## Exercice 1:

Une urne contient cinq boules, trois qui portent le numéro 1 et deux qui portent le numéro 2. On effectue deux tirages successifs sans remise dans cette urne. On appelle coïncidence le fait de tirer une boule de numéro $i$ au $i$-ème tirage, avec $i = 1, 2$.

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ qui représente le nombre de coïncidences observées
2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

T.S. SR

$T_1$ $T_2$

Tirage — Coïncidence

② ① → 0

① ① / ② ② → 1

① ② → 2

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. $\quad Card(\Omega) = A_5^2 = 5 \times 4 = 20$

$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}([2,1]) = \dfrac{A_2^1 \cdot A_3^1}{A_5^2}$

$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}([1,1] \text{ ou } [2,2]) = \dfrac{A_3^2}{A_5^2} + \dfrac{A_2^2}{A_5^2} = \dfrac{6}{20} + \dfrac{2}{20} = \dfrac{8}{20}$

$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}([1,2]) = \dfrac{A_3^1 \times A_2^1}{A_5^2} = \dfrac{6}{20}$

| $i$ | 0 | 1 | 2 | T |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=i)$ | $\frac{6}{20}$ | $\frac{8}{20}$ | $\frac{6}{20}$ | 1 |

2) $\mathbb{E}(X) = ?$ $\quad \mathbb{V}(X) = ?$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i \in X(\Omega)} i\,\mathbb{P}(X=i) = \underbrace{0 \times \frac{6}{20}}_{0} + \underbrace{1 \times \frac{8}{20}}_{8/20} + \underbrace{2 \times \frac{6}{20}}_{\frac{12}{20}}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 1}$$

what did you expect? $\quad$ Expectation

1 2 3 $\quad$ 1000000

2 1 . . $\quad$ 0

$\approx 0.98$

2) $\mathbb{V}(X) = \underbrace{\mathbb{E}(X^2)}_{?} - \underbrace{\mathbb{E}(X)}_{1}{}^2$

$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \frac{6}{20} + 1^2 \times \frac{8}{20} + 2^2 \times \frac{6}{20} = \frac{32}{20} = \frac{8}{5} = 1{,}6$ $\quad$ (8/20, 24/20)

$\mathbb{V}(X) = 1.6 - 1^2 = 0{,}6 \longrightarrow \sigma(X) = \sqrt{0{,}6} \approx 0{,}77\ldots$

Succé, Echec

$p = \mathbb{P}(\text{Succé})$

$1-p = \mathbb{P}(\text{Echec})$ :

| Loi | Espérance | Variance | Écart-type |
|---|---|---|---|
| Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ | $p$ | $p(1-p)$ | $\sqrt{p(1-p)}$ |
| Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ | $np$ | $np(1-p)$ | $\sqrt{np(1-p)}$ |
| Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ | $\boxed{\lambda}$ | $\boxed{\lambda}$ | $\sqrt{\lambda}$ |
| Géométrique $\mathcal{G}(p)$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{1-p}{p^2}$ | $\frac{\sqrt{1-p}}{p}$ |
| Uniforme $\mathcal{U}\{a,b\}$ | $\frac{a+b}{2}$ | $\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$ | $\sqrt{\frac{(b-a+1)^2-1}{12}}$ |

$X \sim \mathcal{B}(n,p)$

$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$X \sim \text{Geom}(p)$

$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

premier Succé

Binomiale : loi de bernouilli répétée n fois d'une manière indépendente
Poisson e paramètre lambda : Binomiale n ⟶ l'infini

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ : $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

: nombre de succé dans une unité de temps d'arrivée.

$\mathbb{E}(X) = \lambda$

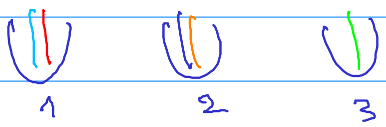
Ex

On place 5 stylos de couleurs différentes dans 3 boites numérotées 1,2,3

Soit $\boxed{X}$ la variable aléatoire qui représente :
le nombre de stylo dans la première boite.

1) Donner la loi de X.
2) Calculer son espérance et sa variance.

S1 S2 S3 S4 S5




$X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$. $\text{Card}(\Omega) = 3^5$

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X=i)$ | $\frac{2^5}{3^5}$ | $\frac{\cdot}{3^5}$ | $\frac{}{3^5}$ | $\frac{}{3^5}$ | $\frac{}{3^5}$ | $\frac{}{3^5}$ | |

$\mathbb{P}(X=0) = \frac{2^5}{3^5}$ ; $\mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{5}{1} 2^4}{3^5}$

$\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot 2^3}{3^5}$ ; $\mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{5}{3} \cdot 2^2}{3^5}$ ; $\mathbb{P}(X=4) = \frac{\binom{5}{4} 2^1}{3^5}$

$$\mathbb{P}(X=5) = \frac{1}{3^5}$$

2) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{5} i\,\mathbb{P}(X=i) = 0.\frac{2^5}{3^5} + 1\times\frac{C_5^1 2^4}{3^5} + 2\frac{C_5^2\, 2^3}{3^5} + 3\times\frac{C_5^3\, 2^2}{3^5} + 4.\frac{C_5^4\, 2^1}{3^5} + 5.\frac{1}{3^5}$$

$$= \dots = \frac{5}{3}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \dots - \frac{25}{9} = \dots = \frac{10}{9}.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2.\frac{2^5}{3^5} + 1^2\times\frac{C_5^1 2^4}{3^5} + 2^2 C_5^2\frac{2^3}{3^5} + 3^2\times\frac{C_5^3\, 2^2}{3^5} + 4^2.\frac{C_5^4\, 2^1}{3^5} + 5^2.\frac{1}{3^5} = \dots$$

$$X \sim B(n,p) \rightarrow \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = C_5^2\,\frac{2^3}{3^5} = \binom{5}{2}\frac{2^3}{3^3}\times\frac{1}{3^2} = \binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$X \sim B\left(5,\frac{1}{3}\right)$$

$$\mathbb{E}(X) = n\times p = 5\times\frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\mathbb{V}(X) = n\times p(1-p) = 5\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = 10/9$$