Probabilités - Chapitre 1

Abdallah K

3 Espaces probabilisés et probabilités

Expérience aléatoire

On appelle expérience aléatoire toute expérience dont on connaît parfaitement les conditions mais dont on ne peut pas prévoir l'issue. Elle est notée $\mathcal{E}$.

Univers

On appelle univers d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ l'ensemble des issues possibles. Un univers est noté Ω.

Événement

On appelle événement toute partie de l'univers Ω. Les événements sont notés par des lettres majuscules : $A, B, C \dots$
On dit qu'un événement A se réalise (ou est réalisé) lors d'une expérience aléatoire si et seulement si l'issue de cette expérience aléatoire appartient à A.

Vocabulaire des événements

Notation	**Lecture**	**Vocabulaire**
$\emptyset$	-	événement impossible
Ω	grand omega	univers (ou événement certain)
ω	omega	issue
$\{\omega\}$	singleton omega	événement élémentaire
A	-	événement
$\omega \in A$	omega dans A	ω est une réalisation possible de A
$\overline{A}$	A barre	événement contraire de A
$A \cup B$	A union B	réalisation de A, ou B, ou les deux
$A \cap B$	A inter B	réalisation de A et B
$A - B$	A privé de B	réalisation de A et $\overline{B}$
$A \cap B = \emptyset$	-	A et B sont incompatibles
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B

Toutes les opérations vues sur les ensembles sont aussi valables pour les événements. En particulier, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} =$ "ni A, ni B se réalise" et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Système complet d'événements

$(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ forme un système complet d'événements $\Leftrightarrow$

$$(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}} \text{ sont incompatibles deux à deux et } \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega.$$

Tribu

On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu de l'univers Ω si, et seulement si,

- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$,
- pour toute famille d'événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k \in \mathcal{A}$, on a $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Si Ω est fini ou infini dénombrable, on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (l'ensemble des parties de Ω).

Probabilité $\mathbb{P}$

On appelle probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ telle que :

- pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$,
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
- pour toute suite d'événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ incompatibles deux à deux,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Si Ω est fini, on peut remplacer le dernier point par : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
Le réel $\mathbb{P}(A)$, prononcer "P de A", est la probabilité que l'événement A se réalise.

Probabilité sur un univers dénombrable

Soient Ω un univers fini ou infini dénombrable (comme, par exemple, $\Omega = \mathbb{N}$), et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Si l'application $\mathbb{Q} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ vérifie :

- pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{Q}(\{\omega\}) \geq 0$,
- $\sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{Q}(\{\omega\}) = 1$,
- pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{Q}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{Q}(\{\omega\})$,

alors $\mathbb{Q}$ est une probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Espace probabilisé

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

Propriétés des probabilités

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\emptyset) = 0,\\
&A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),\\
&\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A),\\
&\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}),\\
&A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).
\end{aligned}$$

Formule d'inclusion-exclusion (2 termes)

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Formule d'inclusion-exclusion (3 termes)

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Formule d'inclusion-exclusion (n termes)

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in U_k} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right),$$

où $U_k = \{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k; \quad i_1 < \dots < i_k\}$.

Cas particuliers et inégalités

- $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ incompatibles deux à deux $\Rightarrow$
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$
- On a toujours
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$
- Propriétés de limite monotone :
$$A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$
$$A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Équiprobabilité

Si aucun événement élémentaire n'a plus de chance de se réaliser que les autres, on dit qu'il y a équiprobabilité.

Probabilité uniforme

Si Ω est fini et qu'il y a équiprobabilité, alors on peut considérer l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, où $\mathbb{P}$ désigne la probabilité uniforme définie par
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}, \quad A \in \mathcal{A}.$$
Autrement écrit, on a $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre d'événements élémentaires formant } A}{\text{Nombre d'événements élémentaires formant } \Omega}$.

4 Probabilités conditionnelles et indépendance

Probabilité conditionnelle

L'application $\mathbb{P}_B : A \to [0,1]$ définie par
$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad A \in \mathcal{A},$$
est une probabilité.
Le réel $\mathbb{P}_B(A)$, prononcer "P de A sachant B", est la probabilité que l'événement A se réalise sachant que l'événement B est réalisé (avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$).

Retournement du conditionnement

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = c\mathbb{P}_A(B), \quad \text{avec } c = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Formule des probabilités composées (ordre 3)

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}_{A\cap B}(C).$$

Formule des probabilités totales (2 termes)

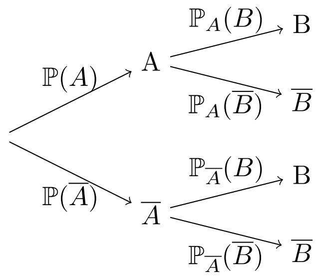
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B}).$$

Formule de Bayes (2 termes)

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\mathbb{P}(\overline{A})}.$$

Arbre de probabilité

Un arbre de probabilité est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire. Il sert à calculer des probabilités.



Le vocabulaire associé est assez intuitif (branche, nœud, chemin...).
Ainsi, la pondération de la branche allant du nœud A vers le nœud B est la probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé : $\mathbb{P}_A(B)$. Cet arbre possède les particularités suivantes :

- La somme des probabilités sur les branches d'un même nœud vaut 1. Par exemple :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(A) = 1.$$

- La "probabilité d'un chemin" $(\mathbb{P}(A \cap B), \mathbb{P}(A \cap \overline{B}), \ldots)$ est le produit des probabilités de ses branches. Par exemple :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A).$$

- Conséquence de la formule des probabilités totales : La probabilité qu'un évènement se réalise est la somme des probabilités des chemins qui y amènent. Par exemple :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}).$$

Formule des probabilités composées (ordre n)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}_{\bigcap_{k=1}^{i-1} A_k}(A_i).$$

Formule des probabilités totales (ordre n)

$(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ système complet d'événements $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k).$$

Formule de Bayes (ordre n)

$(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ système complet d'événements $\Rightarrow$

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k)}.$$

Indépendance

- A et B indépendants $\Leftrightarrow$

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B).$$

- A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ et B indépendants $\Leftrightarrow$ A et $\overline{B}$ indépendants $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants.
- $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ indépendants deux à deux $\Leftrightarrow$ pour tout $(k,l)\in\{1,\dots,n\}^2$ avec $k\neq l$,

$$\mathbb{P}(A_k\cap A_l) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_l).$$

- $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ indépendants $\Leftrightarrow$ pour tout $I\subseteq\{1,\dots,n\}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right) = \prod_{k\in I}\mathbb{P}(A_k).$$