Développement limité 1LT Abdallah Khemais

Dans toute cette partie, f désigne une fonction définie sur D une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition

Si f est définie au voisinage de 0, on dit que f **admet un développement limité (DL) d'ordre n au voisinage de 0** s'il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

Le polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ s'appelle la **partie régulière** du DL et $o(x^n)$ s'appelle le **reste** du DL.

On peut aussi définir le développement limité au voisinage de n'importe quel $x_0 \in \mathbb{R}$:

Définition

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est définie au voisinage de x_0, on dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $(b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Propriétés

Voici un théorème qui donne une condition suffisante pour l'existence d'un développement limité à l'ordre n :

Théorème :

Si f est une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I et si $x_0 \in I$ alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

Remarque

On utilise le plus souvent ce théorème dans le cas particulier où $x_0 = 0$ ce qui donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n)$$

Propriété

Si f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a_0$

On remarque donc que f ne peut pas admettre de DL en x_0 si f n'admet pas une limite finie en x_0.

Propriété

Si f possède un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$, alors au voisinage de x_0, f est équivalente au premier terme non nul de son développement limité : c'est-à-dire que si p est tel que pour tout $0 \leqslant k \leqslant p - 1$ $a_k = 0$ et $a_p \neq 0$ alors on a au voisinage de x_0 :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p(x - x_0)^p$$

Théorème

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 alors ce développement limité est unique

Développements limités des fonctions usuelles

Voici maintenant les développements limités classiques à connaitre par coeur. Ce sont des développements limités au voisinage de 0 et à l'ordre $n \in \mathbb{N}$:

Théorème :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Pour obtenir un développement limité au voisinage d'un $x_0 \neq 0$ il faudra le plus souvent effectuer le changement de variable $X = x - x_0$ qui permet de chercher un développement limité en X au voisinage de 0

Opérations sur les DL

Somme et produit

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ admettant chacun un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \text{ et } g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$$

- Alors $f + g$ admet le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 suivant :

$$(f+g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)x^k + o(x^n)$$

- Alors fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 que l'on obtient en faisant le produit des polynômes $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $\sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exemple

Calculer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\frac{e^x}{1+x}$.

$$\frac{e^x}{1+x} = e^x \times \frac{1}{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= 1 - x + x^2 + x - x^2 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Composition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 et telle que $\lim\limits_{0} f = 0$:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k x^k}_{P(x)} + o(x^n)$$

Soit $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$g(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{Q(x)} + o(x^n)$$

On suppose de plus que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n que l'on obtient en effectuant $Q \circ P$ et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exemple

Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $e^{\sqrt{x+1}}$.

$$e^{\sqrt{x+1}} = e^{\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right)}$$

$$= e \times e^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)} = e \times e^X \quad \text{avec } X = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} X = 0$ on peut calculer le développement limité de e^X. On sait que au voisinage de 0 :

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)$$

Or :

$$X = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

$$X^2 = \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) \times \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

$$o(X^2) = o(x^2)$$

Dans le développement du produit on oublie tous les terme en x^a avec $a > 2$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
e^{\sqrt{x+1}} &= e \times \left(1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x^2 + o(x^2)\right) + o(x^2)\right) \\
&= e\left(1 + \frac{1}{2}x + o(x^2)\right) \\
&= e + \frac{e}{2}x + o(x^2)
\end{aligned}$$

Quotient

Lorsqu'on a un quotient il faut se servir de la composée avec le développement limité de $\frac{1}{1+x}$.

Exemple

Déterminer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $\frac{1}{1+\ln(1+x)}$.

On sait que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\ln(1+x)} &= \frac{1}{1 + x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{1+X} \quad \text{avec } X = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0} X = 0$ on peut utiliser le développement limité de $\frac{1}{1+X}$. On sait que au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)$$

Or :

$$\begin{aligned}
X &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
X^2 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = x^2 - x^3 + o(x^3) \\
X^3 &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \times \left(x^2 - x^3 + o(x^3)\right) = x^3 + o(x^3) \\
o(X^3) &= o(x^3)
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{1+\ln(1+x)} = 1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) + \left(x^2 - x^3 + o(x^3)\right) - \left(x^3 + o(x^3)\right) + o(x^3)$$
$$= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{3}x^3 + o(x^3)$$
$$= 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{3}x^3 + o(x^3)$$

Exemples :

Déterminer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $\frac{1}{1+\sqrt{1+x}}$.

Applications des DL

Position par rapport à une tangente

Proposition
Si f admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0, $f(x) = a + b(x - x_0) + o((x - x_0))$ alors f est dérivable en x_0 et $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.

Remarque

Dans ce cas, l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc $y = a + b(x - x_0)$ et pour connaitre la position de la courbe par rapport à la tangente il suffit de regarder le signe du terme suivant du développement limité.

Exemple

Calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

En déduire l'équation de la tangente en 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente.

Au voisinage de 0 on a :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+1+x+x^2/2+x^3/6+o(x^3)} = \frac{1}{2+x+x^2/2+x^3/6+o(x^3)}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x/2+x^2/4+x^3/12+o(x^3)}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+X} \quad \text{avec } X = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} X = 0$ on peut utiliser le développement limité de $\frac{1}{1+X}$. On sait que au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)$$

Or :

$$X = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

$$X^2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) \times \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

$$X^3 = \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) \times \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

$$o(X^3) = o(x^3)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right) - \left(\frac{x^3}{8} + o(x^3)\right) + o(x^3)\right)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)\end{aligned}$$

Donc la courbe représentative de f admet en 0 une tangente d'équation $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$.

On a $f(x) - \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) = \frac{x^3}{48} + o(x^3)$ donc au voisinage de 0, la position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de $\frac{x^3}{48}$. Pour $x < 0$ la courbe est en dessous de la tangente et pour $x > 0$ la courbe est au dessus de la tangente.

Détermination d'asymptotes obliques

On suppose ici que $\lim_{+\infty} f = \pm\infty$ ou $\lim_{-\infty} f = \pm\infty$ et on est donc en train de chercher à déterminer si la courbe représentative de f, C, possède une asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$.

Si C possède une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ en $\pm\infty$ alors on a

$$f(x) = ax + b + \mathrm{e}(x)$$

où e est une fonction qui tend vers 0 en $\pm\infty$.

On pose alors $X = \frac{1}{x}$ et ainsi lorsque x tend vers $\pm\infty$, X tend vers 0. On a donc

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{a}{X} + b + \mathrm{e}\left(\frac{1}{X}\right)$$

ce qui nous donne

$$Xf\left(\frac{1}{X}\right) = a + bX + X\mathrm{e}\left(\frac{1}{X}\right) = a + bX + o(X)$$

Ainsi on voit que pour déterminer les coefficients de l'asymptote oblique il suffit de déterminer le développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 de $Xf\left(\frac{1}{X}\right)$. Si on continue plus loin dans le développement limité on pourra obtenir la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Exemple

Étudier la branche infinie en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x^4}{x^2+1}}$.

On remarque tout d'abord que $\lim\limits_{\pm\infty} f = +\infty$.

- Etude en $+\infty$:

On pose $X = \frac{1}{x}$, comme on est au voisinage de $+\infty$, X est au voisinage de 0 avec $X > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\frac{1}{X}\right) &= \sqrt{\frac{1/X^4}{1/X^2+1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{X^2+X^4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{X^2(1+X^2)}} \\ &= \frac{1}{X \times \sqrt{1+X^2}} \quad \text{car } X > 0 \\ &= \frac{1}{X} \times (1+X^2)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{X}\left(1 - \frac{1}{2}X^2 + o(X^2)\right) \\ &= \frac{1}{X} - \frac{1}{2}X + o(X) \end{aligned}$$

Donc on a au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On a donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$ et ainsi la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Comme $f(x) - x = -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ et que en $+\infty$ $-\frac{1}{2x} < 0$, la courbe est en dessous de l'asymptote.

Entrée [8]:

```
from IPython.display import display,Math
```

Entrée [12]:

```
from sympy.interactive import printing
printing.init_printing(use_latex='mathjax')
```

Entrée [1]:

```
from __future__ import division
import sympy as sym
from sympy import *
x, y, z = symbols("x y z")
k, m, n = symbols("k m n", integer=True)
f, g, h = map(Function, 'fgh')
```

Entrée [2]:

```
h=1/(1+ln(1+x))
h.series(x,0,4)
```

Out[2]:

$$1 - x + \frac{3x^2}{2} - \frac{7x^3}{3} + O\left(x^4\right)$$

Entrée [3]:

```
f=1/cos(x)
series(f,x, 0, 6)
```

Out[3]:

$$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + O\left(x^6\right)$$

Entrée [4]:

```
g=1/(1+sqrt(x+1))
g.series(x,0,6)
```

Out[4]:

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{8} + \frac{x^2}{16} - \frac{5x^3}{128} + \frac{7x^4}{256} - \frac{21x^5}{1024} + O\left(x^6\right)$$

Entrée [9]:

```
from ipywidgets import interact, widgets
sym.init_printing()
order = widgets.IntSlider(
    value=2,
    min=0,
    max=10,
    step=1,
    description='Order:',
    disabled=False,
    continuous_update=True,
    orientation='horizontal',
    readout=True,
    readout_format='d',
    slider_color='red'
)
text = widgets.Text(
    value='cos(x)',
    placeholder='Ecrire la fonction içi',
    description='Function:',
    disabled=False
)
```

Entrée [10]:

```
def DL(fun, n):
    try :
        display(
        Math('{} = {}'.format(
                latex(eval(fun)),
                latex(series(fun,x,0,n+1)
                )
             )))

    except:
        print("vérifier la fonction")


interact(DL, fun=text, n=order);
```

```
interactive(children=(Text(value='cos(x)', description='Function:', pl
aceholder='Ecrire la fonction içi'), Int…
```

Entrée [14]:

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
plt.rcParams["figure.figsize"] = [12.00, 7]
plt.rcParams["figure.autolayout"] = True
x = np.linspace(-5, 10, 1000)
y = np.sqrt(x**4/(1+x**2))
plt.grid()
plt.plot(x, y, label=r'$f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4}{1+x^2}}$')
plt.plot(x,x,'r',label=r'$\Delta: y=x$')
plt.legend(loc='upper left')
plt.show()
```