Calculs de primitives

Exercice 1.

Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes (sauf indication expresse de l'énoncé, il n'est pas demandé d'expliciter l'intervalle sur lequel on calcule).

$$F_1(x)=\int \frac{x^2}{1+x^2}dx\,;F_2(x)=\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx\,;F_3(x)=\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}\,;F_4(x)=\int \frac{x^4}{x^3-3x+2}dx$$

$$F_5(x)=\int \frac{dx}{x^2+4}\,;F_6(x)=\int \frac{dx}{x^3-1}$$

Correction exercice 1.

$$F_1(x)=\int \frac{x^2}{1+x^2}dx=\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx=\int \left(\frac{x^2+1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\int dx-\int \left(\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\arctan(x)+K$$

$$F_2(x)=\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx=\int \frac{x}{(x-1)(x-2)}dx$$

Il existe deux réels a et b tels que :

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$$

On multiplie par $x-1$, puis $x=1$

$$a=\left[\frac{x}{x-2}\right]_{x=1}=-1$$

On multiplie par $x-2$, puis $x=2$

$$b=\left[\frac{x}{x-1}\right]_{x=2}=2$$

$$F_2(x)=\int \left(\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)dx=-\ln|x-1|+2\ln|x-2|+K$$

Il existe trois réels a, b et c tels que :

$$\frac{1}{x(x-1)(x-2)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}$$

On multiplie par x, puis $x=0$

$$a=\left[\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right]_{x=0}=\frac{1}{2}$$

On multiplie par $x-1$, puis $x=1$

$$b=\left[\frac{1}{x(x-2)}\right]_{x=1}=-1$$

On multiplie par $x-2$, puis $x=2$

$$c=\left[\frac{1}{x(x-1)}\right]_{x=2}=\frac{1}{2}$$

$$F_3(x)=\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}=\int \left(\frac{1/2}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1/2}{x-2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln|x|-\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-2|+K$$

Il faut la division euclidienne de x^4 par x^3-3x+2

$$\begin{array}{l|l} x^4 & x^3-3x+2 \\ \cline{2-2} x^4-3x^2+2x & x \\ \cline{1-1} \qquad 3x^2-2x & \end{array}$$

Alors

$$\frac{x^4}{x^3-3x+2}=\frac{x(x^3-3x+2)+3x^2-2x}{x^3-3x+2}=x+\frac{3x^2-2x}{x^3-3x+2}$$

Il faut factoriser x^3-3x+2, $x=1$ est une racine évidente, on peut donc mettre $x-1$ en facteur, après un petit calcul : $x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2)$

Il existe trois réels a, b et c tels que :

$$\frac{3x^2-2x}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+2}$$

On multiplie par $(x-1)^2$, puis $x=1$

$$a=\left[\frac{3x^2-2x}{x+2}\right]_{x=1}=\frac{1}{3}$$

On multiplie par $x+2$, puis $x=-2$

$$c=\left[\frac{3x^2-2x}{(x-1)^2}\right]_{x=-2}=\frac{16}{9}$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$3=b+c\Rightarrow b=3-c=3-\frac{16}{9}=\frac{11}{9}$$

Donc

$$\frac{x^4}{x^3-3x+2}=x+\frac{\frac{1}{3}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{11}{9}}{x-1}+\frac{\frac{16}{9}}{x+2}$$

$$F_4(x)=\int\frac{x^4}{x^3-3x+2}dx=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{-1}{x-1}+\frac{11}{9}\ln|x-1|+\frac{16}{9}\ln|x+2|+K$$

$$F_5(x)=\int\frac{dx}{x^2+4}=\int\frac{dx}{x^2+2^2}=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+K$$

Il faut factoriser x^3-1, $x=1$ est une racine évidente : $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ et x^2+x+1 n'a pas de racine réelle, donc il existe trois réels a, b et c tels que

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}$$

On multiplie par $x-1$, puis $x=1$

$$a=\left[\frac{1}{x^2+x+1}\right]_{x=1}=\frac{1}{3}$$

On multiplie par x, puis $x\to+\infty$

$$0=a+b\Rightarrow b=-\frac{1}{3}$$

Puis $x=0$:$-1=-a+c\Rightarrow c=-1+a=-\frac{2}{3}$

$$F_6(x)=\int\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}\right)dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{x^2+x+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

On fait le changement de variable $t=x+\frac{1}{2}$, alors $x=t-\frac{1}{2}$ et $dx=dt$

$$F_6(x)=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\int\frac{t-\frac{1}{2}+2}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\int\frac{t+\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\int\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt-\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dt$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)+K$$
$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+K$$

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1=\int_0^1\frac{dx}{x^2+2};\quad I_2=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2};\quad I_3=\int_2^3\frac{(2x+1)dx}{x^2+x-3};\ I_4=\int_0^2\frac{x}{x^4+16}dx;$$
$$I_5=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos(x)\sin(x)};\ I_6=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt;\ I_7=\int_0^1\frac{1+\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}dx$$

Correction exercice 2.

$$I_1=\int_0^1\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^1=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$I_2=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}$$

Car $x\to\frac{1}{1-x^2}$ est paire

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{(1-x)(1+x)}=\frac{a}{1-x}+\frac{b}{1+x}=\frac{\frac{1}{2}}{1-x}+\frac{\frac{1}{2}}{1+x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$
$$I_2=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}=2\times\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx=[-\ln(1-x)+\ln(1+x)]_0^{\frac{1}{2}}=\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)-\ln(1)=\ln(3)$$

Attention $\int\frac{dx}{1-x}=-\ln(1-x)+K$, il ne faut pas oublier le signe $-$.

x^2+x-3 s'annule en $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, comme $[2,3]\subset\left]\frac{-1-\sqrt{13}}{2},\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right[$ $x\to\frac{2x+1}{x^2+x-3}$ est définie et continue sur $[2,3]$.

A priori il faut décomposer $\frac{2x+1}{x^2+x-3}$ en éléments simples mais il se trouve que $2x+1$ est la dérivée de x^2+x-3, donc

$$I_3=[\ln|x^2+x-3|]_2^3=\ln(9)-\ln(3)=\ln\left(\frac{9}{3}\right)=\ln(3)$$

On pose $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$

$x=0\Rightarrow t=0$ et $x=2\Rightarrow t=4$

$$I_4=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{2xdx}{(x^2)^2+16}=\frac{1}{2}\int_0^4\frac{dt}{t^2+4^2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\left[\arctan\left(\frac{t}{4}\right)\right]_0^4=\frac{1}{8}(\arctan(1)-\arctan(0))=\frac{1}{8}\times\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\pi}{32}$$

Il existe a, b et c réels tels que

$$\frac{5x+6}{(x^2-4)(x+2)} = \frac{5x+6}{(x-2)(x+2)^2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$$

On multiplie par $x-2$, puis $x=2$

$$a = \left[\frac{5x+6}{(x+2)^2}\right]_{x=-2} = \frac{10+6}{(2+2)^2} = 1$$

On multiplie par $x+2$, puis $x=-2$

$$c = \left[\frac{5x+6}{x-2}\right]_{x=-2} = \frac{-10+6}{-2-2} = 1$$

On multiplie par x, puis $x \to +\infty$

$$0 = a + b \Rightarrow b = -1$$

Par conséquent

$$I_5 = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-2} + \frac{-1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}\right) dx = \left[\ln|x-2| - \ln|x+2| - \frac{1}{x+2}\right]_{x=0}^{x=1}$$
$$= \ln|-1| - \ln(3) - \frac{1}{3} - \left(\ln|-2| - \ln(2) - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} - \ln(3)$$

Il existe a, b, c et d quatre réels tels que :

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

On multiplie par x^2+1, puis $X = i$

$$ci + d = \left[\frac{x-1}{x^2}\right]_{X=i} = \frac{i-1}{-1} = 1 - i$$

Donc $c = -1$ et $d = 1$

On multiplie par x^2, puis $x = 0$

$$b = \left[\frac{x-1}{x^2+1}\right]_{X=0} = -1$$

On multiplie par x, puis $x \to +\infty$

$$0 = a + c$$

Donc $a = -c = 1$, finalement

$$\frac{x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{-x+1}{x^2+1}$$

$$I_6 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x-1}{x^2(x^2+1)} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{-x+1}{x^2+1}\right) dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$
$$= \left[\ln(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x)\right]_1^{\sqrt{3}}$$
$$= \ln(\sqrt{3}) + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln(3+1) + \arctan(\sqrt{3}) - \left(\ln(1) + 1 - \frac{1}{2}\ln(1+1) + \arctan(1)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln(3) + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln(4) + \frac{\pi}{3} - 1 + \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln\left(3 \times \frac{2}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 + \frac{\pi}{12}$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} - 1 + \frac{\pi}{12}$$

Exercice 3.

1. Calculer

$$G(t) = \int \frac{-t+1}{t^2+2t+5} dt$$

2. Calculer

$$F(t) = \int \frac{\ln(t^2+2t+5)}{(t-1)^2} dt$$

Correction exercice 3.

1.

$$G(t)=\int\frac{-t+1}{t^2+2t+5}dt=\int\frac{-t+1}{(t+1)^2+4}dt$$

On fait le changement de variable $u=t+1\Leftrightarrow t=u-1$, donc $dt=du$

$$G(t)=\int\frac{-(u-1)+1}{u^2+4}du=\int\frac{2-u}{u^2+4}du=2\int\frac{du}{u^2+2^2}-\int\frac{u}{u^2+4}du$$

$$=\arctan\left(\frac{u}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln(u^2+4)+K=\arctan\left(\frac{t+1}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln(t^2+2t+5)+K$$

2.

$$F(t)=\int\frac{\ln(t^2+2t+5)}{(t-1)^2}dt=\int\frac{1}{(t-1)^2}\ln(t^2+2t+5)\,dt$$

Et on fait une intégration par parties

$\int\frac{1}{(t-1)^2}\ln(t^2+2t+5)\,dt$

$u'(t)=\frac{1}{(t-1)^2}$ $\qquad u(t)=-\frac{1}{t-1}$

$v(t)=\ln(t^2+2t+5)$ $\qquad v'(t)=\frac{2t+2}{t^2+2t+5}$

$F(t)=\left[-\frac{1}{t-1}\ln(t^2+2t+5)\right]\quad-\int-\frac{1}{t-1}\frac{2t+2}{t^2+2t+5}dt$

$$F(t)=\left[-\frac{1}{t-1}\ln(t^2+2t+5)\right]+2\int\frac{1}{t-1}\frac{t+1}{t^2+2t+5}dt$$

Il existe a,b et c trois réels tels que :

$$\frac{1}{t-1}\frac{t+1}{t^2+2t+5}=\frac{a}{t-1}+\frac{bt+c}{t^2+2t+5}$$

On multiplie par $t-1$, puis $t=1$

$$a=\left[\frac{t+1}{t^2+2t+5}\right]_{t=1}=\frac{1}{4}$$

On multiplie par t, puis $t\to+\infty$

$$0=a+b\Rightarrow b=-\frac{1}{4}$$

On prend $t=0$

$$-\frac{1}{5}=-a+\frac{c}{5}\Rightarrow c=5a-1=\frac{1}{4}$$

$$F(t)=-\frac{1}{t-1}\ln(t^2+2t+5)+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}+\frac{-t+1}{t^2+2t+5}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{t-1}\ln(t^2+2t+5)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{t-1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{-t+1}{t^2+2t+5}dt$$

$$=-\frac{1}{t-1}\ln(t^2+2t+5)+\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{2}G(t)$$

$$=-\frac{1}{t-1}\ln(t^2+2t+5)+\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{1}{2}\left(\arctan\left(\frac{t+1}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln(t^2+2t+5)\right)+K$$

Exercice 4.

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt$$

Correction exercice 4.

$$\frac{\cos^3(-t)}{\sin^4(-t)}d(-t)=-\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt\neq\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt$$

$$\frac{\cos^3(\pi-t)}{\sin^4(\pi-t)}d(\pi-t)=\frac{(-\cos(-t))^3}{(\sin(t))^4}(-dt)=\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt$$

$$\frac{\cos^3(\pi+t)}{\sin^4(\pi+t)}d(\pi+t)=\frac{(-\cos(t))^3}{(-\sin(t))^4}dt=\frac{-\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt=-\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt\neq\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt$$

On fait le changement de variable $x=\sin(t)\Rightarrow dx=\cos(t)\,dt$

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2(t)}{\sin^4(t)}\cos(t)\,dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2(t)}{\sin^4(t)}\cos(t)\,dt$$

$$t=\frac{\pi}{6}\Rightarrow x=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

$$t=\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1-\mathrm{x}^2}{x^4}dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)dx\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x^{-4}-x^{-2})dx=\left[-\frac{1}{3}x^{-3}+x^{-1}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\left[-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{1}-\left(-\frac{2^3}{3}+2\right)=\frac{7}{3}-1=\frac{4}{3}$$

Exercice 5.

1. Déterminer une primitive de la fonction f définie par :

$$f(t)=\frac{1}{\sin(2t)}$$

2. A l'aide du changement de variable $x=2t$, calculer

$$F(x)=\int\frac{dx}{\sin(x)}$$

Correction exercice 5.

1. Avec les règles de Bioche

$$f(t+\pi)d(t+\pi)=\frac{1}{\sin\big(2(t+\pi)\big)}dt=\frac{1}{\sin(2t)}dt=f(t)dt$$

On peut faire le changement de variable $u=\tan(t)$

$$du=\frac{dt}{\cos^2(t)}$$

$$\frac{1}{\sin(2t)}=\frac{1}{2\sin(t)\cos(t)}=\frac{\cos(t)}{2\sin(t)}\frac{1}{\cos^2(t)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan(t)}\times\frac{dt}{\cos^2(t)}$$

Donc

$$\int f(t)dt=\int\frac{1}{2}\times\frac{1}{\tan(t)}\times\frac{dt}{\cos^2(t)}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\ln|u|+K=\frac{1}{2}\ln|\tan(t)|$$

On a pris $K=0$ car une demande « une » primitive de f.

2. $dx=2dt$ et $t=\frac{x}{2}$

$$F(x)=\int\frac{1}{\sin(x)}dx=2\int\frac{1}{\sin(2t)}dt=2\times\frac{1}{2}\ln|\tan(t)|+K=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+K$$

Exercice 6.

Calculer

$$F(t)=\int\frac{1}{1+\mathrm{ch}(t)}dt$$

Correction exercice 6.

On pose $x=e^t$ donc $t=\ln(x)$ et $dt=\frac{dx}{x}$

D'autre part

$$1+\mathrm{ch}(t)=1+\frac{e^t+e^{-t}}{2}=1+\frac{x+\frac{1}{x}}{2}=1+\frac{x^2+1}{2x}=\frac{2x+x^2+1}{2x}=\frac{(x+1)^2}{2x}$$

Donc

$$F(t)=\int\frac{2x}{(x+1)^2}\frac{dx}{x}=2\int\frac{1}{(x+1)^2}dx=2\int(x+1)^{-2}dx=-2(x+1)^{-1}+K=\frac{-2}{x+1}+K$$
$$=\frac{-2}{e^t+1}+K$$

Exercice 7.

1. Calculer pour $x>0$

$$F(x)=\int\frac{\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)-1}dx$$

2. Calculer

$$\int\frac{2-\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x)}{2\,\mathrm{ch}(x)}dx$$

Correction exercice 7.

1. On pose $t=e^x\Leftrightarrow x=\ln(t)$ donc $dx=\frac{dt}{t}$

$$\mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{t+\frac{1}{t}}{2}=\frac{t^2+1}{2t}$$
$$\mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{t-\frac{1}{t}}{2}=\frac{t^2-1}{2t}$$
$$\frac{\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)-1}=\frac{\frac{t^2+1}{2t}-\frac{t^2-1}{2t}}{\frac{t^2+1}{2t}-1}=\frac{\frac{1}{t}}{\frac{t^2+1-2t}{2t}}=\frac{1}{(t-1)^2}$$
$$F(x)=\int\frac{2dt}{t(t-1)^2}$$

Il existe a,b et c réels tels que :

$$\frac{2}{t(t-1)^2}=\frac{a}{t}+\frac{b}{t-1}+\frac{c}{(t-1)^2}$$

On multiplie par t, puis $t=0$

$$a=\left[\frac{2}{(t-1)^2}\right]_{t=0}=2$$

On multiplie par $(t-1)^2$, puis $t=1$

$$c=\left[\frac{2}{t}\right]_{t=0}=2$$

On multiplie par t, puis $t\to+\infty$

$$0=a+b\Leftrightarrow b=-2$$
$$F(x)=2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{(t-1)^2}\right)dt=2\left(\ln|t|-\ln|t-1|-\frac{1}{t-1}\right)+K$$
$$=2\left(\ln(e^x)-\ln(e^x-1)-\frac{1}{e^x-1}\right)+K=2x-2\ln(e^x-1)-\frac{2}{e^x-1}+K,$$
$$K\in\mathbb{R}$$

2. Il s'agit d'une fraction rationnelle de fonctions hyperboliques, on peut faire le changement de variable $t=e^x$, donc $x=\ln(t)$ et $dx=\frac{dt}{t}$

$$\frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}=\frac{2-\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}}{2\frac{e^x+e^{-x}}{2}}=\frac{2-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{2-\frac{1}{t}}{t+\frac{1}{t}}=\frac{2t-1}{t^2+1}$$

$$\int\frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}dx=\int\frac{2t-1}{t^2+1}\frac{dt}{t}=\int\frac{2t-1}{(t^2+1)t}dt$$

Il existe a, b et c réels tels que

$$\frac{2t-1}{(t^2+1)t}=\frac{a}{t}+\frac{bt+c}{t^2+1}$$

$$a=\left[\frac{2t-1}{t^2+1}\right]_{t=0}=-1$$

$$bi+c=\left[\frac{2t-1}{t}\right]_{t=i}=\frac{2i-1}{i}=2+i$$

$b=1$ et $c=2$. Par conséquent

$$\frac{2t-1}{(t^2+1)t}=\frac{-1}{t}+\frac{t+2}{t^2+1}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}dx&=\int\left(\frac{-1}{t}+\frac{t+2}{t^2+1}\right)dt=-\ln|t|+\frac{1}{2}\int\frac{2t}{t^2+1}dt+2\int\frac{1}{t^2+1}dt\\&=-\ln|t|+\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+2\arctan(t)+K\\&=-\ln(e^x)+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+2\arctan(e^x)+K\\&=-x+\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+2\arctan(e^x)+K\end{aligned}$$

Autre méthode

$$\frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}=\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$$

Donc

$$\int\frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}dx=\int\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}\right)dx$$

Comme

$$\int\frac{dx}{\operatorname{ch}(x)}=\int\frac{\frac{1}{t}}{\frac{t^2+1}{2t}}dt=\int\frac{2dt}{t^2+1}=2\arctan(t)+K=2\arctan(e^x)$$

$$\int\frac{2-\operatorname{ch}(x)+\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{ch}(x)}dx=2\arctan(e^x)-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(\operatorname{ch}(x)+K'$$

Exercice 8.

A l'aide d'une intégration par partie calculer les intégrales suivantes

a.

$$I_1=\int_1^e t\ln(t)\,dt$$

b.

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,dt$$

c.

$$I_3=\int_0^{\sqrt{3}} 3x^2\ln(x^2+1)\,dx$$

Correction exercice 8.

a.

$$I_1 = \int_1^e t\ln(t)\,dt$$

$$u'(t) = t \qquad u(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$v(t) = \ln(t) \qquad v'(t) = \frac{1}{t}$$

$$I_1 = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^e - \int_1^e \frac{t}{2}\,dt$$

Donc

$$I_1 = \frac{e^2}{2}\ln(e) - \frac{1^2}{2}\ln(1) - \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{2e^2-e^2+1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$$

b.

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,dt$$

$$u'(t) = \sin(t) \qquad u(t) = -\cos(t)$$

$$v(t) = t \qquad v'(t) = 1$$

$$I_2 = [-t\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt$$

Donc

$$I_2 = -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0\times\cos(0) + [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

c.

$$\int_0^{\sqrt{3}} 3x^2\ln(x^2+1)\,dx$$

$$u'(x) = 3x^2 \qquad u(x) = x^3$$

$$v(x) = \ln(x^2+1) \qquad v'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\int_0^{\sqrt{3}} 3x^2\ln(x^2+1)\,dx = [x^3\ln(x^2+1)]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x^4}{x^2+1}\,dx$$

Il faut alors décomposer $\frac{2x^4}{x^2+1}$ en éléments simples, pour cela il faut faire une division euclidienne de $2x^4$ par x^2+1

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 & x^2+1 \\ \cline{2-2} 2x^4+2x^2 & 2x^2-2 \\ \hline -2x^2 & \\ -2x^2-2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Donc

$$2x^4 = (x^2+1)(2x^2-2)+2$$

Ce qui entraine que

$$\frac{2x^4}{x^2+1} = 2x^2-2+\frac{2}{x^2+1}$$

Par conséquent

$$I_3 = \int_0^{\sqrt{3}} 3x^2 \ln(x^2+1)\,dx = [x^3\ln(x^2+1)]_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \left(2x^2 - 2 + \frac{2}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^3 \ln\left(\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1\right) - \left[\frac{2}{3}x^3 - 2x + 2\arctan(x)\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 3\sqrt{3}\ln(4) - \left(\frac{2}{3}\left(\sqrt{3}\right)^3 - 2\sqrt{3} + 2\arctan\left(\sqrt{3}\right)\right)$$

$$= 6\sqrt{3}\ln(2) - \left(2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\times\frac{\pi}{3}\right) = 6\sqrt{3}\ln(2) - \frac{2\pi}{3}$$

Exercice 9.

1. Calculer

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^2(x-1)}$$

2. Calculer

$$G(t) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t+1)\left(\sqrt{\frac{t}{t+1}} - \frac{t}{t+1}\right)}$$

A l'aide du changement de variable $x = \sqrt{\frac{t}{t+1}}$

Correction exercice 9.

1. Il existe a, b et c réels tels que

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1}$$

On multiplie par x^2, puis $x = 0$

$$b = \left[\frac{1}{x-1}\right]_{x=0} = -1$$

On multiplie par $x-1$, puis $x = 1$

$$c = \left[\frac{1}{x^2}\right]_{x=1} = 1$$

On multiplie par x, puis $x \to +\infty$

$$0 = a + c \Rightarrow a = -1$$

Par conséquent

$$\int \frac{dx}{x^2(x-1)} = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}\right)dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x-1| + K$$

2.

$$x = \sqrt{\frac{t}{t+1}} \Leftrightarrow x^2 = \frac{t}{t+1} \Leftrightarrow x^2(t+1) = t \Leftrightarrow x^2t + x^2 = t \Leftrightarrow x^2t - t = -x^2 \Leftrightarrow t(x^2-1) = -x^2$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-x^2}{x^2-1}$$

On en déduit que

$$dt = \frac{-2x(x^2-1) - (-x^2)(2x)}{(x^2-1)^2}dx = \frac{-2x^3 + 2x + 2x^3}{(x^2-1)^2}dx = \frac{2x}{(x^2-1)^2}dx$$

$$\frac{1}{t(t+1)\left(\sqrt{\frac{t}{t+1}}-\frac{t}{t+1}\right)}=\frac{1}{\frac{-x^2}{x^2-1}\left(\frac{-x^2}{x^2-1}+1\right)(x-x^2)}=\frac{x^2-1}{-x^2\left(\frac{-x^2+x^2-1}{x^2-1}\right)(x-x^2)}$$

$$=\frac{(x^2-1)^2}{x^2(x-x^2)}=\frac{(x^2-1)^2}{x^3(1-x)}=-\frac{(x^2-1)^2}{x^3(x-1)}$$

Par conséquent

$$G(t)=-\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-1)^2}{x^3(x-1)}\frac{2x}{(x^2-1)^2}dx=-\int\frac{1}{x^2(x-1)}dx=-\int\frac{1}{x^2(x-1)}dx$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{x}-\ln|x-1|+K=\ln\left|\sqrt{\frac{t}{t+1}}\right|+\sqrt{\frac{t+1}{t}}-\ln\left|\sqrt{\frac{t}{t+1}}-1\right|+K$$

Exercice 10.

1.

$$F_1(x)=\int_0^x(t^2+1)\arctan(t)\,dt$$

2.

$$F_2(x)=\int_0^x(t+1)\arcsin(t)\,dt$$

Correction exercice 10.

1.

$F_1(x)=\int_0^x(t^2+1)\arctan(t)\,dt$

$u'(t)=t^2+1$ $\qquad$ $u(t)=\frac{t^3}{3}+t$

$v(t)=\arctan(t)$ $\qquad$ $v'(t)=\frac{1}{1+t^2}$

$F_1(x)=\int_0^x(t^2+1)\arctan(t)\,dt=\left[\left(\frac{t^3}{3}+\mathrm{t}\right)\arctan(t)\right]_0^x-\int_0^x\frac{\frac{t^3}{3}+t}{1+t^2}dt$

$$F_1(x)=\int_0^x(t^2+1)\arctan(t)\,dt=\left[\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\arctan(t)\right]_0^x-\int_0^x\frac{\frac{t^3}{3}+t}{1+t^2}dt$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arctan(x)-\frac{1}{3}\int_0^x\frac{t^3+3t}{t^2+1}dt$$

$\frac{t^3+t}{t^2+1}$ est une fraction rationnelle, il faut la décomposer en élément simple, pour cela on commence par faire une division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} t^3+3t & t^2+1 \\ \cline{2-2} t^3+t & t \\ \cline{1-1} 2t & \end{array}$$

Donc $t^3+3t=(t^2+1)t+2t$, d'où l'on déduit que

$$\frac{t^3+3t}{t^2+1}=\frac{(t^2+1)t+2t}{t^2+1}=t+\frac{2t}{t^2+1}$$

Par conséquent

$$\int_0^x\frac{t^3+3t}{t^2+1}dt=\int_0^x\left(t+\frac{2t}{t^2+1}\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}+\ln(t^2+1)\right]_0^x=\frac{x^2}{2}+\ln(x^2+1)$$

$$F_1(x)=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\arctan(x)-\frac{x^2}{2}-\ln(x^2+1)$$

2.

$$F_2(x) = \int_0^x (t+1)\arcsin(t)\,dt$$

$\int_0^x (t+1)\arcsin(t)\,dt$

$u'(t) = t+1$ $\qquad u(t) = \frac{t^2}{2} + t$

$v(t) = \arcsin(t)$ $\qquad v'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$\int_0^x (t+1)\arcsin(t)\,dt = \left[\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\arcsin(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$$F_2(x) = \int_0^x (t+1)\arcsin(t)\,dt = \left[\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\arcsin(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\arcsin(x) - \int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

On fait le changement de variable $t = \sin(u) \Leftrightarrow u = \arcsin(t)$

$$t = 0 \Rightarrow u = \arcsin(0) = 0$$
$$t = x \Rightarrow u = \arcsin(x)$$
$$dt = \cos(u)\,du$$

$$\frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\frac{\sin^2(u)}{2}+\sin(u)}{\sqrt{1-\sin^2(u)}} = \frac{\frac{\sin^2(u)}{2}+\sin(u)}{\sqrt{\cos^2(u)}} = \frac{\frac{\sin^2(u)}{2}+\sin(u)}{|\cos(u)|}$$

Mais comme $u = \arcsin(t) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(u) > 0$ et alors $|\cos(u)| = \cos(u)$

$$\int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^{\arcsin(x)} \frac{\frac{\sin^2(u)}{2}+\sin(u)}{\cos(u)}\cos(u)\,du = \int_0^{\arcsin(x)} \left(\frac{\sin^2(u)}{2}+\sin(u)\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\arcsin(x)} \sin^2(u)\,du + \int_0^{\arcsin(x)} \sin(u)\,du$$

Pour la première intégrale il faut utiliser la formule $\sin^2(u) = \frac{1-\cos(2u)}{2}$

$$\int_0^x \frac{\frac{t^2}{2}+t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\arcsin(x)} \frac{1-\cos(2u)}{2}\,du + [-\cos(u)]_0^{\arcsin(x)}$$

$$= \frac{1}{4}\left[u - \frac{1}{2}\sin(2u)\right]_0^{\arcsin(x)} - \cos(\arcsin(x)) + 1$$

$$= \frac{1}{4}\left(\arcsin(x) - \frac{1}{2}\sin(2\arcsin(x))\right) - \cos(\arcsin(x)) + 1$$

$$= \frac{1}{4}\left(\arcsin(x) - \frac{1}{2}\times 2\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x))\right) - \sqrt{1-x^2} + 1$$

$$= \frac{1}{4}\arcsin(x) - \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + 1$$

$$= \frac{1}{4}\arcsin(x) - \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2} + 1$$

Car

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$
$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
$$\arcsin(\sin(x)) = x$$

Finalement

$$F_2(x)=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\arcsin(x)-\frac{1}{4}\arcsin(x)+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}-1$$

Exercice 11.

$$F_1(x)=\int \sin^2(x)\,dx\,;F_2(x)=\int \arctan(x)\,dx\,;\ F_3(x)=\int \ln(x^2+2)\,dx;F_4(x)=\int x\sqrt{1+x}dx$$

$$F_5(x)=\int \sqrt{1-x^2}dx\,;F_6(x)=\int \frac{dx}{\cos^2(x)\sin^2(x)};\ F_7(x)=\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx\,;\ F_8(x)=\int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)}dx$$

Correction exercice 11.

$$F_1(x)=\int \sin^2(x)\,dx=\int \frac{1-\cos(2x)}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos(2x))dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin(2x)\right)+K$$

On va faire une intégration par parties

$$F_2(x)=\int 1\times\arctan(x)\,dx$$

$\int 1\times\arctan(x)\,dx$

$u'(x)=1$ $\qquad u(x)=x$

$v(x)=\arctan(x)$ $\qquad v'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

$\int 1\times\arctan(x)\,dx=[x\arctan(x)]$ $\qquad -\int\frac{x}{1+x^2}dx$

Donc

$$F_2(x)=[x\arctan(x)]-\int\frac{x}{1+x^2}dx=[x\arctan(x)]-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+K$$

$$F_3(x)=\int 1\times\ln(x^2+2)\,dx$$

On va faire une intégration par parties

$\int 1\times\ln(x^2+2)\,dx$

$u'(x)=1$ $\qquad u(x)=x$

$v(x)=\ln(x^2+2)$ $\qquad v'(x)=\frac{2x}{x^2+2}$

$\int 1\times\ln(x^2+2)\,dx=[x\ln(x^2+2)]$ $\qquad -\int\frac{2x^2}{x^2+2}dx$

$$\begin{aligned}F_3(x)&=[x\ln(x^2+2)]-\int\frac{2x^2}{x^2+2}dx=[x\ln(x^2+2)]-2\int\frac{x^2+2-2}{x^2+2}dx\\&=[x\ln(x^2+2)]-2\int\left(1-\frac{2}{x^2+2}\right)dx=[x\ln(x^2+2)]-2\left(x-\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)+K\\&=[x\ln(x^2+2)]-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+K\end{aligned}$$

$$F_4(x)=\int x\sqrt{1+x}dx$$

On va faire le changement de variable $t=\sqrt{1+x}\Leftrightarrow x=t^2-1$, donc $dx=2tdt$

$$\begin{aligned}F_4(x)&=\int x\sqrt{1+x}dx=\int(t^2-1)t2tdt=2\int(t^4-t^2)dt=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+K\\&=\frac{2}{5}\left(\sqrt{1+x}\right)^5-\frac{2}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3+K=\frac{2}{5}(1+x)^2\sqrt{1+x}-\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x}+K\end{aligned}$$

$$F_5(x)=\int\sqrt{1-x^2}dx$$

On va faire le changement de variable $x=\sin(t)\Leftrightarrow t=\arcsin(x)$, donc $dx=\cos(t)\,dt$ et $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2(t)}=\sqrt{\cos^2(t)}=|\cos(t)|$, comme $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t)\geq 0$ et donc $|\cos(t)|=\cos(t)$

$$F_5(x)=\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\cos(t)\cos(t)\,dt=\int\cos^2(t)\,dt=\int\frac{1+\cos(2t)}{2}dt=\frac{1}{2}\int(1+\cos(2t))dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin(2t)\right)+K=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin(2t)+K=\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin(t)\cos(t)+K$$
$$=\frac{1}{2}\arcsin(x)+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+K$$
$$F_6(x)=\int\frac{dx}{\cos^2(x)\sin^2(x)}$$
On pose $f(x)=\frac{1}{\cos^2(x)\sin^2(x)}$
D’après les règles de Bioche
$$f(x+\pi)d(x+\pi)=\frac{1}{\cos^2(x+\pi)\sin^2(x+\pi)}dx=\frac{1}{\cos^2(x)\sin^2(x)}dx$$
On peut donc faire le changement de variable $t=\tan(x)$, donc $dt=\frac{dx}{\cos^2(x)}$
$$F_6(x)=\int\frac{1}{\sin^2(x)}\frac{dx}{\cos^2(x)}$$
Il reste à exprimer $\frac{1}{\sin^2(x)}$ en fonction de $\tan(x)=t$. On sait que $\cos^2(x)=\frac{1}{1+\tan^2(x)}$ donc
$$\sin^2(x)=1-\cos^2(x)=1-\frac{1}{1+\tan^2(x)}=\frac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$
Par conséquent
$$F_6(x)=\int\frac{1+t^2}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t^2}+1\right)dt=-\frac{1}{t}+t+K=-\frac{1}{\tan(x)}+\tan(x)+K$$
$$F_7(x)=\int\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$$
D’après les règles de Bioche
$$\frac{\cos^3(-x)}{\sin^5(-x)}d(-x)=\frac{\cos^3(x)}{(-\sin(x))^5}(-dx)=\frac{\cos^3(x)}{-\sin^5(x)}(-dx)=\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$$
$$\frac{\cos^3(x+\pi)}{\sin^5(x+\pi)}d(x+\pi)=\frac{(-\cos(x))^3}{(-\sin(x))^5}dx=\frac{-\cos^3(x)}{-\sin^5(x)}dx=\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$$
Ici deux des changements de variables sont possibles, $t=\cos(x)$ et $t=\tan(x)$, on va essayer les deux pour constater que $t=\tan(x)$ est meilleur (ce qui est toujours le cas lorsque l’on a le choix entre $\cos(x)$ ou $\sin(x)$ et $\tan(x)$)
Changement de variable $t=\cos(x)\Rightarrow dt=-\sin(x)$.
$$F_7(x)=\int\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx=\int\frac{\cos^3(x)}{\sin^6(x)}\sin(x)\,dx=-\int\frac{\cos^3(x)}{(\sin^2(x))^3}(-\sin(x)\,dx)$$
$$=-\int\frac{\cos^3(x)}{(1-\cos^2(x))^3}(-\sin(x)\,dx)=-\int\frac{t^3}{(1-t^2)^3}dt$$
Il n’est pas tout simple de décomposer cette fraction rationnelle, on peut toutefois poser $u=t^2\Rightarrow du=2tdt$

$$F_7(x)=-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{(1-t^2)^3}2tdt=-\frac{1}{2}\int\frac{u}{(1-u)^3}du=-\frac{1}{2}\int\frac{u-1+1}{(1-u)^3}du$$
$$=-\frac{1}{2}\int\left(-\frac{1}{(1-u)^2}+\frac{1}{(1-u)^3}\right)du=\frac{1}{2}\int(1-u)^{-2}du-\frac{1}{2}\int(1-u)^{-3}du$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(-1)(1-u)^{-1}\right]-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}(-1)(1-u)^{-2}\right]+K=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-u}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(1-u)^2}+K$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-t^2}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(1-t^2)^2}+K=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\cos^2(t)}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(1-\cos^2(t))^2}+K$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{\sin^4(x)}+K=\frac{1}{4}\frac{(\sin^2(x)-1)}{\sin^4(x)}+K=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{\tan^4(x)}+K$$

Changement de variable $t=\tan(x)\Rightarrow dt=\frac{dx}{\cos^2(x)}$

$$F_7(x)=\int\frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx=\int\frac{\cos^5(x)}{\sin^5(x)}\frac{dx}{\cos^2(x)}=\int\frac{1}{\frac{\sin^5(x)}{\cos^5(x)}}\frac{dx}{\cos^2(x)}=\int\frac{1}{\tan^5(x)}\frac{dx}{\cos^2(x)}=\int\frac{1}{t^5}dt$$
$$=\int t^{-5}dt=-\frac{1}{4}t^{-4}+K'=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{\tan^4(x)}+K'$$

C'est nettement plus simple.

$$F_8(x)=\int\frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)}dx$$

On applique encore les règles de Bioche.

$$\frac{\sin^3(-x)}{1+\cos(-x)}d(-x)=\frac{-\sin^3(x)}{1+\cos(x)}(-dx)=\frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)}dx$$

C'est le seul invariant qui fonctionne, on doit faire le changement de variable $t=\cos(x)\Rightarrow dt=-\sin(x)\,dx$

$$F_2(x)=-\int\frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}(-\sin(x)dx)=-\int\frac{1-t^2}{1+t}dt=\int\frac{t^2-1}{1+t}dt=\int(t-1)dt=\frac{t^2}{2}-t+K$$
$$=\frac{\cos^2(x)}{2}-\cos(x)+K$$

Exercice 12.

Pour $n\geq 0$, un entier, soit $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n(x)\,dx$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n\geq 0$
$$I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$$
3. Montrer que pour un nombre pair $n=2k$, $k\geq 1$
$$I_{2k}=\frac{1\times 3\times\dots\times(2k-1)}{2\times 4\times\dots\times 2k}\times\frac{\pi}{2}\qquad(1)$$
Et que pour un nombre impair $n=2k+1$
$$I_{2k+1}=\frac{2\times 4\times\dots\times(2k)}{3\times 5\times\dots\times(2k+1)}\qquad(2)$$
4. Montrer que I_n est une suite décroissante.
5. Montrer que quand $k\to+\infty$
$$\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\dots\times\frac{2k}{2k-1}\times\frac{2k}{2k+1}\to\frac{\pi}{2}$$
C'est la formule de Wallis.

Correction exercice 12.

1.

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^0(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

2. Pour tout $n \geq 0$

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin^{n+1}(x)\,dx$$

Et on fait une intégration par parties

I_n

$u'(x) = \sin(x)$ $\qquad$ $u(x) = -\cos(x)$

$v(x) = \sin^{n+1}(x)$ $\qquad$ $v'(x) = (n+1)\sin^n(x)\cos(x)$

$I_{2k} = [-\cos(x)\sin^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(n+1)(-\cos(x)\sin^n(x)\cos(x))dx$

Donc

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= [-\cos(x)\sin^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^2(x)\sin^n(x)\,dx \\ &= [-\cos(x)\sin^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\sin^n(x)\,dx \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin^{n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)\sin^{n+1}(0)) + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx - (n \\ &+ 1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(x)\,dx = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n \Rightarrow I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

3. Si $n = 2k$

$$I_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k+2} I_{2k}$$

Montrons l'égalité demandé par récurrence sur k

Pour $k = 1$, $I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$, la formule (1) est vérifiée

Montrons que l'égalité au rang k entraine celle au rang $k+1$

$$I_{2k+2} = \frac{2k+1}{2k+2} I_{2k} = \frac{2k+1}{2k+2} \times \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2k-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2k} \times \frac{\pi}{2} = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2k-1) \times (2k+1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2k \times (2k+2)} \times \frac{\pi}{2}$$

Cela marche

Si $n = 2k+1$

$$I_{2k+3} = \frac{2k+4}{2k+3} I_{2k+1}$$

Pour $k = 0$, $I_1 = 1$, c'est bon, (2) est vérifiée

Montrons que l'égalité au rang k entraine celle au rang $k+1$

$$I_{2k+3} = \frac{2k+4}{2k+3} I_{2k+1} = \frac{2k+4}{2k+3} \frac{2 \times 4 \times \ldots \times (2k)}{3 \times 5 \times \ldots \times (2k+1)} = \frac{2 \times 4 \times \ldots \times (2k) \times (2k+2)}{3 \times 5 \times \ldots \times (2k+1) \times (2k+3)}$$

Cela marche

4.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1}(x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1}(x) - \sin^n(x))dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x) - 1)\sin^n(x)\,dx$$

Comme $\sin(x) - 1 \leq 0$ et que $\sin^n(x) > 0$ dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, cela montre que $I_{n+1} - I_n \leq 0$, cette suite est bien décroissante.

5. La suite est positive (et décroissante) donc elle convergente, en particulier

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} = 1$$

Donc

$$\frac{\frac{2 \times 4 \times \dots \times (2k)}{3 \times 5 \times \dots \times (2k+1)}}{\frac{1 \times 3 \times \dots \times (2k-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2k} \times \frac{\pi}{2}} \to 1$$

Soit aussi

$$\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{2k}{2k-1} \times \frac{2k}{2k+1} \to \frac{\pi}{2}$$