TD2 : Espaces vectoriels

Exercice 1:

1. Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(-6,-17,17)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $((2,1,3),(3,5,-2))$?
2. Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}^t$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^t, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^t\right)$?

Exercice 2:

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels :

1. $F = \{(x+y, x-y, 2y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x+2y-3z=0\}$
3. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x+y+z=0 \text{ et } 2x-y+z=0\}$
4. $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/-x+2y=y+6z \text{ et } y+3z=-2x\}$

Exercice 3:

Pour chaque espace vectoriel, déterminer une famille génératrice :

1. $A = \{(x-y, x+y, 2x-3y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x=y=z\}$
3. $C = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4/2x-y+2z-t=0 \text{ et } y+z-t=0\}$

Exercice 4:

Montrer que la famille $\mathcal{B} = ((1,6,9),(1,4,6),(3,6,2))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5:

Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $\mathcal{B}_1 = ((1,1,1,1),(1,2,3,4),(1,2,8,16))$ dans $\mathbb{R}^4$.
2. $\mathcal{B}_2 = ((1,-1,3),(2,3,4),(1,-6,5))$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\mathcal{B}_3 = ((1,-1,3),(3,-1,1),(1,1,-1))$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6:

Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

1. $C = \{(x-y+z, 3x+6z, -2x+4y)/(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$
2. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/2x=y \text{ et } y=3z\}$

EXERCICE 7:

Déterminer une base et la dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - z = 0 \text{ et } 3y - z = 0\}$
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 5z = 0\}$
5. $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - 3z = 4y - 5x\}$
6. $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 2y = y + 6z = 3z - 2x\}$

EXERCICE 8:

Déterminer si la famille donnée est une base de l'espace donné :

1. $\mathcal{B}_1 = ((1, 0, -2, 5), (7, -4, 3, 1), (0, 1, -1, 0), (1, -3, 0, 2))$ dans $\mathbb{R}^4$
2. $\mathcal{B}_2 = ((1, 2, 3), (4, 5, 6))$ dans $\mathbb{R}^3$

EXERCICE 9:

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs : $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^t$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^t$, et $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^t$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Quelles sont, dans cette base, les coordonnées de $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}^t$?

EXERCICE 10:

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la famille $(u, v, w) = ((1, 1, 1), (1, -1, 0), (-1, 1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de e_1, e_2, e_3 dans cette nouvelle base.