Primitive et Calcul d'intégrale 1LT Abdallah Khemais

Dans toute cette partie, f désigne une fonction définie sur D une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Primitive

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Propriété

Soit f une fonction définie sur I et F une primitive de f. Alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

Propriété

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur I. Alors f admet au moins une primitive sur I.

Primitive Usuelle

$f(x)$	$F(x)$	I
$x^n (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}(n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$	$\dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^{+*} ou \mathbb{R}^{-*}$
$x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}^+)$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\dfrac{1}{x^\alpha}(\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$	$\dfrac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}^{+*} ou \mathbb{R}^{-*}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

$f(x)$	$F(x)$	I
$u'(x)(u(x))^n (n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{1}{n+1}(u(x))^{n+1}$	$I \subset \mathcal{D}_u$
$\dfrac{u'(x)}{(u(x))^n}(n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$	$\dfrac{-1}{(n-1)(u(x))^{n-1}}$	$I \subset \mathcal{D}_u \quad \text{et u ne s'annule par sur } I$
$u'(x)(u(x))^\alpha (\alpha \in \mathbb{R}^+)$	$\dfrac{1}{\alpha+1}(u(x))^{\alpha+1}$	$u \quad \text{strictement positive sur } I$
$\dfrac{u'(x)}{(u(x))^\alpha}(\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$	$\dfrac{-1}{(\alpha-1)(u(x))^{\alpha-1}}$	$u \quad \text{strictement positive sur } I$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln \lvert u(x) \rvert$	$u \quad \text{ne s'annule pas sur } I$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)}$	$I \subset \mathcal{D}_u$

Définition de l'intégrale

Fonctions Continues

Définition :

Soit f une fonction continue sur le segment $[a; b]$ et F une primitive de f sur $[a; b]$. On appelle **intégrale de** f **de** a **à** b, le nombre réel :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Remarques

- Le résultat pour $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ ne dépend pas de la primitive que l'on a choisit car si G est une autre primitive, alors $G = F + k$ et donc $G(b) - G(a) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a)$.
- On note aussi $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b$.

- $\int_a^a f(t)\,dt = 0$
- $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$
- Lorsque l'on peut calculer $\int_a^b f(t)\,dt$, on dit que la fonction f est **intégrable sur** $[a;b]$ **ou que l'intégrale** $\int_a^b f(t)\,dt$ **est convergente.**

Propriétés de l'intégrale

Dans toute cette partie a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Linéarité

Théorème

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ et soient λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g$ est continue et :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$$

Positivité et inégalité

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, $\underline{\text{avec } a < b}$, telle que f est positive sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$$

Corollaire

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$, $\underline{\text{avec } a < b}$, et telles que $\forall t \in [a;b]\ f(t) \leqslant g(t)$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$$

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, $\underline{\text{avec } a < b}$, alors :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Théorème

Soit f une fonction **continue** sur $[a;b]$, avec $a < b$. Si $f \geqslant 0$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors $f(t) = 0$ $\forall t \in [a;b]$.

Relation de Chasle

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b et c trois réels de cet intervalle. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

Technique de Calcul

Intégration par partie

Théorème

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a;b]$.

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$$

Exemple

On cherche à calculer pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\displaystyle\int_1^x \ln t\,dt$.

On pose :

$$\begin{cases} u(t) = \ln t & u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = 1 & v(t) = t \end{cases}$$

Les fonction u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc en particulier sur $[1;x]$. Ainsi par intégration par partie on a :

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln t\,dt &= [t\ln t]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t}\,dt \\ &= x\ln x - x + 1 \end{aligned}$$

Remarque

On voit donc que $x \to x\ln x - x + 1$ est une primitive de $x \to \ln x$ et donc $x \to x\ln x - x$ en est aussi une.

Justifier l'existence des intégrales suivantes puis les calculer :

$I_1 = \int_{-1}^{1} (t+1)(t+2)^2 dt,\ I_2 = \int_0^4 \sqrt{x}\left(x - 2\sqrt{x}\right) dx,\ I_3 = \int_1^2 3^u du,\ I_4 = \int_1^4 \frac{1}{y\sqrt{y}} dy,$

$I_5 = \int_0^1 (2z-1)\exp(z^2 - z) dz,\ I_6 = \int_1^2 \frac{a^2}{\sqrt{1+a^3}} da,\ I_7 = \int_1^2 \frac{2\sqrt{c}}{2+3c^{3/2}} dc,$

$I_8 = \int_1^e \frac{(\ln b)^5}{b} db,\ I_9 = \int_0^{(\ln 2)/2} \frac{e^{2t}}{e^{2t}+2} dt,\ I_{10} = \int_e^{e^3} \frac{\ln(3\gamma)}{\gamma} d\gamma,\ I_{11} = \int_0^2 \beta^4 \exp(-\beta^5) d\beta,$

$I_{12} = \int_{1/2}^{3/2} \frac{1-\alpha}{(\alpha^2 - 2\alpha)^4} d\alpha,$\quad $I_{13} = \int_0^2 x^2 (x^3+1)^{3/2} dx,\ I_{14} = \int_0^1 \frac{s^{2004}}{(1+s^{2005})^{2006}} ds,$

$I_{15} = \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{\zeta}}}{\sqrt{\zeta}} d\zeta,\ I_{16} = \int_{-4}^4 \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} du,\ I_{17} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(-3/v^2)}{v^3} dv,\ I_{18} = \int_0^1 \frac{y^4}{\sqrt[3]{1+7y^5}} dy$

changement de variable

Théorème

Soit f une fonction intégrable sur $[a;b]$ et φ une fonction de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$ avec $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a;b]$. Alors on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Méthode générale

On cherche à calculer $\int_a^b f(x)\,dx$.

- On trouve le changement de variable qui nous semble judicieux, c'est à dire on pose $x = \varphi(t)$ ou $t = \phi(x)$
- On peut alors écrire $dx = \varphi'(t)dt$ ou $dt = \phi'(x)dx$
- On remplace dans l'intégrale pour n'avoir plus que la variable t qui apparait.
- Il faut aussi penser à modifier les bornes : dans notre intégrale c'est x qui varie de a à b, un fois le changement de variable effectué les bornes doivent représenter les nombres entre lesquels t varie.

Exemple

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$. Effectuer le changement de variable $t = x + \sqrt{x^2+1}$ et en déduire la valeur de I.

- Ici il est impossible d'exprimer x en fonction de t.
- On a $dt = \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) dx = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx$ et t varie entre 1 et $1+\sqrt{2}$.

- Donc $I = \int_0^1 (x + \sqrt{x^2+1}) \times \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \int_1^{1+\sqrt{2}} t dt = \left[\dfrac{t^2}{2}\right]_1^{1+\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$

Exercices

1. Calculer la primitive de $I = \int \frac{dx}{x(x^2+3)}$
2. Calculer la primitive de $G(x) = \frac{x^6-9x^2-3}{x^4-3x^2-4}$

1. Première méthode

- Changement de variable $x = \varphi(t) = \frac{1}{t}$

posons $x = \varphi(t) = \frac{1}{t}$ d'ou $dx = -\frac{1}{t^2}dt$. Par substitution dans I nous obtenons :

$I = \int -\frac{dt}{t^2(\frac{1}{t^2}+3)\frac{1}{t}} = -\int \frac{t}{1+3t^2}dt = -\frac{1}{6}\int \frac{6t}{1+3t^2}dt$

$I = -\frac{1}{6}\ln(1+3t^2) + C = -\frac{1}{6}\ln(1 + 3 \times \frac{1}{x^2}) + C$

$I = -\frac{1}{6}\ln(\frac{x^2+3}{x^2}) + C = \boxed{\dfrac{1}{6}\ln(\dfrac{x^2}{x^2+3}) + C} = \dfrac{1}{3}\ln|x| - \dfrac{1}{6}\ln(x^2+3) + C$

1. Deuxième méthode

- Décomposition en élément simple de $\dfrac{1}{x(x^2+3)}$

$$\frac{1}{x(x^2+3)} = \frac{a}{x} + \frac{cx+d}{x^2+3}$$

$a = \lim\limits_{x\to 0} x \times \dfrac{1}{x(x^2+3)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2+3} = \dfrac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to i\sqrt{3}} (x^2+3) \times \frac{1}{x(x^2+3)} &= \lim_{x\to i\sqrt{3}} \frac{1}{x} = \frac{1}{i\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}}{3} \\
&= \lim_{x\to i\sqrt{3}} (x^2+3) \times \left(\frac{a}{x} + \frac{cx+d}{x^2+3}\right) \\
&= \lim_{x\to i\sqrt{3}} (x^2+3) \times \left(\frac{a}{x}\right) + cx + d \\
&= ic\sqrt{3} + d
\end{aligned}$$

par identification on obtient $c = \dfrac{-1}{3}$ et $d = 0$

D'où

$$\frac{1}{x(x^2+3)} = \frac{1/3}{x} + \frac{1/3x}{x^2+3}$$

Finalement on a :

$$\int \frac{dx}{x(x^2+3)} = \int \frac{1/3}{x} - \frac{1/3x}{x^2+3} dx$$

$$\int \frac{1/3}{x} dx = 1/3 \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1/3x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\int \frac{2x}{(x^2+3)} dx = \frac{1}{6}\ln(x^2+3) + c'$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+3)} = \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{1}{6}\ln(x^2+3) + c$$

Entrée [44]:

```
from IPython.display import display,Math
```

Entrée [45]:

```
from sympy.interactive import printing
printing.init_printing(use_latex='mathjax')
```

Entrée [46]:

```
from __future__ import division
import sympy as sym
from sympy import *
x, y, z = symbols("x y z")
k, m, n = symbols("k m n", integer=True)
f, g, h = map(Function, 'fgh')
```

Entrée [47]:

```
h=ln(x)
integrate(h,x)
```

Out[47]:

$$x\log(x) - x$$

Entrée [48]:

```
integrate(ln(x),(x,1,exp(1)))
```

Out[48]:

$$1$$

Entrée [49]:

```
from ipywidgets import interact, widgets
sym.init_printing()

text = widgets.Text(
    value='cos(x)',
    placeholder='Ecrire la fonction içi',
    description='Function:',
    disabled=False
)
```

Entrée [50]:

```
def DL(fun):
    try :
        display(
        Math('{} = {}'.format(
                r'$\int{}dx'.format(latex(eval(fun))),
                latex(integrate(fun,x)
                )
             )))

    except:
        print("vérifier la fonction")

interact(DL, fun=text);
```

```
interactive(children=(Text(value='cos(x)', description='Function:', pl
aceholder='Ecrire la fonction içi'), Out…
```

Entrée [51]:

```
text1 = widgets.Text(
    value='(x**6-9*x**2-3)/(x**4-3*x**2-4)',
    placeholder='Ecrire la fonction içi',
    description='Function:',
    disabled=False,
    height=100
)
```

Entrée [52]:

```
def part(fun):
    try :
        display(
        Math('{} = {}'.format(
                r'${}'.format(latex(eval(fun))),
                latex(apart(fun)
                )
             )))

    except:
        print("vérifier la fonction")
```

Entrée [53]:

```
interact(part, fun=text1);
```

```
interactive(children=(Text(value='(x**6-9*x**2-3)/(x**4-3*x**2-4)', de
scription='Function:', placeholder='Ecri…
```