Exercice 1

1. De combien de manières peut-on arranger sur une étagère 4 livres de maths, 3 de chimie, 2 d'histoire et 1 de français si les livres doivent rester par matière ?
2. De combien de manières peut-on arranger les lettres du mot PEPPER ?
3. Combien de comités de 2 femmes et 3 hommes peut-on former à partir de 5 femmes et 7 hommes ?
4. Combien y a-t-il de plaques d'immatriculation différentes à 7 places si les deux premières places doivent être des lettres et les 5 dernières des chiffres ?
5. Combien y a-t-il de nombres impairs à 4 chiffres n'ayant aucun chiffre qui se répète ?
6. Combien y a-t-il de nombres pairs à 4 chiffres n'ayant aucun chiffre qui se répète ?
7. Si un numéro de plaque d'automobile doit toujours comporter 3 lettres suivies de 3 chiffres et si le premier des 3 chiffres ne peut jamais être zéro, combien de plaques différentes peut-on fabriquer ?
8. Combien y a-t-il de mots de 5 lettres *différentes* qui commencent par une consonne et qui alternent ensuite consonne-voyelle ?

Exercice 2

De combien de manières peut-on choisir un président, un secrétaire et un trésorier dans un comité de dix membres :

1. si les fonctions ne sont pas cumulables ?
2. si les fonctions sont cumulables ?

Exercice 3

De combien de manières peut-on aligner dix délégués de dix pays différents (incluant l'angleterre, l'irlande, la grèce et l'allemagne)

1. sans contrainte supplémentaire ;
2. si l'anglais et l'irlandais exigent d'être côte-à-côte ;
3. si l'anglais, l'irlandais et le grec exigent d'être côte-à-côte ;
4. si le grec et l'allemand refusent d'être côte-à-côte.

Exercice 4

1. Démontrez l'identité suivante :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$
2. Démontrez l'identité suivante :
$$\sum_{k=1}^{n} k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = n2^{n-1}. \tag{0.1}$$
(*Aide :* vous pouvez utiliser $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$). Fournissez un argument d'analyse combinatoire pour (0.1) en considérant un ensemble de n personnes et en déterminant de deux manières le nombre de compositions possibles pour un comité assorti d'un président. On peut considérer les étapes intermédiaires suivantes :
   (a) Combien de comités de taille k avec son président peut-on composer ?
   (b) Combien y a-t-il de compositions possibles pour un président et les autres membres du comité ?

3. Considérons l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}. \tag{0.2}$$

   Démontrez (0.2) en soutenant que les deux membres de l'égalité représentent le nombre de façons de constituer un comité assorti d'un président et d'un secrétaire, le cumul étant possible, dans un choix de n personnes. On peut considérer les étapes intermédiaires suivantes :
   (a) Combien y a-t-il de comités comprenant k personnes exactement ?
   (b) Combien y a-t-il de choix pour lesquels on observe un cumul des fonctions ?
   (c) Combien de choix évitent le cumul ?
4. Prouvez maintenant que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3)2^{n-3}.$$

Exercice 5

Que pensez-vous des affirmations suivantes :

1. Dans une certaine population, les probabilités qu'un couple ait 0, 1, 2, 3 ou plus de 3 enfants valent respectivement 0.25, 0.40, 0.15, 0.06 et 0.02.
2. Dans ce test la probabilité de répondre correctement à la première question est 0.25 et la probabilité de répondre correctement aux deux premières questions vaut 0.40.
3. Dans cette caisse d'oeufs, la probabilité qu'il y ait exactement 2 oeufs cassés vaut 0.25 et la probabilité qu'il y en ait au moins un de cassé vaut 0.2.

Exercice 6

Considérons l'expérience aléatoire consistant à choisir deux boules au hasard d'une urne en contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Déterminez un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ associé à cette expérience.

Exercice 7

On capture 400 poissons dans un certain lac, on les marque puis on les remet à l'eau. Quelques jours plus tard, on capture 600 poissons et on constate que 120 d'entre eux sont marqués.

1. Quelle estimation peut-on donner du nombre total de poissons dans le lac ?
2. si on capture un poisson au hasard, que vaut approximativement la probabilité qu'il soit marqué ?

Exercice 8

Laurent a étudié, pour l'examen oral, les trois premiers chapitres de son cours de probabilité qui en compte 6. Le professeur prépare une question par chapitre et imprime un énoncé par feuille. Il met les feuilles à l'envers et dans le désordre.

1. En tirant donc deux énoncés au hasard, quelle est la probabilité que Laurent ait deux questions parmi les 3 premiers chapitres ?
2. Quelle est la probabilité qu'il ait la moitié des points s'il est certain de répondre parfaitement aux chapitres étudiés ?
3. Et la probabilité qu'il rate ?

Exercice 9

Il y a 3 candidats à une élection présidentielle. Supposons que les vrais pourcentages de voix sont 60%, 25% et 15% pour les candidats A, B et C respectivement. Après l'élection, on prend une urne qui contient 7 votes. Quelle est la probabilité que le candidat C soit devant les autres (strictement) ?

Exercice 10

Si nous échantillonnons avec remplacement de l'ensemble $\{1, 2, 7, 8, 14, 20\}$, quelle est la probabilité d'obtenir l'échantillon (non ordonné) $\{2, 7, 7, 8, 14, 14\}$?

Exercice 11

Poker : 52 cartes, 4 couleurs pour chacune des 13 valeurs (roi, dame, valet, 10,. . ., 2, as), 5 cartes par joueur.

1. Calculez la probabilité d'avoir un *full house* (3 cartes de même valeur et une paire : (3,3,3,roi,roi) par exemple).
2. Calculez la probabilité d'avoir 2 paires (attention, il faut que les paires aient des valeurs différentes).

Exercice 12

Supposons que la probabilité qu'un couple mette au monde un garçon est la même que celle qu'il mette au monde une fille. Combien d'enfants un couple doit-il décider d'avoir pour rendre la probabilité de naissance d'au moins un garçon supérieure à 0.9 ? Supposons maintenant qu'un couple à 6 filles et que madame soit enceinte du 7ème. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?