Série d'exercices
Calculs de primitives

Exercice 1.

Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes (sauf indication expresse de l'énoncé, il n'est pas demandé d'expliciter l'intervalle sur lequel on calcule).

$$F_1(x) = \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx\,;\, F_2(x) = \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx\,;\, F_3(x) = \int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}\,;\, F_4(x) = \int \frac{x^4}{x^3-3x+2}\,dx$$

$$F_5(x) = \int \frac{dx}{x^2+4}\,;\, F_6(x) = \int \frac{dx}{x^3-1}$$

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2}; \quad I_2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}; \quad I_3 = \int_2^3 \frac{(2x+1)dx}{x^2+x-3};\ I_4 = \int_0^2 \frac{x}{x^4+16}\,dx\,;$$

$$I_5 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos(x)\sin(x)};\ I_6 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}\,dt\,;\ I_7 = \int_0^1 \frac{1+\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\,dx$$

Exercice 3.

1. Calculer

$$G(t) = \int \frac{-t+1}{t^2+2t+5}\,dt$$

2. Calculer

$$F(t) = \int \frac{\ln(t^2+2t+5)}{(t-1)^2}\,dt$$

Exercice 4.

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}\,dt$$

Exercice 5.

1. Déterminer une primitive de la fonction f définie par :

$$f(t) = \frac{1}{\sin(2t)}$$

2. A l'aide du changement de variable $x = 2t$, calculer

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sin(x)}$$

Exercice 6.

Calculer

$$F(t) = \int \frac{1}{1+\mathrm{ch}(t)}\,dt$$

Exercice 7.

1. Calculer pour $x > 0$

$$F(x) = \int \frac{\text{ch}(x) - \text{sh}(x)}{\text{ch}(x) - 1} dx$$

2. Calculer

$$\int \frac{2 - \text{ch}(x) + \text{sh}(x)}{2\,\text{ch}(x)} dx$$

Exercice 8.

A l'aide d'une intégration par partie calculer les intégrales suivantes

a.

$$I_1 = \int_1^e t \ln(t)\, dt$$

b.

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t)\, dt$$

c.

$$I_3 = \int_0^{\sqrt{3}} 3x^2 \ln(x^2 + 1)\, dx$$

Exercice 9.

1. Calculer

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^2(x-1)}$$

2. Calculer

$$G(t) = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t(t+1)\left(\sqrt{\frac{t}{t+1}} - \frac{t}{t+1}\right)}$$

A l'aide du changement de variable $x = \sqrt{\frac{t}{t+1}}$

Exercice 10.

1.

$$F_1(x) = \int_0^x (t^2 + 1) \arctan(t)\, dt$$

2.

$$F_2(x) = \int_0^x (t + 1) \arcsin(t)\, dt$$

Exercice 11.

$$F_1(x) = \int \sin^2(x)\, dx\,; F_2(x) = \int \arctan(x)\, dx\,;\ F_3(x) = \int \ln(x^2 + 2)\, dx; F_4(x) = \int x\sqrt{1 + x} dx$$

$$F_5(x) = \int \sqrt{1 - x^2} dx\,; F_6(x) = \int \frac{dx}{\cos^2(x)\sin^2(x)};\ F_7(x) = \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)} dx\,;\ F_8(x) = \int \frac{\sin^3(x)}{1 + \cos(x)} dx$$