Dénombrement

Abdallah Khemais

14/09/2025

1 Rappel sur les ensembles

Vocabulaires :

Notations	Vocabulaire	Notations	Vocabulaire
$\varnothing$	ensemble vide	$A \cup B$	réunion de A et B
Ω	ensemble plein	$A \cap B$	intersection de A et B
$\{\omega\}$	singleton de Ω	$A - B$	intersection de A et $\overline{B}$
A	partie de Ω	$A \cap B = \varnothing$	A et B sont disjoints
$\omega \in A$	ω appartient à A	$A \subseteq B$	A est inclus dans B
$\overline{A}$	complémentaire de A dans Ω	$A \times B$	produit cartésien de A et B

Exemple :

Ensemble	Définition	$A = \{a, b\}, B = \{b, c\}, \Omega = \{a, b, c\}$
$\overline{A}$	$\{x \in \Omega; x \notin A\}$	$\{c\}$
$A \cup B$	$\{x \in \Omega; x \in A$ ou $x \in B\}$	$\{a, b, c\}$
$A \cap B$	$\{x \in \Omega; x \in A$ et $x \in B\}$	$\{b\}$
$A - B$	$\{x \in \Omega; x \in A$ et $x \notin B\}$	$\{a\}$
$A \times B$	$\{(x, y); x \in A$ et $y \in B\}$	$\{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c)\}$

Opérations :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap B = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B),$$

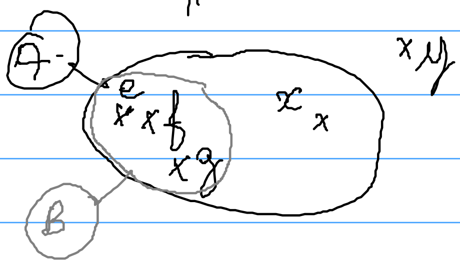
$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cup B = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cup B).$$

Théorie des ensembles :

déf :

Un ensemble est une collection d'objet(s) (sans ambiguïtés).

Axiome : Il existe un ensemble vide.



$x \in A$: x est un element de A

$y \notin A$

$B \subset A$: B est inclu dans A.

on dira que $X \subset Y$ ssi $(\forall x \in X \implies x \in Y)$

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$,

$1 \in E$ $\qquad \{1\} \subset E$

$F = \{\{1\}, \{1,2\}, \phi, \{3,4\}\}$

$\{1,2\} \in F$ $\qquad \{\phi\} \subset F$

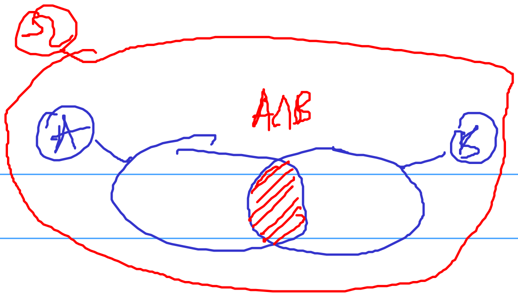
$E \cup F$

ou

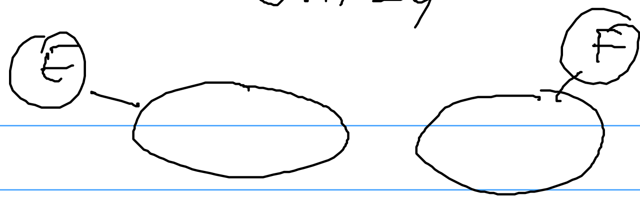
$E \cap F = \phi$

$A \cup B = \{x \in \Omega ; x \in A$ ou $x \in B\}$ $\qquad$ ou exclusif.

ou inclusif.



$E \cap F = \emptyset$

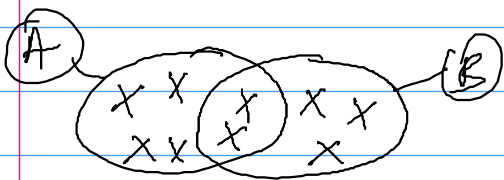


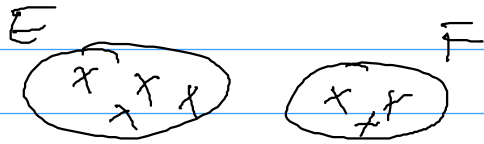
. $A \cap B = \{x \in \Omega \;;\; x \in A \text{ et } x \in B\}$.

si $E \cap F = \emptyset$ alors on dira que E et F sont disjoint

soit E un ensemble fini.

Card (E) = le nombre des éléments de E





$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

inclusif

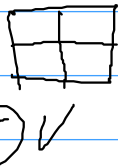
$|E \cup F| = |E| + |F|$

exclusif

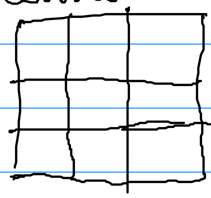
ou → exclusif → "+"

ou → inclusif → ×

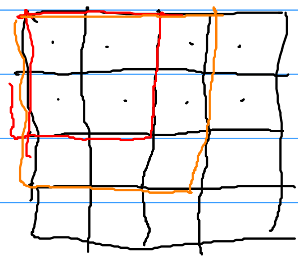
Ex : Combien y a-t-il de carré



5



14



??

1x1 → 16 $= 4^2$

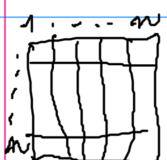
2x2 → 9 $= 3^2$

3x3 → 4 $= 2^2$

4x4 → 1 $= 1^2$

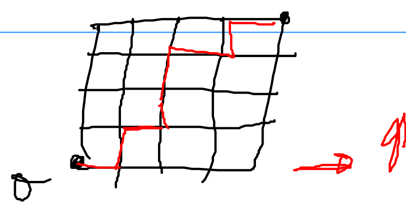
il y a : $1 + 4 + 9 + 16 = 30$

0 → n



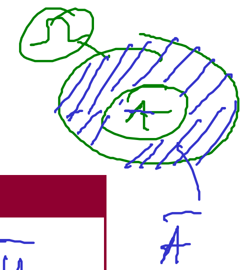
n×n ; n-1×n-1 ; 1×1

: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ →



$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$; $* \; A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$



Lois de Morgan :

$\overline{A} = \{x \in \Omega \,;\, x \notin A\}$

$\overline{\overline{x}} = x$

$\overline{\overline{A}} = A$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

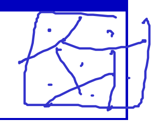
$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k, \quad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k.$$

$\overline{x . y} = \overline{x} + \overline{y}$

$\overline{x + y} = \overline{x} . \overline{y}$

Partition :

$(A_k)_{k \in \{1,\dots,n\}}$ partition de $\Omega \iff (A_k)_{k \in \{1,\dots,n\}}$ disjoints deux à deux et $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.



Cardinal :

Le nombre des éléments d'un ensemble fini A est appelé cardinal de A. Il est noté $\mathrm{Card}(A)$.

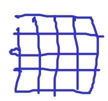
Formule du crible (à l'ordre 2) :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Propriétés :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Card}(\emptyset) = 0, \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B), \\
&\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}(A), \quad \mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(A \cap \overline{B}), \\
&\mathrm{Card}(A - B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B), \quad A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B), \\
&\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A)\mathrm{Card}(B).
\end{aligned}$$

2 Principes combinatoires



Principe additif :

On considère une situation qui nous amène à faire un choix parmi n cas différents et exclusifs : le cas 1, ou le cas 2. . . , ou le cas n. Si, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, il y a u_k possibilités pour le k-ème cas, alors le nombre total de possibilités est $\sum_{k=1}^{n} u_k$.

A_n^k , C_n^k , $n!$

* combien y-a-t-il de code à 5 chiffres :

E_1 E_2 E_3 E_4 E_5

$\boxed{10}\ \boxed{10}\ \boxed{10}\ \boxed{10}\ \boxed{10} \Rightarrow 10\times10\times10\times10\times10 = 10^5$ 100 000

et et et et

00000 … 99999 10^5

Principe multiplicatif :

On considère une situation conjuguant k étapes : une étape 1, et une étape 2. . . ., et une étape k. Si, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, il y a n_i possibilités pour la k-ème étape, alors le nombre total de possibilités est

$$\prod_{i=1}^{k} n_i.$$

et → Simi ??? ; Succ → $\times$

Principe du quotient

Le **principe du quotient** permet de compter en divisant quand plusieurs configurations différentes correspondent au même résultat final à cause de répétitions ou de symétries.

Liste, Arrangement, Permutation,Combinaison

Liste : Liste ordonnée d'éléments avec répétitions.
Arrangement : Liste ordonnée d'éléments sans répétition.
Permutation : Arrangement de n éléments parmi n.
Combinaison : Partie d'un ensemble ; l'ordre n'est pas pris en compte.

Exemple :

choix de 2 éléments parmi $\Omega = \{a, b, c\}$:

Choix	avec répétition	sans répétition
avec ordre	I Listes : (a,a) (a,b) (a,c) (b,a) (b,b) (b,c) (c,a) (c,b) (c,c) $\boxed{9} = 3^2$	II Arrangements : (a,b) (a,c) (b,a) (b,c) (c,a) (c,b) $\boxed{6} = 3\times2$
sans ordre	III Combinaisons avec répétitions : $[a,a]$ $[a,b]$ $[a,c]$ $[b,b]$ $[b,c]$ $[c,c]$ $\boxed{6}$	IV Combinaisons : $\{a,b\}$ $\{a,c\}$ $\{b,c\}$ 3 $C_3^2 = \binom{3}{2}$

EX

M,A,T,H — 2 lettres

MA MT MH | AM AT AH | TA TM TH

$A_n^k =$ 12

E_1 E_2: $\boxed{4}\ \boxed{3}$ et $4\times3=12$

Exemple :

Les permutations des éléments des 3 éléments de Ω sont : (a, b, c), (b, a, c), (a, c, b), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Il y en a 6.

Nombre de Liste

Le nombre de listes possibles de k éléments parmi n est n^k.

Factorielle :

On appelle factorielle n l'entier :

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n = \prod_{i=1}^{n} i.$$

On pose $0! = 1$.

Nombre de permutations :

Le nombre de permutations de n éléments est $n!$.

3 Applications des principes

Nombre d'arrangements :

On appelle nombre d'arrangements "k parmi n" l'entier :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

C'est le nombre d'arrangements possibles de k éléments parmi n.

Coefficient binomial :

On appelle coefficient binomial "k parmi n" l'entier :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Si $k \notin \{0, \ldots, n\}$, on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Nombre de combinaisons :

Le nombre de combinaisons possibles de k éléments parmi n est $\binom{n}{k}$.

Formule des arrangements avec objets identiques

Arrangement avec répétition

Soit un ensemble de N objets où :

— n_1 objets sont identiques de type 1

— n_2 objets sont identiques de type 2

— $\vdots$

— n_k objets sont identiques de type k

avec $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Formule

Formule principale Le nombre d'arrangements distincts est donné par :

$$A = \frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Notation produit

Avec notation produit

$$A = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$$

Notation multinomiale

Avec coefficient multinomial

$$A = \binom{N}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Exemple

Pour $N = 5$ avec $n_1 = 2$ (objets A), $n_2 = 2$ (objets B), $n_3 = 1$ (objet C) :

$$A = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{120}{2 \cdot 2 \cdot 1} = 30$$

Application aux Anagrammes

Anagramme

Une **anagramme** est une permutation des lettres d'un mot ou d'une phrase qui forme un nouveau mot ou une nouvelle phrase, en utilisant **toutes les lettres exactement une fois**.

Caractéristiques fondamentales

- **Même multiset de lettres** : Les deux mots doivent contenir exactement les mêmes lettres
- **Ordre différent** : L'ordre des lettres doit être modifié
- **Longueur identique** : Le nombre total de lettres reste le même

Exemples classiques

CHIEN → NICHE
LOUPE → POULE
MARIE → AIMER
ORANGE → ONAGRE, ORGANE
CHÉRIE → ECHIRE, RÉCHIE

Approche mathématique et Formule

Le nombre d'anagrammes d'un mot de N lettres avec des répétitions est donné par le coefficient multinomial :

$$A = \frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = \binom{N}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

où :

- N : nombre total de lettres
- n_i : nombre d'occurrences de chaque lettre distincte
- k : nombre de lettres différentes

Cas particulier : toutes les lettres différentes

Si toutes les lettres sont distinctes ($n_i = 1$ pour tout i), la formule se simplifie :

$$A = N!$$

Exemple

Pour le mot "ABCD" (4 lettres différentes) :

$$A = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ anagrammes}$$

Cas général : avec répétitions

Quand certaines lettres se répètent, le nombre d'anagrammes diminue :

$$A = \frac{N!}{\prod n_i!}$$

Exemple

Pour le mot "BALLON" :
- B : 1 fois
- A : 1 fois
- L : 2 fois
- O : 1 fois
- N : 1 fois

$$A = \frac{6!}{1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{720}{2} = 360 \text{ anagrammes}$$

MISSISSIPPI

$$\begin{aligned} \text{Lettres : } & M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I \\ \text{Fréquence : } & M(1), I(4), S(4), P(2) \\ N &= 11 \\ A &= \frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{39\,916\,800}{24 \times 24 \times 2} = 34\,650 \end{aligned}$$

Remarque

Plus un mot contient de lettres répétées, moins il a d'anagrammes distincts. Les anagrammes représentent les **permutations avec répétition** d'un multiset.

4- Combinaisons avec répétition

Combinaisons avec répétition

Les **combinaisons avec répétition** permettent de compter le nombre de façons de choisir k objets parmi n types différents, avec la possibilité de sélectionner plusieurs fois le même type d'objet.

Formule

Le nombre de façons de choisir k objets parmi n types différents, avec la possibilité de sélectionner plusieurs fois le même type d'objet est donnée par :

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Cette formule correspond au nombre de combinaisons de k objets parmi n avec répétition autorisée.

Exemples d'application

1. **Choix de bonbons** : Dans un magasin proposant $n = 5$ parfums différents, le nombre de façons de choisir $k = 3$ bonbons (en pouvant prendre plusieurs fois le même parfum) est :

$$\binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35$$

2. **Composition de glaces** : Pour une glace avec $k = 2$ boules choisies parmi $n = 4$ parfums (répétition autorisée), le nombre de possibilités est :

$$\binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$$

3. **Solutions entières d'équations** : Le nombre de solutions entières non négatives de l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ est :

$$\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$$

où x_i représente le nombre d'occurrences du type i.

4. **Distributions identiques** : Répartir $k = 6$ livres identiques parmi $n = 4$ personnes (une personne peut recevoir plusieurs livres) :

$$\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = 84$$

Différence avec les combinaisons simples

— **Combinaisons simples** : Pas de répétition, ordre sans importance

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

— **Combinaisons avec répétition** : Répétition autorisée, ordre sans importance

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Interprétation combinatoire

Les combinaisons avec répétition correspondent au nombre de multisets de taille k formés à partir de n éléments différents, ou au nombre de solutions entières non négatives de l'équation $x_1+x_2+\cdots+x_n = k$.