$a(x) = 1 + e^{-x}$ $\qquad$ $b(x) = -1$

Exercice 1 :

> Soit l'équation différentielle E : $(1+e^{-x})Y' - Y = (1+2x)e^{x} + (1+x)e^{2x}$

1. Trouver la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à E.
2. Chercher une solution de E de la forme $Y(x) = \alpha x e^{2x}$ où α est une constante réelle à déterminer.
3. Donner alors la forme générale des solutions de E

1) $y_h(x) = \lambda e^{-G(x)}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

et $G(x) = \displaystyle\int \frac{-1}{1+e^{-x}}\,dx = -\int \frac{1}{1+\frac{1}{e^{x}}}\,dx$

$u = e^{x} + 1$

$\dfrac{u'}{u}$

$= -\displaystyle\int \frac{e^{x}}{1+e^{x}}\,dx = -\ln(e^{x}+1)$

$$y_h(x) = \lambda e^{-\{-\ln(e^x+1)\}}$$

$$y_h(x) = \lambda(e^x+1) \; ; \; \lambda \in \mathbb{R}, \qquad y'_h(x) = \lambda e^x$$

2) $$y_p(x) = \alpha x e^{2x} \quad \text{(solution particulière)}$$

$$E : (1+e^{-x})Y' - Y = (1+2x)e^x + (1+x)e^{2x}$$

$$y'_p(x) = \alpha e^{2x} + 2\alpha x e^{2x} = (\alpha + 2\alpha x)e^{2x}$$

y_p est solution de $(E) \iff$

$$(1+e^{-x})y'_p(x) - y_p(x) = (1+2x)e^x + (1+x)e^{2x} \iff$$

$$(1+e^{-x})(\alpha+2\alpha x)e^{2x} - \alpha x e^{2x} = (1+2x)e^x + (1+x)e^{2x} \iff$$

$$[\alpha + 2\alpha x \quad]e^x + [\alpha + \alpha x \qquad]e^{2x} = (1+2x)e^x + (1+x)e^{2x}$$

Exercice 2:

> On considère l'équation différentielle
>
> $$E : (x+1)(x^2+1)Y\prime + 2xY = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \in]-1, +\infty[.$$

1. Trouver la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à E.
2. Déterminer une solution particulière de E.
3. Donner alors la forme générale des solutions de E.
4. Déterminer la solution Y_1 de E telle que $Y_1(0) = 1$.

$a(x) = (x+1)(x^2+1)$; $b(x) = 2x$ $\quad c(x) = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+1}}$

$x \in]-1, +\infty[.$

$$(1) \quad y_h(x) = \lambda e^{-G(x)} \text{ avec } \begin{cases} \lambda \in \mathbb{R} \\ G(x) = \int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} dx \end{cases}$$

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

$\Delta = -4 < 0$

$$= \frac{a(x^2+1) + (bx+c).(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2 + (b+c)x + a+c}{(x+1)(x^2+1)}$$

par id :

$$\begin{cases} a+b=0 & (1) \\ b+c=2 & (2) \\ a+c=0 & (3) \end{cases} \iff \begin{cases} a=-b \\ b+c=2 \\ 2c=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$$

$2+3-1 \longrightarrow$

$$G(x) = \int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{-1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$G(x) = -\ln|x+1| + \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx \qquad \ln(x^\alpha) = \alpha \ln x$$

$$\alpha \geq 0$$

$x \in]-1{,}+\infty[\iff x > -1 \iff x+1 > 0$

$$G(x) = -\ln(x+1) + \int \frac{2x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$G(x) = -\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x) + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{C}}$$

D'où

$$y_h(x) = \lambda e^{-\left\{-\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x\right\}}$$

$$= \lambda e^{\ln(x+1) - \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) - \arctan x}$$

$$= \lambda e^{\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)} \cdot e^{-\arctan x}$$

$$\left[y_h(x) = \lambda \left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \cdot e^{-\arctan(x)} \qquad \lambda \in \mathbb{R} \right]$$

par id

$$\begin{cases} \alpha + \boxed{2\alpha} x = 1 + 2x \\ \alpha + \alpha x = 1 + x \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\alpha = 2 \\ \alpha = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\alpha = 1}$

<u>cl</u> $y_p(x) = x e^{2x}$ est une solution particulière de E

3) Les solutions de (E) sont :

$$y_G(x) = y_h(x) + y_p(x) = \lambda(e^{x} + 1) + x e^{2x}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\boxtimes$

2) $\boxed{y_p(x)} = \boxed{\lambda(x)}\, e^{-G(x)}$ avec

$$\lambda(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)} e^{G(x)}\, dx$$

simp

$$= \int \frac{\cancel{\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2+1}}}}{\cancel{(x+1)}(x^2+1)} \times \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}}}{\cancel{(x+1)}} \cdot e^{\arctan x}\, dx$$

$$\boxed{e^{-G(x)} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} e^{-\arctan x}} \longrightarrow e^{G(x)} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} e^{\arctan x}$$

$u' \cdot e^{u}$

$$\lambda(x) = \int \frac{1}{x^2+1} e^{\arctan x}\, dx$$

$$\left[\lambda(x) = e^{\arctan(x)} + c_0\right]$$

$$y_p(x) = e^{\arctan(x)} \times \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} e^{-\arctan x}$$

Càd :

$$y_p(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \square$$

3) Les solutions de (E) sont :

$$y_G(x) = \lambda \left[\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} e^{-\arctan x} \right] + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \; ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

4) La solution de (E) vérifiant $\boxed{y_1(0) = 1}$

y_1 solution de (E) $\quad y_1(x) = \lambda \underbrace{\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} e^{-\arctan x} \right)}_{\boxed{1}} + \boxed{\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}}$

λ ??

$x \leftarrow 0$

$$y_1(0) = \underline{1} \iff \lambda + 1 = 1$$

$$\iff \lambda = 0$$

$$y_1(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \boxed{X}$$