Chapitre III

Abdallah Khemais

Isitcom

Novembre 2016

Variable aléatoire continue

Introduction

Rappels :
Une variable aléatoire réelle (VAR) est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ où $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. Lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble discret on dit que X est une VAR discrète.
Pour **toutes** les VAR (discrètes ou non) on définit la fonction de répartition de X, que l'on note F_X, par $F_X(x) = P(X \leqslant x)$ pour tout réel x.

Notion de variable aléatoire à densité

Densité

Définition

Soit X une VAR définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
et F_X sa fonction de répartition.
On dit que X est **une variable aléatoire réelle à densité**
s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) f_X est à valeur réelles positives ou nulles

(ii) f_X est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = \boxed{1}$

(iv) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

La fonction f_X s'appelle alors **une densité** de la variable aléatoire X.

Nous admettrons le théorème suivant, qui nous permet de vérifier si une fonction f donnée est une densité d'une variable X.

? densité :

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

(i) f est à valeur réelles positives ou nulles

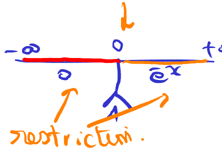
(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire réelle X définie sur cet espace, tels que f est une densité de la variable X.
On dit alors que f est une **densité de probabilité**.

Exemple 1:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.



Montrons que c'est une densité de probabilité. ↓.

☑ $\left.\begin{array}{l} \text{si } x \geqslant 0 \quad f(x) = e^{-x} \geqslant 0. \\ \text{si } x < 0 \quad f(x) = 0 \geqslant 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0$ ☑

$a \neq 0;\ e^{ax} \xrightarrow{\int} \frac{1}{a} e^{ax}$

☑ f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: car ses restrictions sont continues.

☑ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \underbrace{f(x)}_{=0}\,dx}_{=0} + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{0}^{+\infty} \ldots$

$= \lim\limits_{+\infty} \left(-e^{-x}\right) - \left(-e^{-0}\right) = -0-(-1) = +\boxed{1}$

$\Longrightarrow$ f est une p.d.f : (densité de probabilité) :

Caractérisation par la $\boxed{\text{fonction de répartition}}$

X : v.a.r

$\boxed{F_X \text{ : Fonction de rép.}}$ $\longrightarrow$ $\boxed{F'(x) = f(x) := \text{densité}}$ sauf en qq pt

☑ F continue sur $\mathbb{R}$.

☑ F est C^1

Théorème

Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité X et si f est une densité de X alors :

- F est continue sur $\mathbb{R}$.
- F est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points et lorsque F est dérivable en x, $F'(x) = f(x)$.

Ces propriétés sur la fonction de répartition suffisent à caractériser les variables à densité :

Théorème

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Si :

(i) F est continue sur $\mathbb{R}$

(ii) F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points

alors X est une variable aléatoire à densité.

De plus si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

Exemple 2:

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left(1-\frac{8}{x^3}\right)' = \left(1-8\cdot x^{-3}\right)' = \frac{24}{x^4}$$

x	$-\infty$	$\boxed{2}$	$+\infty$
$F(x)$	$\boxed{0}$	0	$1-\frac{8}{x^3}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

: Fonction de rép

$\downarrow$

densité??

Montrer que X est une variable à densité et en déterminer une densité.

☑ F est continue sur $\mathbb{R}$:

i. F est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ est continue car ses restrictions sont continues

ii. en 2 :

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \lim\limits_{2^-} F(x) = 0 \\ \cdot \lim\limits_{2^+} F(x) = 0 \\ \cdot F(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow F \text{ est continue en } 2 \,;$$

i) et ii) $\Rightarrow$ F est continue sur $\mathbb{R}$.

F est dv sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{24}{x^4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

F' est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

D'où F est C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$\underline{\mathcal{Q}}$ X : admet une densité $f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 2 \\ \frac{24}{x^4} & si\ x \geq 2 \end{cases}$

En pratique :

Pour démontrer qu'une variable X donnée est une variable à densité, il faut trouver sa fonction de répartition et vérifier qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf peut être en un nombre fini de points. Pour trouver la densité de X il suffit de prendre la dérivée de F.

Exemple 3:

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{8}{x^3} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Montrer que X est une variable à densité et en déterminer une densité.

Le théorème suivant permet de déterminer si une fonction F donnée est la fonction de répartition d'une variable à densité X.

Théorème

? Fonction de répartition.

Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si

(i) F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ ☑

(ii) F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points ☑

(iii) F est croissante sur $\mathbb{R}$. ☑

(iv) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ ☑

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X définie sur cet espace, tels que F est la fonction de répartition de X.
De plus X est alors une variable à densité et si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

Exemple 4:

On considère la fonction F définie par :

$(\sqrt{-x})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{-1}{2\sqrt{-x}}$

$$F(x) = \begin{cases} \boxed{0} & i \quad \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1-\sqrt{-x}}{2} & ii \quad \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ \dfrac{1+\sqrt{x}}{2} & iii \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & iv \quad \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$\frac{1}{4\sqrt{-x}}$

$\frac{1}{4\sqrt{x}}$

☑ F est $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}$
☑ F est $\mathcal{C}$ sauf en qq. pt.
☑ $F \nearrow$

☑ $\lim_{-\infty} F = 0$ ☑
$\lim_{+\infty} F = 1$ ☑

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité et en déterminer une densité.

→ Continuité de F :

F est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ ......

→ Continuité en -1

$\lim_{-1^-} F(x) = \lim_{-1^+} F(x) = F(-1) = 0$

→ Continuité en 0

$\lim_{0^-} F(x) = \lim_{0^+} F(x) = F(0) = 1/2$

→ Continuité en 1

$\lim_{1^-} F(x) = \lim_{1^+} F(x) = F(1) = 1$

cl F est continue sur $\mathbb{R}$. ☑

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{-x}} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

F continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$; $\square$ $F(x) \to$ Car : $F'(x) = \begin{cases} 0 \geqslant 0 & \text{si } x<0 \\ \frac{1}{4\sqrt{-x}} \geqslant 0 & \text{si } -1<x<0 \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} \geqslant 0 & \text{si } 0<x<1 \end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$, $0 \geqslant 0$ si $x \geqslant 1$

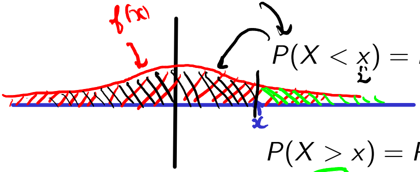
$\Leftarrow$ F est une c.d.f

Quelques propriétés

V.a.r.c

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f.

(i) Pour tout x réel :



$$P(X < x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x=2} f(t)\,dt \;\ldots\ldots$$

densité ← F_X

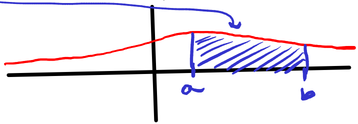
Calcul d'intégral $\in [0;1]$

$$P(X > x) = P(X \geqslant x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt$$

(ii) Pour tout a et b réels tels que $a \leqslant b$:

$$P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

(iii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$



Corollaire

Soit X une variable à densité et f une densité de X. Si f est nulle en dehors d'un intervalle $[a; b]$, alors on a $P(X < a) = 0$ et $P(X > b) = 0$. On dit alors que X prend ses valeurs dans l'intervalle $[a; b]$. :

Indépendance

Définition

Des VAR à densité $X_1, \cdots, X_n$ sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont dites **indépendantes** si pour tous réels $(x_1, \cdots, x_n)$:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k \leqslant x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leqslant x_k)$$

Remarque :

Pour montrer que deux variables à densité X et Y sont indépendantes il faut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ on a $P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) = P(X \leqslant x) \times P(Y \leqslant y)$.

Moments d'une variable aléatoire à densité

Espérance

Définition

Soit X une VAR de densité f. Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ est absolument convergente alors on dit que X **admet une espérance** que l'on note $E(X)$ et on a :

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt}$$

Exemple 5:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exemple 6:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \cdots \overset{?}{=} 1.$$

Ex5 : $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(1) : Mq f est une p.d.f :

- ☑ f est $\mathcal{C}$ sauf en qq pt
- ☒ $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- ☐ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

(2) Calculer $\mathbb{E}(X)$ (si elle existe).

☑ f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

☐ si $x \notin [0;1]$ $f(x) = 0 \geq 0$

☐ si $x \in [0;1]$ $1-x \geq 0$

$\Rightarrow \underbrace{6x(1-x)}_{} \geq 0$

$\Rightarrow f(x) \geq 0$

D'où $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$n \neq -1 \quad x^n \longrightarrow \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

☐ $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \underbrace{f(x)}_{=0}\,dx + \int_0^1 \underbrace{f(x)}_{6x(1-x)}\,dx + \int_1^{+\infty} \underbrace{f(x)}_{=0}\,dx$$

$$= \int_0^1 6x(1-x)\,dx = \int_0^1 (6x - 6x^2)\,dx = \left[3x^2 - 2x^3\right]_0^1$$

$$= \{3(1)^2 - 2(1)^3 - 0\} = 3 - 2 = 1 \quad ☑$$

D'où : f est une p.d.f ☑ (densité de probabilité).

(2) $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} t \overbrace{f(t)}^{=0}\,dt}_{=0} + \int_0^1 t \underbrace{f(t)}_{6t(1-t)}\,dt + \underbrace{\int_1^{+\infty} t \overbrace{f(t)}^{=0}\,dt}_{=0}$$

$$= \int_0^1 t\, 6t(1-t)\,dt = \int_0^1 (6t^2 - 6t^3)\,dt$$

$$= \left[2t^3 - \frac{3}{2}t^4\right]_0^1 = \{2(1)^3 - \frac{3}{2}(1)^4 - 0\}$$

$$= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

cl $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$

(3) $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$g(x) = x^2$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt \qquad \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot \boxed{f(t)\,dt}$$

$$= \cdots \int_0^1 t^2\, 6t(1-t)\,dt = \int_0^1 (6t^3 - 6t^4)\,dt$$

$$= \left[\frac{3}{2}t^4 - \frac{6}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{3}{10}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = \frac{3}{10}} \Rightarrow \mathbb{V}(X) \text{ existe } \square$$

; $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{3}{10} - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}}$$

Rq

$\mathbb{V}(X) \geq 0$

Linéarité

Soit X une VAR à densité admettant une espérance. Alors pour tout réels a et b, $aX + b$ admet une espérance et

$$\boxed{E(aX+b) = aE(X) + b}$$

.

Théorème

Soient X et Y deux VAR à densité admettant une espérance. Si $X + Y$ est une VAR à densité alors elle admet une espérance et $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Moment d'ordre r

Définition H.P

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\, dx$ est absolument convergente alors on dit que X **admet un moment d'ordre** r, notée $m_r(X)$ et on a

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\, dx$$

Variance et écart-type

Définition

Si la variable aléatoire X admet une espérance et si la variable $(X-E(X))^2$ admet une espérance, on appelle **variance de** X le réel

$$V(X)=E\left((X-E(X))^2\right)$$

Pour le calcul de variance dans la pratique on utilisera tout comme pour les variables discrètes plutôt le théorème suivant :

Théorème

Soit X une VAR à densité. X admet une variance ssi X admet un moment d'ordre 2 et en cas d'existence, on a :

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

Exemple 7:

Soit X une VAR dont une densité f est définie par $f(x) = 6x(1-x)$ si $x \in [0;1]$ et $f(x) = 0$ sinon. Nous avons vu que $E(X) = \frac{1}{2}$.
X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer

Exemple 8:

Soit X une VAR dont une densité f est définie par $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(x) = \frac{2}{x^3}$ si $x \geqslant 1$.
X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.

Définition

Si X admet une variance alors $V(X) \geqslant 0$. On appelle alors **écart-type** le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Soit X une variable à densité admettant une variance.
Alors pour tout réels a et b, $aX + b$ admet une variance et

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Définition

Si X est une VAR telle que $E(X) = 0$ on dit que X **est une variable centrée**.

Définition

Si X est une variable à densité telle que $\sigma(X) = 1$, on dit que X **est une variable réduite**.

Définition

Si X admet une espérance et un écart-type non nul, la variable $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée **la variable centrée réduite associée à X**.

Lois usuelles

Loi uniforme

Il s'agit ici de la loi la plus simple pour les variables aléatoires à densité. Elle correspond au fait de choisir au hasard un réel dans un segment $[a; b]$.

Définition

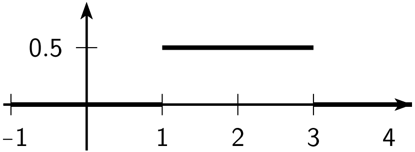
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur** $[a; b]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$, si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

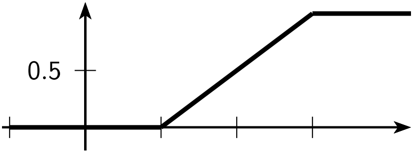
La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$ **est :**

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \textbf{si } a < x < b \\ 1 & \textbf{si } x \geqslant b \end{cases}$$

Voici la représentation graphique de la densité et de la fonction de répartition d'une VAR suivant une loi uniforme sur $[1;3]$:



Densité de la loi $\mathcal{U}([1;3])$



Fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([1;3])$

Théorème

Soit X une VAR à densité suivant une loi uniforme sur $[a;b]$. Alors X admet une espérance égale à $\dfrac{a+b}{2}$.

Loi exponentielle

Définition

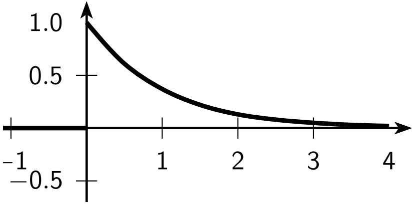
Soit λ un réel **strictement positif**. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi exponentielle de paramètre** λ ; et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

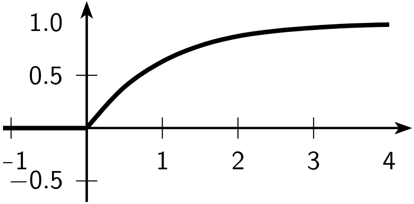
La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \textbf{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Voici la représentation graphique de la densité et de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{E}(1)$:



Densité de la loi $\mathcal{E}(1)$



Fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$

Théorème

Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Théorème

Caractérisation de la loi exponentielle

Soit X une VAR à densité, qui n'est pas la variable certaine nulle et qui est à valeur dans $\mathbb{R}^+$.

X suit une loi exponentielle ssi :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad P_{[X>s]}(X > s+t) = P(X > t) \tag{1}$$

Remarque :

L'égalité (1) est équivalente à $P(X > s+t) = P(X > s)P(X > t)$.

Définition

Un VAR à densité vérifiant l'égalité (1) est dite **sans mémoire**.

Loi normale centrée réduite

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi normale centrée réduite** si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

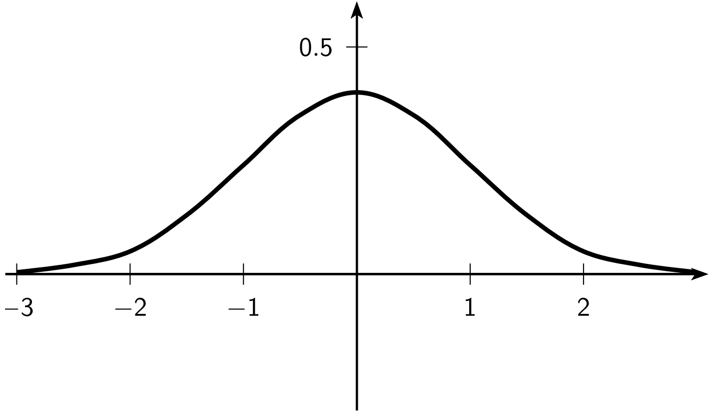
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Remarque :

Pour vérifier que f est une densité de probabilité, il vous faudra admettre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

Voici la représentation graphique de la densité d'une loi normale centrée réduite :



Densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$

Pour la fonction de répartition, nous ne sommes pas capable de l'exprimer avec de fonctions usuelles. Il faudra cependant bien savoir utiliser la propriété que nous allons mettre ci-dessous et savoir utiliser le tableau de valeurs approchées que nous verrons en exercice.

Soit Φ la fonction de répartition d'une VAR X suivant la loi $\mathcal{N}[0,1)$. Alors Φ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Démonstartion : Tout repose ici sur le fait que la densité est paire :

$$\begin{aligned}
\Phi(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{-x} f(t)\,dt \\
&= \lim_{A\to-\infty}\int_{-A}^{x} f(-u)\,(-du) \qquad \textit{changement de variable } u=-t \\
&= \lim_{A\to-\infty}\int_{x}^{-A} f(u)\,du = \int_{x}^{+\infty} f(u)\,du = 1-\Phi(x)
\end{aligned}$$

Théorème

Soit X qui suit une loi normale centrée réduite. Alors X admet une espérance et une variance :

$$E(X) = 0 \qquad V(X) = 1$$

Loi normale de Laplace-Gauss

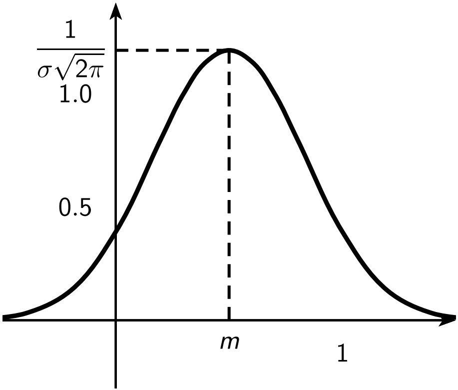
Définition

Soit m un réel, et σ un réel strictement positif. On dit que X suit **la loi normale de paramètres** (m, σ^2) si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Voici la représentation graphique de la densité d'une loi normale.



Densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Théorème

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors X admet une espérance et une variance et :

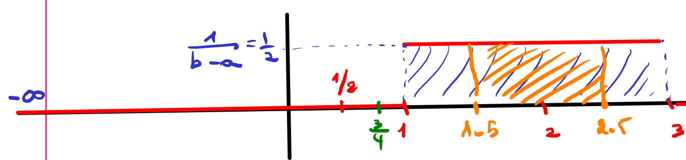
$$E(X) = m \qquad V(X) = \sigma^2$$

loi uniforme

	Densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
$\mathcal{U}([a;b])$	$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$	$V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{E}(\lambda)$	$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$	$V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
$\mathcal{N}(0,1)$	$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$	$\Phi(x)$ Table	$E(X) = 0$	$V(X) = 1$
$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)$		$E(X) = m$	$V(X) = \sigma^2$

loi exponentielle.

loi Normale.



$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [1;3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $+\infty$

$X \sim U([1,3])$: X suit loi Uniforme $[1;3]$.

$P(X < \frac{3}{4}) = \int_{-\infty}^{\frac{3}{4}} f(t)\,dt = 0$

$P(X > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{1/2}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{3} f(t)\,dt + \int_{3}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

$P(1.5 \leq X \leq 2.5) = \int_{1.5}^{2.5} f(t)\,dt = \int_{1.5}^{2.5} \frac{1}{2}\,dt = \left[\frac{1}{2}t\right]_{1.5}^{2.5}$

$= \frac{1}{2}\times 2.5 - \frac{1}{2}\cdot 1.5 = \frac{1}{2}$

Autre Méthode

$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ F : fonction de répartition de X :

$a = 1$
$b = 3$
$U([1;3])$

Densité	Fonction de répartition
$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{3-1} & \text{si } x \in [1;3] \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$P(1.5 < X < 2.5) = F(2.5) - F(1.5)$

$= \frac{2.5-1}{2} - \frac{1.5-1}{2}$ deuxième méthode.

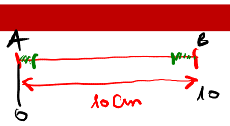
$= \frac{1.5}{2} - \frac{0.5}{2}$

$= \frac{1}{2}$

Exercice

On choisit un point au hasard sur un segment de longueur 10 cm.

1. Quelle est la probabilité que le point soit à moins de 2 cm d'une extrémité?
2. Quelle est la probabilité que le point soit à plus de 3 cm de chaque extrémité?
3. Calculer la distance moyenne du point à l'extrémité gauche



$a = 0$
$b = 10$ $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } t \in [0;10] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$X \sim U([0;10])$

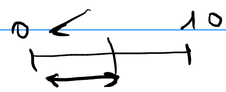
1) $P(X < 2 \text{ ou } X > 10-2) = P(X < 2) + P(X > 8)$

$= \int_0^2 f(t)\,dt + \int_8^{10} f(t)\,dt = \frac{1}{10}\int_0^2 1\,dt + \frac{1}{10}\int_8^{10} 1\,dt$

$= \frac{1}{10}[t]_0^2 + \frac{1}{10}[t]_8^{10}$

$= \frac{2}{10} + \frac{2}{10} = \frac{4}{10} = 0.4$

$U([a,b]) \rightarrow E(X) = \frac{a+b}{2}$



2) $P(3 < X < 7) = \int_3^7 f(t)\,dt = \frac{1}{10}[t]_3^7 = \frac{4}{10} = 0.4.$

3) $E(X) - 0 = \frac{0+10}{2} - 0 = 5.$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \longrightarrow f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \longrightarrow F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ 1-e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Exercice

X : Le temps de réponse d'un serveur suit une loi exponentielle de moyenne 0.5 seconde.

1. Calculer la probabilité que le temps de réponse dépasse 1 seconde
2. Déterminer le temps t tel que 90% des requêtes aient un temps de réponse inférieur à t
3. Si on envoie 10 requêtes indépendantes, quelle est la probabilité qu'au plus 2 aient un temps > 1 seconde?

$\mathbb{E}(X) = 0.5 \iff \frac{1}{\lambda} = 0.5 \iff \lambda = 2$

Formule utiles :

(i) $\mathbb{P}(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt = F(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a<0 \\ 1-e^{-\lambda a} & \text{si } a \geq 0 \end{cases}$

(ii) $\mathbb{P}(X \geq b) = \int_{b}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 - \mathbb{P}(X<b)$

$= \boxed{\begin{cases} 1 & \text{si } b<0 \\ e^{-\lambda b} & \text{si } b \geq 0 \end{cases}}$

(iii) $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ $\qquad \boxed{\lambda = 2}$

1) $\mathbb{P}(X > \overset{1 \geq 0}{1}) = e^{-2\times 1} = e^{-2}$

2) $\mathbb{P}(X < t) = 90\% \iff F(t) = 0.9$

$\iff 1 - e^{-2t} = 0.9$

$\iff 1 - 0.9 = e^{-2t}$

$\iff e^{-2t} = 0.1$

$\iff -2t = \ln(0.1)$

$\iff t = -\frac{1}{2}\ln(0.1)$

$t \approx 1.15$ s.

$\mathbb{P}(Y = k) = \binom{10}{k}(e^{-2})^{k}(1-e^{-2})^{10-k}$

3) $\mathbb{P}(X>1) = e^{-2}$ $\qquad Y \sim \mathcal{B}(10, e^{-2})$ $\qquad Y$ le nombre de requête qui dépasse un temps à 1s parmis $\boxed{10}$

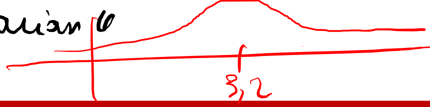
$\mathbb{P}(Y \leq 2) = \mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(Y=2)$

$= \binom{10}{0}(e^{-2})^{0}(1-e^{-2})^{10-0} + \binom{10}{1}(e^{-2})^{1}\cdot(1-e^{-2})^{9} + \binom{10}{2}(e^{-2})^{2}(1-e^{-2})^{8}$

$= \ldots$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\quad V = \sigma^2 \leftarrow$ variance

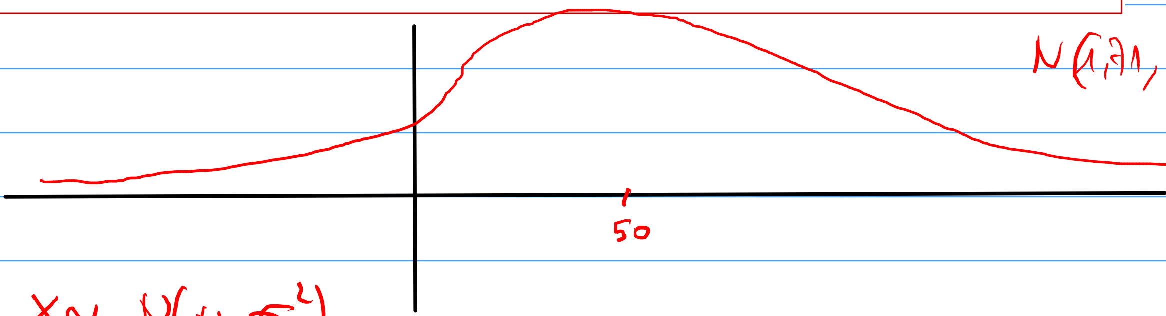
μ : moyenne



Exercice

Une machine produit des pièces dont le diamètre X suit $\mathcal{N}(50, 0.1^2)$ en mm. Une pièce est conforme si $49.8 \leq X \leq 50.2$.

1. Calculer le pourcentage de pièces conformes
2. Dans un lot de 100 pièces, quelle est la probabilité d'avoir au moins 95 pièces conformes?
3. Déterminer la variance maximale pour que 99% des pièces soient conformes



$N(1{,}71, 6)$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\boxed{a > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}\left(z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right) : \longrightarrow \text{Table :}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}\left(z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \mathbb{P}\left(z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right) \longrightarrow \text{Table.}}$$

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\boxed{a < 0 \quad \mathbb{P}(X < a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq -a)}$$

$X \sim N(50, (0.1)^2) \qquad \mu = 50, \ \sigma = 0.1$

$$\mathbb{P}(49.8 < X < 50.2) = \mathbb{P}\left(\frac{49.8 - 50}{0.1} < z < \frac{50.2 - 50}{0.1}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{-0.2}{0.1} < z < \frac{0.2}{0.1}\right)$$

$$= \mathbb{P}(-2 < z < 2)$$

$$= \phi(2) - \phi(-2) \quad (\phi : \text{Table :}$$

$$\simeq 0.9772 - (1 - 0.9772) \simeq \ldots$$

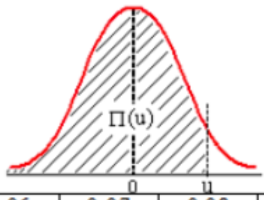
2) $Y \sim B(100, \overset{p}{0{,}954})$

p = $\mathbb{P}$(être conforme)

$$\mathbb{P}(Y = 95) = \binom{100}{95} p^{95} \cdot (1-p)^{95}$$

$\phi(2) = 2+0,0$

Table de Loi Normale
P(x<u)



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	.0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	.0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0.9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	6,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952

$a > 0 \qquad \phi(-a) = 1 - \phi(a)$

$\phi(-2) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772$

$=$