$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$

EXERCICE 10:

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la famille $(u, v, w) = ((1,1,1),(1,-1,0),(-1,1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de e_1, e_2, e_3 dans cette nouvelle base.

E

Q : β : famille de vecteur

Mq est une base ?

dim (E) in connue

déf

1 β. libre

2 génératrice

Connu

$\dim E = n$

1 β est libre

2 $\text{Card}(\beta) = n$

$E = \{ \underline{\qquad\qquad}, \underline{\qquad\qquad} \}$

$E = \text{vect}\{\_, \_, \_, \dots\}$

$\beta = \{\_, \_, \_, \_\}$; génératrice

$+$

β est libre ??

oui $\Rightarrow$ β est une base

$\Downarrow$

$\dim E = \text{Card}(\beta)$

non

[β n'est pas une base]

S.L.H → une solution $(0,0,\dots,0)$ → ∞ de solution

Syst. Lin. Hom

1) $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

il suffit de demontrer que $\mathcal{B}$ est libre ?.

$\mathcal{B} = \{ \underset{u}{(1,1,1)}, \underset{v}{(1,-1,0)}, \underset{w}{(-1,1,-1)} \}$

Système Linéaire Homogène

$$\alpha . u + \beta v + \gamma w = (0,0,0) \iff \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = \boxed{0} & (1) \\ \alpha - \beta + \gamma = \boxed{0} & (2) \\ \alpha - \gamma = \boxed{0} \end{cases}$$

Matrice $\iff$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$(1)+(2) \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha = \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\underline{\text{d}}$ $\mathcal{B}$ est libre

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 0 \\ -\beta = 0 \\ 2\gamma = 0 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

(E)

$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ $\mathcal{B}$ est libre ??

$\Downarrow$

(S) $\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_k e_k = 0_E$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} = 0 \\ = 0 \\ = 0 \\ = 0 \end{cases}$

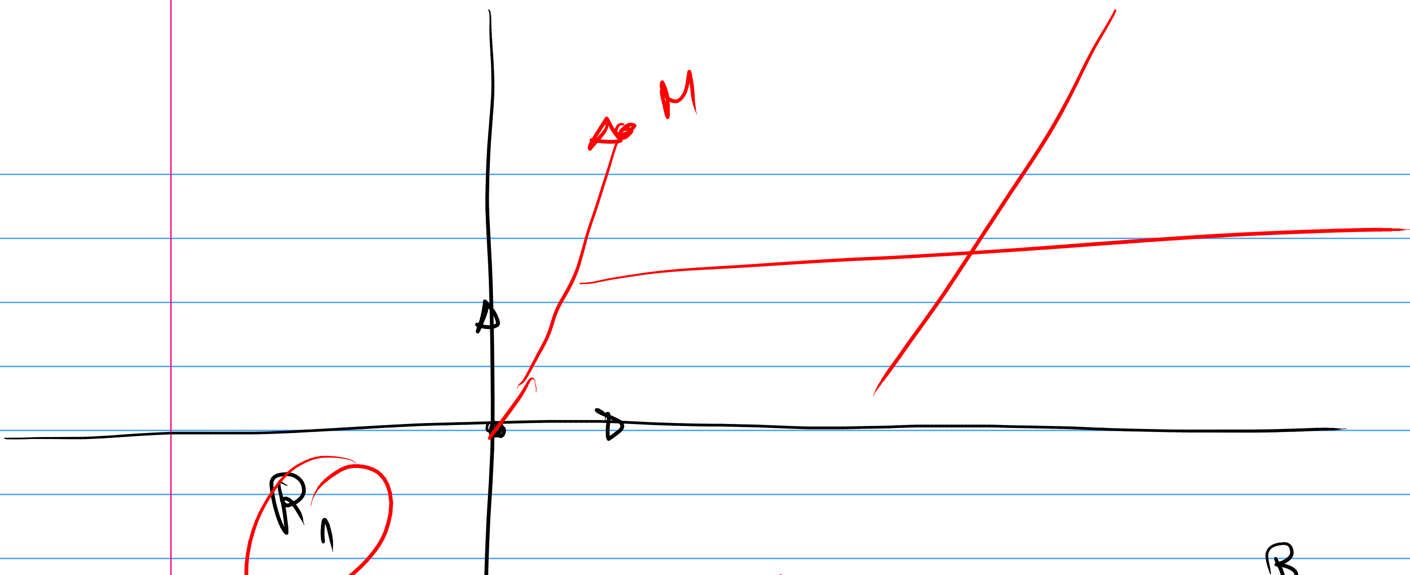
$0 \longrightarrow$ une unique sol $\rightarrow$ libre

$\infty \rightarrow$ liée

$\begin{cases} \text{card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B} \text{ est libre} \end{cases}$ D'où $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow$ base canonique $\begin{cases} e_1 = (1,0,0) \\ e_2 = (0,1,0) \\ e_3 = (0,0,1) \end{cases}$

$\mathbb{R}^3$: $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$



$$u = (1,1,1)_{(e_1,e_2,e_3)} = e_1 + e_2 + e_3$$

$$v = (1,-1,0)_{(e_1,e_2,e_3)}$$

$$w = (-1,1,-1)_{(e_1,e_2,e_3)}$$

$$e_1 = (\quad)_\beta = ?\ \alpha \cdot \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$$

$$e_2 = (\quad)_\beta$$

$$e_3 = (\quad)_\beta$$

$$\begin{cases} u = e_1 + e_2 + e_3 & (1) \\ v = e_1 - e_2 & (2) \\ w = -e_1 + e_2 - e_3 & (3) \end{cases} \iff$$

$$\begin{aligned} (1)+(3) \quad & 2e_2 = u + w \\ (2)+(3) \quad & -e_3 = v + w \\ & e_1 = u - e_2 - e_3 \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} e_2 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w \\ e_3 = -v - w \\ e_1 = u - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}w + v + w \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}u + v + \frac{1}{2}w \\ e_2 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}w \\ e_3 = -v - w \end{cases}$$

$$e_1 = \left(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{2}\right)_\beta$$

$$e_2 = \left(\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}\right)_\beta$$

$$e_3 = (0, -1, -1)_\beta$$