Principales lois discrètes

H.P.

- Les cinq premières lois présentées (Bernoulli, binomiale, géométrique, binomiale négative et hypergéométrique) servent à modéliser différentes quantités concernant la situation suivante : une expérience aléatoire est tentée pour laquelle deux résultats seulement sont possibles : un succès, qui peut être obtenu avec une probabilité π, ou un échec, qui survient avec probabilité $1 - \pi$, π étant un nombre réel compris entre 0 et 1 inclusivement.

Loi de Bernoulli I

$\pi = \mathbb{P}(\text{"succè"}) = p$

- Une expérience aléatoire est tentée.
- Deux résultats sont possibles : un succès, qui peut être obtenu avec une probabilité π, ou un échec, qui survient avec probabilité $1 - \pi$, π étant un nombre réel compris entre 0 et 1 inclusivement.
- La variable aléatoire X, qui vaut 1 si un succès est observé et 0 sinon, est de loi de Bernoulli de paramètre π.

Loi de Bernoulli II

- Les valeurs prises par cette variable aléatoire sont

$$X(\Omega) = \mathcal{S}_X = \begin{cases} \{0,1\} & \text{si } 0 < \pi < 1, \\ 0 & \text{si } \pi = 0, \\ 1 & \text{si } \pi = 1. \end{cases}$$

- Sa fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} \pi^x (1-\pi)^{1-x} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \pi &= P[\text{obtenir un succès}] = P[X=1] = \pi^1 (1-\pi)^{1-1} \\ \text{et } 1-\pi &= P[\text{obtenir un échec}] = P[X=0] = \pi^0 (1-\pi)^{1-0}. \end{aligned}$$

$\pi = P(\text{"Succé"})$

Loi de Bernoulli III

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= 0f_X(0) + 1f_X(1) \\ &= 0\ \pi^0 (1-\pi)^{1-0} + 1\ \pi (1-\pi)^{1-1} \\ &= \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[X^2\right] &= 0f_X(0) + 1^2 f_X(1) \\ &= \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= \mathrm{E}\left[X^2\right] - (\mathrm{E}[X])^2 \\ &= \pi - \pi^2 \\ &= \pi(1-\pi). \end{aligned}$$

Binomiale I

- Une expérience aléatoire est tentée.
- Deux résultats sont possibles : un succès, qui peut être obtenu avec une probabilité π, ou un échec, qui survient avec probabilité $1 - \pi$, π étant un nombre réel compris entre 0 et 1 inclusivement.
- Cette expérience est répétée n fois, de façon indépendante.
- La variable aléatoire X, qui représente le nombre de succès obtenus au cours de ces n tentatives, est de loi binomiale de paramètres n et π.

Binomiale II

- Les valeurs prises par cette variable aléatoire sont

$$X(\Omega) = \mathcal{S}_X = \begin{cases} \{0, 1, \ldots, n\} & \text{si } 0 < \pi < 1, \\ 0 & \text{si } \pi = 0, \\ n & \text{si } \pi = 1. \end{cases}$$

Cas particulier

- Sa fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

où $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$.

- Rappelons que, par définition, $0! = 1$.

Binomiale III

- **Justification de la fonction de masse** :

Il y a 10 façon d'obtenir 3 succès lors de 5 tentatives :

ÉÉSSS, ÉSÉSS, ÉSSÉS, ÉSSSÉ
SÉÉSS, SÉSÉS, SÉSSÉ,
SSÉÉS, SSÉSÉ, SSSÉÉ.

$$
\begin{aligned}
& P\left[X=x\right] \\
= \quad & P\left[\text{obtenir } x \text{ succès et } n-x \text{ échec}\right] \\
= \quad & \underbrace{\frac{n!}{x!\,(n-x)!}}_{\substack{\text{nombre de façons} \\ \text{de disposer les } x \text{ succès} \\ \text{parmi les } n \text{ essais}}} \quad \underbrace{\pi^{x}}_{\substack{\text{probabilité d'obtenir} \\ x \text{ succès}}} \quad \underbrace{(1-\pi)^{n-x}}_{\substack{\text{probabilité d'obtenir} \\ n-x \text{ échecs}}} .
\end{aligned}
$$

Binomiale IV

- Si
$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si nous obtenons un succès au } i \text{ ième essai} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
alors X_1, ..., X_n est un ensemble de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes de loi Bernoulli(π).
- Nous pouvons constater que $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Binomiale V

- Pour cette raison,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] \quad \text{par la propriété (E1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \pi \\
&= n\pi.
\end{aligned}$$

Binomiale VI

- $$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left[X\right] &= \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left[X_i\right] \text{ par la propriété (V4)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \pi\left(1-\pi\right) \\ &= n\pi\left(1-\pi\right). \end{aligned}$$

$B(n, p)$ S : "obtenir 6" $P(S) = \frac{1}{6}$

Exemple I

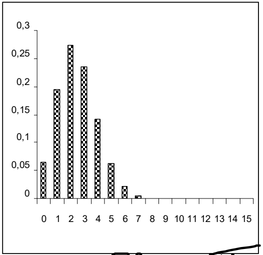
Loi binomiale

[• on lance un dé 15 fois : $X :=$ le nombre de 6 obtenus.]

- Le nombre X de $\boxed{6}$ obtenus en 15 lancers de dé est de loi binomiale$\left(15, \frac{1}{6}\right)$.

x	$f_X(x)$
0	$6,491 \times 10^{-2}$
1	$1,947 \times 10^{-1}$
2	$2,726 \times 10^{-1}$
3	$2,363 \times 10^{-1}$
4	$1,418 \times 10^{-1}$
5	$6,237 \times 10^{-2}$
	$\ldots$

Fonction de masse de X



$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} \simeq 1,4$

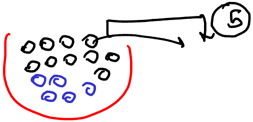
$E(X) = n \cdot p = \frac{15}{1} \times \frac{1}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

$$\mathrm{E}[X] = 2,5 \text{ et } \mathrm{Var}[X] = \frac{25}{12} \cong 2,0833.$$

$= n \cdot p(1-p)$

Exemple II

Loi binomiale



$\boxed{\frac{5}{15}}$

- Le nombre de personnes ayant les yeux bleus dans un échantillon aléatoire simple avec remise de taille 540 tiré dans une population donnée est de loi binomiale$(540, \pi)$ où π est la proportion d'individus ayant les yeux bleus dans la population.

donné !

Propriété
Loi binomiale

Rq (*) Hors programme.

- Si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes de loi binomiale(n_1, π) et binomiale(n_2, π) respectivement, alors $X_1 + X_2$ est de loi binomiale$(n_1 + n_2, \pi)$.

$\rightarrow X_1 \sim B(540, \underline{0{,}001})$ Yeux verts.

$X_2 \sim B(180, \underline{0{,}001})$

$X_1 + X_2 \sim B(\underline{\underline{720}}, 0{,}001)$

Géométrique I

- Une expérience aléatoire est tentée.
- Deux résultats sont possibles : un succès, qui peut être obtenu avec une probabilité π, ou un échec, qui survient avec probabilité $1 - \pi$, π étant un nombre réel compris entre 0 exclusivement et 1 inclusivement.
- Cette expérience est répétée de façon indépendante jusqu'à l'obtention d'un premier succès. Soit X le nombre d'essais requis.

Géométrique II

- Les valeurs prises par cette variable aléatoire sont

$$\mathcal{S}_X = \begin{cases} \{1, 2, 3, \ldots\} & \text{si } 0 < \pi < 1 \\ 1 & \text{si } \pi = 1 \end{cases}$$

- Sa fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} \pi (1-\pi)^{x-1} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Justification de la fonction de masse:

$$\begin{aligned} P[X = x] &= P\left[\text{Le résultat des } n \text{ essais est } \underbrace{\acute{E}\acute{E}\acute{E}\ldots\acute{E}}_{x-1 \text{ fois}} S\right] \\ &= (1-\pi)^{x-1}\,\pi. \end{aligned}$$

Les séries géométriques I

Theorem

Soit $S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$. *Si* $|a| < 1$ *alors*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-a}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} & S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n \\ \Rightarrow\quad & aS_n = a + a^2 + \ldots + a^{n+1} \\ \Rightarrow\quad & S_n - aS_n = 1 - a^{n+1} \\ \Rightarrow\quad & S_n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Les séries géométriques II

Theorem

Posons $T_n = 1 + 2a + 3a^2 + \ldots + na^{n-1}$. *Si* $|a| < 1$ *alors*

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

Preuve. Rappelons que $S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$.

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{d}{da} S_n \\ &= \frac{d}{da} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \\ &= \frac{1-(n+1)a^n + na^{n+1}}{(1-a)^2}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Les séries géométriques III

Theorem

Posons $U_n = 1 + 2^2 a + 3^2 a^2 + \ldots + n^2 a^{n-1}$. *Si* $|a| < 1$ *alors*

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1+a}{(1-a)^3}.$$

Preuve. Rappelons que

$$\begin{aligned} U_n &= 1 + 2^2 a + 3^2 a^2 + \ldots + n^2 a^{n-1} \\ T_n &= 1 + 2a + 3a^2 + \ldots + na^{n-1}. \\ \text{et } aT_n &= a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + na^n \end{aligned}$$

Les séries géométriques IV

$$
\begin{aligned}
& U_n \\
= \quad & \frac{d}{da}\left(aT_n\right) \\
= \quad & T_n + a\frac{d}{da}T_n \\
= \quad & \frac{1-(n+1)\,a^n + na^{n+1}}{(1-a)^2} + a\frac{d}{da}\left(\frac{1-(n+1)\,a^n + na^{n+1}}{(1-a)^2}\right) \\
= \quad & \frac{1+a-\left(n^2+2n+1\right)a^n + \left(2n^2+2n-1\right)a^{n+1} - a^{n+2}n^2}{(1-a)^3}.
\end{aligned}
$$

Les moments I

loi géométrique

Rappel : $T_n = 1 + 2a + \ldots + na^{n-1}$ et $\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{(1-a)^2}$.
Si $0 < \pi < 1$ alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{x=1}^{\infty} x f_X(x) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x\pi (1-\pi)^{x-1} \\
&= \pi \sum_{x=1}^{\infty} x (1-\pi)^{x-1} \\
&= \pi \left(1 + 2(1-\pi) + 3(1-\pi)^2 + \ldots\right) \\
&= \pi \frac{1}{(1-(1-\pi))^2} = \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}
$$

Les moments II

loi géométrique

Rappel : $U_n = 1 + 2^2 a + \ldots + n^2 a^{n-1}$ et $\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1+a}{(1-a)^3}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X^2\right] &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 f_X(x) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \pi (1-\pi)^{x-1} \\
&= \pi \sum_{x=1}^{\infty} x^2 (1-\pi)^{x-1} \\
&= \pi \left(1 + 2^2 (1-\pi) + 3^2 (1-\pi)^2 + \ldots\right) \\
&= \pi \frac{1 + (1-\pi)}{(1-(1-\pi))^3} \\
&= \frac{2-\pi}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Les moments III

loi géométrique

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2 \\ &= \frac{2-\pi}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} \\ &= \frac{1-\pi}{\pi^2}.\end{aligned}$$

$X \sim \mathrm{Geom}(p)$ $\quad P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad k \geq 1$

$\rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

$p = 1/3$

$p = 10\%$

$p = 0.01$: 50

$p = 0.1$ $\boxed{1}$

$\boxed{100}$

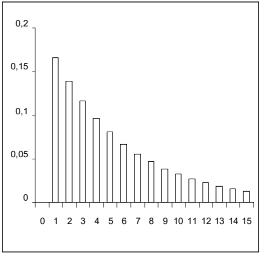
Exemple

Loi géométrique

Le nombre X de lancers de dé nécessaires à l'obtention de la face $\boxed{6}$ suit une loi géométrique de paramètre $\pi = \frac{1}{6}$.

x	$f_X(x)$
1	$1,667 \times 10^{-1}$
2	$1,389 \times 10^{-1}$
3	$1,157 \times 10^{-1}$
4	$9,645 \times 10^{-2}$
5	$8,038 \times 10^{-2}$
	...

Fonction de masse de X



$$\mathrm{E}[X] = 6 \text{ et } \mathrm{Var}[X] = 30.$$

Binomiale négative I

- Une expérience aléatoire est tentée.
- Deux résultats sont possibles : un succès, qui peut être obtenu avec une probabilité π, ou un échec, qui survient avec probabilité $1 - \pi$, π étant un nombre réel compris entre 0 exclusivement et 1 inclusivement.
- Cette expérience est répétée de façon indépendante jusqu'à l'obtention de n succès. Soit X le nombre d'essais requis.

0.01 : 100

500 H.

H.P

Binomiale négative II

- Les valeurs prises par cette variable aléatoire sont

$$\mathcal{S}_X = \begin{cases} \{n, n+1, \ldots\} & \text{si } 0 < \pi < 1 \\ n & \text{si } \pi = 1 \end{cases}$$

- Sa fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{n-1} \pi^n (1-\pi)^{x-n} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Binomiale négative III

- **Justification de la fonction de masse**

$$
\begin{aligned}
& P\left[X = x\right] \\
= \quad & P\left[\begin{array}{c}\text{il y a eu exactement } x \text{ essais,}\\ \text{le résultat du dernier essais est un succès}\\ \text{et parmi les } x-1 \text{ premières tentaitves,}\\ \text{il y a eu } n-1 \text{ succès.}\end{array}\right] \\
= \quad & \underbrace{\frac{(x-1)!}{(n-1)!\,(x-n)!}}_{\substack{\text{Nombre de façons d'obtenir}\\ n-1 \text{ succès en } x-1 \text{ essais}}} \quad \underbrace{\pi^n}_{\substack{\text{probabilité d'obtenir}\\ n \text{ succès}}} \quad \underbrace{(1-\pi)^{x-n}}_{\substack{\text{probabilité d'ontenir}\\ x-n \text{ échecs}}}.
\end{aligned}
$$

Binomiale négative IV

- Si X_i représente le nombre d'essais effectués après le $i-1$ ième succès afin d'obtenir le i ième succès alors X_1, ..., X_n est un ensemble de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes de loi Géométrique(π).
- Nous pouvons constater que

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Binomiale négative V

- Pour cette raison,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] \quad \text{par la propriété (E1)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi} \\
E(X) &= \frac{\boxed{n}}{\pi}.
\end{aligned}
$$

$n = 3$

$p = 0.01$

$E(X) = 300$

10
100
150

Binomiale négative VI

- En utilisant la propriété $(V4)$, nous établissons une expression pour la variance d'une variable aléatoire de loi binomiale négative :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left[X\right] &= \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\left[X_i\right] \quad \text{par la propriété (V4)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1-\pi}{\pi^2} \\
&= n\frac{1-\pi}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

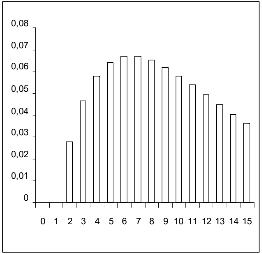
Exemple I

Binomiale négative

Le nombre X de lancers de dé nécessaires à l'obtention de deux fois la face $\boxed{6}$ suit une loi binomiale négative de paramètres $n = 2$ et $\pi = \frac{1}{6}$.

x	$f_X(x)$
2	$2,778 \times 10^{-2}$
3	$4,630 \times 10^{-2}$
4	$5,787 \times 10^{-2}$
5	$6,430 \times 10^{-2}$
6	$6,698 \times 10^{-2}$
	$\dots$

Fonction de masse de X



$$\mathrm{E}[X] = 12 \text{ et } \mathrm{Var}[X] = 60.$$

Hypergéométrique I

- La population est composée de N_1 éléments de type 1 et de N_2 éléments de type 2.
- Nous prélevons un échantillon aléatoire simple sans remise de taille n de cette population (n étant un entier positif inférieur ou égal à $N_1 + N_2$).
- La variable aléatoire X est le nombre d'éléments de type 1 dans l'échantillon.
- Cette situation ressemble à celle définie lors de la présentation de la loi binomiale. En effet, si nous définissons un succès comme étant le fait de choisir un élément de type 1, alors X serait de loi binomiale$\left(n, \frac{N_1}{N_1+N_2}\right)$ si l'échantillonnage était effectué **avec remise**.

Hypergéométrique II

- Dans le cas d'un échantillonnage **sans remise**, le support de la variable X est

simultanément et sans remise.

$$\mathcal{S}_X = \{x \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \max\{0, n - N_2\} \leq x \leq \min\{n, N_1\}\}.$$

  - En effet, s'il y a moins d'éléments de type 1 dans la population que d'éléments dans l'échantillon $(n > N_1)$, alors il ne nous est pas possible d'obtenir plus de N_1 succès. C'est pourquoi $x \leq \min\{n, N_1\}$.
  - S'il y a moins d'éléments de type 2 dans la population que d'éléments dans l'échantillon $(n > N_2)$, alors il ne nous est pas possible d'obtenir plus de N_2 échecs. Comme le nombre d'échecs est n moins le nombre de succès, alors

$$\begin{aligned} & n - x \leq \min\{n, N_2\} \\ \Leftrightarrow \quad & -n + x \geq -\min\{n, N_2\} = \max\{-n, -N_2\} \\ \Leftrightarrow \quad & x \geq n + \max\{-n, -N_2\} = \max\{0, n - N_2\}. \end{aligned}$$

Hypergéométrique III

- La fonction de masse est

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \begin{cases} \dfrac{\begin{pmatrix} N_1 \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_2 \\ n-x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N_1+N_2 \\ n \end{pmatrix}} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{N_1!N_2!n!(N_1+N_2-n)!}{x!(N_1-x)!(n-x)!(N_2-n+x)!(N_1+N_2)!} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Hypergéométrique IV

- Il est possible de montrer que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= n\frac{N_1}{N_1+N_2} \text{ et} \\ \mathrm{Var}[X] &= n\frac{N_1}{N_1+N_2}\,\frac{N_2}{N_1+N_2}\,\frac{N_1+N_2-n}{N_1+N_2-1}. \end{aligned}$$

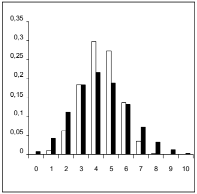
Exemple I

Hypergéométrique

- Un échantillon aléatoire simple sans remise de taille 20 est sélectionné dans une classe composée de 8 filles et 29 garçons.
- Le nombre X de filles présentes dans l'échantillon suit une loi hypergéométrique de paramètres $n = 20$ et $N_1 = 8$ et $N_2 = 29$.
- Pour fins de comparaison, nous avons aussi représenté la distribution d'une variable aléatoire Y de loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $\pi = \frac{8}{37}$.

x	$f_X(x)$ (blanc)	$f_Y(x)$ (noir)
0	$6,2966 \times 10^{-4}$	$7,6547 \times 10^{-3}$
1	$1,0075 \times 10^{-2}$	$4,2233 \times 10^{-2}$
2	$6,0905 \times 10^{-2}$	$1,1068 \times 10^{-1}$
3	$1,8272 \times 10^{-1}$	$1,8319 \times 10^{-1}$
4	$2,9867 \times 10^{-1}$	$2,1478 \times 10^{-1}$
5	$2,7307 \times 10^{-1}$	$1,8960 \times 10^{-1}$
	...	...

Fcts de masse de X et de Y



$\begin{cases} 29\,G \\ 8\,F \end{cases} \longrightarrow$ tirage $n = 20$ (simultané sous remise de 20 personnes)

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, 8\}$

X : le nombre de Fille dans l'échantillons

$$P(X = 2) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{29}{18}}{\binom{37}{20}}$$

$Card(\Omega) = \longrightarrow \binom{37}{20}$

X = Hyepergeom(20,8,29)

Cat₁ | Cat₂

N_1 | N_2 $\longrightarrow n$

simultané sous remise

X : le nombre d'échantillon de catégorie [1] dans le tirage :

$X \sim \text{HyperGeom}(n, N_1, N_2)$

n : taille de l'échantillon ; N_1 : Cat₁ ; N_2 : Cat₂

$1 \leq n \leq N_1 + N_2$

$$P(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}}{\binom{N_1+N_2}{n}}$$

on pose $N = N_1 + N_2$

5 | 15 $\longrightarrow \boxed{8}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{N_1}{N_1+N_2} = \frac{N_1}{N}$$

1% article défectueeux

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{N_1}{N_1+N_2} \times \frac{N_2}{N_1+N_2} \times \frac{N_1+N_2-n}{N_1+N_2-1}}$$

dans un groupe de 15 personne il y a 10 étudiants de l'isitcom
$\longrightarrow$ on choisit un échantillon de 10 personnes simultanément sans remise.
Soit X le nombre d'étudiant de l'isitcom aprés la séléction

$\longrightarrow$ Donner la loi de X $X(\Omega) = \{5, 6, 7, \dots, 10\}$
$\longrightarrow$ Calculer son espérence et sa variance

Cat₁ Cat₂

10 Isitcom | 5 Autres $\longrightarrow$ {10 personne}

$n = 10$
$N_1 = 10$
$N_2 = 5$

$X \sim H(n, N_1, N_2)$

$[X \sim H(10, 10, 5)]$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{N_1}{N_1+N_2} = \frac{10}{15} = 2/3$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{N_1}{N_1+N_2} \cdot \frac{N_2}{N_1+N_2} \cdot \frac{N_1+N_2-n}{N_1+N_2-1} \dots$$

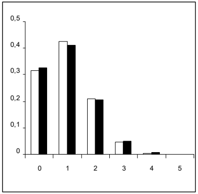
Exemple II

Hypergéométrique

- Le nombre X de cartes en ♠ obtenues dans une main de poker suit une loi Hypergéométrique de paramètres $n = 5$ et $N_1 = 13$ et $N_2 = 39$.
- Par comparaison, le nombre Y de cartes en ♠ obtenues en tirant cinq fois une carte avec remise dans un jeu de 52 cartes est de loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $\pi = \frac{13}{52}$.

x	$f_X(x)$ (blanc)	$f_Y(x)$ (noir)
0	$2,2153 \times 10^{-1}$	$2,373 \times 10^{-1}$
1	$4,1142 \times 10^{-1}$	$3,9551 \times 10^{-1}$
2	$2,7428 \times 10^{-1}$	$2,6367 \times 10^{-1}$
3	$8,1543 \times 10^{-2}$	$8,7891 \times 10^{-2}$
4	$1,0729 \times 10^{-2}$	$1,4648 \times 10^{-2}$
5	$4,952 \times 10^{-4}$	$9,7656 \times 10^{-4}$

Fonctions de masse de X et de Y



Remarque I

Hypergéométrique

- Plus le taux de sondage $\frac{n}{N_1+N_2}$ est petit, plus la loi hypergéométrique de paramètres (n, N_1, N_2) ressemble à la loi binomiale$\left(n, \frac{N_1}{N_1+N_2}\right)$.

Poisson I

- La loi de Poisson s'applique souvent à la description du comportement du nombre X d'événements qui se produisent dans un certain intervalle de temps.
- Le support d'une variable aléatoire de loi de Poisson est l'ensemble des entiers naturels augmenté du zéro.
- Sa fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & \text{si } x \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

  où λ est une constante positive.
- Nous verrons lors de l'étude des processus de Poisson comment se justifie cette expression pour la fonction de masse.

Le nombre de succé dans une unité de temp ou dimensionelle

⟶ le nombre de client qui arrive dans une boutique
dans une période d'une heure est noté X
sachant que le nombre moyen de client dans une période d'une heure est 1
⟶ le nombre de microbe dans un volume de 1 cm³ est noté Y
sachant en moyenne il y a 5 microbe dans un volume de 1 cm³
de parmatére lambda = la moyenne du nombre souhaité

X est une loi de poisson de paramètre 10
Y est une loi de poisson de paramètre 5

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \times \lambda^k}{k!}$$

" 20 clients arrivent dans la boutique "

$$\mathbb{P}(X=20) = e^{-10} \cdot \frac{10^{20}}{20!}$$

$\mathbb{P}$(« 30 microbes dans 10 cm³ »)

$$X_{1cm^3} \sim P(5) \longrightarrow X_{10} \sim P(5 \times 10) = P(50)$$

1l = 1000 cm³

$$\mathbb{P}(\underbrace{X_{10}}_{\sim P(50)} = 30) = e^{-50} \cdot \frac{50^{30}}{30!}$$

Poisson II

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}$$

Poisson III

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[X^2\right] &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(x-1)\,\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \right) \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} + \lambda \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \right) \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left(e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda} \right) \\
&= \lambda + \lambda^2
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{Var}\left[X\right] = \mathrm{E}\left[X^2\right] - \left(\mathrm{E}\left[X\right]\right)^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.
$$

$\mathbb{E}(X_{1j}) = \lambda$

$X_{1j} \sim \mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}(3)$

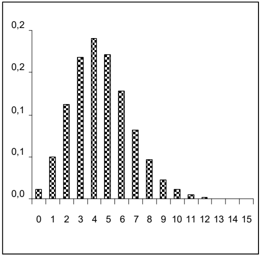
Exemple

Poisson

- S'il y a en moyenne trois naissances par jour dans un certain hôpital, alors le nombre X de naissances qui se produiront pendant les prochaines trente-six heures (1 journée et demie) à cet hôpital suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4,5$.

x	$f_X(x)$
0	$1,111 \times 10^{-2}$
1	$4,999 \times 10^{-2}$
2	$1,125 \times 10^{-1}$
3	$1,687 \times 10^{-1}$
4	$1,898 \times 10^{-1}$
5	$1,708 \times 10^{-1}$
6	$1,281 \times 10^{-1}$
...	...

Fonction de masse de X



la moyenne de naissance en 1J = 3

X_{1J} := le nombre de naissance en 1 journée

$X_{1J} \sim P(3)$

$$\mathbb{P}(X_{1J}=5) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^5}{5!}$$

$X \sim P(\lambda)$

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \longrightarrow \mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$$

$$X_{7j} \sim P(7\times 3) = P(21)$$

intervalle

$$\boxed{I} \longrightarrow P(\lambda)$$

$$\alpha I \longrightarrow P(\alpha\lambda)$$

$X_{1cm^3} \sim P(5)$ le nombre de microbe moyen dans $1\,cm^3$

$1L = 1000\,cm^3$

$X_{1L} \sim P(5000)$

Propriété

Poisson

- Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, la première étant de loi de Poisson(λ_1) et la deuxième étant distribuée selon une loi de Poisson(λ_2) , alors $X_1 + X_2$ est de loi de Poisson$(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Uniforme

- Une variable aléatoire X est dite de loi uniforme discrète de paramètres a et b si a et b sont des entiers tels que $a < b$ et que la fonction de masse de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} & \text{si } x \in \{a, a+1, a+2, \dots., b\} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire que chacune des modalités de la variable a la même probabilité de survenir.

Série I

La somme des n premiers entiers.

Theorem

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Preuve par induction. Lorsque $n = 1$, nous avons

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1\,(1+1)}{2}.$$

Série II

La somme des n premiers entiers.

Supposons maintenant qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$. Alors

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \quad \text{par hypothèse d'induction} \\
&= \frac{k+1}{2}(k+2) \,. \; \blacksquare
\end{aligned}
$$

Série I

La somme des n premiers entiers au carré.

Theorem

$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$..

Preuve par induction. Lorsque $n = 1$, nous avons

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1\,(1+1)\,(2\times 1+1)}{6}.$$

Série II

La somme des n premiers entiers au carré.

Supposons maintenant qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Alors

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \left(\sum_{i=1}^{k} i^2\right) + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \text{ par hyp. d'induction} \\
&= \frac{(k+1)}{6}\left(k(2k+1) + 6(k+1)\right) \\
&= \frac{(k+1)}{6}\left(2k^2 + 7k + 6\right) \\
&= \frac{(k+1)}{6}(k+2)\left(2(k+1)+1\right). \blacksquare
\end{aligned}
$$

Moments I

Loi uniforme

- Si Y est de loi uniforme$(0, c)$, c'est-à-dire que $a = 0$ et $b = c > 0$, alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[Y\right] &= \sum_{y=0}^{c} y \frac{1}{c+1} \\
&= \frac{1}{c+1} \sum_{y=0}^{c} y \\
&= \frac{1}{c+1} \frac{c\left(c+1\right)}{2} \\
&= \frac{c}{2}
\end{aligned}
$$

Moments II

Loi uniforme

- $$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[Y^2\right] &= \sum_{y=0}^{c} y^2 \frac{1}{c+1} \\
&= \frac{1}{c+1} \sum_{y=0}^{c} y^2 \\
&= \frac{1}{c+1} \frac{c\,(c+1)\,(2c+1)}{6} \\
&= \frac{c\,(2c+1)}{6} \\
\mathrm{Var}\left[Y\right] &= \frac{c\,(2c+1)}{6} - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c\,(c+2)}{12}
\end{aligned}$$

Moments III

Loi uniforme

- Il suffit de constater que $X = Y + a$, $c = b - a$ pour obtenir les premiers moments d'une variable aléatoire de loi uniforme discrète de paramètres a et b :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[Y] + a \\ &= \frac{b-a}{2} + a \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= \mathrm{Var}[Y + a] \\ &= \mathrm{Var}[Y] \\ &= \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}. \end{aligned}$$

Exemple

Uniforme

- Le nombre X de points observés sur la face supérieure d'un dé suit une loi uniforme de paramètres $a = 1$ et $b = 6$. $\mathrm{E}[X] = \frac{7}{2} = 3,5$ et $\mathrm{Var}[X] = \frac{35}{12} \cong 2,9167$.