz$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2} - \frac{z^2}{2}\right) dzdz$$

(2) 하나의 z를 w로 치환하면 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2+w^2}{2}\right) dzdw$

정의

- 응용과 통계적 추론에서 특히 중요한 분포 및 분포족

2) 이 이중적분을 극좌표 치환하면

(1) $z=rsin(\theta)$,w=$rcos(\theta)$ 일 때

- |J| = $\begin{bmatrix} \frac{\partial rsin(\theta)}{\partial r} & \frac{\partial rsin(\theta)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial rcos(\theta)}{\partial r} & \frac{\partial rcos(\theta)}{\partial \theta} \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} sin(\theta) & rcos(\theta) \\ cos(\theta) & -rsin(\theta) \end{bmatrix}$ = r($sin^2(\theta)$-$cos^2(\theta)$) = r

- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{z^2+w^2}{2}\right)dzdw = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{r}\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)drd\theta$

(2) $\frac{r^2}{2}$=u로 치환하면 $\mathrm{r}\cdot\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)$ → [exp(-u)]$_0^\infty$=1

- $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 1$

정의

- 정규 분포의 mgf

1. 정규분포의 mgf는 다음과 같이 구한다.

1) $E(e^{tz})= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}\right) dz$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}\right) dz = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\mathrm{t}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\mathrm{z}-\mathrm{t})^2}{2}\right) \mathrm{dz}$

3) U = $(z-t)$ 로 치환하면

(1) $e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = e^{\frac{1}{2}t^2}$ =M(t)

(2) M′(t) = $te^{\frac{1}{2}t^2}$, M′(0) = 0

(3) M″(t) = $e^{\frac{1}{2}t^2} + t^2 e^{\frac{1}{2}t^2}$, M″(0) = 1