Formulaire - Probabilités et Variables Aléatoires

Abdallah K

Formulaire de Probabilités - Résumé

Comment montrer qu'une fonction est une densité de probabilité

Théorème 1 : f est une densité de probabilité si :

1. $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
2. f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Fonction de répartition à partir de la densité

$f \xrightarrow{\int} F \xrightarrow{\text{dé}} f$

Si X a pour densité f, alors sa fonction de répartition est :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Comment montrer qu'une fonction F est une f.r. de VAR à densité

Théorème 4 : F est fonction de répartition d'une VAR à densité si :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$
2. F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points
3. F est croissante sur $\mathbb{R}$ $\nearrow$
4. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

f dv
f' est continue

Alors $f(x) = F'(x)$ (aux points de dérivabilité) est une densité.

Calculs de probabilités avec densité et fonction de répartition

Soit X une VAR de densité f et fonction de répartition F :

$$P(X = a) = \boxed{0}$$
$$P(X \leq a) = P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$$
$$P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F(a) = \int_{a}^{+\infty} f(t)dt$$
$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

Espérance et Variance - Définitions générales

- **Cas discret :** X de support $\mathcal{X}$, $P(X = x_k) = p_k$

$$E[X] = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} x_k p_k, \quad E[g(X)] = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} g(x_k) p_k$$

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

- **Cas continu :** X de densité f

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt, \quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) dt$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E[X])^2 f(t) dt = E[X^2] - (E[X])^2$$

Calcul d'Espérance et Variance - Cas Discret Non Usuel

Méthode de calcul pour une VAR discrète non usuelle

Soit X une variable aléatoire discrète avec $P(X = x_i) = p_i$

Étapes pour le calcul de l'espérance

1. Dresser le tableau des valeurs et probabilités
2. Calculer les produits $x_i \cdot p_i$
3. Faire la somme pour obtenir $E[X]$

x_i	$p_i = P(X = x_i)$	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_i$
x_1	p_1	$x_1 \cdot p_1$	x_1^2	$x_1^2 \cdot p_1$
x_2	p_2	$x_2 \cdot p_2$	x_2^2	$x_2^2 \cdot p_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_n	$x_n \cdot p_n$	x_n^2	$x_n^2 \cdot p_n$
Total	1	$\mathbf{E[X] = \sum x_i p_i}$		$\mathbf{E[X^2] = \sum x_i^2 p_i}$

Calcul de la variance

Deux méthodes équivalentes :
Méthode 1 : $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$
Méthode 2 : $Var(X) = \sum (x_i - E[X])^2 p_i$

Étape	Formule	Calcul
1	$E[X] = \sum x_i p_i$	Valeur obtenue du tableau
2	$E[X^2] = \sum x_i^2 p_i$	Valeur obtenue du tableau
3	$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$	Application numérique
4	$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$	Racine carrée

X

	DS	TP	Ex
Notes	18	16	14
Moyenne			
coéf (%)	0.2	0.1	0.7

$M = 0.2 \times 18 + 0.1 \times 16 + 0.7 \times 14$

$= 3,6 + 1,6 + 9,8$

$M = 15.0$

$\mathbb{E}(X) =$ Moyenne.

Expectation :

What did you expect.

75 % $\longrightarrow$ 10 \$

365.

X : v.a.r.d. $\longrightarrow X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Espérance Mathématique

$\Updownarrow$

Moyenne

x_k	x_1	x_2		x_n
$P(X = x_k)$	P_1	P_2		P_n

$\mathbb{E}(X) = x_1 \times P_1 + x_2 \times P_2 + \dots\dots + x_n \times P_n$

$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{\mathbb{P}(X = x_i)}_{P_i}$:

	2LM1	2LM2	2LM3	2LM4
M_G	11,8	12,3	13.1	11,75

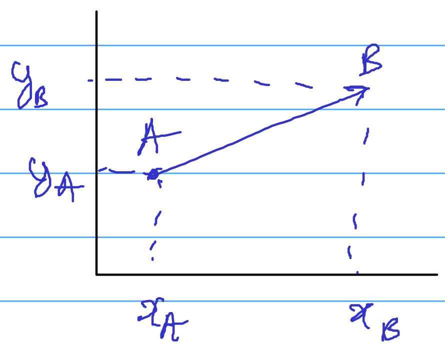
1 17,5
16
⋮
10,5
30 9

11,8
12,2
11,6
⋮
12,3

$\mathbb{E}(X) \leftarrow \bar{x}$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)} \longrightarrow \sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$$



$$\mathbb{V}(X) \overset{2}{=} \mathbb{E}\left(\left[X - \mathbb{E}(X)\right]^2\right) \qquad AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$= \frac{1}{n}\left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2\right]$$

$\sigma(X)$

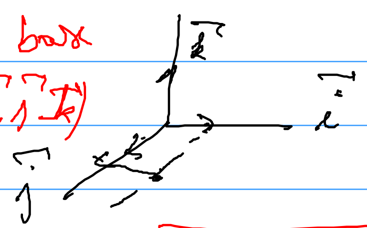
Espace

$P(X) = 3X^2 + 2X + 1$

d'

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left.\begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \end{matrix}\right\} \text{base}$$

$$\vec{V} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{base } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$



$d = \sqrt{\ldots\ldots}$

M.

Exercice 1:

Une urne contient cinq boules, trois qui portent le numéro 1 et deux qui portent le numéro 2. On effectue deux tirages successifs sans remise dans cette urne. On appelle coïncidence le fait de tirer une boule de numéro i au i-ème tirage, avec $i = 1, 2$.

1) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de coïncidences observées
2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

$X :=$ le nombre de coïncidence.

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$\text{Card}(\Omega) = 5 \times 4 = A_5^2 = 20$

$T_1 \mid T_2$

$2 \mid 1 \longrightarrow 0$ coïncidence

$\boxed{1 \mid 1} \longrightarrow 1$ coïncidence

$\boxed{1 \mid 2} \longrightarrow 2$ coïncidence

$\boxed{2 \mid 2}$

i	0	1	2
$P(X=i)$	$\frac{6}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$

$$P(X=0) = P(\boxed{2 \mid 1}) = \frac{A_2^1 \times A_3^1}{A_5^2} = \frac{6}{20}$$

$$P(X=1) = P(\boxed{1 \mid 1} \text{ ou } \boxed{2 \mid 2}) = \frac{A_3^2}{20} + \frac{A_2^2}{20} = \frac{3\times 2}{20} + \frac{2 \times 1}{20} = \frac{8}{20}$$

$$P(X=2) = P(\boxed{1 \mid 2}) = \frac{A_3^1 \times A_2^1}{20} = \frac{6}{20}$$

$$E(X) = \sum_{i \in X(\Omega)} i\, P(X=i) = \overbrace{0 \times \frac{6}{20}}^{0} + \overbrace{1 \times \frac{8}{20}}^{8/20} + \overbrace{2 \times \frac{6}{20}}^{12/20} = 1$$

Interprétation :

1	2	. . . .				1000 000
0	1	. . . .	0	2	2	1

$$\frac{+ + \cdots +}{1000000} \simeq 1$$

Combien on espère avoir en moyenne $\Rightarrow$ Rép $= 1$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{32}{20} - 1$$

$$E(X^2) = \overbrace{0^2 \times \frac{6}{20}}^{0} + \overbrace{1^2 \times \frac{8}{20}}^{8/20} + \overbrace{2^2 \times \frac{6}{20}}^{24/20} = \frac{32}{20}$$

$$V(X) = \frac{12}{20} = 0.6 \longrightarrow \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.6} \simeq 0,77$$

Exemple concret

Soit X telle que $P(X = k) = \frac{c}{k(k+1)}$ pour $k = 1, 2, 3$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & k=1 & k=2 & k=3 & \\ \hline k & 1 & 2 & 3 & T_1 \\ \hline P(X=k) & \frac{c}{2} & \frac{c}{6} & \frac{c}{12} & 1 \end{array}$$

1. **Détermination de c :**

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{c}{k(k+1)} = 1 \Rightarrow c\left(\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}}_{3/4}\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{4}{3}$$

$$\frac{6+2+1}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$$

2. **Tableau de calcul :**

k	$P(X = k)$	$k \cdot P(X = k)$	k^2	$k^2 \cdot P(X = k)$
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	4	$\frac{8}{9}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	9	$\frac{9}{9}$
Total	1	$E[X] = \frac{13}{9}$		$E[X^2] = \frac{23}{9}$

3. **Calculs finaux :**

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{23}{9} - \left(\frac{13}{9}\right)^2 = \frac{38}{81} = \frac{38}{81}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{38}{81}} = \frac{\sqrt{38}}{9}$$

Vérifications importantes

- $\sum p_i = 1$ (loi de probabilité) $\longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$
- $E[X]$ existe si $\sum |x_i| p_i < +\infty$ ex :
- $Var(X)$ existe si $E[X^2] < +\infty$
- $Var(X) \geq 0$ toujours $\rightarrow \boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

Propriétés de l'espérance et variance

$$\boxed{\begin{array}{l} E(a) = a \\ V(a) = 0 \end{array}} \qquad X = a$$

- **Linéarité :** $E[aX + b] = aE[X] + b$
- **Variance :** $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

$$V(aX) = a^2 V(X) \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

- **Théorème de transfert :** $E[g(X)] = \sum g(x_k)p_k$ (discret) ou $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$ (continu)
- **Indépendance :** Si X et Y indépendantes, alors $E[XY] = E[X]E[Y]$ et $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Variable centrée réduite

Pour toute variable aléatoire X :

$$X^* = \frac{X - E[X]}{\sigma(X)} \quad \text{avec} \quad \sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

On a alors $E[X^*] = 0$ et $Var(X^*) = 1$.

50

(...) ( )

déf

Rq.

soient X, Y deux v.a.r. discrètes

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes si

$y=2x$

$x \; y \; z$

$$P(X=i \wedge Y=j) = P(X=i, Y=j) = P(X=i) \times P(Y=j) \quad \begin{cases} \forall i \in X(\Omega) \\ \forall j \in Y(\Omega) \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(aX+b) \overset{?}{=} a\,\mathbb{E}(X)+b \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

X v.a.r.d

X admet une espérance

Rappel

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} g(x_i)\, P(X=x_i)$$

$$\mathbb{E}(aX+b) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \overbrace{(a \cdot x_i + b)}^{g(x_i)}\, \mathbb{P}(X=x_i)$$

$g(x) = ax+b$

$x \leftarrow x_i$

$$= \sum_{x_i \in X(\Omega)} a \cdot x_i\, \mathbb{P}(X=x_i) + b\,\mathbb{P}(X=x_i)$$

$$= \sum_{x_i \in X(\Omega)} a\, x_i\, \mathbb{P}(X=x_i) + \sum_{x_i \in X(\Omega)} b\, \mathbb{P}(X=x_i)$$

$$= a \underbrace{\sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i\, \mathbb{P}(X=x_i)}_{} + b \underbrace{\sum_{x_i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x_i)}_{1}$$

$$= a \cdot \mathbb{E}(X) + b \times 1$$

$$= a\,\mathbb{E}(X) + b$$

X v.a.r.c $\longrightarrow f(t)$

X admet une espérance densité

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot f(t)\,dt$$

$g(x) = ax+b$

$$\mathbb{E}(aX+b) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (at+b)\, f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (at\,f(t) + b\,f(t))\,dt$$

$$= a \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,dt}_{} + b \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt}_{1}$$

$$= a\,\mathbb{E}(X) + b \times 1$$

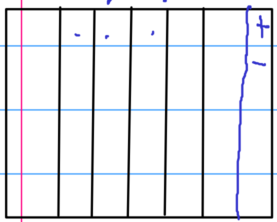
$$= a\,\mathbb{E}(X) + b \quad \boxtimes$$

* $\underbrace{\mathbb{V}(aX+b)}_{} \overset{?}{=} a^2\, \mathbb{V}(X)$

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Rq.

$\mathbb{E}(X^2)$ existe $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X)$ existe



$$\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}((aX+b)^2) - [\mathbb{E}(aX+b)]^2$$

$$= \mathbb{E}(a^2X^2+2abX+b^2) - [a\mathbb{E}(X)+b]^2$$

$$= \mathbb{E}(a^2X^2) + \mathbb{E}(2abX) + \mathbb{E}(b^2) - [a^2\mathbb{E}(X)^2 + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2]$$

$$= a^2\mathbb{E}(X^2) \cancel{+2ab\mathbb{E}(X)} \cancel{+b^2} - a^2\mathbb{E}(X)^2 \cancel{-2ab\mathbb{E}(X)} \cancel{-b^2}$$

$$= a^2 \underbrace{\{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2\}}$$

$$= a^2\, \mathbb{V}(X) \quad \boxtimes \qquad \text{c.q.f.d}$$

Exemple de Calcul

$c = \frac{4}{3}$

k	1	2	3	T
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

$\mathbb{E}(X)$ $\mathbb{E}(X)$ $\mathbb{E}(X)$

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{13}{9}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left[X - \mathbb{E}(X)\right]^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{13}{9}\right)^2 + \frac{2}{9} \times \left(2 - \frac{13}{9}\right)^2 + \frac{1}{9} \times \left(3 - \frac{13}{9}\right)^2$$

$$= \frac{2}{3} \times \left(\frac{-4}{9}\right)^2 + \frac{2}{9} \times \frac{25}{81} + \frac{1}{9} \times \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{38}{81}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{3} \times (1)^2 + \frac{2}{9} \times (2)^2 + \frac{1}{9} \times (3)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{3} + \frac{8}{9} + 1 = \frac{23}{9}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{23}{9} - \left(\frac{13}{9}\right)^2 = \frac{207 - 169}{81} = \frac{38}{81} =$$

Lois Discrètes Usuelles Formules à connaitre !! .

Loi	Espérance	Variance	Écart-type
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$	$\sqrt{p(1-p)}$
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	np	$np(1-p)$	$\sqrt{np(1-p)}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{\sqrt{1-p}}{p}$
Uniforme $\mathcal{U}\{a,b\}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	$\sqrt{\frac{(b-a+1)^2-1}{12}}$

Lois Continues Usuelles

Loi	Espérance	Variance	Écart-type
Uniforme $\mathcal{U}(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{\sqrt{12}}$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$
Normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	σ
Normale $\mathcal{N}(0,1)$	0	1	1

Loi Normale - Propriétés importantes

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, alors $X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ où Φ est la f.r. de $\mathcal{N}(0,1)$
- $P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
- Valeurs usuelles :
  - $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 0.6827$
  - $P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0.9545$
  - $P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) \approx 0.9973$

Primitives usuelles

Fonction	Primitive
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^{ax}	$\dfrac{e^{ax}}{a}$
$\ln x$	$x\ln x - x$
$\cos(ax)$	$\dfrac{\sin(ax)}{a}$
$\sin(ax)$	$-\dfrac{\cos(ax)}{a}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

Variable de Bernoulli :

Expériance Aléatoire → succé / → Echec (lancer une pièce de monnaie)

$\mathbb{P}(\text{Succé}) = p \in]0;1[$. $\mathbb{P}(\text{Echec}) = 1-p$

$X : \Omega \longrightarrow \{0;1\}$

Echéc $\longrightarrow 0$

Succé $\longrightarrow 1$

i	0	1	T
$\mathbb{P}(X=i)$	$1-p$	p	1
$i\mathbb{P}(X=i)$	0	p	$\mathbb{E}(X)=p$

$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$= p - p^2$

$\mathbb{V}(X) = p(1-p)$

Loi Binomiale :

: Une Expérience de Bernoulli répétée n fois d'une manière indépendente.

X : Compte le nombre de succé dans leon tentatives.

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^{k} \cdot (1-p)^{n-k}$$

$\overbrace{\boxed{E}\ \boxed{S}\ E\ S\ S\ .\ \ \boxed{E}}^{n \text{ fois}}$

→ S Succé → k :

→ Echec → $n-k$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$X \sim B(n, p)$:

n : le nombre de rép

p : $\mathbb{P}(\text{"Succé"})$

Rq : X Bernoulli $X \sim B(1, p)$

$X \sim B(n,p) \longrightarrow \mathbb{E}(X) = n\cdot p \; ; \; \mathbb{V}(X) = np(1-p)$

$\hookrightarrow X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n} i\,\mathbb{P}(X=i) \quad \text{or} \quad \mathbb{P}(X=i) = \binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{n-i}$$

$$* = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{n-i} = \dots \overset{????}{=} np$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot 1^{n-k}$$

$$f(x) = (x+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \times b^{n-k}$$

$$\underline{f'(x) = n(b+x)^{n-1}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i\, x^{i-1} \times b^{n-i} \quad \cancel{*}$$

$x \neq 0$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^{i} (1-p)^{n-i} \quad \begin{bmatrix} x \leftarrow p \\ b \leftarrow 1-p \end{bmatrix}$$

$$= p \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^{i-1} (1-p)^{n-i}}$$

$$= p \cdot f'(p) \quad \text{avec } b = 1-p$$

$$= p\,(n)\,(b+p)^{n-1}$$

$$= p \cdot n \,\underbrace{(1-p+p)}^{n-1}$$

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot p$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\underbrace{\mathbb{E}(X(X-1))}_{\checkmark} = \mathbb{E}(X^2 - X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \overline{\mathbb{E}(X(X-1))} + \overline{\mathbb{E}(X)}$$

$X \sim B(n,p)$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,\mathbb{P}(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$f(x) = (x+b)^n \longrightarrow f'(x) = n(x+b)^{n-1}$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} \times b^{n-k}$$

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{n} k\cdot(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}\cdot b^{n-k}$$

$$f''(x) = n(n-1)(x+b)^{n-2}$$

$$= p^2 \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^{k-2}(1-p)^{n-k}$$

$$= p^2 f''(p) \qquad b = 1-p$$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = p^2 n(n-1)(p+1-p)^{n-2}$$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = p^2 n(n-1) = n^2p^2 - np^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = n^2p^2 - np^2 + np}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \cancel{n^2p^2} - np^2 + np - \cancel{n^2p^2}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = np(1-p)}$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = p \\ \mathbb{V}(X) = p(1-p) \end{cases}$$

$$\boxed{B(1,p)} \xrightarrow[\text{n fois (indép)}]{\text{répéter}} \boxed{B(n,p)}$$

$$\mathbb{E}(X) = np$$
$$\mathbb{V}(X) = np(1-p)$$

$$\boxed{B(n,p)} \xrightarrow{n \to \infty} \boxed{\mathcal{P}(\lambda)}$$

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\boxed{X \sim Geom(p)}$$

(Jusqu'à obtenir le premier succé)

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Intégrales utiles en probabilités

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-at} dt = \frac{n!}{a^{n+1}}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$
$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}$$

Changements de variable utiles

- Pour les exponentielles : $u = e^{-t}$, $du = -e^{-t} dt$
- Pour les gaussiennes : $u = \frac{t-\mu}{\sigma}$
- Pour les fonctions rationnelles : décomposition en éléments simples