Exercices - Espérance, Variance et Lois de Probabilité

Abdallah K

Exercices sur les Lois de Probabilité

Exercice

Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilité et si oui déterminer la fonction de répartition de la VAR associée à cette densité.

1. $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

2. $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{3}{2}e^{-t/2}\left(1 - e^{-t/2}\right)^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1}{2\ln 2}e^{-t}\ln(1 + e^t) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$ On pensera au changement de variable $u = e^{-t}$.

Correction Exercice 1

1. **Pour** $g(t)$:

   - Vérification que c'est une densité:

   $$\int_0^\infty 4te^{-2t}dt = 4\left[-\frac{te^{-2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{4}\right]_0^\infty = 4 \times \frac{1}{4} = 1$$

     Donc g est bien une densité.

   - Fonction de répartition pour $t \geq 0$:

   $$F(t) = \int_0^t 4se^{-2s}ds = 4\left[-\frac{se^{-2s}}{2} - \frac{e^{-2s}}{4}\right]_0^t = 1 - (2t+1)e^{-2t}$$

     Ainsi: $F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-(2t+1)e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

2. **Pour** $u(t)$:

   - Vérification:

   $$\int_0^\infty \frac{3}{2}e^{-t/2}(1-e^{-t/2})^2dt$$

     Changement de variable $u = e^{-t/2}$, $du = -\frac{1}{2}e^{-t/2}dt$:

   $$= 3\int_0^1 (1-u)^2du = 3\left[u - u^2 + \frac{u^3}{3}\right]_0^1 = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

     Donc u est une densité.

   - Fonction de répartition pour $t \geq 0$:

   $$F(t) = 3\int_0^{e^{-t/2}} (1-u)^2du = 3\left[u - u^2 + \frac{u^3}{3}\right]_0^{e^{-t/2}} = 3e^{-t/2} - 3e^{-t} + e^{-3t/2}$$

3. **Pour** $f(t)$:

   - Vérification avec $u = e^{-t}$, $du = -e^{-t}dt$:

   $$\int_0^\infty \frac{1}{2\ln 2}e^{-t}\ln(1+e^t)dt = \frac{1}{2\ln 2}\int_1^0 \ln\left(1+\frac{1}{u}\right)(-du)$$

   $$= \frac{1}{2\ln 2}\int_0^1 \ln\left(\frac{1+u}{u}\right)du = \frac{1}{2\ln 2}\int_0^1 [\ln(1+u) - \ln u]du$$

   $$= \frac{1}{2\ln 2}\left[((1+u)\ln(1+u) - u) - (u\ln u - u)\right]_0^1$$

   $$= \frac{1}{2\ln 2}\left[2\ln 2 - 1 - (0-1)\right] = 1$$

     Donc f est une densité.

   - Fonction de répartition pour $t \geq 0$:

   $$F(t) = \frac{1}{2\ln 2}\int_0^t e^{-s}\ln(1+e^s)ds$$

     Avec $u = e^{-s}$:

   $$F(t) = \frac{1}{2\ln 2}\int_1^{e^{-t}} \ln\left(1+\frac{1}{u}\right)(-du) = \frac{1}{2\ln 2}\int_{e^{-t}}^1 \ln\left(\frac{1+u}{u}\right)du$$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]1;2] \\ \dfrac{a}{\sqrt{t-1}} & \text{si } t \in]1;2] \end{cases}$

Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité

Correction Exercice 2

Pour que f soit une densité, on doit avoir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_1^2 \frac{a}{\sqrt{t-1}}dt = 1$$

Changement de variable $u = t - 1$, $du = dt$:

$$\int_1^2 \frac{a}{\sqrt{t-1}}dt = a\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}du = a\left[2\sqrt{u}\right]_0^1 = 2a$$

Donc $2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Exercice

Déterminer si les fonctions suivantes sont les fonctions de répartition d'une variable à densité. Si oui, en donner une densité.

1. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2 e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = 1 - \dfrac{1}{1+e^x}$

Correction Exercice 3

1. **Pour** $F(x)$:

   - Vérification des conditions:
     - $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1 - 0 = 1$
     - F est continue à droite
     - F est croissante (à vérifier par la dérivée)
   - Densité: pour $x \geq 0$:

$$f(x) = F'(x) = -\left[2\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}e^{-x} - \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 e^{-x}\right]$$

$$= \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 e^{-x} - \left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-x} = \frac{x}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-x}$$

   Donc $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

2. **Pour** $F(x) = 1 - \dfrac{1}{1+e^x}$:

   - Vérification des conditions:
     - $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 1 - 1 = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1 - 0 = 1$
     - F est continue et dérivable
     - F est croissante car $F'(x) > 0$
   - Densité:

$$f(x) = F'(x) = -\left(\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}\right) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Exercice

Soit X une VAR dont la fonction de répartition F est définie par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.

Correction Exercice 4

- F est continue sur $\mathbb{R}$ (vérification en $x = 0$: $F(0) = 1 - e^0 = 0$)
- F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
- Pour $x > 0$: $F'(x) = -\left(-xe^{-x^2/2}\right) = xe^{-x^2/2}$
- Pour $x < 0$: $F'(x) = 0$
- En $x = 0$, la dérivée à droite est 0, donc F est dérivable partout

  Ainsi, X est une variable à densité et une densité est:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exercice

Calculer, si elle existe, l'espérance de la variable X dont une densité est :

1. $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

2. $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{4\ln t}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$

Correction Exercice 5

1. **Pour** $g(t)$:

$$E[X] = \int_0^\infty t \cdot 4te^{-2t} dt = 4 \int_0^\infty t^2 e^{-2t} dt$$

On reconnaît une intégrale gamma: $\int_0^\infty t^n e^{-at} dt = \frac{n!}{a^{n+1}}$

$$E[X] = 4 \times \frac{2!}{2^3} = 4 \times \frac{2}{8} = 1$$

2. **Pour** $h(t)$:

$$E[X] = \int_1^\infty t \cdot \frac{4\ln t}{t^3} dt = 4 \int_1^\infty \frac{\ln t}{t^2} dt$$

Intégration par parties: $u = \ln t$, $dv = \frac{1}{t^2} dt$

$$= 4 \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^\infty + 4 \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = 0 + 4 \left[-\frac{1}{t} \right]_1^\infty = 4$$

Exercices Supplémentaires

Exercice

Soit X une variable aléatoire discrète non usuelle de loi:

$$P(X = k) = \frac{c}{k(k+1)(k+2)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

1. Déterminer la constante c pour que ce soit une loi de probabilité
2. Calculer $E[X]$ et $V(X)$

Correction Exercice 6

1. On utilise la décomposition en éléments simples:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$$

   La somme telescopique donne:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

   Donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{3}{4}$, et $c = \frac{4}{3}$

2. $E[X] = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$
   $E[X^2] = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)(k+2)} = \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right)$
   La série diverge, donc $V(X)$ n'existe pas.

Exercice

Une variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(100, 15^2)$.

1. Calculer $P(85 \leq X \leq 115)$
2. Calculer $P(X > 130)$
3. Déterminer a tel que $P(X \leq a) = 0.95$

Correction Exercice 7

1. $P(85 \leq X \leq 115) = P\left(\frac{85-100}{15} \leq Z \leq \frac{115-100}{15}\right) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0.6827$
2. $P(X > 130) = 1 - \Phi\left(\frac{130-100}{15}\right) = 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0.9772 = 0.0228$
3. On cherche a tel que $\Phi\left(\frac{a-100}{15}\right) = 0.95$
   $\frac{a-100}{15} = 1.645 \Rightarrow a = 100 + 15 \times 1.645 = 124.675$

Exercice

Le temps d'attente à un guichet suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.2$ (en minutes^{-1}).

1. Calculer la probabilité d'attendre plus de 10 minutes
2. Calculer le temps médian d'attente
3. Si une personne a déjà attendu 5 minutes, quelle est la probabilité qu'elle attende encore plus de 10 minutes?

Correction Exercice 8

1. $P(X > 10) = e^{-0.2\times 10} = e^{-2} \approx 0.1353$
2. On cherche m tel que $F(m) = 0.5$: $1 - e^{-0.2m} = 0.5 \Rightarrow m = -\frac{\ln 0.5}{0.2} \approx 3.47$ min
3. Par la propriété de non-vieillissement: $P(X > 15|X > 5) = P(X > 10) = e^{-2} \approx 0.1353$

Exercice

Un bus passe à un arrêt selon une loi uniforme entre 8h00 et 8h10.

1. Quelle est la probabilité qu'il passe entre 8h03 et 8h07?
2. Si une personne arrive à 8h05, quelle est la probabilité qu'elle attende moins de 2 minutes?
3. Calculer le temps d'attente moyen

Correction Exercice 9

1. $P(3 \leq X \leq 7) = \frac{7-3}{10} = 0.4$
2. Si elle arrive à 8h05, elle attend moins de 2 minutes si le bus passe entre 8h05 et 8h07: $P = \frac{2}{5} = 0.4$
3. Le temps d'attente moyen pour une arrivée aléatoire est $\frac{10}{2} = 5$ minutes

Exercices sur la Loi Normale

Exercice

Une usine produit des tiges métalliques dont la longueur X suit une loi normale $\mathcal{N}(250, 4^2)$ en mm.

1. Calculer la probabilité qu'une tige mesure entre 248 et 252 mm
2. Déterminer la longueur L telle que 95% des tiges aient une longueur inférieure à L
3. Si on prélève 5 tiges indépendamment, quelle est la probabilité qu'au moins 4 mesurent plus de 248 mm?

Correction Exercice 10 - Loi Normale

1. $P(248 \leq X \leq 252) = P\left(\frac{248-250}{4} \leq Z \leq \frac{252-250}{4}\right) = P(-0.5 \leq Z \leq 0.5)$

$$= 2\Phi(0.5) - 1 \approx 2 \times 0.6915 - 1 = 0.3830$$

2. On cherche L tel que $P(X \leq L) = 0.95$

$$\Phi\left(\frac{L-250}{4}\right) = 0.95 \Rightarrow \frac{L-250}{4} = 1.645 \Rightarrow L = 250 + 4 \times 1.645 = 256.58 \text{ mm}$$

3. Soit Y le nombre de tiges mesurant plus de 248 mm parmi 5. $Y \sim \mathcal{B}(5, p)$ où:

$$p = P(X > 248) = 1 - \Phi\left(\frac{248-250}{4}\right) = 1 - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) \approx 0.6915$$

$$P(Y \geq 4) = P(Y = 4) + P(Y = 5) = \binom{5}{4}(0.6915)^4(0.3085) + (0.6915)^5 \approx 0.532$$

Exercice

Le QI d'une population suit une loi normale $\mathcal{N}(100, 15^2)$.

1. Quel pourcentage de la population a un QI supérieur à 130?
2. Déterminer l'intervalle symétrique autour de 100 contenant 90% de la population
3. Si on sélectionne 3 personnes au hasard, quelle est la probabilité qu'exactement 2 aient un QI entre 85 et 115?

Correction Exercice 11 - Loi Normale

1. $P(X > 130) = 1 - \Phi\left(\frac{130-100}{15}\right) = 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0.9772 = 0.0228$ (2.28%)
2. On cherche a tel que $P(100 - a \leq X \leq 100 + a) = 0.90$
$$P\left(-a/15 \leq Z \leq a/15\right) = 0.90 \Rightarrow 2\Phi(a/15) - 1 = 0.90 \Rightarrow \Phi(a/15) = 0.95$$
$$a/15 = 1.645 \Rightarrow a = 24.675 \Rightarrow \text{Intervalle: } [75.33, 124.67]$$
3. $p = P(85 \leq X \leq 115) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 0.6827$
$$P(2 \text{ sur } 3) = \binom{3}{2}(0.6827)^2(0.3173) \approx 0.444$$

Exercices sur la Loi Uniforme

Exercice

Un train passe à une station selon une loi uniforme entre 8h00 et 8h20.

1. Quelle est la probabilité qu'il passe entre 8h05 et 8h15?
2. Si un voyageur arrive à 8h10, quelle est la probabilité qu'il attende moins de 5 minutes?
3. Calculer l'espérance et l'écart-type du temps d'attente

Correction Exercice 12 - Loi Uniforme

$X \sim \mathcal{U}(0, 20)$ (temps en minutes après 8h00)

1. $P(5 \leq X \leq 15) = \frac{15-5}{20} = 0.5$
2. Arrivée à 8h10 ($t = 10$), attente < 5 min si $X \in [10, 15]$:
$$P = \frac{15 - 10}{10} = 0.5 \quad \text{(car conditionnel à } X \geq 10\text{)}$$
3. $E[X] = \frac{0+20}{2} = 10$ min, $\sigma(X) = \frac{20-0}{\sqrt{12}} = \frac{20}{2\sqrt{3}} \approx 5.77$ min

Exercice

On choisit un point au hasard sur un segment de longueur 10 cm.

1. Quelle est la probabilité que le point soit à moins de 2 cm d'une extrémité?
2. Quelle est la probabilité que le point soit à plus de 3 cm de chaque extrémité?
3. Calculer la distance moyenne du point à l'extrémité gauche

Correction Exercice 13 - Loi Uniforme

$X \sim \mathcal{U}(0, 10)$

1. $P(X < 2 \text{ ou } X > 8) = \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = 0.4$
2. $P(3 \leq X \leq 7) = \frac{7-3}{10} = 0.4$
3. $E[X] = \frac{0+10}{2} = 5$ cm

Exercice

La durée de vie d'un composant électronique suit une loi uniforme entre 1000 et 5000 heures.

1. Quelle est la probabilité que le composant dure plus de 3000 heures?
2. Calculer la durée de vie médiane
3. Si le composant a déjà fonctionné 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il dure encore plus de 2000 heures?

Correction Exercice 14 - Loi Uniforme

$X \sim \mathcal{U}(1000, 5000)$

1. $P(X > 3000) = \frac{5000-3000}{4000} = 0.5$
2. Médiane m: $\frac{m-1000}{4000} = 0.5 \Rightarrow m = 3000$ heures
3. $P(X > 4000 | X > 2000) = \frac{P(X>4000)}{P(X>2000)} = \frac{1000/4000}{3000/4000} = \frac{1}{3}$

Exercices Mixtes Normale et Exponentielle

Exercice

Le temps de réponse d'un serveur suit une loi exponentielle de moyenne 0.5 seconde.

1. Calculer la probabilité que le temps de réponse dépasse 1 seconde
2. Déterminer le temps t tel que 90% des requêtes aient un temps de réponse inférieur à t
3. Si on envoie 10 requêtes indépendantes, quelle est la probabilité qu'au plus 2 aient un temps > 1 seconde?

Correction Exercice 15 - Loi Exponentielle

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $E[X] = \frac{1}{\lambda} = 0.5 \Rightarrow \lambda = 2$

1. $P(X > 1) = e^{-2\times 1} = e^{-2} \approx 0.1353$
2. On cherche t tel que $F(t) = 0.90$: $1 - e^{-2t} = 0.90 \Rightarrow t = -\frac{\ln 0.1}{2} \approx 1.151$ s
3. Soit Y le nombre de requêtes avec temps $>$ 1s parmi 10. $Y \sim \mathcal{B}(10, 0.1353)$

$$P(Y \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} (0.1353)^k (0.8647)^{10-k} \approx 0.845$$

Exercice

Une machine produit des pièces dont le diamètre X suit $\mathcal{N}(50, 0.1^2)$ en mm. Une pièce est conforme si $49.8 \leq X \leq 50.2$.

1. Calculer le pourcentage de pièces conformes
2. Dans un lot de 100 pièces, quelle est la probabilité d'avoir au moins 95 pièces conformes?
3. Déterminer la variance maximale pour que 99% des pièces soient conformes

Correction Exercice 16 - Loi Normale

1. $P(\text{conforme}) = P(49.8 \leq X \leq 50.2) = P(-2 \leq Z \leq 2) = 2\Phi(2) - 1 \approx 0.9545$
2. Soit Y le nombre de pièces conformes parmi 100. $Y \sim \mathcal{B}(100, 0.9545)$

$$P(Y \geq 95) = \sum_{k=95}^{100} \binom{100}{k} (0.9545)^k (0.0455)^{100-k} \approx 0.892$$

3. On cherche σ tel que $P(49.8 \leq X \leq 50.2) = 0.99$

$$P\left(-\frac{0.2}{\sigma} \leq Z \leq \frac{0.2}{\sigma}\right) = 0.99 \Rightarrow 2\Phi(0.2/\sigma) - 1 = 0.99$$

$$\Phi(0.2/\sigma) = 0.995 \Rightarrow 0.2/\sigma = 2.576 \Rightarrow \sigma \approx 0.0776$$

Variance maximale: $\sigma^2 \approx 0.00602$