Exercices Probabilités - Chapitre 1 : Variables Aléatoires

Abdallah K

5 Variables Aléatoires

Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une fonction d'un espace d'échantillonnage S dans l'ensemble des nombres réels.
Si S est l'espace d'échantillonnage et X une variable aléatoire, alors :

$$X : S \to \mathbb{R}$$

Exercices Corrigés

Exercice 1 : Lancer de deux dés

On lance deux dés équilibrés à six faces. Soit X la variable aléatoire représentant la somme des deux dés.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de X

b) Calculer la fonction de masse $f_X(x) = P(X = x)$

c) Calculer la fonction de répartition $F_X(x) = P(X \leq x)$

d) Tracer le graphe de la fonction de répartition

Solution Exercice 1

a) **Valeurs possibles** :

$$\mathcal{X} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

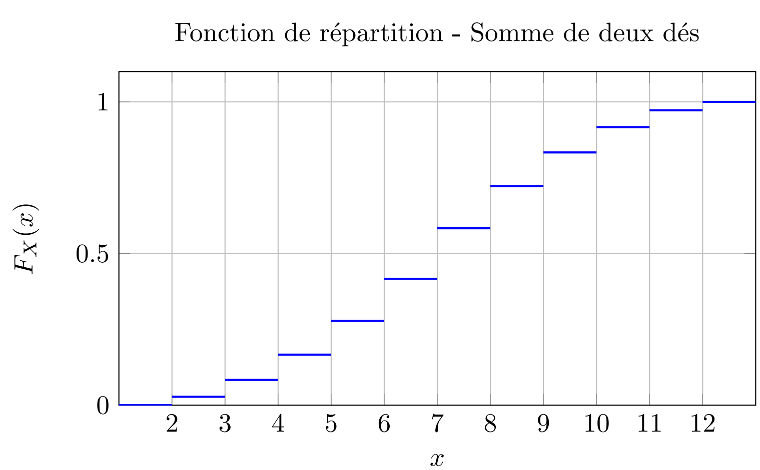
b) **Fonction de masse** :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

c) **Fonction de répartition** :

$$F_X(2) = \frac{1}{36}$$
$$F_X(3) = \frac{3}{36}$$
$$F_X(4) = \frac{6}{36}$$
$$F_X(5) = \frac{10}{36}$$
$$F_X(6) = \frac{15}{36}$$
$$F_X(7) = \frac{21}{36}$$
$$F_X(8) = \frac{26}{36}$$
$$F_X(9) = \frac{30}{36}$$
$$F_X(10) = \frac{33}{36}$$
$$F_X(11) = \frac{35}{36}$$
$$F_X(12) = 1$$

d) **Graphe de la fonction de répartition** :



Exercice : Fonction de répartition en escalier

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$F(b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq b < 1 \\ 3/5 & \text{si } 1 \leq b < 2 \\ 4/5 & \text{si } 2 \leq b < 3 \\ 9/10 & \text{si } 3 \leq b < 3.5 \\ 1 & \text{si } b \geq 3.5 \end{cases}$$

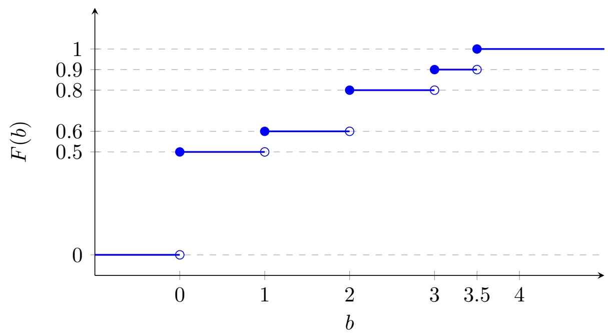
a) Représenter graphiquement $F(b)$

b) Trouver la loi de probabilité de X

c) Vérifier que la somme des probabilités vaut 1

Solution de l'exercice

a) Représentation graphique



b) Loi de probabilité de X

La variable X est discrète. Les probabilités sont données par les sauts de la fonction de répartition :

$$P(X=0)=F(0)-F(0^-)=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$
$$P(X=1)=F(1)-F(1^-)=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{6}{10}-\frac{5}{10}=\frac{1}{10}$$
$$P(X=2)=F(2)-F(2^-)=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$$
$$P(X=3)=F(3)-F(3^-)=\frac{9}{10}-\frac{4}{5}=\frac{9}{10}-\frac{8}{10}=\frac{1}{10}$$
$$P(X=3.5)=F(3.5)-F(3.5^-)=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$$

Tableau de la loi de probabilité :

x	0	1	2	3	3.5
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

c) Vérification

La somme des probabilités vaut :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{5}{10}+\frac{5}{10}=1$$

La somme est bien égale à 1, donc la loi de probabilité est correcte.

Exercice 2 : Distribution géométrique

Soit X une variable aléatoire suivant une distribution géométrique de paramètre $p = 0.4$, représentant le nombre de lancers de pièce nécessaires pour obtenir face pour la première fois.

a) Donner l'expression de la fonction de masse $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$, avec $x \in X(\Omega)$

b) Calculer $P(X = 3)$, $P(X \leq 3)$, $P(X > 2)$

c) Déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$

d) Vérifier que $F_X(x)$ satisfait les conditions d'une fonction de répartition

Solution Exercice 2

a) **Fonction de masse** :

$$f_X(x) = P(X = x) = (1 - p)^{x-1} p = (0.6)^{x-1} \times 0.4 \quad \text{pour } x = 1, 2, 3, \ldots$$

b) **Calculs de probabilités** :

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= (0.6)^2 \times 0.4 = 0.36 \times 0.4 = 0.144 \\ P(X \leq 3) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0.4 + (0.6 \times 0.4) + (0.6^2 \times 0.4) \\ &= 0.4 + 0.24 + 0.144 = 0.784 \\ P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - (0.4 + 0.24) = 0.36 \end{aligned}$$

c) **Fonction de répartition** :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - (1 - p)^x = 1 - (0.6)^x \quad \text{pour } x = 1, 2, 3, \ldots$$

d) **Vérification des conditions** :

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ (car $F_X(x) = 0$ pour $x < 1$)
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = \lim_{x \to \infty} [1 - (0.6)^x] = 1$
- $F_X(x)$ est non décroissante (car $(0.6)^x$ est décroissante)
- $F_X(x)$ est continue à droite (fonction en escalier continue à droite)

Exercice Q.3.4 : Gains avec des boules

On choisit 2 boules au hasard d'une urne en contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2 \$ pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1\$ pour chaque boule blanche tirée. Soit X : " les gains nets". Trouver la distribution de probabilités de X.

Solution Exercice Q.3.4

L'urne contient 14 boules au total : 8 blanches (B), 4 noires (N), 2 oranges (O).
Événements possibles et gains :

- 2 noires : $X = 2 + 2 = 4$
- 1 noire + 1 blanche : $X = 2 - 1 = 1$
- 1 noire + 1 orange : $X = 2 + 0 = 2$
- 2 blanches : $X = -1 - 1 = -2$
- 1 blanche + 1 orange : $X = -1 + 0 = -1$
- 2 oranges : $X = 0 + 0 = 0$

Calcul des probabilités :
Nombre total de tirages : $\binom{14}{2} = 91$

$$P(X = 4) = P(2\text{ noires}) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{6}{91}$$
$$P(X = 2) = P(1\text{ noire} + 1\text{ orange}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{\binom{14}{2}} = \frac{4 \times 2}{91} = \frac{8}{91}$$
$$P(X = 1) = P(1\text{ noire} + 1\text{ blanche}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{14}{2}} = \frac{4 \times 8}{91} = \frac{32}{91}$$
$$P(X = 0) = P(2\text{ oranges}) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{1}{91}$$
$$P(X = -1) = P(1\text{ blanche} + 1\text{ orange}) = \frac{\binom{8}{1}\binom{2}{1}}{\binom{14}{2}} = \frac{8 \times 2}{91} = \frac{16}{91}$$
$$P(X = -2) = P(2\text{ blanches}) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{28}{91}$$

Distribution de probabilités :

x	4	2	1	0	-1	-2
$P(X = x)$	$\frac{6}{91}$	$\frac{8}{91}$	$\frac{32}{91}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{16}{91}$	$\frac{28}{91}$

Vérification : $6 + 8 + 32 + 1 + 16 + 28 = 91$

Exercice Q.3.5 : Classement de la meilleure femme

On classe 5 hommes et 5 femmes selon leurs résultats lors d'un examen. On fait l'hypothèse que tous les scores sont différents et que les 10! classements sont équiprobables. On désigne par X le classement de la meilleure femme (par exemple, X vaudra 2 si le meilleur résultat a été obtenu par un homme et le suivant par une femme). Trouver la distribution de probabilités de X.

Solution Exercice Q.3.5

Soit X le rang de la meilleure femme. X peut prendre les valeurs $1, 2, 3, 4, 5, 6$.
Calcul de $P(X = k)$:
Pour que la meilleure femme soit au rang k, il faut que :

- Les $k - 1$ premiers soient des hommes
- Le k-ème soit une femme
- Les autres femmes soient parmi les $10 - k$ derniers

Nombre de façons de choisir les positions :

- Choisir les $k - 1$ hommes parmi les 5 : $\binom{5}{k-1}$
- Ces $k - 1$ hommes peuvent être permutés : $(k - 1)!$
- La meilleure femme est fixée en position k
- Les 4 femmes restantes vont dans les $10 - k$ positions restantes : $\binom{10-k}{4}$
- Ces 4 femmes peuvent être permutées : $4!$
- Les 5 - $(k - 1)$ hommes restants vont dans les positions restantes : $(10 - k - (4))! = (6 - k)!$

Ainsi :

$$P(X = k) = \frac{\binom{5}{k-1} \cdot (k-1)! \cdot \binom{10-k}{4} \cdot 4! \cdot (6-k)!}{10!}$$

Calculs :

$$P(X = 1) = \frac{\binom{5}{0} \cdot 0! \cdot \binom{9}{4} \cdot 4! \cdot 5!}{10!} = \frac{1 \cdot 126 \cdot 24 \cdot 120}{3628800} = \frac{1}{2}$$
$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{1} \cdot 1! \cdot \binom{8}{4} \cdot 4! \cdot 4!}{10!} = \frac{5 \cdot 70 \cdot 24 \cdot 24}{3628800} = \frac{5}{18}$$
$$P(X = 3) = \frac{\binom{5}{2} \cdot 2! \cdot \binom{7}{4} \cdot 4! \cdot 3!}{10!} = \frac{10 \cdot 35 \cdot 24 \cdot 6}{3628800} = \frac{5}{36}$$
$$P(X = 4) = \frac{\binom{5}{3} \cdot 3! \cdot \binom{6}{4} \cdot 4! \cdot 2!}{10!} = \frac{10 \cdot 15 \cdot 24 \cdot 2}{3628800} = \frac{5}{84}$$
$$P(X = 5) = \frac{\binom{5}{4} \cdot 4! \cdot \binom{5}{4} \cdot 4! \cdot 1!}{10!} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 24 \cdot 24}{3628800} = \frac{5}{252}$$
$$P(X = 6) = \frac{\binom{5}{5} \cdot 5! \cdot \binom{4}{4} \cdot 4! \cdot 0!}{10!} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 24 \cdot 24}{3628800} = \frac{1}{630}$$

Distribution de probabilités :

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{84}$	$\frac{5}{252}$	$\frac{1}{630}$

Vérification : $\frac{1}{2} + \frac{5}{18} + \frac{5}{36} + \frac{5}{84} + \frac{5}{252} + \frac{1}{630} = 1$

Exercice 3 : Variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer la constante c pour que f_X soit une densité de probabilité

b) Calculer $P(0.5 \leq X \leq 1.5)$

c) Déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$

d) Vérifier que $F_X(x)$ est bien une fonction de répartition

Solution Exercice 3

a) **Détermination de c** :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^2 cx^2 dx = c\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = c \times \frac{8}{3} = 1$$

Donc $c = \frac{3}{8}$

b) **Calcul de probabilité** :

$$P(0.5 \leq X \leq 1.5) = \int_{0.5}^{1.5} \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{0.5}^{1.5} = \frac{1}{8}[x^3]_{0.5}^{1.5}$$

$$= \frac{1}{8}[(1.5)^3 - (0.5)^3] = \frac{1}{8}[3.375 - 0.125] = \frac{1}{8} \times 3.25 = 0.40625$$

c) **Fonction de répartition** : Pour $x < 0$: $F_X(x) = 0$
Pour $0 \leq x \leq 2$:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_0^x \frac{3}{8}t^2 dt = \frac{3}{8}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{8}$$

Pour $x > 2$: $F_X(x) = 1$

Donc :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3}{8} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

d) **Vérification** :

- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
- $F_X(x)$ est non décroissante (dérivée $\frac{3x^2}{8} \geq 0$)
- $F_X(x)$ est continue à droite

Exercice 4 : Variables identiquement distribuées

On considère deux variables aléatoires :

- X : nombre de faces en lançant 3 pièces équilibrées
- Y : nombre de piles en lançant 3 pièces équilibrées

a) Montrer que X et Y sont identiquement distribuées

b) Donner les fonctions de masse de X et Y

c) Les variables X et Y sont-elles égales ? Justifier

d) Calculer $P(X+Y=3)$

Solution Exercice 4

a) **Distribution identique** : Par symétrie, le nombre de faces et le nombre de piles suivent la même distribution binomiale $\mathcal{B}(3, 0.5)$.

b) **Fonctions de masse** :

$$P(X=k) = P(Y=k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{\binom{3}{k}}{8}$$

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

c) **Égalité des variables** : Non, X et Y ne sont pas égales. Par exemple, pour l'issue HHH :

$$X(HHH) = 3 \quad \text{et} \quad Y(HHH) = 0$$

Donc $X \neq Y$ bien qu'elles aient la même distribution.

d) **Calcul de** $P(X+Y=3)$: On a toujours $X+Y=3$ (car total des faces et piles = nombre de lancers). Donc :

$$P(X+Y=3) = 1$$

Exercice 5 : Fonction de répartition mixte

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.3 + 0.7(1-e^{-x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Vérifier que F_X est une fonction de répartition

b) Déterminer $P(X=0)$

c) Calculer $P(1 \leq X \leq 2)$

d) X est-elle discrète ou continue ? Justifier

Solution Exercice 5

a) **Vérification** :

- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 0.3 + 0.7(1 - 0) = 1$
- F_X est non décroissante (dérivée positive pour $x > 0$)
- F_X est continue à droite (saut en $x = 0$ mais continu à droite)

b) **Probabilité en 0** :

$$P(X = 0) = F_X(0) - \lim_{x \to 0^-} F_X(x) = 0.3 - 0 = 0.3$$

Il y a une masse de probabilité de 0.3 en $x = 0$.

c) **Probabilité d'intervalle** :

$$P(1 \leq X \leq 2) = F_X(2) - F_X(1^-) = F_X(2) - F_X(1)$$

Car F_X est continue pour $x > 0$.

$$F_X(1) = 0.3 + 0.7(1 - e^{-1}) \approx 0.3 + 0.7 \times 0.6321 = 0.7425$$

$$F_X(2) = 0.3 + 0.7(1 - e^{-2}) \approx 0.3 + 0.7 \times 0.8647 = 0.9053$$
$$P(1 \leq X \leq 2) \approx 0.9053 - 0.7425 = 0.1628$$

d) **Nature de X** : X est une variable aléatoire mixte car :

- Elle a une masse de probabilité en $x = 0$ (composante discrète)
- Elle a une composante continue pour $x > 0$

Exercice 6 : Transformation de variable

Soit X une variable aléatoire continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit $Y = X^2$.

a) Déterminer la fonction de répartition de Y

b) En déduire la densité de Y

c) Vérifier que $f_Y(y)$ est bien une densité de probabilité

Solution Exercice 6

a) **Fonction de répartition de Y** : Pour $0 \leq y \leq 1$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y})$$

Or $F_X(x) = \int_0^x 2t dt = x^2$ pour $0 \leq x \leq 1$, donc :

$$F_Y(y) = (\sqrt{y})^2 = y$$

Ainsi :

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

b) **Densité de Y** :

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc Y suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

c) **Vérification** :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) dy = \int_0^1 1 dy = 1$$

Et $f_Y(y) \geq 0$ pour tout y.