TD3 Espace vectoriel

Vocab. Espace vectoriel : { vecteurs }

v : vecteurs : $v \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}^n$ $\quad v = (x_1, x_2, \text{—}, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$.

opération : ① addition

$u \in \mathbb{R}^n$ $\quad u = (x_1, x_2, \text{—}, x_n)$

$v \in \mathbb{R}^n$ $\quad v = (y_1, y_2, \text{—} y_n)$

$u + v = (x_1 + y_1 \text{————}, x_n + y_n)$

② $u = (x_1, \text{—} x_n)$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda \cdot u = (\lambda . x_1, \lambda x_2, \text{——}, \lambda x_n)$

<u>Famille</u> de vecteur : $\{u_1, u_2, \text{—}, u_k\}$

- <u>libre</u> ×
- <u>lié</u> ×
- <u>génératrice</u> ??

$y = a.x$

<u>base</u> ×

<u>dimension</u> ×

- <u>Combinaison linéaire de vecteurs :</u>

$u = (2, 1, 3)$ $\quad v = (1, 0, 1)$

$u + v$

$2u - 3v$

$\alpha . u + \beta . v = w$

Th

<u>E.V</u>

Espace engendré

Machine

$u_1, u_2, \dots, u_k \rightarrow$ Comb linéa. $\rightarrow \underbrace{\{ \qquad \}}$

$\rightarrow$ espace engendré par $u_1, \text{—} u_k$:

Exercices : Espaces vectoriels

EXERCICE 1:

1. Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(-6,-17,17)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $((2,1,3),(3,5,-2))$?
2. Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}^t$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}^t\right)$?

1) $w = (-6,-17,17)$ $u = (2,1,3)$ $v = (3,5,-2)$ Si oui mm ?

w est combinaison lin de $u, v \iff \underbrace{\exists \alpha, \beta}$ tq

$w = \alpha \cdot u + \beta v$

Càd $(-6,-17,17) = \underbrace{\alpha\cdot(2,1,3)} + \underbrace{\beta(3,5,-2)}$

Càd $(-6,-17,17) = \underbrace{(2\alpha,\alpha,3\alpha)+(3\beta,5\beta,-2\beta)}$

$\iff (-6,-17,17) = (2\alpha+3\beta, \alpha+5\beta, 3\alpha-2\beta)$

$\iff \begin{cases} 2\alpha+3\beta = -6 & (1)\\ \alpha+5\beta = -17 & (2)\\ 3\alpha-2\beta = 17 & (3)\end{cases} \iff \begin{cases} (1)-2(2) \Rightarrow -7\beta = 28\\ \alpha = -17-5\beta \\ 3\alpha-2\beta = 17\end{cases}$

$\iff \begin{cases}\beta = -4\\ \alpha = 3\\ 3\times 3 - 2(-4) = 17 \checkmark\end{cases}$

cl $\alpha = 3$; $\beta = -4$

$w = 3.u - 4v$

w est une comb lin de u, v $\boxtimes$

Exercices : Espaces vectoriels

Exercice 1:

1. Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(-6, -17, 17)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $((2,1,3),(3,5,-2))$?
2. Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}^t$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}^t\right)$?

$$X = \begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}^t \qquad \alpha \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}^t}_{u} \quad \beta \underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}^t}_{v} \quad \gamma \underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}^t}_{w}$$

X est comb lin de $u, v, w \iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq $X = \alpha u + \beta v + \gamma w$

$$\iff \begin{cases} (1) & 2\beta + 2\gamma = 4 \\ (2) & \alpha + \gamma = -1 \\ (3) & \alpha - \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

$$\iff \quad (2)-(3) \Rightarrow \begin{cases} \beta = -2 \\ 2\gamma = 4 - 2\beta = 8 \\ \alpha = -1 - \gamma \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta = -2 \\ \gamma = 4 \\ \alpha = -1-4 = -5 \end{cases} \quad \boxtimes$$

D'où $X = -5 \cdot u + (-2) \cdot v + 4 \cdot w$

Cl X est une combinaison linéaire de $\{u, v, w\}$.

EXERCICE 2:

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

1. $F = \{(x+y, x-y, 2y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x + 2y - 3z = 0\}$
3. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$
4. $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/ -x + 2y = y + 6z \text{ et } y + 3z = -2x\}$

$\boxed{E \text{ est un e.v}}$

M_1

Th

$E = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_k\} \Rightarrow$ s.e.v

engendré par

$\Downarrow$

e.v

✓ • $\begin{cases} \bullet\, u \in E \\ \bullet\, v \in E \end{cases} \Rightarrow u + v \in E$

✓ • $\begin{cases} \bullet\, u \in E \\ \bullet\, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \lambda . u \in E$

✓ • $0 \in E$

E est un s.e.v $\Rightarrow$ e.v

1) $F = \{(x+y, x-y, 2y) / (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (1+1, 1-1, 2\times 1) = (2,0,2) \in F$

1ère méthode (list check)

• $(0,0,0) \in F$ $\qquad$ $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \Rightarrow (0,0,0) \in F$ ✓

•• $u \in F$
$v \in F$ $\qquad$ $u + v \in F$??

$u \in F \iff u = (x+y,\ x-y,\ 2y) \quad x,y \in \mathbb{R}$

$v \in F \qquad v = (x'+y',\ x'-y',\ 2y') \quad x',y' \in \mathbb{R}$

$u+v = (x+x'+y+y',\ (x+x')-(y+y'),\ 2(y+y')) \qquad X = x+x'$

$= (X+Y,\ X-Y,\ 2Y) \quad (X,Y) \in \mathbb{R}^2 \qquad Y = y+y'$

$\Rightarrow u+v \in F$ ✓

ooo $\lambda \in \mathbb{R}$

$u \in F$; $u = (x+y,\ x-y,\ 2y) \quad x,y \in \mathbb{R}$

$\lambda u = (\lambda[x+y],\ \lambda[x-y],\ 2\lambda y)$

$= (\lambda x + \lambda y,\ \lambda x - \lambda y,\ 2\lambda y) \quad \begin{cases} X = \lambda x \\ Y = \lambda y \end{cases}$

$= (X+Y,\ X-Y,\ 2Y)\ (X,Y) \in \mathbb{R}^2$ ✓

$\lambda . u \in F$ ✓

u ① F est un s.e.v

u F est un e.v $\boxed{\times}$

②

$F = \{ (x+y,\ x-y,\ 2y) \ / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \{ (x,x,0) + (y,-y,2y) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \{ x\overbrace{(1,1,0)}^{u} + y\overbrace{(1,-1,2)}^{v} \ / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \mathrm{Vect}\{ (1,1,0), (1,-1,2) \}$ s.e.v $\Rightarrow$ e.v

1

2. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = -2y + 3z\}$$

$$= \{(-2y+3z, y, z) ; (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{y\underbrace{(-2,1,0)}_{e_1} + z\underbrace{(3,0,1)}_{e_2} ; (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \text{vect}\{e_1, e_2\}$$