Formulaire - Loi Normale et Table de la Lois Normale Centrée Réduite

Abdallah K

Utilisation de la Table de la Lois Normale Centrée Réduite

Principe de base

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, la table donne $\Phi(z) = P(Z \leq z)$.
Propriété fondamentale : $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

Comment lire la table

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251

$z = 1.21 = 1.2 + 0.01$

$\Phi(z) = \Phi(1.21) = 0.8869$

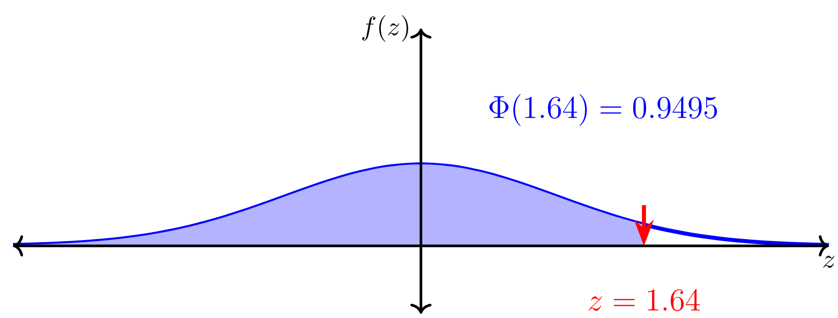
Pour trouver $\Phi(1.21)$:

Ligne 1.2 + Colonne 0.01 = 0.8869

Scénarios de Calcul avec la Loi Normale

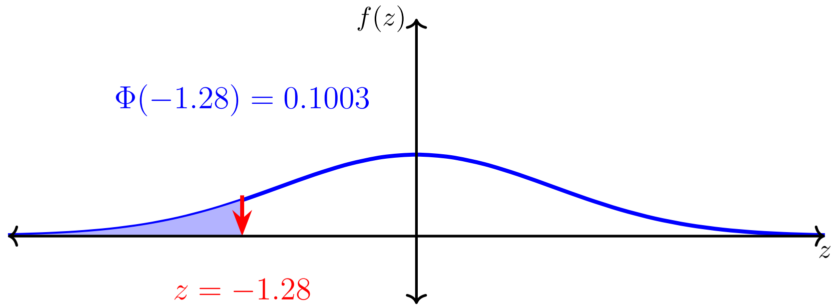
Scénario 1 : $P(Z \leq z)$ avec $z > 0$

- **Direct :** $P(Z \leq z) = \Phi(z)$
- **Exemple :** $P(Z \leq 1.64) = \Phi(1.64) = 0.9495$



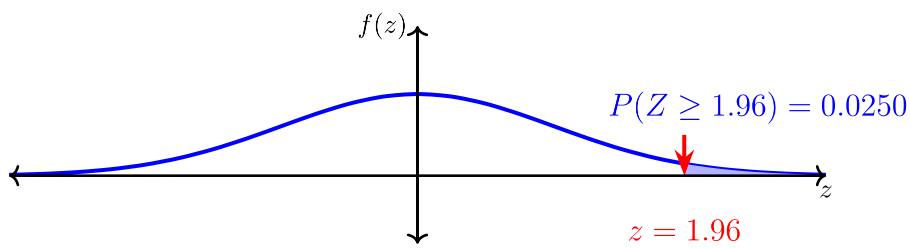
Scénario 2 : $P(Z \leq z)$ avec $z < 0$

- **Utiliser :** $P(Z \leq z) = \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$
- **Exemple :** $P(Z \leq -1.28) = \Phi(-1.28) = 1 - \Phi(1.28) = 1 - 0.8997 = 0.1003$



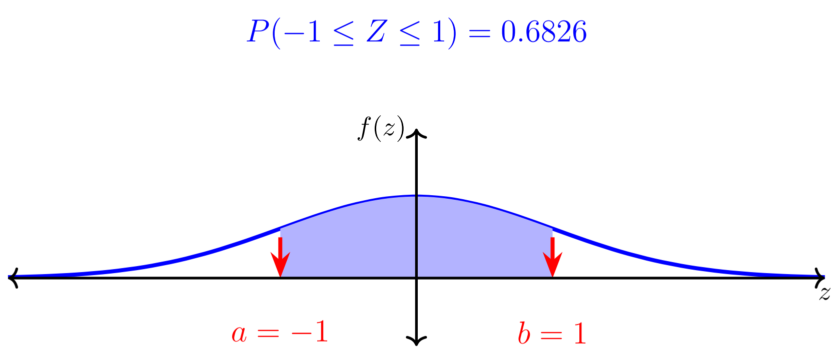
Scénario 3 : $P(Z \geq z)$

- **Formule :** $P(Z \geq z) = 1 - \Phi(z)$
- **Exemple :** $P(Z \geq 1.96) = 1 - \Phi(1.96) = 1 - 0.9750 = 0.0250$



Scénario 4 : $P(a \leq Z \leq b)$

- **Formule :** $P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- **Exemple :** $P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$



Transformation vers la Lois Normale Centrée Réduite

Formule de transformation

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Calcul de probabilités pour la loi normale

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ P(X \geq x) &= 1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ P(a \leq X \leq b) &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Exemple concret 1

Soit $X \sim \mathcal{N}(170, 15^2)$ (taille en cm). Calculer $P(X \leq 185)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 185) &= P\left(Z \leq \frac{185 - 170}{15}\right) \\ &= P(Z \leq 1) \\ &= \Phi(1) = 0.8413 \end{aligned}$$

Interprétation : 84.13% des personnes mesurent moins de 185 cm.

Exemple concret 2

Soit $X \sim \mathcal{N}(100, 10^2)$ (QI). Calculer $P(90 \leq X \leq 115)$.

$$\begin{aligned} P(90 \leq X \leq 115) &= \Phi\left(\frac{115 - 100}{10}\right) - \Phi\left(\frac{90 - 100}{10}\right) \\ &= \Phi(1.5) - \Phi(-1) \\ &= 0.9332 - 0.1587 = 0.7745 \end{aligned}$$

Interprétation : 77.45% des personnes ont un QI entre 90 et 115.

Valeurs Remarquables et Intervalles de Confiance

Valeurs usuelles

Probabilité	z_α	**Intervalle**	**Valeur** $\Phi(z)$
90%	1.645	$\mu \pm 1.645\sigma$	0.95
95%	1.960	$\mu \pm 1.960\sigma$	0.975
99%	2.576	$\mu \pm 2.576\sigma$	0.995
99.9%	3.291	$\mu \pm 3.291\sigma$	0.9995

Exemple : Pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

$$P(\mu - 1.96\sigma \leq X \leq \mu + 1.96\sigma) = 0.95$$

Recherche de quantiles

Pour trouver z_α tel que $P(Z \leq z_\alpha) = \alpha$:

- Si $\alpha > 0.5$, lire directement dans la table
- Si $\alpha < 0.5$, utiliser $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$

Exemple : Trouver $z_{0.95}$:

$$P(Z \leq z_{0.95}) = 0.95 \Rightarrow z_{0.95} = 1.645$$

Problème complet

Le poids des nouveau-nés suit $\mathcal{N}(3.2, 0.5^2)$ kg.

1. Quelle proportion pèse plus de 4 kg ?
2. Entre quels poids se situent 90% des nouveau-nés ?

Solution :

1. $P(X > 4) = 1 - \Phi\left(\frac{4-3.2}{0.5}\right) = 1 - \Phi(1.6) = 1 - 0.9452 = 0.0548$
2. On cherche a et b tels que $P(a \leq X \leq b) = 0.90$
   $z_{0.95} = 1.645$ (car 5% dans chaque queue)
   $a = 3.2 - 1.645 \times 0.5 = 2.3775$ kg
   $b = 3.2 + 1.645 \times 0.5 = 4.0225$ kg