

# Exercices - Espérance, Variance et Lois de Probabilité

Abdallah K

## Exercices sur les Lois de Probabilité

### Exercice

Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilité et si oui déterminer la fonction de répartition de la VAR associée à cette densité.

$$1. \ g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$2. \ u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{3}{2}e^{-t/2} (1 - e^{-t/2})^2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$3. \ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{2\ln 2}e^{-t} \ln(1 + e^t) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

On pensera au changement de variable  $u = e^{-t}$ .

### Exercice

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin ]1; 2] \\ \frac{a}{\sqrt{t-1}} & \text{si } t \in ]1; 2] \end{cases}$

Déterminer  $a$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité

### Exercice

Déterminer si les fonctions suivantes sont les fonctions de répartition d'une variable à densité. Si oui, en donner une densité.

$$1. \ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$2. \ \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 1 - \frac{1}{1 + e^x}$$

### Exercice

Soit  $X$  une VAR dont la fonction de répartition  $F$  est définie par :  $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Montrer que  $X$  est une variable à densité et déterminer une densité de  $X$ .

### Exercice

Calculer, si elle existe, l'espérance de la variable  $X$  dont une densité est :

$$1. \ g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$2. \ h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{4 \ln t}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

## Exercices Supplémentaires

### Exercice

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète non usuelle de loi:

$$P(X = k) = \frac{c}{k(k+1)(k+2)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

1. Déterminer la constante  $c$  pour que ce soit une loi de probabilité
2. Calculer  $E[X]$  et  $V(X)$

### Exercice

Une variable  $X$  suit la loi normale  $\mathcal{N}(100, 15^2)$ .

1. Calculer  $P(85 \leq X \leq 115)$
2. Calculer  $P(X > 130)$
3. Déterminer  $a$  tel que  $P(X \leq a) = 0.95$

### Exercice

Le temps d'attente à un guichet suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 0.2$  (en minutes $^{-1}$ ).

1. Calculer la probabilité d'attendre plus de 10 minutes
2. Calculer le temps médian d'attente
3. Si une personne a déjà attendu 5 minutes, quelle est la probabilité qu'elle attende encore plus de 10 minutes?

### Exercice

Un bus passe à un arrêt selon une loi uniforme entre 8h00 et 8h10.

1. Quelle est la probabilité qu'il passe entre 8h03 et 8h07?
2. Si une personne arrive à 8h05, quelle est la probabilité qu'elle attende moins de 2 minutes?
3. Calculer le temps d'attente moyen

## Exercices sur la Loi Normale

### Exercice

Une usine produit des tiges métalliques dont la longueur  $X$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(250, 4^2)$  en mm.

1. Calculer la probabilité qu'une tige mesure entre 248 et 252 mm
2. Déterminer la longueur  $L$  telle que 95% des tiges aient une longueur inférieure à  $L$
3. Si on prélève 5 tiges indépendamment, quelle est la probabilité qu'au moins 4 mesurent plus de 248 mm?

### Exercice

Le QI d'une population suit une loi normale  $\mathcal{N}(100, 15^2)$ .

1. Quel pourcentage de la population a un QI supérieur à 130?
2. Déterminer l'intervalle symétrique autour de 100 contenant 90% de la population
3. Si on sélectionne 3 personnes au hasard, quelle est la probabilité qu'exactement 2 aient un QI entre 85 et 115?

## Exercices sur la Loi Uniforme

### Exercice

Un train passe à une station selon une loi uniforme entre 8h00 et 8h20.

1. Quelle est la probabilité qu'il passe entre 8h05 et 8h15?
2. Si un voyageur arrive à 8h10, quelle est la probabilité qu'il attende moins de 5 minutes?
3. Calculer l'espérance et l'écart-type du temps d'attente

### Exercice

On choisit un point au hasard sur un segment de longueur 10 cm.

1. Quelle est la probabilité que le point soit à moins de 2 cm d'une extrémité?
2. Quelle est la probabilité que le point soit à plus de 3 cm de chaque extrémité?
3. Calculer la distance moyenne du point à l'extrémité gauche

### Exercice

La durée de vie d'un composant électronique suit une loi uniforme entre 1000 et 5000 heures.

1. Quelle est la probabilité que le composant dure plus de 3000 heures?
2. Calculer la durée de vie médiane
3. Si le composant a déjà fonctionné 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il dure encore plus de 2000 heures?

## Exercices Mixtes Normale et Exponentielle

### Exercice

Le temps de réponse d'un serveur suit une loi exponentielle de moyenne 0.5 seconde.

1. Calculer la probabilité que le temps de réponse dépasse 1 seconde
2. Déterminer le temps  $t$  tel que 90% des requêtes aient un temps de réponse inférieur à  $t$
3. Si on envoie 10 requêtes indépendantes, quelle est la probabilité qu'au plus 2 aient un temps > 1 seconde?

## Exercice

Une machine produit des pièces dont le diamètre  $X$  suit  $\mathcal{N}(50, 0.1^2)$  en mm. Une pièce est conforme si  $49.8 \leq X \leq 50.2$ .

1. Calculer le pourcentage de pièces conformes
2. Dans un lot de 100 pièces, quelle est la probabilité d'avoir au moins 95 pièces conformes?
3. Déterminer la variance maximale pour que 99% des pièces soient conformes