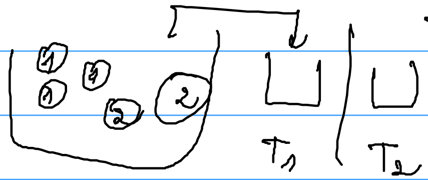
# TD probabilité 2LM3

## Exercice 1:

Une urne contient cinq boules, trois qui portent le numéro 1 et deux qui portent le numéro 2. On effectue deux tirages successifs sans remise dans cette urne. On appelle coïncidence le fait de tirer une boule de numéro $i$ au $i$-ème tirage, avec $i = 1, 2$.

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ qui représente le nombre de coïncidences observées
2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

T.S-S-R




1) : $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$\text{card}(\Omega) = 5 \times 4 = 20 = A_5^2$

$\{X=0\} = [2,1]$

$\{X=1\} = \{[1,1],[2,2]\}$

$X=2 \quad [1,2]$

| $i$ | $\boxed{0}$ | 1 | $\boxed{2}$ | T |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X=i)$ | $\frac{6}{20}$ | $\frac{8}{20}$ | $\frac{6}{20}$ | 1 |

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{A_2^1 \cdot A_3^1}{A_5^2} = \frac{2\times 3}{5\times 4} = \frac{6}{20}$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{A_3^2 + A_2^2}{A_5^2} = \frac{3\times 2 + 2\times 1}{5\times 4} = \frac{8}{20}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{A_3^1 \times A_2^1}{A_5^2} = \frac{3\times 2}{5\times 4} = \frac{6}{20}$$

2) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{2} i\, \mathbb{P}(X=i)$$

$$= 0\times\frac{6}{20} + 1\times\frac{8}{20} + 2\times\frac{6}{20}$$

$$\mathbb{E}(X) = \boxed{1}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \quad ; \quad \mathbb{E}(X^2) = 0^2\times\frac{6}{20} + 1^2\times\frac{8}{20} + 2^2\times\frac{6}{20}$$

$$= 0 + \frac{8}{20} + \frac{24}{20}$$

$$= \frac{32}{20} - 1^2$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = 0.6}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{32}{20}$$

$\boxed{4}$ $N \longrightarrow +2\,\$$
$\boxed{8}$ $B \longrightarrow -1\,\$$
$\boxed{2}$ $O \longrightarrow 0\,\$$

**Exercice 2 :** Barème : 5 pts

On choisit 2 boules au hasard d'une urne en contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2 \$ pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1\$ pour chaque boule blanche tirée. Soit $X$ : les gains nets.
a) [2.5 pts] Trouver la loi de probabilité de $X$.
b) [2.5 pts] Calculer la variance et l'écart-type de $X$.

$X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 4\}$ $\quad \mathrm{Card}(\Omega) = \binom{14}{2} = 91.$

| $i$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $4$ | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X=i)$ | $\frac{28}{91}$ | $\frac{16}{91}$ | $\frac{1}{91}$ | $\frac{32}{91}$ | $\frac{8}{91}$ | $\boxed{\frac{6}{91}}$ | $1$ |

$\mathbb{P}(X=-2) = \mathbb{P}(\{B,B\}) = \frac{\binom{8}{2}}{91} = \frac{28}{91}$

$\mathbb{P}(X=-1) = \mathbb{P}(\{O,B\}) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{1}}{91}$

$\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\{O,O\}) = \frac{\binom{2}{2}}{91} = \frac{1}{91}$

$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{N,B\}) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{8}{1}}{91} = \frac{32}{91}$

$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\{N,O\}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{2}{1}}{91} = \frac{8}{91}$

$\mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}(\{N,N\}) = \frac{\binom{4}{2}}{91} = \frac{6}{91}$

2) $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

| $i$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $4$ | T |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X=i)$ | $\frac{28}{91}$ | $\frac{16}{91}$ | $\frac{1}{91}$ | $\frac{32}{91}$ | $\frac{8}{91}$ | $\boxed{\frac{6}{91}}$ | $1$ |
| $i\,\mathbb{P}(X=i)$ | $\frac{-56}{91}$ | $-\frac{16}{91}$ | $0$ | $\frac{32}{91}$ | $\frac{16}{91}$ | $\frac{24}{91}$ | $\mathbb{E}(X) = \frac{-56}{91} + \frac{-16}{91} + 0 + \frac{32}{91} + \frac{16}{91} + \frac{24}{91} = 0$ |
| $i^2\,\mathbb{P}(X=i)$ | $\frac{112}{91}$ | $\frac{16}{91}$ | $0$ | $\frac{32}{91}$ | $\frac{32}{91}$ | $\frac{96}{91}$ | $\mathbb{E}(X^2) = \frac{112}{91} + \frac{16}{91} + 0 + \frac{32}{91} + \frac{32}{91} + \frac{96}{91}$ |

$\mathbb{E}(X^2) = \frac{288}{91}$

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$\mathbb{V}(X) = \frac{288}{91} - 0^2 = \frac{288}{91} \longrightarrow \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\frac{288}{91}} \ldots$

**Exercice 4 :** Barème : 4 pts

Le nombre d'e-mails que je reçois un jour de semaine (du lundi au vendredi) peut être modélisé par une distribution de Poisson avec une moyenne de $\frac{1}{6}$ e-mails par **minute**. Le nombre d'e-mails que je reçois pendant le week-end (samedi et dimanche) peut être modélisé par une distribution de Poisson avec une moyenne de $\frac{1}{30}$ e-mails par **minute**.

(a) [2 pts] Quelle est la probabilité que je ne reçoive aucun e-mail pendant un intervalle de **4 heures** un dimanche ?

(b) [2 pts] Un jour aléatoire est choisi (tous les jours de la semaine ayant la même probabilité d'être sélectionnés), et un intervalle aléatoire **d'une heure** est sélectionné pendant ce jour. Il est observé que je n'ai reçu aucun e-mail pendant cet intervalle. Quelle est la probabilité que le jour choisi ne soit pas <u>ni un samedi ni un dimanche</u> ?

☒ v.a.r.d.
☒ usuelle ( Poisson)
☐ $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$
☒ Calcul de Prob

Weekend

| L M Me J V | S D |
|---|---|

$P(\frac{1}{6})$ $\qquad$ $P(\frac{1}{30})$

1 h $\quad \lambda = \frac{1}{30}$

$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

1 h

$P(\frac{1}{6}) \longrightarrow \mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

$\lambda = \frac{1}{6}$ :

1) $\mathbb{P}$ ( on reçoit aucun message (un dimanche) pendant 4 heures)

un dimanche

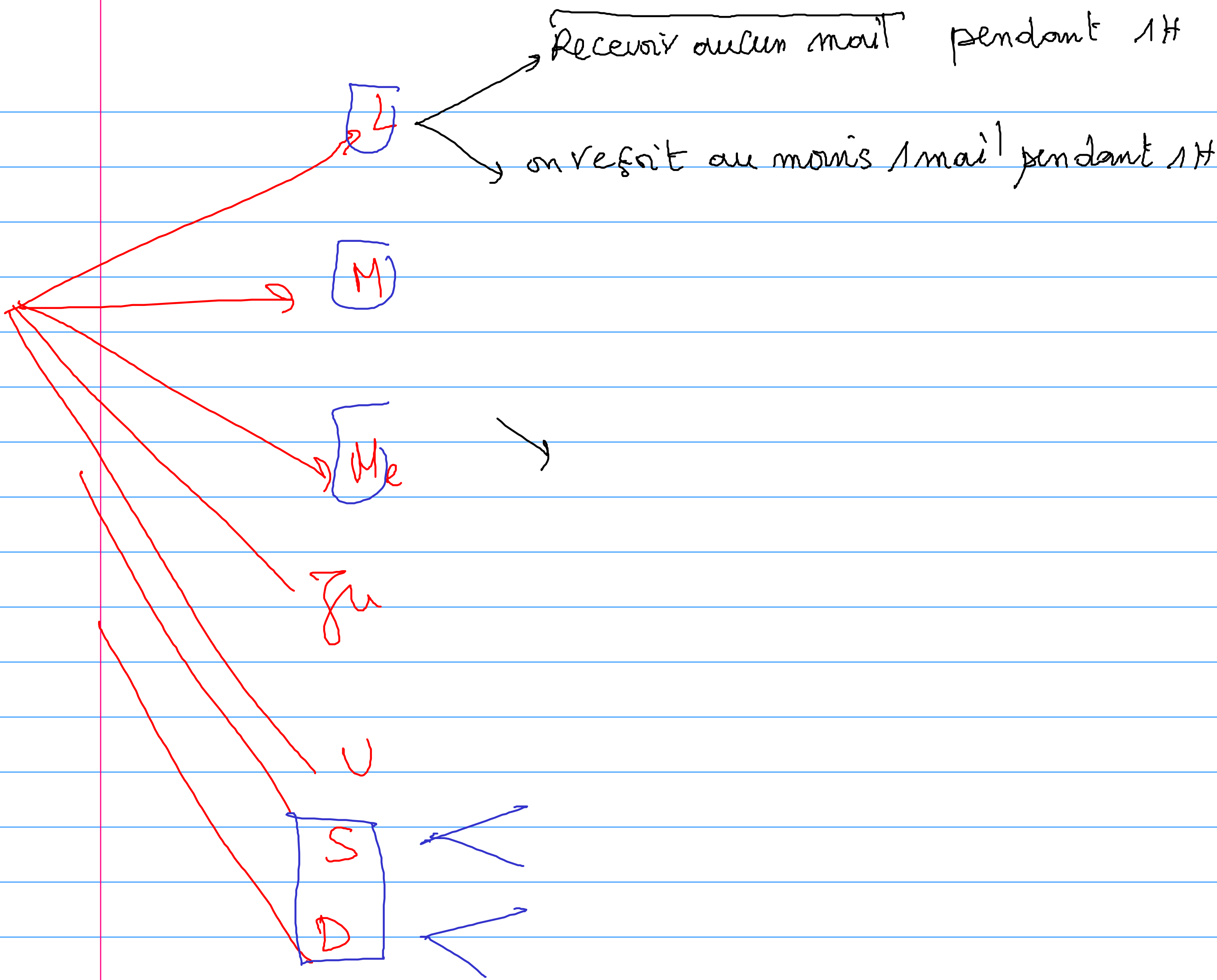
1 mn $\longrightarrow X_{dim}^{1mn} \sim P(\frac{1}{30}) \longrightarrow X_{dim}^{\boxed{4h}} \sim P(\frac{1}{30} \times 240)$

$X_{dim}^{4H} \sim P(8)$

$\lambda_{dim}^{4H} = 8$

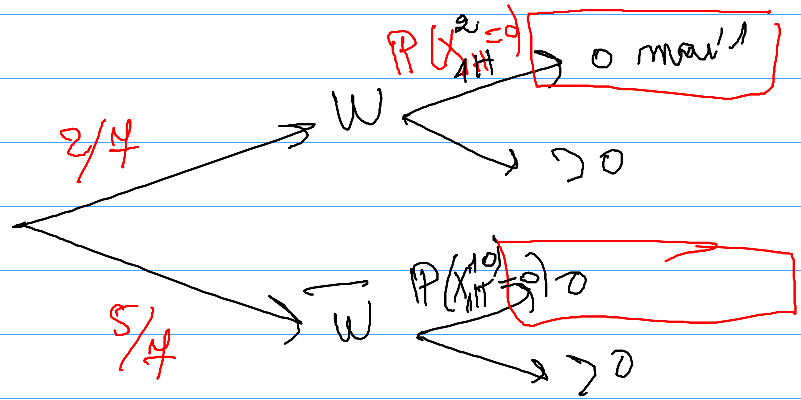
$\mathbb{P}(X_{dim}^{4H} = 0) = e^{-8} \cdot \frac{\lambda^{0}}{0!} = e^{-8} \times \frac{1}{1} = e^{-8}$

$\simeq 0,0003$




$$\mathbb{P}\left(\overline{W} \mid \text{« on a reçu aucun mail pendant 1H »}\right) \qquad X_{1H}^{\boxed{J}} = 0$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left(\overline{W} \cap X_{1H} = 0\right)}{\mathbb{P}\left(X_{1H} = 0\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(X_{1H}^{10} = 0\right) \cdot \mathbb{P}(\overline{W})}{\mathbb{P}(X_{1H} = 0)}$$



$1\,mn \longrightarrow \frac{1}{30}$

$1\,H \rightarrow 2$

$1\,mn \longrightarrow \frac{1}{6}$

$1\,H \longrightarrow 10$

$$\mathbb{P}(X_{1H}=0) = \frac{2}{7} \times \mathbb{P}(X^{2}_{1H}=0) + \frac{5}{7}\,\mathbb{P}(X^{10}_{1H}=0)$$

$$= \frac{2}{7} \times e^{-2} + \frac{5}{7} \times e^{-10}$$

$$\mathbb{P}(X_{1H}=0) \simeq 0{,}038$$

$$\mathbb{P}(\overline{W} \mid X_{1H}=0) = \frac{\mathbb{P}(\overline{W}).\mathbb{P}(X^{10}_{1H}=0)}{\mathbb{P}(\overline{W})\mathbb{P}(X^{10}_{1H}=0) + \mathbb{P}(W)\mathbb{P}(X^{2}_{1H}=0)}$$

$$= \frac{5/7 \times e^{-10}}{5/7\, e^{-10} + \frac{2}{7}\, e^{-2}} =$$