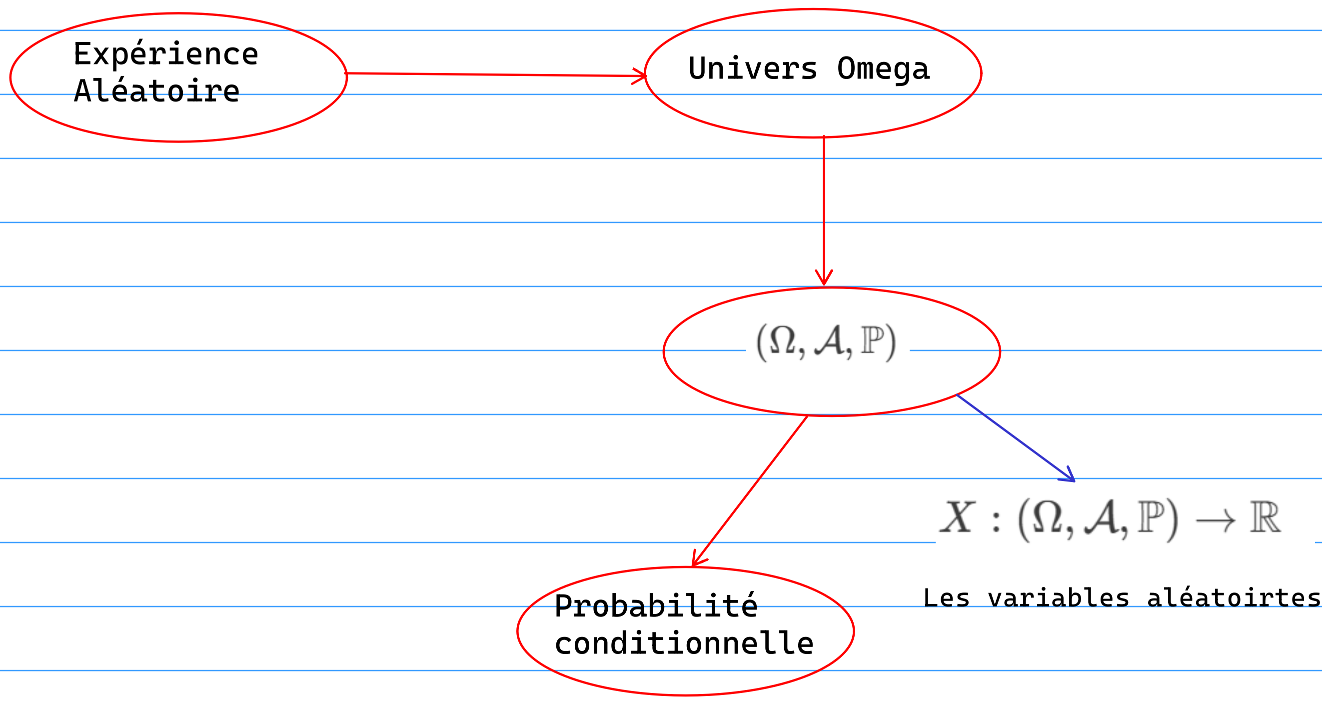
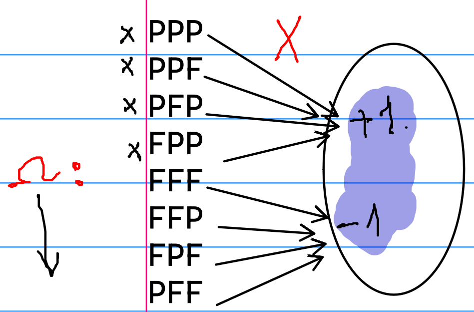
Rappel :



$\mathbb{P}(\text{"pile"}) = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(\text{"Face"}) = \frac{1}{2}$

On jette une pièce de monnaie 3 fois :
on définie la variable aléatoire X: qui represente
1 si on obtient plus de pile que de faces
-1 sinon



$X(\Omega)$: les valeurs prises par X :

$Card(\Omega) = 8$ $\quad X(\Omega) = \{-1, 1\}$

$\{X := 1\} \longrightarrow \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{PPP, PPF, PFP, FPP\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\{X := -1\} \longrightarrow \mathbb{P}(X=-1) = \ldots = \frac{1}{2}$

$i \in X(\Omega)$	-1	1	T
$\mathbb{P}(X=i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

la loi de X

pmf

$f_X(-1) = \frac{1}{2}$ $\quad f_X(1) = \frac{1}{2}$

Probabilités - Chapitre 1

Abdallah K

5 Variables Aléatoires

Variable aléatoire

$(\mathcal{A}$, une Tribu de Ω

Une variable aléatoire est une fonction d'un espace d'échantillonnage S dans l'ensemble des nombres réels.
Si S est l'espace d'échantillonnage et X une variable aléatoire, alors :

$$X : S \to \mathbb{R}$$

Exemples de variables aléatoires

Expérience	**Variable aléatoire**
Lancer deux dés	X = somme des nombres
Lancer une pièce 25 fois	X = nombre de faces dans 25 lancers
Appliquer différentes quantités d'engrais à des plants de maïs	X = rendement/acre :
Sondage d'opinion (50 personnes)	X = nombre de "oui"

Fonction de probabilité induite := loi de probabilité := pmf probability mass function

Soit $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ un espace d'échantillonnage avec une fonction de probabilité P, et X une variable aléatoire de range $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_m\}$. La fonction de probabilité induite P_X sur $\mathcal{X}$ est définie par :

$$P_X(X = x_i) = P(\{s_j \in S : X(s_j) = x_i\})$$

On note simplement $P(X = x_i)$ plutôt que $P_X(X = x_i)$.

Exemple 1.4.3 : Trois lancers de pièce-II

Face ← H: Head T: Tail

Considérons l'expérience de lancer une pièce équilibrée trois fois. Soit X le nombre de faces obtenues.

s	HHH	HHT	HTH	THH	TTH	THT	HTT	TTT
$X(s)$	3	2	2	2	1	1	1	0

La fonction de probabilité induite sur $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$ est : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

variable

Par exemple : $P(X = 1) = P(\{HTT, THT, TTH\}) = \frac{3}{8}$.

evenement calcul

Chaine binaire de longueur 50 : $\longrightarrow \underbrace{\square\square \qquad\qquad \square}_{50}$

Exemple 1.4.4 : Distribution d'une variable aléatoire

Soit S l'ensemble des 2^{50} chaînes de 50 bits (0 et 1), X = nombre de 1, et $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \ldots, 50\}$. Si chaque chaîne est équiprobable : $X(\Omega) = \{0, \ldots, 50\}$

$$P(X = 27) = \frac{\text{nombre de chaînes avec 27 uns}}{\text{nombre total de chaînes}} = \frac{\binom{50}{27}}{2^{50}}$$

27 "1"
23 "0"
$\frac{50!}{23! \times 27!} = \binom{50}{27} = \binom{50}{23}$

En général, pour tout $i \in \mathcal{X}$:

$\mathcal{X} = X(\Omega)$

$$\boxed{P(X = i) = \frac{\binom{50}{i}}{2^{50}}} \quad \square$$

la loi de X

6 Fonctions de Répartition

Fonction de répartition (cdf) : DataCamp

La fonction de répartition cumulative d'une variable aléatoire X, notée $F_X(x)$, est définie par :

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Théorème 1.5.3 : Conditions pour une fonction de répartition

Une fonction $F(x)$ est une fonction de répartition si et seulement si :

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $F(x)$ est une fonction non décroissante de x ↗
- $F(x)$ est continue à droite : $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

Exemple 1.5.4 : Lancer jusqu'à obtenir face

Supposons qu'on lance une pièce jusqu'à obtenir face. Soit X le nombre de lancers nécessaires, avec p la probabilité d'obtenir face. $p \in]0;1[$

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \ldots$$

$\omega := PPPF \longrightarrow X(\omega) = 4$
$\omega := F \longrightarrow X(\omega) = 1$
$\omega := \underbrace{P \qquad}_{100} PF \longrightarrow X(\omega) = 101$

La fonction de répartition est :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{x} (1 - p)^{i-1}p = 1 - (1 - p)^x, \quad x = 1, 2, \ldots$$

$X(\Omega) = \{1, 2, \ldots, \infty\}$

$P(\text{"Pile"}) = 1 - p$
$P(\text{"Face"}) = p$

$k \geq 1$:

$\mathbb{P}(X = k) = \overbrace{(1-p) \cdots (1-p)}\, p$
$= (1-p)^{k-1} \cdot p \qquad k \geq 1$

1 2 . . . . . . k−1 k
$\underbrace{P\ P \ldots\ldots P}$ F
k−1 pile suivi de F

1 . 1 . . . k . . . ∞
$(1-p)^{k-1} \cdot p$

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}\cdot p \qquad k=1 \dots \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) \overset{?}{=} 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}\, p$$

$$= p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}$$

$p \in]0;1[$

$q = (1-p) \in]0;1[$

$$= p \left\{ 1 + (1-p)^1 + (1-p)^2 + \dots\dots + (1-p)^n + \dots \right\}$$

$\times(1-p)$

$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1-\overset{\to 0}{q^{N+1}}}{1-q} \times 1 \xrightarrow[q<1]{N\to+\infty} \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

$$= p \times \frac{1}{p}$$

$$= 1$$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

$$= \sum_{x} \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

$$F_X(3.4) = \mathbb{P}(X \leqslant 3.4)$$

$$= \mathbb{P}(X=1 \text{ ou } X=2 \text{ ou } X=3)$$

$$= \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3)$$

$\mathbb{P}(X=1) = (1-p)^{1-1} \cdot p$

$= p = 0.3$

$\mathbb{P}(X=2) = (1-p)^{2-1} \cdot p$

$= (1-p) \cdot p$

$= 0{,}7 \times 0{,}3$

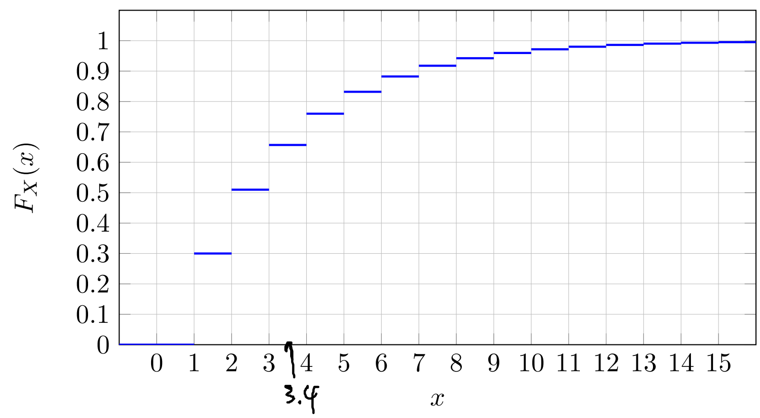
$= 0{,}21$

$\mathbb{P}(X=3) = (1-p)^2 \cdot p$

$= (0{,}7)^2 \times 0{,}3$

$\simeq 0.1470$

Fonction de répartition géométrique, $p = \underline{\underline{0.3}}$



$F_X(3{,}4) = 0.3 + 0{,}21 + 0.1470$

$\simeq 0{,}6570$

Exemple 1.5.5 : Fonction de répartition continue

La fonction de répartition logistique :

$$F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

est continue et satisfait les conditions du théorème 1.5.3.
Preuve :

- $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ car $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ car $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$
- $\frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} > 0$, donc F_X est croissante

Exemple 1.5.6 : Fonction de répartition avec sauts

Si on modifie la fonction logistique pour $0 < \epsilon < 1$:

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{1-\epsilon}{1+e^{-y}} & \text{si } y < 0 \\ \epsilon + \frac{(1-\epsilon)}{1+e^{-y}} & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

Alors F_Y a un saut de hauteur ϵ en $y = 0$ et est continue ailleurs.

Variables aléatoires continues et discrètes

- Une variable aléatoire X est **continue** si $F_X(x)$ est une fonction continue de x
- Une variable aléatoire X est **discrète** si $F_X(x)$ est une fonction en escalier de x

Variables aléatoires identiquement distribuées

Les variables aléatoires X et Y sont identiquement distribuées si pour tout ensemble $A \in \mathcal{B}^1$ (tribu borélienne) :

$$P(X \in A) = P(Y \in A)$$

Cela équivaut à $F_X(x) = F_Y(x)$ pour tout x.

Exemple 1.5.9 : Variables identiquement distribuées

Dans l'expérience de lancer une pièce trois fois :

- X = nombre de faces observées
- Y = nombre de piles observées

Les distributions de X et Y sont identiques :

$$P(X = k) = P(Y = k) \quad \text{pour } k = 0, 1, 2, 3$$

mais $X(s) \neq Y(s)$ pour tout point d'échantillon s.

7 Fonctions de Densité et de Masse

Fonction de masse (pmf)

La fonction de masse d'une variable aléatoire discrète X est donnée par :

$$f_X(x) = P(X = x) \quad \text{pour tout } x$$

Exemple 1.6.2 : Probabilités géométriques (pmf)

Pour la distribution géométrique :

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & \text{pour } x = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut calculer les probabilités d'intervalles :

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^{b} f_X(k) = \sum_{k=a}^{b} (1-p)^{k-1}p$$

En particulier :

$$P(X \leq b) = \sum_{k=1}^{b} f_X(k) = F_X(b)$$

Fonction de densité (pdf)

La fonction de densité d'une variable aléatoire continue X est la fonction $f_X(x)$ qui satisfait :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \quad \text{pour tout } x$$

Si $f_X(x)$ est continue, alors :

$$\frac{d}{dx}F_X(x) = f_X(x)$$

Théorème 1.6.5 : Conditions pour une pdf/pmf

Une fonction $f_X(x)$ est une pdf (ou pmf) d'une variable aléatoire X si et seulement si :

- $f_X(x) \geq 0$ pour tout x
- $\sum_x f_X(x) = 1$ (pmf) ou $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (pdf)

Exemple 1.6.4 : Probabilités logistiques

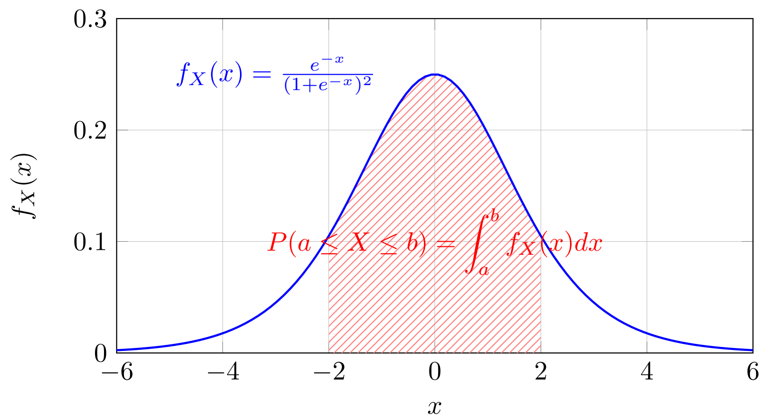
Pour la distribution logistique avec $F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, la densité est :

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

Les probabilités d'intervalles se calculent par :

$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Densité logistique $f_X(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$



Notation et conventions

- On utilise des lettres majuscules pour les variables aléatoires : X, Y, Z
- Les valeurs réalisées sont notées en minuscules : x, y, z
- $X \sim F_X(x)$ signifie "X suit la distribution $F_X(x)$"
- $X \sim f_X(x)$ signifie "X a pour densité/masse $f_X(x)$"
- $X \sim Y$ signifie que X et Y ont la même distribution
- Pour les variables continues : $P(X = x) = 0$ pour tout x

Calcul des probabilités

- **Cas discret** : $P(a \leq X \leq b) = \displaystyle\sum_{k=a}^{b} f_X(k)$
- **Cas continu** : $P(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$
- Pour les variables continues, les inégalités strictes et larges sont équivalentes :

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

8 Lois de Probabilité Usuelles

Lois Discrètes Usuelles

Nom	**Notation**	**PMF** $P(X = k)$	**Interprétation**
Bernoulli	$\mathcal{B}(p)$	$p^k(1-p)^{1-k}$ $k = 0, 1$	Succès/échec (1 essai) Ex: Pile ou Face
Binomiale	$\mathcal{B}(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \ldots, n$	Nombre de succès en n essais Ex: Nombre de faces en n lancers
Poisson	$\mathcal{P}(\lambda)$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k = 0, 1, 2, \ldots$	Nombre d'événements rares Ex: Nombre d'appels/heure
Géométrique	$\mathcal{G}(p)$	$(1-p)^{k-1}p$ $k = 1, 2, \ldots$	Nombre d'essais jusqu'au 1er succès Ex: Lancers jusqu'à la 1ère face
Binomiale Négative	$\mathcal{BN}(r, p)$	$\binom{k-1}{r-1} p^r(1-p)^{k-r}$ $k = r, r+1, \ldots$	Nombre d'essais jusqu'au r^e succès Ex: Lancers jusqu'à la 3ème face

Lois Continues Usuelles

Nom	Notation	PDF $f_X(x)$	Interprétation
Uniforme	$\mathcal{U}(a,b)$	$\frac{1}{b-a}$ $x \in [a,b]$	Équiprobabilité sur $[a,b]$ Ex: Point aléatoire sur un segment
Exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$ $x \geq 0$	Temps entre événements rares Ex: Durée de vie d'un composant
Normale	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $x \in \mathbb{R}$	Phénomènes naturels, erreurs Ex: Taille, QI, mesures
Gamma	$\Gamma(\alpha, \beta)$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ $x > 0$	Temps jusqu'au k^e événement Généralisation de l'exponentielle
Beta	$\mathcal{B}(\alpha, \beta)$	$\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}$ $x \in [0,1]$	Proportion, probabilité Ex: Taux de succès inconnu

Relations entre Lois

- **Bernoulli → Binomiale** : $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$ si $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ i.i.d.
- **Exponentielle → Gamma** : $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n,\lambda)$ si $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$ i.i.d.
- **Binomiale → Poisson** : $\mathcal{B}(n,p) \xrightarrow[n\to\infty]{np=\lambda} \mathcal{P}(\lambda)$
- **Gamma → Normale** : $\Gamma(\alpha,\beta) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} \mathcal{N}(\alpha/\beta, \alpha/\beta^2)$

Exemple d'Application des Lois

Loi Binomiale : Sur 10 questions à choix multiple (4 options), probabilité d'avoir au moins 7 bonnes réponses en répondant au hasard :

$$X \sim \mathcal{B}(10, 0.25), \quad P(X \geq 7) = \sum_{k=7}^{10} \binom{10}{k} (0.25)^k (0.75)^{10-k}$$

Loi Exponentielle : Durée de vie moyenne d'une ampoule = 1000 heures, probabilité qu'elle dure plus de 1500 heures :

$$X \sim \mathcal{E}(1/1000), \quad P(X > 1500) = e^{-1500/1000} = e^{-1.5} \approx 0.223$$

Loi Normale : Taille moyenne des hommes = 175 cm, écart-type = 7 cm, probabilité qu'un homme mesure entre 170 et 180 cm :

$$X \sim \mathcal{N}(175, 49), \quad P(170 \leq X \leq 180) = \Phi\left(\frac{180-175}{7}\right) - \Phi\left(\frac{170-175}{7}\right)$$

Choix de la Loi Appropriée

- **Comptage d'événements** : Poisson (événements rares), Binomiale (succès/échecs)
- **Temps d'attente** : Exponentielle (1 événement), Gamma (k événements)
- **Mesures physiques** : Normale (phénomènes naturels)
- **Proportions** : Beta (probabilités inconnues)
- **Données bornées** : Uniforme (équiprobabilité)