famille libre

base

dimension (e.v)

EXERCICE 5:

Les familles suivantes sont-elles libres $\neq$ ou liées ?

1. $\mathcal{B}_1 = ((1,1,1,1),(1,2,3,4),(1,2,8,16))$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. $\mathcal{B}_2 = ((1,-1,3),(2,3,4),(1,-6,5))$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\mathcal{B}_3 = ((1,-1,3),(3,-1,1),(1,1,-1))$ dans $\mathbb{R}^3$. → dimension (e.v)

EXERCICE 6:

Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

1. $C = \{(x-y+z, 3x+6z, -2x+4y)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$
2. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/2x = y \text{ et } y = 3z\}$

une famille est libre $\neq$ une famille lié

les vecteurs de cette famille sont indépendants

(dépendants) les vecteurs

. vecteurs

$e_1, e_2, \ldots, e_k$?? libre ou non ?

$\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \cdots + \alpha_k \cdot e_k = 0_E$

$E = \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \ldots$

$$\begin{cases} \text{———} = 0 \\ \text{———} = 0 \\ \text{———} = 0 \end{cases}$$

Système linéaire (Homogène)

∞ de solution → lié

une solution unique

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ → libre

1. $\mathcal{B}_1 = (\underbrace{(1,1,1,1)}_{e_1}, \underbrace{(1,2,3,4)}_{e_2}, \underbrace{(1,2,8,16)}_{e_3})$ dans $\mathbb{R}^4$.

$$\alpha \cdot e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0)$$

? (α, β, γ)

$$\underbrace{(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha) + (\beta, 2\beta, 3\beta, 4\beta) + (\gamma, 2\gamma, 8\gamma, 16\gamma)} = (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+2\beta+2\gamma, \alpha+3\beta+8\gamma, \alpha+4\beta+16\gamma) = (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha+2\beta+2\gamma = 0 \\ \alpha+3\beta+8\gamma = 0 \\ \alpha+4\beta+16\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 0 \\ 1 & 4 & 16 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 15 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \left.\begin{array}{l} 5\gamma = 0 \\ 12\gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

$\mathcal{B}_1$ est libre : e_1, e_2 et e_3 sont indépendants

2. $\mathcal{B}_2 = (\overbrace{(1,-1,3)}^{f_1}, \overbrace{(2,3,4)}^{f_2}, \overbrace{(1,-6,5)}^{f_3})$ dans $\boxed{\mathbb{R}^3}$

libre ? ou non ?

- $x f_1 + y f_2 + z f_3 = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + 3y - 6z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -6 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{5} L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 5y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3z \\ y = z \end{cases}$$

$S_{\mathbb{R}^3} = \{(-3z, z, z) \; ; \; z \in \mathbb{R}\}$ (∞ de solution)

$\Rightarrow \mathcal{B}_2$ est liée

$\mathcal{B} \to \begin{cases} \text{famille libre} \\ \text{famille génératrice} \end{cases} \iff \mathcal{B}$ est une base

dimension = Cardinal $(\mathcal{B})$

EX 6

$$C = \{(x - y + z, 3x + 6z, -2x + 4y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}.$$

1) Mq C est un e.v. (s.e.v)

2) une famille génératrice.

3) une base

4) dimension

E → s.e.v (M_1) ; E → s.e.v (M_2)

M_1 : $u, v \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} \bullet\ 0 \in E \ ? \\ \bullet\ u+v \in E \\ \bullet\ \lambda u \in E \end{cases}$

M_2 : $E = \text{vect}\{ \_\_\_ \}$ $\Rightarrow E$, s.e.v

$$C = \{(x, 3x, -2x) + (-y, 0, 4y) + (z, 6z, 0) \ ; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \{x\underbrace{(1,3,-2)}_{e_1} + y\underbrace{(-1,0,4)}_{e_2} + z\underbrace{(1,6,0)}_{e_3} \ ; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$= \text{Vect}\{e_1, e_2, e_3\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e_1 = (1,3,-2) \\ e_2 = (-1,0,4) \\ e_3 = (1,6,0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ C est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ [C est un e.v]

2) D'après (1) $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une famille génératrice.

. $\mathcal{B}$ est-elle libre ?

$\alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_2 + \gamma \cdot e_3 = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 6\gamma = 0 \\ -2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3} L_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

e_1, e_2, e_3 sont dépendent

$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ n'est pas une base $\boxed{X}$

Exercice 8:

Déterminer si la famille donnée est une base de l'espace donné :

1. $\mathcal{B}_1 = ((1,0,-2,5),(7,-4,3,1),(0,1,-1,0),(1,-3,0,2))$ dans $\mathbb{R}^4$
2. $\mathcal{B}_2 = ((1,2,3),(4,5,6))$ dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \text{Card}(\mathcal{B}_1) = 4 \\ + \\ \mathcal{B}_1 \text{ est libre} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}_1 \text{ est une base}$$

dimension $\mathbb{R}^4$ = 4

E : e.v

dim(E) = n connue

Mq $\mathcal{B}$ est une base de E

$$\begin{cases} Card(\mathcal{B}) = n \\ \mathcal{B} \text{ est libre} \end{cases}$$

on ne connait pas la dim de E

Mq $\mathcal{B}$ est une base ?

$\Downarrow$

$$\begin{cases} * \ \mathcal{B} \text{ est libre} \\ * \ \mathcal{B} \text{ est génératrice} \end{cases}$$

Q2) $\mathcal{B}_2$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$

car $Card(\mathcal{B}_2) = 2 < \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

Q1) Pour vérifier si $\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^4$

il suffit de vérifier qu'elle est libre

car $Card(\mathcal{B}_1) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$

$\mathcal{B}_1$ est-elle libre ?

....

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 17 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -34 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{17}{4} L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - \frac{17}{2} L_2 \end{array}$$

...

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{4} & \frac{-43}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-73}{13} & 0 \end{array}\right| \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \mathcal{B}_1$ est libre. D'où $\mathcal{B}_1$ est une base.