$a(x) = 1 + e^{-x}$ $b(x) = -1$

Exercice 1 :

> Soit l'équation différentielle E : $(1+e^{-x})Y' - Y = (1+2x)e^{x} + (1+x)e^{2x}$

1. Trouver la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à E.
2. Chercher une solution de E de la forme $Y(x) = \alpha x e^{2x}$ où α est une constante réelle à déterminer.
3. Donner alors la forme générale des solutions de E

1) $y_h(x) = \lambda e^{-G(x)}$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

et $G(x) = \int \frac{-1}{1+e^{-x}}\,dx = -\int \frac{1}{1+\frac{1}{e^{x}}}\,dx$

$u = e^{x}+1$

$\frac{u'}{u}$

$= -\int \frac{e^{x}}{1+e^{x}}\,dx = -\ln(e^{x}+1)$

$$y_h(x) = \lambda e^{-\{-\ln(e^x+1)\}}$$

$$y_h(x) = \lambda(e^x+1) \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}, \qquad y_h'(x) = \lambda e^x$$

2) $$y_p(x) = \alpha x e^{2x} \quad (\text{solution particulière})$$

$$E : (1+e^{-x})Y' - Y = (1+2x)e^x + (1+x)e^{2x}$$

$$y_p'(x) = \alpha e^{2x} + 2\alpha x e^{2x} = (\alpha + 2\alpha x)e^{2x}$$

y_p est solution de $(E) \iff$

$$(1+e^{-x})y_p'(x) - y_p(x) = (1+2x)e^x + (1+x)e^{2x} \iff$$

$$(1+e^{-x})(\alpha + 2\alpha x)e^{2x} - \alpha x e^{2x} = (1+2x)e^x + (1+x)e^{2x} \iff$$

$$[\alpha + 2\alpha x \quad]e^x + [\alpha + \alpha x \qquad]e^{2x} = (1+2x)e^x + (1+x)e^{2x}$$

par id

$$\begin{cases} \alpha + 2\alpha x = 1 + 2x \\ \alpha + \alpha x = 1 + x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\alpha = 2 \\ \alpha = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$$

Cl $\quad y_p(x) = x e^{2x}$ est une solution particulière de E

3) Les solutions de (E) sont :

$$y_G(x) = y_h(x) + y_p(x) = \lambda(e^{x} + 1) + x e^{2x}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\boxtimes$