Chapitre III

Abdallah Khemais

Isitcom

Novembre 2016

Introduction

Rappels :

Une variable aléatoire réelle (VAR) est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ où $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. Lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble discret on dit que X est une VAR discrète.

Pour **toutes** les VAR (discrètes ou non) on définit la fonction de répartition de X, que l'on note F_X, par $F_X(x) = P(X \leqslant x)$ pour tout réel x.

Notion de variable aléatoire à densité

Densité

Définition

Soit X une VAR définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
et F_X sa fonction de répartition.
On dit que X est **une variable aléatoire réelle à densité**
s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : f_X : dérivée de F

(i) f_X est à valeur réelles positives ou nulles

(ii) f_X est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$

(iv) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\underline{F_X}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ primitive de f

La fonction f_X s'appelle alors **une densité** de la variable aléatoire X.

Nous admettrons le théorème suivant, qui nous permet de vérifier si une fonction f donnée est une densité d'une variable X.

Théorème

[densité] p.d.f

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

(i) f est à valeur réelles positives ou nulles

(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire réelle X définie sur cet espace, tels que f est une densité de la variable X.
On dit alors que f est une **densité de probabilité**.

Exemple 1:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & .\text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & .\text{si } x < 0 \end{cases}$.

Montrons que c'est une densité de probabilité.

$\square$ $f_X(t) \geq 0 \ \forall t$

$\square$ f_X continue p.p

$\square$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$

- si $x \geq 0$: $f(x) = e^{-x} > 0 \ \forall x \geq 0$
- si $x < 0$ $f(x) = 0 \geq 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ f(x) \geq 0$

$x \mapsto e^{-x}$ continue sur $\mathbb{R}_+$

$x \mapsto 0$ " " $\mathbb{R}_-^*$

$\Rightarrow f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

$a \neq 0$ $e^{ax} \xrightarrow{\int} \frac{1}{a} e^{ax}$

$\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$

$= \underbrace{\quad}_{0} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \lim_{+\infty} (-e^{-x}) - (-e^{-0})$

$= +1$

D'où f est une p.d.f

Caractérisation par la fonction de répartition

Fonction de répartition $\longrightarrow$ f densité ?! $\exists$

$\begin{cases} X : \text{v.a.r} \\ F_X : \text{connue} \end{cases} \xrightarrow{?}$ X admet une pdf f (X : v.a.r. c)

$\longrightarrow f$

Théorème

Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité X et si f est une densité de X alors :

- F est continue sur $\mathbb{R}$. ✓
- F est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points et lorsque F est dérivable en x, $F'(x) = f(x)$.

Ces propriétés sur la fonction de répartition suffisent à caractériser les variables à densité :

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Si :

(i) F est continue sur $\mathbb{R}$

(ii) F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points

alors X est une variable aléatoire à densité.
De plus si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

Exemple 2:

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : → p.d.f ??

→ ☑ F continue sur $\mathbb{R}$ (1)

☑ F est $\mathcal{C}^1$ p.p (2) (sauf en qq point)

x		2	
$F(x)$	0	0	$1-\frac{8}{x^3}$

$$F(x) = \begin{cases} \boxed{0} & \text{si } x < 2 \\ \boxed{1 - \dfrac{8}{x^3}} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Montrer que X est une variable à densité et en déterminer une densité.

- F est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ car : ses restrictions sont continues
- en $\boxed{2}$: $\lim\limits_{2^-} F(x) = 0$, $\lim\limits_{2^+} F(x) = 0$, $F(2) = 0$ $\Rightarrow$ F est C en 2

C F est continue sur $\mathbb{R}$ ☑ (1)

F est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

(F est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$) ☑ (2)

* $F'(x) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ \dfrac{24}{x^4} & x > 2 \end{cases}$

$$\left(-8/x^3\right)' = \left(-8 x\, x^{-3}\right)' = (-8)(-3) \cdot x^{-3-1}$$

$\underline{\text{el}}$ X admet une densité $f \longrightarrow f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{24}{x^4} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

En pratique :

Pour démontrer qu'une variable X donnée est une variable à densité, il faut trouver sa fonction de répartition et vérifier qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf peut être en un nombre fini de points. Pour trouver la densité de X il suffit de prendre la dérivée de F.

Exemple 3:

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Montrer que X est une variable à densité et en déterminer une densité.

Le théorème suivant permet de déterminer si une fonction F donnée est la fonction de répartition d'une variable à densité X.

Théorème [Fonction de Répartition]

Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si

(i) F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ ☑

(ii) F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points ☑

(iii) F est croissante sur $\mathbb{R}$. ☑

(iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \boxed{1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \boxed{0}$

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X définie sur cet espace, tels que F est la fonction de répartition de X.

De plus X est alors une variable à densité et si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

Exemple 4:

On considère la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \boxed{0} & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1-\sqrt{-x}}{2} & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ \dfrac{1+\sqrt{x}}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \boxed{1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$(\sqrt{-x})' = - \dfrac{1}{2\sqrt{-x}}$

□ F est continue sur $\mathbb{R}$

□ F est C^1 (sauf en qq pts)

□ $F \nearrow$

□ $\lim_{+\infty} F = 1$; $\lim_{-\infty} F = 0$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité et en déterminer une densité.

□ F est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$: car ses restrictions sont continues

en -1 : $\lim_{-1^-} F(x) = 0$, $\lim_{-1^+} F(x) = 0$, $F(-1) = 0$

F est C en -1

en 0 : $\lim_{0^-} F(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{0^+} F(x) = \frac{1}{2}$, $F(0) = 1/2$

F est C en 0

en 1 : $\lim_{1^+} F(x) = 1$, $\lim_{1^-} F(x) = 1$, $F(1) = 1$

F est C en 1

☑ F est C sur $\mathbb{R}$; ☑ F C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ ☑ F ↗

$$F'(x) = \begin{cases} 0 \geq 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{4\sqrt{-x}} \geq 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} \geq 0 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 \geq 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

☑ $\lim_{-\infty} F(x) = 0$

$\lim_{+\infty} F(x) = 1$

$\Downarrow$

F est une une fonction de répartition (c.d.f)

Quelques propriétés

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f.

(i) Pour tout x réel :

$$P(X < x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$P(X > x) = P(X \geqslant x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt$$

(ii) Pour tout a et b réels tels que $a \leqslant b$:

$$P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$

(iii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$

Corollaire

Soit X une variable à densité et f une densité de X. Si f est nulle en dehors d'un intervalle $[a; b]$, alors on a $P(X < a) = 0$ et $P(X > b) = 0$. On dit alors que X prend ses valeurs dans l'intervalle $[a; b]$.

Indépendance

Définition

Des VAR à densité $X_1, \cdots, X_n$ sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont dites **indépendantes** si pour tous réels $(x_1, \cdots, x_n)$:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k \leqslant x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leqslant x_k)$$

Remarque :

Pour montrer que deux variables à densité X et Y sont indépendantes il faut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ on a $P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) = P(X \leqslant x) \times P(Y \leqslant y)$.

Moments d'une variable aléatoire à densité

Espérance

Définition

Soit X une VAR de densité f. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ est absolument convergente alors on dit que X **admet une espérance** que l'on note $E(X)$ et on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$$

Exemple 5:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exemple 6:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Ex5 : $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

→ ☑ $f \in$ sauf en qq pt

→ ☑ $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

? ☐ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

1) f est une p.d.f d'une v.a.r X ?

2) $E(X) = ?$

☑ $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 6x(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ ☑ f est C sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$

car ses restrictions sont continues

☑ si $x \notin [0,1]$ $\quad f(x) = 0 \geq 0$

si $x \in [0;1]$ $\quad f(x) = 6 \cdot \boxed{x} \, \overset{+}{(1-x)} \geq 0$ $\Big\} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \;\; f(x) \geq 0$

$0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq 1-x$

$n \neq -1;\; x^n \longrightarrow \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

☐ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{f(x)}_{0}\,dx + \int_{0}^{1} \underbrace{f(x)}_{6x(1-x)}\,dx + \int_{1}^{+\infty} \underbrace{f(x)}_{0}\,dx$

$= \int_0^1 6x(1-x)\,dx = \int_0^1 (6x - 6x^2)\,dx = \left[3x^2 - 2x^3\right]_0^1$

$= \{3(1)^2 - 2(1)^3\} - \{3 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3\}$

$= 3 - 2$

$= 1$ cqfd f est une p.d.f ☑

2) $\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx} = \int_0^1 x f(x)\,dx \qquad x \in [0;1] \;\; f(x) = 6x(1-x)$

$= \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)\,dx$

$= \int_0^1 (6x^2 - 6x^3)\,dx = \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^4\right]_0^1 =$

$= 2(1)^3 - \frac{3}{2}(1)^4 - 0$

$= 2 - \frac{3}{2}$

$\boxed{E(X) = \frac{1}{2}}$

Linéarité

Soit X **une VAR à densité admettant une espérance. Alors pour tout réels** a **et** b**,** $aX+b$ **admet une espérance et**

$$\boxed{E(aX+b)=aE(X)+b}$$

.

Théorème

Soient X et Y deux VAR à densité admettant une espérance. Si $X+Y$ est une VAR à densité alors elle admet une espérance et $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

Moment d'ordre r

Définition

Soit $r\in\mathbb{N}^*$. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx$ est absolument convergente alors on dit que X **admet un moment d'ordre** r, notée $m_r(X)$ et on a

$$m_r(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx$$

Variance et écart-type

Définition

Si la variable aléatoire X admet une espérance et si la variable $(X - E(X))^2$ admet une espérance, on appelle **variance de** X le réel

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$$

Pour le calcul de variance dans la pratique on utilisera tout comme pour les variables discrètes plutôt le théorème suivant :

Théorème

Soit X une VAR à densité. X admet une variance ssi X admet un moment d'ordre 2 et en cas d'existence, on a :

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

Exemple 7:

Soit X une VAR dont une densité f est définie par $f(x) = 6x(1-x)$ si $x \in [0;1]$ et $f(x) = 0$ sinon. Nous avons vu que $E(X) = \dfrac{1}{2}$.
X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer

Exemple 8:

Soit X une VAR dont une densité f est définie par $f(x) = 0$ si $x < 1$
et $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ si $x \geqslant 1$.
X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.

Ex5

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\longrightarrow f$: pdf ☑

$\longrightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$

(3) $\mathbb{V}(X) = \,?$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$\leftarrow g(x) = x^2$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{x^2} f(x)\,dx \qquad \mathbb{E}\left(g(X)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \boxed{x^2} \cdot 6x(1-x)\,dx = \int_0^1 (6x^3 - 6x^4)\,dx$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^4 - \frac{6}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{3}{10} \Rightarrow X \text{ admet une variance}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20} \text{ ☑.}$$

Rq

$\mathbb{V}(X) \geq 0$

Définition

Si X admet une variance alors $V(X) \geqslant 0$. On appelle alors **écart-type** le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Soit X une variable à densité admettant une variance.
Alors pour tout réels a et b, $aX + b$ admet une variance et

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Définition

Si X est une VAR telle que $E(X) = 0$ on dit que X **est une variable centrée**.

Définition

Si X est une variable à densité telle que $\sigma(X) = 1$, on dit que X **est une variable réduite**.

Définition

Si X admet une espérance et un écart-type non nul, la variable $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée **la variable centrée réduite associée à X**.

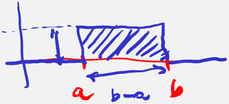
Lois usuelles

Loi uniforme

Il s'agit ici de la loi la plus simple pour les variables aléatoires à densité. Elle correspond au fait de choisir au hasard un réel dans un segment $[a; b]$.

Définition

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur** $[a; b]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$, si elle admet pour densité la fonction f définie par :



$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \textbf{si } a < x < b \\ 1 & \textbf{si } x \geqslant b \end{cases}$$

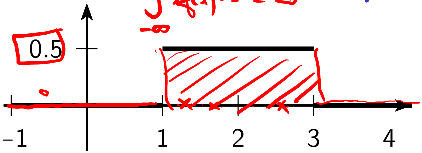
$a = 1$

$b = 3$

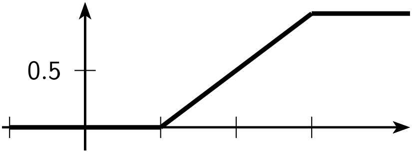
$$\boxed{F(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{3-1} & \text{si } x \in]1,3[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Voici la représentation graphique de la densité et de la fonction de répartition d'une VAR suivant une loi uniforme sur $[1;3]$:

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \boxed{1}$



Densité de la loi $\mathcal{U}([1;3])$



Fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([1;3])$

Théorème

Soit X une VAR à densité suivant une loi uniforme sur $[a;b]$. Alors X admet une espérance égale à $\dfrac{a+b}{2}$.

Loi exponentielle

Définition

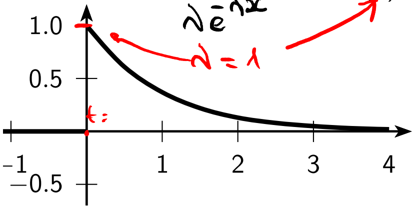
Soit λ un réel **strictement positif**. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi exponentielle de paramètre** λ ; et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

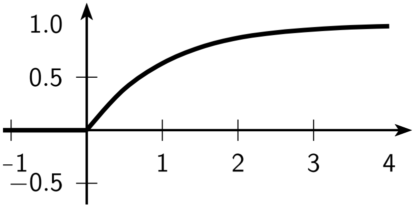
La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \textbf{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Voici la représentation graphique de la densité et de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{E}(1)$:



Densité de la loi $\mathcal{E}(1)$



Fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$

Théorème

Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Théorème

Caractérisation de la loi exponentielle

Soit X une VAR à densité, qui n'est pas la variable certaine nulle et qui est à valeur dans $\mathbb{R}^+$.

X suit une loi exponentielle ssi :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad P_{[X>s]}(X > s+t) = P(X > t) \tag{1}$$

Remarque :

L'égalité (1) est équivalente à $P(X > s+t) = P(X > s)P(X > t)$.

Définition

Un VAR à densité vérifiant l'égalité (1) est dite **sans mémoire**.

Loi normale centrée réduite

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi normale centrée réduite** si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

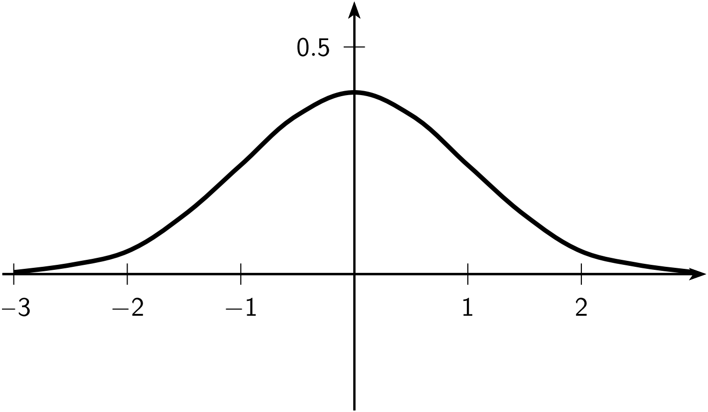
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Remarque :

Pour vérifier que f est une densité de probabilité, il vous faudra admettre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

Voici la représentation graphique de la densité d'une loi normale centrée réduite :



Densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

Pour la fonction de répartition, nous ne sommes pas capable de l'exprimer avec de fonctions usuelles. Il faudra cependant bien savoir utiliser la propriété que nous allons mettre ci-dessous et savoir utiliser le tableau de valeurs approchées que nous verrons en exercice.

Soit Φ la fonction de répartition d'une VAR X suivant la loi $\mathcal{N}[0,1)$. Alors Φ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Démonstartion : Tout repose ici sur le fait que la densité est paire :

$$\begin{aligned}
\Phi(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-x} f(t)\,dt \\
&= \lim_{A\to-\infty} \int_{-A}^{x} f(-u)\,(-du) \qquad \textit{changement de variable } u=-t \\
&= \lim_{A\to-\infty} \int_{x}^{-A} f(u)\,du = \int_{x}^{+\infty} f(u)\,du = 1-\Phi(x)
\end{aligned}$$

Théorème

Soit X qui suit une loi normale centrée réduite. Alors X admet une espérance et une variance :

$$E(X) = 0 \qquad V(X) = 1$$

Loi normale de Laplace-Gauss

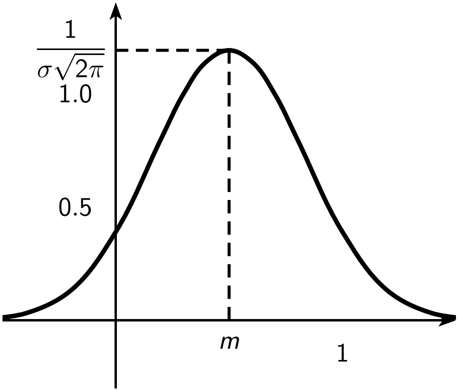
Définition

Soit m un réel, et σ un réel strictement positif. On dit que X suit **la loi normale de paramètres** (m, σ^2) si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Voici la représentation graphique de la densité d'une loi normale.



Densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Théorème

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = m \qquad V(X) = \sigma^2$$

	Densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
$\mathcal{U}([a;b])$	$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$	$V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{E}(\lambda)$	$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$	$V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
$\mathcal{N}(0,1)$	$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$	$\Phi(x)$	$E(X) = 0$	$V(X) = 1$
$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	TD.	$E(X) = m$	$V(X) = \sigma^2$

Exercice Loi Uniforme

Un train passe à une station selon une loi uniforme entre 8h00 et 8h20.

1. Quelle est la probabilité qu'il passe entre 8h05 et 8h15?
2. Si un voyageur arrive à 8h10, quelle est la probabilité qu'il attende moins de 5 minutes?
3. Calculer l'espérance et l'écart-type du temps d'attente

$X \sim U([a;b])$: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\quad F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in]a;b[\\ 1 & \text{si } t \geq b \end{cases}$

(i) $P(X \leq u) = F(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq a \\ \frac{u-a}{b-a} & \text{si } u \in]a;b[\\ 1 & \text{si } u \geq b \end{cases}$

ii) $P(X \geq v) = 1 - P(X < v) =$

iii) $P(u \leq X \leq v) = F_X(v) - F_X(u)$

$X \sim U([a;b]) \to E(X) = \frac{a+b}{2}$; $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

$[8h \quad 8h20mn] = [\underset{a}{8} ; \underset{b}{8+\frac{1}{3}}]$ $\quad 8+\frac{1}{3} = \frac{25}{3}$

$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 8 \\ 3(t-8) & \text{si } t \in]8 ; \frac{25}{3}[\\ 1 & \text{si } t \geq \frac{25}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow (8+\frac{1}{4}) = v$

$u = 8 + \frac{1}{12}$

1) soit X : le temp d'arrivé du train.

8h05 $\longrightarrow 8 + \frac{5}{60} = 8 + \frac{1}{12}$

8h15 $\longrightarrow 8 + \frac{15}{60} = 8 + \frac{1}{4}$

$\rightarrow P(\underbrace{8+\frac{1}{12}}_{u} < X < \underbrace{8+\frac{1}{4}}_{v}) = F(8+\frac{1}{4}) - F(8+\frac{1}{12})$

$= 3(\cancel{8}+\frac{1}{4} - \cancel{8}) - 3(\cancel{8}+\frac{1}{12} - \cancel{8})$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

8 8:05 8:10 8:15 8:20

$8+\frac{1}{4} \in [8h \quad 8h20] \rightarrow 3(t-8)$

$8h10 \longrightarrow 8+\frac{1}{6}$; $8h15 \longrightarrow 8+\frac{1}{4}$

$$\mathbb{P}\Big(\underbrace{8+\frac{1}{6}}_{8h10} < X < \underbrace{8+\frac{1}{4}}_{8h15} \Big) = F\left(8+\frac{1}{4}\right) - F\left(8+\frac{1}{6}\right)$$

$$= 3\left(\cancel{8}+\frac{1}{4}-\cancel{8}\right) - 3\left(\cancel{8}+\frac{1}{6}-\cancel{8}\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \boxed{\checkmark}$$

3) Y : le temps d'attente :

$X \sim \mathcal{U}([8\,;8+\frac{1}{3}])$

$X \sim \mathcal{U}([a\,;b])$

$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$

$$Y = X - 8$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X-8)$$
$$= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(8)$$
$$= \mathbb{E}(X) - 8$$
$$= \frac{8+8+1/3}{2} - 8$$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{6} = 10\,mn \quad \boxed{\checkmark}$$

LOI EXPONENTIUELLE

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\quad \lambda > 0$

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$; $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \textbf{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

i) $\mathbb{P}(X \leq u) = F(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda u} & \text{si } u \geq 0 \end{cases}$

ii) $\mathbb{P}(X \geqslant v) = 1 - F(v)$

iii) $\mathbb{P}(u \leq X \leq v) = F(v) - F(u)$

Exercice Loi Exponentielle

Le temps de réponse d'un serveur suit une loi exponentielle de moyenne 0.5 seconde.

1. Calculer la probabilité que le temps de réponse dépasse 1 seconde
2. Déterminer le temps t tel que 90% des requêtes aient un temps de réponse inférieur à t
3. Si on envoie 10 requêtes indépendantes, quelle est la probabilité qu'au plus 2 aient un temps > 1 seconde?

X : le temp de réponse d'un serveur

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\quad \mathbb{E}(X) = 0.5 = \frac{1}{\lambda} \iff \boxed{\lambda = 2}$

$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq v) = e^{-\lambda v} \quad v \geq 0}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1) $\mathbb{P}(X > 1s) = e^{-2\times 1} = e^{-2}$

2) $t > 0$?

$\underbrace{\mathbb{P}(X < t)}_{F(t)} = 0.9$

$F(t) = 0.9$

$\iff 1 - e^{-2t} = 0.9$

$\iff 1 - 0.9 = e^{-2t}$

$\iff e^{-2t} = 0.1$

$\iff -2t = \ln(0.1)$

$\iff t = -\frac{1}{2}\ln(0.1)$

$\iff t = 1.1512925464970227$

③ **Si on envoie 10 requêtes indépendantes,**
quelle est la probabilité qu'au plus 2 aient un temps > 1 seconde?

Soit Y : le nombre de requête qui dépasse 1 seconde parmi 10 requêtes indép

$Y \sim \mathcal{B}(10; e^{-2})$ $\quad S$: "$X > 1s$"

$\mathbb{P}(S) = e^{-2}$

$\mathbb{P}(Y \leq 2) = \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=2)$

$= \binom{10}{0}(e^{-2})^0(1-e^{-2})^{10-0} + \binom{10}{1}(e^{-2})^1(1-e^{-2})^{10-1} + \binom{10}{2}(e^{-2})^2(1-e^{-2})^{10-2}$

$$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{10}{k} \left(e^{-2}\right)^{k} \left(1 - e^{-2}\right)^{10-k}$$