Chapitre III

Abdallah Khemais

Isitcom

Novembre 2016

Introduction

Rappels :

Une variable aléatoire réelle (VAR) est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ où $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. Lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble discret on dit que X est une VAR discrète.

Pour **toutes** les VAR (discrètes ou non) on définit la fonction de répartition de X, que l'on note F_X, par $F_X(x) = P(X \leqslant x)$ pour tout réel x.

Notion de variable aléatoire à densité

Densité

Définition

Soit X une VAR définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
et F_X sa fonction de répartition.
On dit que X est **une variable aléatoire réelle à densité**
s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) f_X est à valeur réelles positives ou nulles

(ii) f_X est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$

(iv) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

La fonction f_X s'appelle alors **une densité** de la variable aléatoire X.

Nous admettrons le théorème suivant, qui nous permet de vérifier si une fonction f donnée est une densité d'une variable X.

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

(i) f est à valeur réelles positives ou nulles

(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire réelle X définie sur cet espace, tels que f est une densité de la variable X.
On dit alors que f est une **densité de probabilité**.

Exemple 1:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Montrons que c'est une densité de probabilité.

2) $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$: est une densité de probabilité

i) f est continue (sauf en un nombre fini de point)

ii) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$a \neq 0 \quad e^{ax} \longrightarrow \frac{1}{a} e^{ax}$

iii) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(x)}}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \underbrace{f(x)}_{e^{-x}}\,dx$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \left(-e^{-x}\right)} - \left[-e^{0}\right]$$

$$= 0 + 1$$

f est une densité de probabilité.

Caractérisation par la fonction de répartition

Théorème

Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité X et si f est une densité de X alors :

- F est continue sur $\mathbb{R}$.
- F est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points et lorsque F est dérivable en x, $F'(x) = f(x)$.

Ces propriétés sur la fonction de répartition suffisent à caractériser les variables à densité :

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Si :

(i) F est continue sur $\mathbb{R}$

(ii) F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points

alors X est une variable aléatoire à densité.
De plus si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

Exemple 2:

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} \boxed{0} & \text{si } x < 2 \quad \leftarrow 2^- \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geqslant 2 \quad \leftarrow 2^+ \end{cases}$$

Montrer que X est une variable à densité et en déterminer une densité.

→ F est continue sur $\mathbb{R}^*$.

→ en 2 :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} F(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} F(x) = 0 \\ F(2) = 0 \end{array}\right\} \text{F est continue en 2}$$

$\Leftrightarrow$ F est C sur $\mathbb{R}$.

F est C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

X: est une variable (continue)

En pratique :

Pour démontrer qu'une variable X donnée est une variable à densité, il faut trouver sa fonction de répartition et vérifier qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf peut être en un nombre fini de points. Pour trouver la densité de X il suffit de prendre la dérivée de F.

Exemple 3:

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Montrer que X est une variable à densité et en déterminer une densité.

Le théorème suivant permet de déterminer si une fonction F donnée est la fonction de répartition d'une variable à densité X.

Théorème

Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si

(i) F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$

(ii) F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points

(iii) F est croissante sur $\mathbb{R}$.

(iv) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X définie sur cet espace, tels que F est la fonction de répartition de X.
De plus X est alors une variable à densité et si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

F est C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$

Exemple 4:

F est $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$

On considère la fonction F définie par :

$\lim_{0^+} F(x) = 1/2$

$\lim_{0^-} F(x) = 1/2$

$F(0) = 1/2$

F $\mathcal{C}$ en 0

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1 - \sqrt{-x}}{2} & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ \dfrac{1 + \sqrt{x}}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{-1^+} F(x) = 0$

$\lim_{-1^-} F(x) = 0$

$F(-1) = 0$

$\mathcal{C}$ en -1

$\lim_{1^+} F(x) = 1$ $F(1) = 1$

$\lim_{1^-} F(x) = 1$ $\mathcal{C}$ en 1

$(\sqrt{f})' = \frac{1}{2\sqrt{f}} f'$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité et en déterminer une densité.

$$F'(x) = \begin{cases} 0 \geqslant 0 & x < -1 \\ +\dfrac{1}{4\sqrt{-x}} \geqslant 0 & -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{x}} \geqslant 0 & 0 < x < 1 \\ 0 \geqslant 0 & x > 1 \end{cases}$$

$\boxed{\dfrac{1}{2}} - \dfrac{\sqrt{-x}}{2}$

$0 + \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}}{2}$

F ↗

$\lim_{+\infty} F(x) = 1$: $\lim_{-\infty} F(x) = 0$

$\Rightarrow$ F est une fonction de répartition

Quelques propriétés

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f.

(i) Pour tout x réel :

$$P(X < x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$P(X > x) = P(X \geqslant x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt$$

(ii) Pour tout a et b réels tels que $a \leqslant b$:

$$P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

(iii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$

Corollaire

Soit X une variable à densité et f une densité de X. Si f est nulle en dehors d'un intervalle $[a; b]$, alors on a $P(X < a) = 0$ et $P(X > b) = 0$. On dit alors que X prend ses valeurs dans l'intervalle $[a; b]$.

Indépendance

Définition

Des VAR à densité $X_1, \cdots, X_n$ sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont dites **indépendantes** si pour tous réels $(x_1, \cdots, x_n)$:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k \leqslant x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leqslant x_k)$$

Remarque :

Pour montrer que deux variables à densité X et Y sont indépendantes il faut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ on a $P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) = P(X \leqslant x) \times P(Y \leqslant y)$.

Moments d'une variable aléatoire à densité

Espérance

Définition

Soit X une VAR de densité f. Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ est absolument convergente alors on dit que X **admet une espérance** que l'on note $E(X)$ et on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$$

Exemple 5:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exemple 6:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Ex5 : $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in \boxed{[0;1]} \\ \boxed{0} & \text{sinon} \end{cases}$

- ☑ f est $\subseteq$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$
- ☑ $f \geq 0$ ☑
- ? ☐ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

i) f est une densité

ii) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{f(t)}_{0}dt + \int_{0}^{1} \underbrace{f(t)}_{6t(1-t)}dt + \int_{1}^{+\infty} \underbrace{f(t)}_{0}dt$$

$$= \int_0^1 6t(1-t)\,dt$$

$$t^n \longrightarrow \frac{1}{n+1}t^{n+1}$$

$$= \int_0^1 6t - 6t^2\,dt$$

$$= \left[3t^2 - 2t^3\right]_0^1$$

$$= \{3-2\} - \{0\} = 1$$

f est une densité de probabilité.

ii) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt = \int_0^1 t \overbrace{f(t)}^{6t(1-t)} dt$

$$= \int_0^1 6t^2(1-t)\,dt = \int_0^1 6t^2 - 6t^3\,dt$$

$$= \left[2t^3 - \frac{3}{2}t^4\right]_0^1 = \left\{2 - \frac{3}{2}\right\} - 0 = \frac{1}{2}\ ☑$$

Linéarité

Soit X une VAR à densité admettant une espérance. Alors pour tout réels a et b, $aX + b$ admet une espérance et

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

.

Théorème

Soient X et Y deux VAR à densité admettant une espérance. Si $X + Y$ est une VAR à densité alors elle admet une espérance et $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Moment d'ordre r

Définition

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx$ est absolument convergente alors on dit que X **admet un moment d'ordre** r, notée $m_r(X)$ et on a

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx$$

Variance et écart-type

Définition

Si la variable aléatoire X admet une espérance et si la variable $(X - E(X))^2$ admet une espérance, on appelle **variance de** X le réel

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Pour le calcul de variance dans la pratique on utilisera tout comme pour les variables discrètes plutôt le théorème suivant :

Théorème

Soit X une VAR à densité. X admet une variance ssi X admet un moment d'ordre 2 et en cas d'existence, on a :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Exemple 7:

Soit X une VAR dont une densité f est définie par $f(x) = 6x(1-x)$ si $x \in [0;1]$ et $f(x) = 0$ sinon. Nous avons vu que $E(X) = \dfrac{1}{2}$.
X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer

Exemple 8:

Soit X une VAR dont une densité f est définie par $f(x) = 0$ si $x < 1$
et $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ si $x \geqslant 1$.
X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.

$\mathbb{E}X7$:

$$X \rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \underbrace{\mathbb{E}(X^2)}_{??} - \boxed{\mathbb{E}(X)}^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt \qquad \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, f(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 t^2 f(t)\,dt = \int_0^1 t^2 . 6t(1-t)\,dt$$

$$= \int_0^1 6t^3(1-t)\,dt = \int_0^1 6t^3 - 6t^4\,dt$$

$$= \left[\frac{3}{2}t^4 - \frac{6}{5}t^5\right]_0^1 = \left(\frac{3}{2} - \frac{6}{5}\right) - 0 = \frac{3}{10}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \frac{3}{10} - \left[\frac{1}{2}\right]^2$$

$$= \frac{3}{10} - \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$$

Définition

Si X admet une variance alors $V(X) \geqslant 0$. On appelle alors **écart-type** le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Soit X une variable à densité admettant une variance.
Alors pour tout réels a et b, $aX + b$ admet une variance et

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Définition

Si X est une VAR telle que $E(X) = 0$ on dit que X **est une variable centrée**.

Définition

Si X est une variable à densité telle que $\sigma(X) = 1$, on dit que X **est une variable réduite**.

Définition

Si X admet une espérance et un écart-type non nul, la variable $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée **la variable centrée réduite associée à X**.

Lois usuelles

Loi uniforme

Il s'agit ici de la loi la plus simple pour les variables aléatoires à densité. Elle correspond au fait de choisir au hasard un réel dans un segment $[a; b]$.

Définition

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur** $[a; b]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$, si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$ est :

$a = 1$

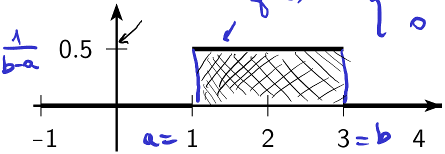
$b = 3$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \textbf{si } a < x < b \\ 1 & \textbf{si } x \geqslant b \end{cases}$$

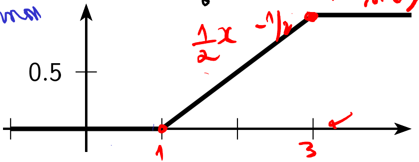
$\frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$

Voici la représentation graphique de la densité et de la fonction de répartition d'une VAR suivant une loi uniforme sur $[1;3]$:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & t \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} & t \in [1;3] \\ 1 & \text{si } t > 3 \end{cases}$$



Densité de la loi $\mathcal{U}([1;3])$



Fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([1;3])$

Théorème

Soit X une VAR à densité suivant une loi uniforme sur $[a;b]$. Alors X admet une espérance égale à $\dfrac{a+b}{2}$.

Loi exponentielle

Définition

Soit λ un réel **strictement positif**. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi exponentielle de paramètre** λ ; et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

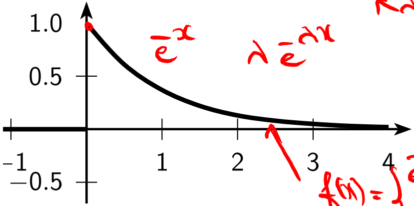
λ : connue

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \textbf{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} \end{cases}$$

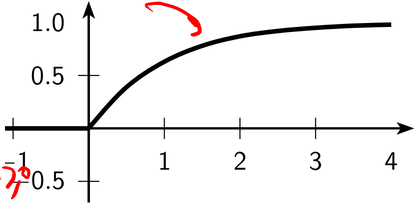
Voici la représentation graphique de la densité et de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{E}(1)$: $\lambda = 1$



e^{-x} $\lambda e^{-\lambda x}$

$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Densité de la loi $\mathcal{E}(1)$



Fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$

Théorème

Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Théorème

Caractérisation de la loi exponentielle

Soit X une VAR à densité, qui n'est pas la variable certaine nulle et qui est à valeur dans $\mathbb{R}^+$.

X suit une loi exponentielle ssi :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad P_{[X>s]}(X > s+t) = P(X > t) \tag{1}$$

Remarque :

L'égalité (1) est équivalente à $P(X > s+t) = P(X > s)P(X > t)$.

Définition

Un VAR à densité vérifiant l'égalité (1) est dite **sans mémoire**.

Loi normale centrée réduite

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi normale centrée réduite** si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

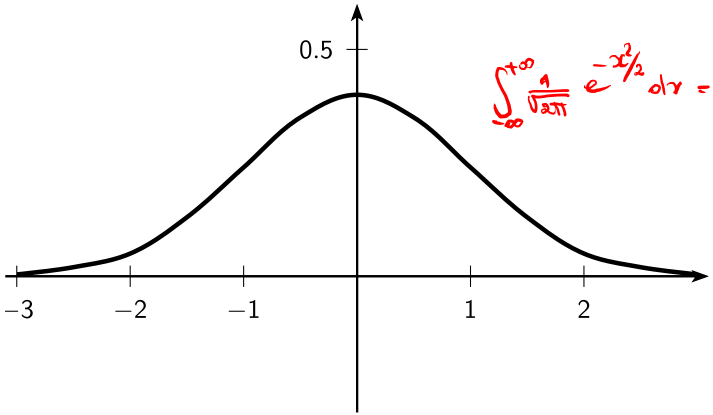
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Remarque :

Pour vérifier que f est une densité de probabilité, il vous faudra admettre que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$.

Voici la représentation graphique de la densité d'une loi normale centrée réduite :



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx = 1$$

Densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Pour la fonction de répartition, nous ne sommes pas capable de l'exprimer avec de fonctions usuelles. Il faudra cependant bien savoir utiliser la propriété que nous allons mettre ci-dessous et savoir utiliser le tableau de valeurs approchées que nous verrons en exercice.

Soit Φ la fonction de répartition d'une VAR X suivant la loi $\mathcal{N}[0,1)$. Alors Φ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Démonstartion : Tout repose ici sur le fait que la densité est paire :

$$\begin{aligned}
\Phi(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-x} f(t)\,dt \\
&= \lim_{A\to-\infty} \int_{-A}^{x} f(-u)\,(-du) \qquad \textit{changement de variable } u=-t \\
&= \lim_{A\to-\infty} \int_{x}^{-A} f(u)\,du = \int_{x}^{+\infty} f(u)\,du = 1 - \Phi(x)
\end{aligned}$$

Théorème

Soit X qui suit une loi normale centrée réduite. Alors X admet une espérance et une variance :

$$\boxed{E(X) = 0} \qquad \boxed{V(X) = 1} \longrightarrow \sigma(X) = 1$$

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$

Loi normale de Laplace-Gauss

Définition

Soit m un réel, et σ un réel strictement positif. On dit que X suit **la loi normale de paramètres** (m, σ^2) si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

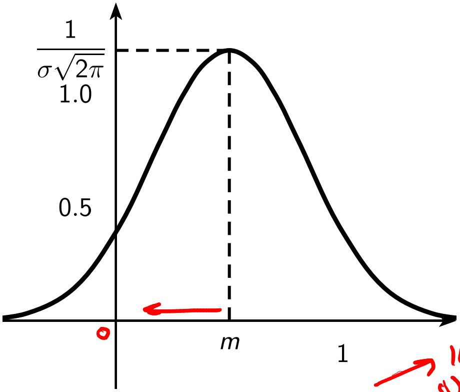
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

moyenne

Variance :

Voici la représentation graphique de la densité d'une loi normale.



Densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$\mathbb{E}(X) = m$
$\mathbb{V}(X) = \sigma^2$

Théorème

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = m \qquad V(X) = \sigma^2$$

loi uniforme.

loi exp.

Loi usuelle (CONTINUE)

	Densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
$\boxed{\mathcal{U}([a;b])}$	$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{si } t\in[a;b]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x\in[a;b]\\ 1 & \text{si } x>b\end{cases}$	$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$	$V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
$\boxed{\mathcal{E}(\lambda)}$	$f(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t\geqslant 0\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$	$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$	$V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$
$\mathcal{N}(0,1)$	$f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$	$\Phi(x)$	$E(X)=0$	$V(X)=1$
$\boxed{\mathcal{N}(m,\sigma^2)}$	$f(t)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)$		$E(X)=m$	$V(X)=\sigma^2$

loi Normale.

Loi Uniforme $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ $\quad \mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ $\quad \mathbb{V}(X) = (b-a)^2/12$

$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [a;b] \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a;b] \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$

Exercice

8h — 8h20

Un train passe à une station selon une loi uniforme entre 8h00 et 8h20.

1. Quelle est la probabilité qu'il passe entre 8h05 et 8h15?
2. Si un voyageur arrive à 8h10, quelle est la probabilité qu'il attende moins de 5 minutes?
3. Calculer l'espérance et l'écart-type du temps d'attente

$X \sim U([a;b]) \longrightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$; $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

(i) $\mathbb{P}(X < t) = F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a;b] \\ 1 & \text{si } t > b \end{cases}$

(ii) $\mathbb{P}(u \leq X \leq v) = F(v) - F(u)$

(iii) $\mathbb{P}(X \geq \alpha) = 1 - \mathbb{P}(X \leq \alpha)$

Réponse :

$\boxed{X} \sim \mathcal{U}([8, \cancel{8{:}20}])$ $\quad 8 + \frac{1}{3}$

$8{:}20\,mn \longrightarrow 8 + \frac{20}{60} = 8 + \frac{1}{3}$

$8{:}05\,m \longrightarrow 8 + \frac{5}{60} = 8 + \frac{1}{12}$

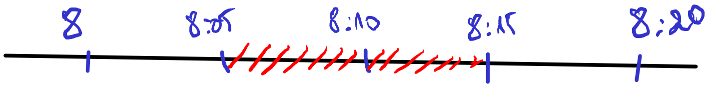
$8{:}15\,mn \longrightarrow 8 + \frac{15}{60} = 8 + \frac{1}{4}$

1) $\mathbb{P}(8 + \frac{1}{12} < X < 8 + \frac{1}{4}) = F(8 + \frac{1}{4}) - F(8 + \frac{1}{12})$

$X \sim U([8, 8 + \frac{1}{3}])$

$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [8, 8+1/3] \\ \frac{x-8}{(8+1/3 - 8)} & \text{si } t \in [8, 8+1/3] \\ 1 & \text{si } t > 8+1/3 \end{cases}$

$$\boxed{F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [8, 8+\frac{1}{3}] \\ 3(x-8) & \text{si } t \in [8; 8+\frac{1}{3}] \\ 1 & \text{si } t > 8+\frac{1}{3} \end{cases}}$$



① $\mathbb{P}\left(8+\frac{1}{12} < X < 8+\frac{1}{4}\right) = F\left(8+\frac{1}{4}\right) - F\left(8+\frac{1}{12}\right)$

$= 3\left(\cancel{8}+\frac{1}{4}-\cancel{8}\right) - 3\left(\cancel{8}+\frac{1}{12}-\cancel{8}\right)$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$

② $\mathbb{P}\left(8+\frac{1}{6} < X < 8+\frac{1}{4}\right) = F\left(8+\frac{1}{4}\right) - F\left(8+\frac{1}{6}\right)$

$= 3\left(\cancel{8}+\frac{1}{4}-\cancel{8}\right) - 3\left(\cancel{8}+\frac{1}{6}-\cancel{8}\right)$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

X : le temps d'arrivé du Train $\quad X \sim \mathcal{U}\left(\left[8\,;\,8+\frac{1}{3}\right]\right)$

$\mathbb{E}(X) = \frac{8+8+\frac{1}{3}}{2} = 8+\frac{1}{6} = 8h:10\,mn$

→ soit Y : le temp d'attente : $\quad Y = X-8$

$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X-8)$

$= \mathbb{E}(X) - 8$

$= 8+\frac{1}{6}-8$

$= \frac{1}{6} = 10\,mn.$

$\mathbb{V}(aX+b) = a^2\,\mathbb{V}(X)$

$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X-8)$

$= \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{\left(\cancel{8}+\frac{1}{3}-\cancel{8}\right)^2}{12} = \frac{1}{108}$

$\sigma(Y) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\frac{1}{108}} = \frac{1}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{18}.$

Exercice Loi exponentielle :

Le temps de réponse d'un serveur suit une loi exponentielle de moyenne 0.5 seconde.

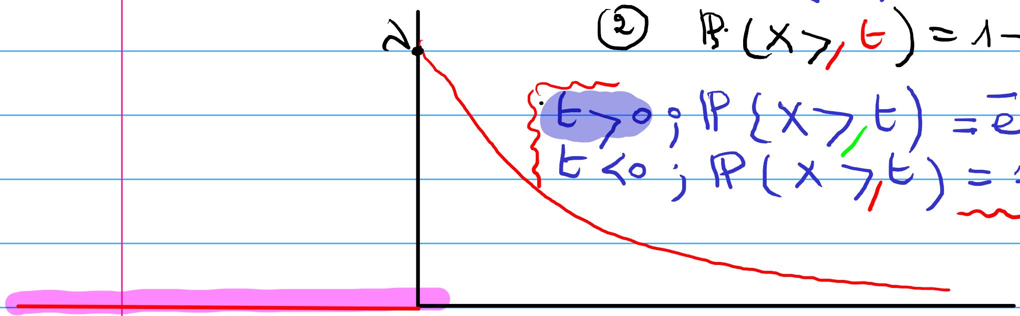
1. Calculer la probabilité que le temps de réponse dépasse 1 seconde
2. Déterminer le temps t tel que 90% des requêtes aient un temps de réponse inférieur à t
3. Si on envoie 10 requêtes indépendantes, quelle est la probabilité qu'au plus 2 aient un temps > 1 seconde?

λ : le paramètre de loi exp : $\lambda > 0$

$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$	$V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

① $\mathbb{P}(X \leq t) = F(t)$

② $\mathbb{P}(X \geq t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F(t)$



$t \geq 0 \; ; \; \mathbb{P}(X \geq t) = e^{-\lambda t}$ ③

$t < 0 \; ; \; \mathbb{P}(X \geq t) = 1$ ④

$t \geq 0 \quad \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ⑤

$t < 0 \quad \mathbb{P}(X \leq t) = 0$ ⑥

$$\boxed{u, v > 0 \quad \mathbb{P}(u \leq X \leq v) = e^{-vt} - e^{-ut}}$$ ⑦

Cas général

$$\mathbb{P}(u \leq X \leq v) = F(v) - F(u) \quad ✱$$

Soit X : le temps de réponse d'une requête.

λ ; $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$ $\quad \mathbb{E}(X) = 0.5 = \dfrac{1}{\lambda}$

D'où $\dfrac{1}{\lambda} = 0.5 \iff \lambda = 2$.

$$\boxed{F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}}$$

Réponse

$t>0$ $\quad \mathbb{P}(X>t) = e^{-2t}$

$\left[\begin{array}{l} 1 \to 1 \\ 1 \to \text{Calcul} \\ 0.5 \to \text{A.N} \end{array}\right.$

2,5 pt

1) $\mathbb{P}(X > 1s) = e^{-2\times 1} = e^{-2}$

2) $\mathbb{P}(X < t) = 90\% = 0.9$

$t>0 \quad 1 - e^{-2t} = 0.9$

$\Leftrightarrow \quad 1 - 0.9 = e^{-2t}$

$\Leftrightarrow \quad e^{-2t} = 0.1$

$\Leftrightarrow \quad -2t = \ln(0.1)$

$\Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{2}\ln(0.1) \approx 1.1512925464970227$

3) **Si on envoie 10 requêtes indépendantes,**
quelle est la probabilité qu'au plus 2 aient un temps > 1 seconde?

S : " $X > 1s$ " $\qquad \mathbb{P}(S) = e^{-2}$

Soit Y : le nombre de requête parmi 10 envoyées qui ont fait un retard d'1s.

$Y \sim \mathcal{B}(\underset{n}{\boxed{10}}, \overset{\mathbb{P}(S)}{\boxed{e^{-2}}}) \longrightarrow \mathbb{P}(Y=k) = \binom{10}{k}(e^{-2})^k(1-e^{-2})^{10-k}$

$\mathbb{P}(Y \leq 2) = \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=2)$

$= \binom{10}{0}(e^{-2})^0(1-e^{-2})^{10-0} + \binom{10}{1}(e^{-2})^1(1-e^{-2})^{10-1} + \binom{10}{2}(e^{-2})^2(1-e^{-2})^{10-2} = \dots$