ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Table des matières

Bref historique : C'est au début du $XVII^{ieme}$ siècle, avec le calcul différentiel et intégral de Newton et Leibniz, qu'apparut la notion d'équations différentielles.

Elles sont issues de problèmes de géométrie et de mécanique. Au début du $XVIII^{ieme}$ siècle les méthodes classiques de résolution de certaines équations (linéaires et de Bernouilli notamment) furent découvertes.

Avec le développement de la mécanique, la résolution des équations différentielles devient une branche importante des mathématiques (grace à Euler, Lagrange, Laplace).

Une équation différentielle est une équation liant une fonction et sa ou ses dérivée(s).
Résoudre une telle équation signifie déterminer toutes les fonctions qui satisfont à l'égalité.

I Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Définition 1
Soient a, b et c trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et y la fonction inconnue, définie et dérivable sur l'intervalle I. On suppose de plus que la fonction a ne s'annule pas sur l'intervalle I.
On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation du type :

$$(E) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x).$$

Pour plus de clarté, nous allons travailler sur un exemple :

> On considere l'equation differentielle $(E) : y' - 2y = xe^x$ ou y est une fonction de la variable reelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' la fonction dérivée de y.
> 1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0) : y' - 2y = 0$.
> 2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (-x - 1)e^x$.
>   Démontrer que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
> 3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
> 4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

Exemple 1
Dans cet exemple, les fonctions a, b et c sont définies sur $\mathbb{R}$ par :
- ➔ $a(x) = 1$, $b(x) = -2$ et $c(x) = xe^x$.

I.1 Solution générale de l'équation sans second membre

Soit $(E_0) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$, cette équation est appelée équation différentielle sans second membre, ou encore équation homogène associée à (E).
a étant une fonction ne s'annulant pas, on peut encore écrire $(E_0) : y'(x) + \dfrac{b(x)}{a(x)}y(x) = 0$.

Théorème 1
a et b étant des fonctions dérivables sur I avec a ne s'annulant pas sur I, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E_0) : y'(x) + \dfrac{b(x)}{a(x)}y(x) = 0$ est l'ensemble des fonctions y définies sur I par $y(x) = ke^{-G(x)}$ ou k est une constante réelle et G une primitive de le fonction $\gamma(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}$.

Exemple 2
Dans l'exemple, on souhaite résoudre $(E_0) : y'(x) - 2y(x) = 0$.
On a $\gamma(x) = -2$ et donc $G(x) = -2x$. La solution générale est alors du type $y_0(x) = ke^{2x}$.

I.2 Solution particulière de l'équation différentielle linéaire de premier ordre

Définition 2
On appelle solution particulière de l'équation différentielle $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ toute fonction y vérifiant cette équation.

Dans les exercices, toutes les indications permettant d'obtenir une solution particulière sont données. Bien souvent, une fonction est proposée et il suffit de vérifier que c'est une solution particulière de (E), c'est à dire de remplacer les "y" par la fonction proposée dans l'équation homogène (sans second membre), et de vérifier que l'on obtient bien le second membre

Exemple 3
Dans l'exemple, on nous demande de montrer que la fonction g est une solution particulière de (E) :

- ➔ Calcul de la dérivée :
  $g(x) = (-x-1)e^x$ donc $g'(x) = (-1)e^x + (-x-1)e^x = (-x-2)e^x$.
- ➔ Remplacement dans l'équation homogène :
  $g'(x) - 2g(x) = (-x-2)e^x - 2(-x-1)e^x = (-x-2+2x+2)e^x = xe^x$.
- ➔ g est donc bien une solution particulière de (E).

I.3 Ensemble des solutions d'une équation différentielle

Théorème 2
Les solutions d'une équation différentielle sont de la forme $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$ ou y_0 est la solution de l'équation sans second membre (E_0) et y_p une solution particulière de l'équation complète (E).

Exemple 4
Dans notre exemple, on a $y_0(x) = ke^{-2x}$ et $y_p(x) = g(x) = (-x-1)e^x$.
Donc, la solution de l'équation (E) est : $y(x) = ke^{-2x} + (-x-1)e^x$.

I.4 Unicité de la solution sous condition initiale

Théorème 3
Une équation différentielle linéaire du premier ordre (E) possède une unique solution vérifiant une condition initiale du type $y(A) = B$.

Exemple 5
Dans l'exemple, on recherche la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$.

- ➔ On a alors : $f(0) = 0 \iff ke^{-2\times 0} + (-0-1)e^0 = 0 \iff k-1=0 \iff k=1$.
- ➔ Soit $f(x) = e^{-2x} + (-x-1)e^x$.

I.5 Méthode de la variation de la constante

Il s'agit d'une méthode pour déterminer les solutions d'une équation différentielle avec second membre, connaissant les solutions de l'équation homogène (sans second membre).

Méthode : Si y_h est une solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = z(t)y_h(t)$ avec $z(t)$ est une fonction que l'on déterminera.

Théorème 4
a , b et c étant des fonctions dérivables sur I avec a ne s'annulant pas sur I, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E) : a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ est l'ensemble des fonctions y définies sur I par $y(x) = ke^{-G(x)} + y_p(x)$ ou k est une constante réelle , G une primitive de le fonction $\gamma(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}$ et $y_p(x) = k(x)e^{-G(x)}$ est une solution particulière avec $k(x)$ est une primitive de $\dfrac{c(x)}{a(x)}e^{G(x)}$.

Exemple 6
Soit (E) : $y' - x^2y = x^2$

1. On résout l'équation homogène $y' - x^2y = 0$, dont la solution générale est donnée par $y_h(x) = ke^{-\frac{1}{3}x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.

2. On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = k(x)e^{-\frac{1}{3}x^2}$, d'où :$k(x) = \int \frac{x^2}{1}e^{\frac{1}{3}x^2}dx = e^{\frac{1}{3}x^2} + c$, on prendra alors (pour le choix de c=0) $k(x) = e^{\frac{1}{3}x^2}$ et enfin on a : $y_p(x) = k(x)e^{-\frac{1}{3}x^2} = 1$

3. On en déduit que les solution de (E) sont de la forme $y(x) = ke^{-\frac{1}{3}x^2} + 1$, $k \in \mathbb{R}$.

II Équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants (EDL2CC)

Définition 3
Soient $a \neq 0$, b et c trois constantes réelles, d une fonction dérivable sur I et y la fonction inconnue, définie et deux fois dérivable sur I.
On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation du type

$$(E) : ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x).$$

Tout comme les équations différentielles d'ordre 1, nous allons travailler sur un deuxième exemple :

> On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = 8e^x$ ou y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.
> 1. Déterminer les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_0) : y'' - 2y' + y = 0$.
> 2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2e^x$.
>   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
> 3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
> 4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales
> $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

Exemple 7
Dans cet exemple, on a :
- ➔ $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$ et $d(x) = 4x^2e^x$.

II.1 Solution générale de l'équation sans second membre

Théorème 5
On considère l'équation différentielle sans second membre $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$
d'équation caractéristique associée $ar^2 + br + c = 0$.
Le tableau ci-dessous donne les solutions de (E_0) en fonction du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$: (dans tous les cas, a et b sont des constantes réelles quelconque).

	Solutions de l'équation caractéristique associée	Solution générale de (E_0)
$\Delta > 0$	2 racines réelles $r_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $r_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	$y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$
$\Delta = 0$	une racine double réelle $r = -\dfrac{b}{2a}$	$y(x) = (Ax + B)e^{rx}$
$\Delta < 0$	2 racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ ou $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$	$y(x) = e^{\alpha x}[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]$

Exemple 8
Résolution de l'équation différentielle $(E_0) : y'' + \omega^2 y = 0$:

- ➔ L'équation caractéristique de (E_0) est $r^2 + \omega^2 = 0$ de discriminant $\Delta = -4\omega^2 < 0$.
  Les solutions de cette équation sont $0 + i\omega$ et $0 - i\omega$.
- ➔ Les solutions de (E_0) sont du type $y(x) = e^{0\times x}[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)] = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$.

Exemple 9
Résolution de l'équation différentielle $(E_0) : 2y'' - 5y' - 3y = 0$:

- ➔ L'équation caractéristique de (E_0) est $2r^2 - 5r - 3 = 0$ de discriminant $\Delta = 49 > 0$.
  Les solutions de cette équation sont $r_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $r_2 = 3$.
- ➔ Les solutions de (E_0) sont donc du type $y_0(x) = Ae^{\frac{1}{2}x} + Be^{3x}$

Exemple 10
Dans l'exemple précédent, on souhaite résoudre $(E_0) : y'' - 2y' + y = 0$.

- ➔ L'équation caractéristique de (E_0) est $r^2 - 2r + 1 = 0$ de discriminant $\Delta = 0$.
  L'équation admet donc une solution double $r = 1$.
- ➔ Les solutions de (E_0) sont donc du type $y(x) = (Ax + B)e^x$.

II.2 Solution particulière d'une EDL2CC

Définition 4
On appelle solution particulière de l'équation différentielle $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = d(x)$ toute fonction y vérifiant cette équation.

Dans les exercices, les indications permettant d'obtenir une solution particulière ne sont pas toujours données. Parfois, une fonction est proposée et il suffit de vérifier que c'est une solution particulière de (E), c'est à dire de remplacer les "y" par la fonction proposée dans l'équation homogène (sans second membre), et de vérifier que l'on obtient bien le second membre

Exemple 11
Dans l'exemple du précédent, on nous demande de montrer que la fonction h est une solution particulière de (E).

- ➔ Calcul de la dérivée première :
  $h(x) = 4x^2e^x$ donc $h'(x) = 8xe^x + 4x^2e^x = (8x + 4x^2)e^x$.
- ➔ Calcul de la dérivée seconde :
  $h''(x) = (8 + 8x)e^x + (8x + 4x^2)e^x = (8 + 16x + 4x^2)e^x$.
- ➔ Remplacement dans l'équation homogène :
  $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = (8 + 16x + 4x^2)e^x - 2(8x + 4x^2)e^x + 4x^2e^x = (8 + 16x + 4x^2 - 16x - 8x^2 + 4x^2)e^x = 8e^x$.
- ➔ h est donc bien une solution particulière de (E).

II.3 Ensemble des solutions d'une EDL2CC

Théorème 6
Les solutions d'une équation différentielle sont de la forme $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$ ou y_0 est la solution de l'équation sans second membre et y_p une solution particulière de l'équation complète.

Exemple 12
Dans notre exemple, on a $y_0(x) = (Ax + B)e^x$ et $y_p(x) = h(x) = 4x^2e^x$.
Donc, la solution de l'équation (E) est : $y(x) = (Ax + B)e^x + 4x^2e^x = (4x^2 + Ax + B)e^x$.

II.4 Unicité de la solution sous conditions initiales d'une EDL2CC

Théorème 7
Une équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre (E) possède une unique solution vérifiant deux conditions initiales données.

Exemple 13
Dans l'exemple, on recherche la solution f de (E) vérifiant $f(0) = -4$ et $f'(0) = -4$.

- ➔ Première condition initiale :
  $f(0) = -4 \iff (4 \times 0^2 + A \times 0 + B)e^0 = -4 \iff B = -4$.
- ➔ Calcul de la dérivée :
  $f'(x) = (8x + A)e^x + (4x^2 + Ax + B)e^x = (4x^2 + 8x + Ax + A + B)e^x$.
- ➔ Deuxième condition initiale :
  $f'(0) = -4 \iff (4 \times 0^2 + 8 \times 0 + A \times 0 + A + B)e^0 = -4 \iff A + B = -4 \iff A = 0$.
- ➔ Conclusion :
  $f(x) = (4x^2 - 4)e^x$.

II.5 Recherche de solution particulière

Quand le second membre $f(x)$ d'une EDL2CC se présente sous l'une des formes usuelles recensées plus bas, alors cette équation différentielle admet une solution particulière $y_p(x)$ de la même "forme" que le second membre $f(x)$. Plus précisément :

Second membre	Solutions particulière
$\boldsymbol{f(x) = P(x)}$	On cherche une solution sous la forme $\boldsymbol{y_p(x) = Q(x)}$
	où Q est un polynôme tel que
où P est un polunôme de degré n	• si $c \neq 0$, alors deg(Q) = n
	• si $c = 0$ et $b \neq 0$, alors deg(Q) = n + 1 et val(Q) = 1
	• si $c = 0$ et $b = 0$, alors deg(Q) = n + 2 et val(Q) = 2

Second membre	Solutions particulière
$\boldsymbol{f(x) = P(x)e^{sx}}$	On cherche une solution sous la forme $\boldsymbol{y_p(x) = Q(x)e^{sx}}$
	où Q est un polynôme tel que
où P est un polunôme de degré n	• si s n'est pas racine de E_c, alors deg(Q) = n
et s est un réel	• si s est racine simple de E_c, alors deg(Q) = n + 1 et val(Q) = 1
	• si s est une racine double de E_c, alors deg(Q) = n + 2 et val(Q) = 2

Second membre	Solutions particulière
$\boldsymbol{f(x) = \alpha\cos(\omega x + \phi) + \beta\sin(\omega x + \phi)}$	• si $i\omega$ n'est pas racine de E_c, alors
	on cherche une solution sous la forme
où ω est rél non nul	$\boldsymbol{y_p(x) = A\cos(\omega x + \phi) + B\sin(\omega x + \phi)}$
	• si $i\omega$ est une racine de E_c, alors
	on cherche une solution sous la forme
	$\boldsymbol{y_p(x) = x(A\cos(\omega x + \phi) + B\sin(\omega x + \phi))}$

Remarque 1
• E_c désigne l'équation caractéristique de l'équation différentelle EDL2CC.

• La valuation ("val" en abrégé) d'un polynôme $Q(x)$ est le degré du monôme de Q non-nul de plus bas degré. Ainsi, si val(Q) = 1 , cela signifie que le terme constant du polynôme Q est nul.

Par exemple, $Q_1(x) = x^3 + 2x$ est de valuation 1, tandis que $Q_2(x) = x^5 + 3x^4$ est de valuation 4.

• Vous pouvez voir plus de détail sur la recherche des solutions particulères en consultant : ce lien