이원배치 분산분석

정의

- 개요

1. 두개의 요인을 함께 고려한 통계량의 평균 차이 여부를 검증하는 분석
2. X_{ij}를 요인 A의 i수준, 요인 B의 j수준에서의 반응을 나타내는 확률변수라고 하자. 분산은 σ^2로 동일하다.

1) 이 확률변수의 평균을 μ_{ij}라고 한다면, 다음과 같이 가법모형을 정의할 수 있다.

(1) $\mu_{ij} = \mu + (\overline{\mu_i} - \bar{\mu}) + (\overline{\mu_j} - \bar{\mu})$

(2) 위 가법모형을 해석하면

- 모든 확률변수의 전체평균 $\bar{\mu}$에서 $\overline{\mu_i}$의 부가 효과와 $\overline{\mu_j}$의 부가 효과를 더한 것이다.

정의

- 개요

2) $\alpha_i = (\overline{\mu_i} - \bar{\mu})$, $\beta_j = (\overline{\mu_j} - \bar{\mu})$ 라고 대치하면, 이제 관심있는 사항은

(1) $\sum \alpha_i = 0$

(2) $\sum \beta_j = 0$

(3) 둘다 만족

(4) 둘다 불만족

3) 각 평균들의 프로파일 행렬을 만들면 다음과 같다.(단, i = 2, j = 3)

(1)

		요인 B			
		1	2	3	평균
요인 A	1	μ_{11}	μ_{12}	μ_{13}	$\overline{\mu_{i=1}}$
	2	μ_{21}	μ_{22}	μ_{23}	$\overline{\mu_{i=2}}$
	평균	$\overline{\mu_{j=1}}$	$\overline{\mu_{j=2}}$	$\overline{\mu_{j=3}}$	$\bar{\mu}$

정의

- 개요

3) 이제, 가설을 수립하면

(1) H_{0A} : $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\alpha = 0$ 와 H_{0B} : $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$

(2) H_{1A} : 적어도 하나는 다르다 와 H_{1B} : 적어도 하나는 다르다

4) 가설검정을 수립하기 위해 우도비검정을 정의하면

(1) 요인 B 수준에서의 검정

- $(ab-1)S^2 = \sum\sum(X_{ij} - \overline{X_j})^2 + \sum\sum(X_{ij} - \overline{X_j})^2$ 에서 $\frac{\sum\sum(X_{ij}-\overline{X_j})^2}{ab}$ 는$\sigma_\Omega{}^2$를 최대화하는 MLE 추정량이다. (단, $\Omega = \{(\mu_1, \cdots \mu_n) : -\infty < \mu < \infty\}$)
- $\frac{(ab-1)S^2}{ab}$는 $\sigma_w{}^2$를 최대화하는 MLE 추정량이다. ($w = \{(\mu_1, \cdots \mu_n) : -\infty < \mu < \infty\}$)

정의

- 개요

(1) 요인 B 수준에서의 검정

- 한편, $\Lambda = \left(\frac{\sigma_\Omega}{\sigma_w}\right)^{\frac{ab}{2}}$는 $\frac{Q_4/_{(b-1)}}{Q_3/_{b(a-1)}}$ 의 단조함수였고, 이를 일원배치가 아닌 이원배치로 확대하면
- $(ab-1)S^2 = \mathrm{b}\sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_i - \bar{x})^2 + \mathrm{a}\sum_{i=1}^{b}\left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x}\right)^2$ 이고 이는 행(Q_2), 열(Q_4), 나머지(Q_5)로 분해됨을 의미한다.
- ${\sigma_\Omega}^2 = \frac{Q_5}{ab}$는 ${\sigma_\Omega}^2$의 MLE 추정량이고, ${\sigma_w}^2 = \frac{Q_4+Q_5}{ab} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(x_{ij}-\bar{x}_i\right)^2}{ab}$는 ${\sigma_w}^2$의 MLE 추정량이다.
- 이를 이용하여 우도비를 정의하면

  $\Lambda = \left(\frac{{\sigma_\Omega}^2}{{\sigma_w}^2}\right)^{\frac{ab}{2}} = \frac{Q_5}{Q_4+Q_5} = \frac{Q_4/(b-1)}{Q_5/(a-1)(b-1)}$ 이고, 이는 F[(b-1),(a-1)(b-1)]을 따른다.

정의

- 개요

(2) 요인 A 수준에서의 검정

- 위와 같은 전개를 거쳐서 결론을 도출하면

- $\sigma_{\Omega}{}^{2} = \frac{Q_5}{ab}$, $\sigma_{w}{}^{2} = \frac{Q_{2+}Q_5}{ab}$ 이 각각의 모수에 대한 MLE 추정량이므로, 우도비를 정의하면

- $\Lambda = \left(\frac{\sigma_{\Omega}{}^{2}}{\sigma_{w}{}^{2}}\right)^{\frac{\mathrm{ab}}{2}} = \frac{Q_2/(a-1)}{Q_5/(a-1)(b-1)}$ ~ F [(a-1),(a-1)(b-1)] 이다.

정의

- 개요

3. 검정력 함수

1) $P_{H_{1B}}[(\Lambda)^{\frac{\mathrm{ab}}{2}} \geq c]$ 는 H_{0B}를 기각하는 기각역에서 H_{1B}가 참일때의 확률, 즉 검정력을 의미

2) w 공간에서 MLE 추정량은

(1) ${\sigma_w}^2 = \frac{Q_4+Q_5}{ab}$ 였으므로, Q_4와 Q_5의 비중심모수를 구하면

(2) $E(X_{ij}) = \mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$, $\mathrm{E}(\overline{x}_i)=\mu_i= \mu + \alpha_i$, $\mathrm{E}(\overline{x}_j)=\mu_j= \mu + \beta_j$, $\mathrm{E}(\overline{x}) = \mu$

(3) 따라서 $\mathrm{E}(\frac{Q_4}{\sigma^2}) = \frac{\mathrm{a}}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{b} E\left[\left(\overline{x}_j - \overline{x}\right)^2\right] = \frac{\mathrm{a}}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{b}\left(\mu + \beta_j - \mu\right)^2 = \frac{\mathrm{a}}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{b}\left(\beta_j\right)^2$

(4) $\mathrm{E}(\frac{Q_5}{\sigma^2}) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} E\left[\left(x_{ij} - \overline{x}_i - \overline{x}_j + \overline{x}\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(x_{ij} - \overline{x}_i - \overline{x}_j + \overline{x}\right)^2$

$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\mu + \alpha_i + \beta_j - \mu - \alpha_i - \mu - \beta_j + \mu\right)^2 = 0$

3) 따라서, 각각의 비중심모수를 가지는 F분포를 정의할 수 있다.

정의

- 교호작용의 분석

1. α_i, β_i 외에 변수간 교호작용 효과를 반영하는 γ_{ij}를 추가한 모형

2. 가법모형 $\mu_{ij} = \mu + (\bar{\mu}_i - \bar{\mu}) + (\overline{\mu_j} - \bar{\mu})$에서, 만약 이 관계가 등호가 아니라면

1) $\gamma_{ij} = \mu_{ij} - \{\mu + (\bar{\mu}_i - \bar{\mu}) + (\overline{\mu_j} - \bar{\mu})\}$ 로 표현할 수 있다.

(1) 즉, γ_{ij}는 셀 내 효과를 제외하고도 설명이 되지 않는 잔차를 반영한다.

2) 이 때, 관심 있는 새로운 연구가설은

(1) $H_{0AB} : \gamma_{ij} = 0$ VS $H_{1AB} : \gamma_{ij} \neq 0$ 이다.

(2) 한편, 이차형태 Q를 교호작용을 포함한 항들로 분해하면 $x_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x}$

- $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{j=1}^{c}(x_{ijk} - \bar{x})^2$
  $= bc\sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_i - \bar{x})^2 + ac\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_j - \bar{x})^2 + c\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{j=1}^{c}(x_{ijk} - \overline{x_{ij}})^2$

- 즉, 행간 차이, 열간 차이, 교호작용에 의한 것, 칸내 변동으로 분해된다.

정의

- 교호작용의 분석

3. H_{0AB} 와 H_{1AB}의 우도비는

1) $(\wedge)^{\frac{\mathrm{ab}c}{2}} = \mathrm{c}\dfrac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{x}_{ij}-\overline{x}_{i}-\overline{x}_{j}+\overline{x}\right)^2 \Big/ _{(a-1)(b-1)}}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{j=1}^{c}\left(x_{ijk}-\overline{x_{ij}}\right)^2 \Big/ _{ab(c-1)}}$ 이고, 이는 F[(a-1)(b-1),ab(c-1),$\frac{\mathrm{c}-\sum\sum{\gamma_{ij}}^2}{\sigma^2}$] 을 따른다.

2) 이 때, 검정통계량 $P_{H_1}\left[(\wedge)^{\frac{\mathrm{ab}c}{2}} \geq c\right]$는

(1) $\mathrm{F} = \dfrac{b\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{x}_{ij}-\overline{x}_{i}-\overline{x}_{j}+\overline{x}\right)^2 \Big/ _{(b-1)}}{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{j=1}^{c}\left(x_{ijk}-\overline{x_{ij}}\right)^2 \Big/ _{ab(c-1)}}$ ~ F(b-1),ab(c-1),$\frac{\mathrm{c}-\sum\sum{\gamma_{ij}}^2}{\sigma^2}$] 으로 구한다.