Ex5 TD3 Analyse II.

1. $Y'' + 4Y = x\,e^x$.
2. $Y'' + 2Y' = 2x^2$.
3. $Y'' + 2Y' + Y = e^{-x}$.

corr

(E_1) : $y'' + 4y = xe^x$

Solution de l'éq. Homogène

$y'' + 4y = 0 \longrightarrow E_c : r^2 + 4 = 0$

$a = 1$ $\quad \Delta = -16 < 0 \quad \sqrt{\Delta} = 4i$

$b = 0$ $\quad r_1 = \frac{-4i}{2} = -2i =$

$c = 4$ $\quad r_2 = \frac{4i}{2} = 2i = 0 + 2i \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases}$

D'où les solutions de l'équation Homogène

$y_H(x) = Ae^{0.x}.\cos(2x) + Be^{0.x}\sin 2x$

$y_H(x) = A\cos 2x + B\sin 2x \quad A, B \in \mathbb{R}$,

Solution particulière

$d(x) = xe^{1x} = P(x).e^{1.x}$ $\quad$ $\lambda = 1$ $\quad P(x) = x \longrightarrow \deg(P) =$

$\lambda = 1$ n'est pas solution de E_c on prendra alors $y_p(x) = Q(x)e^x$
avec $\deg Q = \deg P = 1$

C.à.d $y_p(x) = (\alpha x + \beta)e^x \rightarrow y_p'(x) = \alpha e^x + (\alpha x + \beta)e^x = (\alpha + \beta + \alpha x)e^x$

$y_p''(x) = (2\alpha + \beta + \alpha x)e^x$

y_p est sol $E_1 \iff y_p''(x) + 4y_p(x) = xe^x$

$\iff (2\alpha + \beta + \alpha x)e^x + 4(\alpha x + \beta)e^x = xe^x$

$\iff (5\alpha x + \underbrace{2\alpha + 5\beta}\,)e^x = xe^x$

pour id : $\begin{cases} 5\alpha = 1 \\ 2\alpha + 5\beta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{1}{5} \\ \beta = \frac{-2}{25} \end{cases}$

D'où $y_p(x) = \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}\right).e^{x}$ est une solution part. de E_1.

c Les solutions de E_1 sont

$$y_G(x) = \underbrace{A\cos 2x + B\sin 2x}_{y''_H} + \underbrace{\left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}\right)e^{x}}_{y''_p} \; ; A, B \in \mathbb{R}$$

② $y'' + 2y' = 2x^2$. (E_2)

* Solution Homogène $\longrightarrow$ $E_c : r^2 + 2r = 0$

$a = 1 \; (y'')$ $\quad \iff r(r+2) = 0$

$b = 2 \; (y')$

$c = 0$ $\quad \iff \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = -2 \end{cases}$ D'où $y_H(x) = A + Be^{-2x}$; $A, B \in \mathbb{R}$

* Solution particulière

$d(x) = 2x^2 = 2x^2 . e^{0.x}$ $\begin{cases} \lambda = 0 \text{ est une solution simple de } E_c \\ P(x) = 2x^2 \longrightarrow \deg P = 2 \end{cases}$

on cherchera une solution particulière de (E_2) de la forme

$y_p(x) = Q(x) . e^{0.x} = Q(x)$ avec $\begin{cases} \deg Q = \deg P + 1 = 3 \\ \text{Val } Q = 1 \end{cases}$

$y_p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x \longrightarrow y'_p(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$

$y''_p(x) = 6\alpha x + 2\beta$

y_p est sol de $E_2 \Leftrightarrow y_p''(x) + 2y_p'(x) = 2x^2$

$\Leftrightarrow 6\alpha x + 2\beta + 2\{3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma\} = 2x^2$

$\Leftrightarrow 6\alpha x^2 + (6\alpha + 4\beta)x + 2\beta + 2\gamma = 2x^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\alpha = 2 \\ 6\alpha + 4\beta = 0 \\ 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3} \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{cases}$$

<u>Cl</u> on prendra $y_p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

<u>Cl</u> final :

Les solutions de (E_2) sont :

$$y_G(x) = \underbrace{A + Be^{-2x}} + \underbrace{\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x} \quad A, B \in \mathbb{R}.$$