S2
Développements limités

Exercice 1.

Etablir pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous un développement limité de f en 0 à l'ordre n.

$a)\ f(x)=e^x\quad n=5\qquad b)\ f(x)=\ln(1+x^2)\quad n=6\qquad c)\ f(x)=\sin(2x)+\cos(x^2)\quad n=7$

$d)\ f(x)=e^{3x}\sin(2x)\quad n=4\qquad e)\ f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\quad n=3\qquad f)\ f(x)=\tan(x)\quad n=5$

$g)\ f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{e^x\sin(x)}\quad n=3\qquad h)\ f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}\quad n=3\qquad i)\ f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\quad n=3$

$j)\ f(x)=\sqrt{1+x}\quad n=4\qquad k)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\quad n=3$

Exercice 2. Soit f la fonction définie par $f(x)=x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.
2. La fonction est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Exercice 3. Calculer les limites suivantes (sans présupposer leur existence!).

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\sin(x)}\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x-\frac{3}{2}\sin(2x)}\qquad c)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)+\ln(\cos(x))}{x^4}$

$d)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\tan(x)-\sin(2x)}{x(1-\cos(3x))}\qquad e)\ \lim\limits_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}\qquad f)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos(2x))}{\ln(\cos(3x))}$

$g)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x(e^x-1)}-\dfrac{1}{x^2}\right)\qquad h)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)\qquad i)\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$

Exercice 4. Calculer un développement limité de la fonction f pour chacun des cas suivants :

a) $f(x)=x^2\ln(x)$ où x tend vers 1 et à l'ordre 5.
b) $f(x)=\sqrt{x+2}$ où x tend vers 0 et à l'ordre 3.
c) $f(x)=\ln(x+2)$ où x tend vers 0 et à l'ordre 2.
d) $f(x)=\sin(x)$ où x tend vers $\frac{\pi}{4}$ et à l'ordre 3.
e) $f(x)=x^3+4x^2+x-1$ à l'ordre 5, d'abord pour x tendant vers 0 puis pour x tendant vers 1.
f) $f(x)=\ln(\sin(x))$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ et à l'ordre 3.

Exercice 5.

1. Donner un équivalent simple de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$
2. Donner un équivalent simple de $\sin(x)$ en 0. En déduire $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$
3. Donner un équivalent simple de $\sin(x)-x$ en 0. En déduire $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^3}$
4. Donner un équivalent simple de $\sin(x)-x$ en 0. En déduire $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x^2}$

Exercice 6.

1. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \arctan(x)$
En calculant le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction dérivée f', en déduire le développement limité de f à l'ordre 5.
2. Calculer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0 de la fonction g définie par
$$g(x) = \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$$

Exercice 7 . Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $\frac{\pi}{3}$, de la fonction :$f(x) = \cos(x)$

Exercice 8.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 1 de la fonction : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{x^2}$

Exercice 9.

Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de : $f(x) = \frac{\ln(\mathrm{ch}(x))}{x\ln(1+x)}$

Exercice 10.

Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{\ln(1+x)\mathrm{sh}(x)}$

Exercice 11.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de :
$$f(x) = \ln(1 + \mathrm{sh}(x))$$
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de :
$$g(x) = \frac{\ln(1 + \mathrm{sh}(x))}{\sin(x)}$$
3. Montrer que g est prolongeable par continuité en $x = 0$.

Exercice 12.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de 0 de la fonction définie par :
$$h(x) = \frac{\sin(x)\,\mathrm{sh}(x)}{\sin(x^2)}$$
2. En déduire un équivalent de $h(x) - 1$ au voisinage de 0.

Exercice 13.

Déterminer la limite suivante, sans préjugée qu'elle existe :
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\cos(x)} - e^{\mathrm{ch}(x)}}{\cos(x) - \mathrm{ch}(x)}$$