Série d'exercices n°3

Analyse 2

Exercice 1. Soit l'équation différentielle

$$E : (1 + e^{-x})Y' - Y = (1 + 2x)e^{x} + (1 + x)e^{2x}.$$

1. Trouver la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à E.
2. Chercher une solution de E de la forme $Y_s = \alpha x e^{2x}$ où α est une constante réelle à déterminer.
3. Donner alors la forme générale des solutions de E.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$E : (x + 1)(x^2 + 1)Y' + 2xY = \frac{(x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad x \in]-1, +\infty[$$

1. Trouver la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à E.
2. Déterminer une solution particulière de E.
3. Donner alors la forme générale des solutions de E.
4. Déterminer la solution Y_1 de E telle que $Y_1(0) = 1$.

Exercice 3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $Y' + x^2 Y = x^2$.
2. $(1 + x^2)Y' - Y = 1$ avec $Y(0) = 0$.
3. $\mathrm{ch}(x)Y' + \mathrm{sh}(x)Y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in]-1, 1[$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$E : Y'' - 2Y' + Y = 4xe^{-x} + 4\sin 2x - 3\cos 2x - 2\cos x$$

1. Trouver la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à E.
2. Trouver une solution particulière de $E_1 : Y'' - 2Y' + Y = 4xe^{-x}$.
3. Vérifier que $u(x) = \sin x + \cos 2x$ est une solution de
$$E_2 : Y'' - 2Y' + Y = 4\sin 2x - 3\cos 2x - 2\cos x$$
4. Déduire une solution particulière de E.
5. Déduire la forme générale des solutions de E.
6. Déterminer l'unique solution Y_1 de E vérifiant $Y_1'(0) = Y_1(0) = 0$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $Y'' + 4Y = x\,e^{x}$.
2. $Y'' + 2Y' = 2x^2$.
3. $Y'' + 2Y' + Y = e^{-x}$.
4. $Y'' + Y = x\sin(x)$.
5. $Y'' + 2Y' = \cos(2x) + x\sin(2x)$
6. $Y'' + Y' = \cos(2x) + \sin(x)$
7. $Y'' - 2Y' + Y = xe^{-x} + \sin(x)$