다중 모수의 충분통계량

정의

- 다중 모수의 결합충분통계량

1. $X_1, \ldots, X_n$이 $\theta \in \Omega \in R^p$라고 할 때 pdf $f(x;\vec{\theta})$를 갖는 분포에서 추출한 확률변수이다.

1) $\vec{Y} = \begin{bmatrix} u_1(X_1, \ldots, X_n) \\ \cdots \\ u_n(X_1, \ldots, X_n) \end{bmatrix}$ 인 확률벡터라고 할 때

2) $y \in R^m$이라고 할 때, Y의 다변량 PDF 또는 PMF를

$f(\vec{Y};\vec{\theta})$ 라고 정의할 때

3) $\frac{\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vec{\theta})}{f(\vec{Y};\vec{\theta})} = \mathrm{H}(x_1, \ldots, x_n)$ 이면 $\vec{Y}$를 $\vec{\theta}$에 대한 결합충분통계량 이라고 한다.

2\. 다변량의 경우에도 인수분해 정리가 적용된다.

(1) $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vec{\theta}) = k_1(\vec{Y};\vec{\theta}) \cdot k_2(X_1, \ldots, X_n)$ 일 때 한해

(2) $\vec{Y}$는 $\vec{\theta}$에 대한 결합충분통계량이다.

정의

- 완비족

1. $\theta \in \Omega \in R^p$일 때, $\vec{\theta}$에 대해 의존하는 n개의 확률 변수 $V_1, \dots, V_n$에 대하여

1) $\{f(V_1, \dots, V_n; \vec{\theta}); \theta \in \Omega\}$ 인 분포족을 정의하자.

2) 이 때, 어떤 함수 $u(V_1, \dots, V_n)$에 대해 그 기댓값 $\mathrm{E}[u(V_1, \dots, V_n)] = 0$ 이 성립하는 유일한 경우가 $u(V_1, \dots, V_n) = 0$인 경우, 이는 완비족이다.

3) 이 때, 관심 모수를 $\vec{\gamma} = g(\vec{\theta})$ 하고 하고, $\vec{Y}$는 $\vec{\theta}$에 대한 완비충분통계량 벡터라 하자.

(1) $\vec{T} = T(\vec{Y})$ 를 $\vec{Y}$에 대한 함수의 벡터라고 한다면,

(2) $\vec{T}$는 $\vec{\gamma}$에 대한 유일한 MVUE 벡터이다.

정의

- 지수족

1. $\theta \in \Omega \in R^p$ 일 때, X가 pdf $f(x;\vec{\theta})$를 가지는 확률변수라고 하자. 이 때

1) $f(x;\vec{\theta}) = \exp\left[\sum_{j=1}^{p} p_j(\vec{\theta})K_j(\mathrm{x}) + H(x) + q(\vec{\theta})\right]$

2) 의 형태로 나타나는 pdf 또는 pmf를 가지는 분포를 지수류에 속한다고 한다.

2. 즉, 위의 pdf에 대하여

1) $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vec{\theta}) = \exp\left[\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} p_j(\vec{\theta})K_j(x_i) + \sum_{i=1}^{n} H(x) + nq(\vec{\theta})\right]$ 인 결합 PDF에서

$\exp\left[\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} p_j(\vec{\theta})K_j(x_i) + nq(\vec{\theta})\right] \cdot \exp[\sum_{i=1}^{n} H(x)]$ 이므로, 이 때

(1) $Y_1 = \sum_{i=1}^{n} K_1(x_i)$, $Y_2 = \sum_{i=1}^{n} K_2(x_i), \cdots, Y_p = \sum_{i=1}^{n} K_p(x_i)$ 는

(2) $\vec{\theta}$의 각각의 모수에 대한 각각의 결합충분통계량이다.

정의

- 지수족

1. $\theta \in \Omega \in R^p$ 일 때, X가 pdf $f(x;\vec{\theta})$를 가지는 확률변수라고 하자. 이 때

1) $f(x;\vec{\theta}) = \exp\left[\sum_{j=1}^{p} p_j(\vec{\theta})K_j(\mathrm{x}) + H(x) + q\left(\vec{\theta}\right)\right]$

2) 의 형태로 나타나는 pdf 또는 pmf를 가지는 분포를 지수류에 속한다고 한다.

2. 즉, 위의 pdf에 대하여

1) $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vec{\theta}) = \exp\left[\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} p_j(\vec{\theta})K_j(x_i) + \sum_{i=1}^{n} H(x) + nq\left(\vec{\theta}\right)\right]$ 인 결합 PDF에서

$\exp\left[\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} p_j(\vec{\theta})K_j(x_i) + nq\left(\vec{\theta}\right)\right] \cdot \exp[\sum_{i=1}^{n} H(x)]$ 이므로, 이 때

(1) $Y_1 = \sum_{i=1}^{n} K_1(x_i)$, $Y_2 = \sum_{i=1}^{n} K_2(x_i), \cdots, Y_p = \sum_{i=1}^{n} K_p(x_i)$ 는

(2) $\vec{\theta}$의 각각의 모수에 대한 각각의 결합충분통계량이다.

정의

- 지수족

3. 위에서 $\vec{X}$를 k차원의 확률 벡터임을 가정하고, k차원까지 분포를 확장하면

1) $\vec{X}$ 를 $X \in R^k$ 인 확률 벡터라고 할 때,

2) $f(\vec{X};\vec{\theta}) = \exp\left[\sum_{j=1}^{p} p_j(\vec{\theta})K_j(\vec{x}) + H(\vec{x}) + q(\vec{\theta})\right]$ 인 다변량 PDF가 정의된다면

(1) $Y_j = \sum_{i=1}^{n} K_1(x_i)$(j = 1,2 … p) 는

(2) $\vec{\theta}$의 각 모수 j에 대한 j번째 완비충분통계량이 된다.

정의

- 지수족

4. 이 때, 다음의 조건까지 만족하면 정칙지수류라고 한다.

1) 범위는 모수 벡터 $\vec{\theta}$에 의존하지 않는다.
2) Ω는 공집합이 아닌 m차원 공간이다.
3) j = 1,2 … p에 대해서 $p_j(\vec{\theta})$ 는 서로 독립이고, 연속이다.
4) 분포의 유형에 따라 다음을 만족한다.

(1) X가 연속형일 경우, j = 1,2 … p에 대해 $K_j{}^{(m)}$(x)의 m차 도함수는

- 구간 a< x<b에서 연속이고
- 선형동차함수가 존재하지 않으며
- $H(x)$는 a<x<b에 대해 연속이다.

(2) X가 이산형일 경우, j = 1,2 … p에 대해 K_j(x) 범위 S에서 x에 대한 함수이다.

예제

- 다중 모수의 결합충분통계량

1. $X_1, \dots, X_n$이 $-\infty < \theta_1 < \infty$, $0 < \theta_2 < \infty$ 라고 할 때

pdf $f(x; \vec{\theta}) = \frac{1}{2\theta_2}$ 을 갖는 분포에서 추출한 확률표본이라고 하자.

1) $Y_1 < \cdots < Y_n$을 순서통계량이라고 할 때, Y_1과 Y_n의 결합 pdf는

1) $f(Y_1, Y_n; \vec{\theta}) = \frac{n(n-1)}{(2\theta_2)^n}(y_n - y_1)^{n-2}$, $\theta_1 - \theta_2 < Y_1 < Y_n < \theta_1 + \theta_2$

2. 이 때, $\prod_{i=1}^{n} f(x_i; \vec{\theta}) = \frac{1}{(2\theta_2)^n}$ $-\infty < \theta_1 < \infty$, $0 < \theta_2 < \infty$

1) 위 pdf를 수정하면 $\frac{n(n-1)[\max(x_i) - \min(x_i)]^{(n-2)}}{(2\theta_2)^n} \cdot \frac{1}{n(n-1)[\max(x_i) - \min(x_i)]^{(n-2)}}$

2) 이 때, $\max(x_i) = y_n$, $\min(x_i) = y_1$ 이다.

2. $\vec{Y} = \begin{bmatrix} \max(x_i) \\ \min(x_i) \end{bmatrix}$ 일 때

1) $f(\vec{Y}; \vec{\theta}) = \frac{n(n-1)}{(2\theta_2)^n}(\max(x_i) - \min(x_i))^{n-2}$, $\theta_1 - \theta_2 < \min(x_i) < \max(x_i) < \theta_1 + \theta_2$

2) 에서 $\vec{Y}$의 각 요소는 $\vec{\theta}$에 대한 충분통계량이다.

예제

- 결합완비충분통계량

1. $X_1, \dots, X_n$이 $-\infty < \theta_1 < \infty,\ 0 < \theta_2 < \infty$ 라고 할 때

N(θ_1, θ_2) 을 갖는 분포에서 추출한 확률표본이라고 하자.

1) 이 때, $f(x;\vec{\theta}) = \exp\left[\frac{-1}{2\theta_2}x^2 + \frac{\theta_1}{\theta_2}x - \frac{{\theta_1}^2}{2\theta_2} - \log(\sqrt{2\pi\theta_2})\right]$ 이고

2) $\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\vec{\theta}) = \exp\left[\frac{-1}{2\theta_2}\sum {x_i}^2 + \frac{\theta_1}{\theta_2}\sum x_i - \frac{{\theta_1}^2}{2\theta_2} - \log(\sqrt{2\pi\theta_2})\right]$ 이므로

(1) $\vec{Y}$ 를 모수 벡터 $\vec{\theta}$에 대응하는 완비충분통계량 벡터라고 하면

(2) $Y_1 = \sum {x_i}^2$, $Y_2 = \sum x_i$ 에서 $\vec{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 = \sum {x_i}^2 \\ Y_2 = \sum x_i \end{bmatrix}$ 는 $\vec{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$ 에 대한 완비충분통계량 벡터이다.

1. 이 때,

1) $z_1 = \frac{Y_2}{n} = \overline{X}$, $z_2 = \frac{Y_1 - \frac{{Y_2}^2}{n}}{n-1} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ 라고 할 때

2) $\vec{Z} = \begin{bmatrix} z_1 = \frac{Y_2}{n} \\ z_2 = \frac{Y_1 - \frac{{Y_2}^2}{n}}{n-1} \end{bmatrix}$ 는 계산하면 각각의 모수에 대해 <u>불편추정량</u>이고, 또한 <u>완비충분통계량의 함수</u>이므로

이는 유일한 MVUE가 된다.

예제

- 여러 개 모수에 대한 여러 개 확률변수의 완비충분통계량

1. 결과가 발생하면 1, 아니면 0인 이항분포를 j번 시행한 결과에 대한 다항분포를

1) $\vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \dots \\ X_{k-1} \end{bmatrix}$ 라 하고, $\vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \dots \\ p_{k-1} \\ p_k \end{bmatrix}$, p_k = 1-$\sum_{i=1}^{k-1} p_i$ 일때

2) $f(\vec{X};\vec{\theta}) = p_k = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k-1}\left(\log\left[\frac{p_i}{1-\sum_{i\neq j} p_i}\right]\right)x_j + \log\left(1-\sum_{i\neq j} p_i\right)\right\}$

(1) 이 때, $Y_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ij}$, j = 1,2 … $k-1$ 는 $\vec{p}$에 대한 결합완비충분통계량이다.

(2) 이 때, Y_j는 베르누이(n, p_j)를 각각 따르고, 이 때 p_j의 MVUE는 Y_j의 함수인 $\frac{Y_j}{n}$ 이다.

예제

- 여러 개 모수에 대한 여러 개 확률변수의 완비충분통계량

2. j $\neq l$에 대해 $p_j p_l$을 구하면

1) $p_j p_l$의 MLE 추정량은 $\frac{Y_j Y_l}{n^2}$ 이고, 이를 이용하여 기댓값을 구하면

(1) $\mathrm{E}\left[\frac{Y_j Y_l}{n^2}\right] = \frac{1}{n^2}\mathrm{E}[Y_j Y_l | Y_l] = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{E}[Y_l E[Y_j | Y_l]]$

$= \frac{1}{n^2}\,\mathrm{E}\left[Y_l (n - Y_l)\frac{p_j}{1-p_l}\right] = \frac{1}{n^2}\frac{p_j}{1-p_l}\{\mathrm{E}[nY_l] - E[{Y_l}^2]\}$

$= \frac{1}{n^2}\frac{p_j}{1-p_l}\{n^2 p_l - np_l(1-p_l) - n^2 {p_l}^2\}$

$= \frac{1}{n^2}\frac{p_j}{1-p_l}\,np_l(1-p_l)(\mathrm{n}-1) = \frac{(n-1)}{n}p_j p_l$

2) 따라서, $\frac{1}{n(n-1)}Y_j Y_l$ 은 $p_j p_l$에 대한 MVUE이다.