Dénombrement

Abdallah Khemais

14/09/2025

1 Rappel sur les ensembles

Vocabulaires :

Notations	Vocabulaire	Notations	Vocabulaire
$\varnothing$	ensemble vide	$A \cup B$	réunion de A et B
Ω	ensemble plein	$A \cap B$	intersection de A et B
$\{\omega\}$	singleton de Ω	$A - B$	intersection de A et $\overline{B}$
A	partie de Ω	$A \cap B = \varnothing$	A et B sont disjoints
$\omega \in A$	ω appartient à A	$A \subseteq B$	A est inclus dans B
$\overline{A}$	complémentaire de A dans Ω	$A \times B$	produit cartésien de A et B

Exemple :

Ensemble	Définition	$A = \{a, b\}, B = \{b, c\}, \Omega = \{a, b, c\}$
$\overline{A}$	$\{x \in \Omega; x \notin A\}$	$\{c\}$
$A \cup B$	$\{x \in \Omega; x \in A$ ou $x \in B\}$	$\{a, b, c\}$
$A \cap B$	$\{x \in \Omega; x \in A$ et $x \in B\}$	$\{b\}$
$A - B$	$\{x \in \Omega; x \in A$ et $x \notin B\}$	$\{a\}$
$A \times B$	$\{(x, y); x \in A$ et $y \in B\}$	$\{(a, b), (a, c), (b, b), (b, c)\}$

Opérations :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap B = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B),$$

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cup B = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cup B).$$

Lois de Morgan :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k, \quad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k.$$

Partition :

$(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ partition de $\Omega \iff (A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ disjoints deux à deux et $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Cardinal :

Le nombre des éléments d'un ensemble fini A est appelé cardinal de A. Il est noté $\mathrm{Card}(A)$.

Formule du crible (à l'ordre 2) :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Propriétés :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Card}(\emptyset) = 0, \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B),\\
&\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(\Omega) - \mathrm{Card}(A), \quad \mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(A \cap \overline{B}),\\
&\mathrm{Card}(A - B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B), \quad A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B),\\
&\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A)\mathrm{Card}(B).
\end{aligned}$$

2 Principes combinatoires

Principe additif :

On considère une situation qui nous amène à faire un choix parmi n cas différents et exclusifs : le cas 1, ou le cas 2. . . , ou le cas n. Si, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, il y a u_k possibilités pour le k-ème cas, alors le nombre total de possibilités est $\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Principe multiplicatif :

On considère une situation conjuguant k étapes : une étape 1, et une étape 2. . . ., et une étape k. Si, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, il y a n_i possibilités pour la k-ème étape, alors le nombre total de possibilités est

$$\prod_{i=1}^{k} n_i.$$

Principe du quotient

Le **principe du quotient** permet de compter en divisant quand plusieurs configurations différentes correspondent au même résultat final à cause de répétitions ou de symétries.

Liste, Arrangement, Permutation,Combinaison

Liste : Liste ordonnée d'éléments avec répétitions.
Arrangement : Liste ordonnée d'éléments sans répétition.
Permutation : Arrangement de n éléments parmi n.
Combinaison : Partie d'un ensemble ; l'ordre n'est pas pris en compte.

Exemple :

choix de 2 éléments parmi $\Omega = \{a, b, c\}$:

Choix	avec répétition	sans répétition
avec ordre	Listes : (a, a) (a, b) (a, c) (b, a) (b, b) (b, c) (c, a) (c, b) (c, c) 9	Arrangements : (a, b) (a, c) (b, a) (b, c) (c, a) (c, b) 6
sans ordre	Combinaisons avec répétitions : $[a, a]$ $[a, b]$ $[a, c]$ $[b, b]$ $[b, c]$ $[c, c]$ 6	Combinaisons : $\{a, b\}$ $\{a, c\}$ $\{b, c\}$ 3

Exemple :

Les permutations des éléments des 3 éléments de Ω sont : (a, b, c), (b, a, c), (a, c, b), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Il y en a 6.

Nombre de Liste

Le nombre de listes possibles de k éléments parmi n est n^k.

Factorielle :

On appelle factorielle n l'entier :

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n = \prod_{i=1}^{n} i.$$

On pose $0! = 1$.

Nombre de permutations :

Le nombre de permutations de n éléments est $n!$.

3 Applications des principes

Nombre d'arrangements :

On appelle nombre d'arrangements "k parmi n" l'entier :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

C'est le nombre d'arrangements possibles de k éléments parmi n.

Coefficient binomial :

On appelle coefficient binomial "k parmi n" l'entier :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Si $k \notin \{0, \ldots, n\}$, on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Nombre de combinaisons :

Le nombre de combinaisons possibles de k éléments parmi n est $\binom{n}{k}$.

Formule des arrangements avec objets identiques

Arrangement avec répétition

Soit un ensemble de N objets où :

- n_1 objets sont identiques de type 1
- n_2 objets sont identiques de type 2
- $\vdots$
- n_k objets sont identiques de type k

avec $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Formule

Formule principale Le nombre d'arrangements distincts est donné par :

$$A = \frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Notation produit

Avec notation produit

$$A = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{k} n_i!}$$

Notation multinomiale

Avec coefficient multinomial

$$A = \binom{N}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Exemple

Pour $N = 5$ avec $n_1 = 2$ (objets A), $n_2 = 2$ (objets B), $n_3 = 1$ (objet C) :

$$A = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{120}{2 \cdot 2 \cdot 1} = 30$$

Application aux Anagrammes

Anagramme

Une **anagramme** est une permutation des lettres d'un mot ou d'une phrase qui forme un nouveau mot ou une nouvelle phrase, en utilisant **toutes les lettres exactement une fois**.

Caractéristiques fondamentales

- **Même multiset de lettres** : Les deux mots doivent contenir exactement les mêmes lettres
- **Ordre différent** : L'ordre des lettres doit être modifié
- **Longueur identique** : Le nombre total de lettres reste le même

Exemples classiques

CHIEN → NICHE
LOUPE → POULE
MARIE → AIMER
ORANGE → ONAGRE, ORGANE
CHÉRIE → ECHIRE, RÉCHIE

Approche mathématique et Formule

Le nombre d'anagrammes d'un mot de N lettres avec des répétitions est donné par le coefficient multinomial :

$$A = \frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} = \binom{N}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$$

où :

- N : nombre total de lettres
- n_i : nombre d'occurrences de chaque lettre distincte
- k : nombre de lettres différentes

Cas particulier : toutes les lettres différentes

Si toutes les lettres sont distinctes ($n_i = 1$ pour tout i), la formule se simplifie :

$$A = N!$$

Exemple

Pour le mot "ABCD" (4 lettres différentes) :

$$A = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \text{ anagrammes}$$

Cas général : avec répétitions

Quand certaines lettres se répètent, le nombre d'anagrammes diminue :

$$A = \frac{N!}{\prod n_i!}$$

Exemple

Pour le mot "BALLON" :

- B : 1 fois
- A : 1 fois
- L : 2 fois
- O : 1 fois
- N : 1 fois

$$A = \frac{6!}{1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{720}{2} = 360 \text{ anagrammes}$$

MISSISSIPPI

$$\begin{aligned}
\text{Lettres} &: M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I \\
\text{Fréquence} &: M(1), I(4), S(4), P(2) \\
N &= 11 \\
A &= \frac{11!}{1! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{39\,916\,800}{24 \times 24 \times 2} = 34\,650
\end{aligned}$$

Remarque

Plus un mot contient de lettres répétées, moins il a d'anagrammes distincts. Les anagrammes représentent les **permutations avec répétition** d'un multiset.

4- Combinaisons avec répétition

Combinaisons avec répétition

Les **combinaisons avec répétition** permettent de compter le nombre de façons de choisir k objets parmi n types différents, avec la possibilité de sélectionner plusieurs fois le même type d'objet.

Formule

Le nombre de façons de choisir k objets parmi n types différents, avec la possibilité de sélectionner plusieurs fois le même type d'objet est donnée par :

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Cette formule correspond au nombre de combinaisons de k objets parmi n avec répétition autorisée.

Exemples d'application

1. **Choix de bonbons** : Dans un magasin proposant $n = 5$ parfums différents, le nombre de façons de choisir $k = 3$ bonbons (en pouvant prendre plusieurs fois le même parfum) est :

$$\binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35$$

2. **Composition de glaces** : Pour une glace avec $k = 2$ boules choisies parmi $n = 4$ parfums (répétition autorisée), le nombre de possibilités est :

$$\binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$$

3. **Solutions entières d'équations** : Le nombre de solutions entières non négatives de l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ est :

$$\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$$

où x_i représente le nombre d'occurrences du type i.

4. **Distributions identiques** : Répartir $k = 6$ livres identiques parmi $n = 4$ personnes (une personne peut recevoir plusieurs livres) :

$$\binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = 84$$

Différence avec les combinaisons simples

— **Combinaisons simples** : Pas de répétition, ordre sans importance

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

— **Combinaisons avec répétition** : Répétition autorisée, ordre sans importance

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Interprétation combinatoire

Les combinaisons avec répétition correspondent au nombre de multisets de taille k formés à partir de n éléments différents, ou au nombre de solutions entières non négatives de l'équation $x_1+x_2+\cdots+x_n = k$.