Exercices Probabilités - Chapitre 2 : Variables Aléatoires

Abdallah K

Variables Aléatoires

Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une fonction d'un espace d'échantillonnage S dans l'ensemble des nombres réels.
Si S est l'espace d'échantillonnage et X une variable aléatoire, alors :

$$X : S \to \mathbb{R}$$

Exercices

Exercice 1 : Lancer de deux dés

On lance deux dés équilibrés à six faces. Soit X la variable aléatoire représentant la somme des deux dés.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de X

b) Calculer la fonction de masse $f_X(x) = P(X = x)$

c) Calculer la fonction de répartition $F_X(x) = P(X \leq x)$

d) Tracer le graphe de la fonction de répartition

Exercice 2: Fonction de répartition en escalier

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$F(b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq b < 1 \\ 3/5 & \text{si } 1 \leq b < 2 \\ 4/5 & \text{si } 2 \leq b < 3 \\ 9/10 & \text{si } 3 \leq b < 3.5 \\ 1 & \text{si } b \geq 3.5 \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement $F(b)$

b) Trouver la loi de probabilité de X

c) Vérifier que la somme des probabilités vaut 1

Exercice 3 : Distribution géométrique

Soit X une variable aléatoire suivant une distribution géométrique de paramètre $p = 0.4$, représentant le nombre de lancers de pièce nécessaires pour obtenir face pour la première fois.

a) Donner l'expression de la fonction de masse $f_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$, avec $x \in X(\Omega)$

b) Calculer $P(X = 3)$, $P(X \leq 3)$, $P(X > 2)$

c) Déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$

d) Vérifier que $F_X(x)$ satisfait les conditions d'une fonction de répartition

Exercice 4 : Gains avec des boules

On choisit 2 boules au hasard d'une urne en contenant 8 blanches, 4 noires et 2 oranges. Supposons que l'on reçoive 2 \$ pour chaque boule noire tirée et que l'on perde 1\$ pour chaque boule blanche tirée. Soit X : " les gains nets". Trouver la distribution de probabilités de X.

Exercice 5 : Classement de la meilleure femme

On classe 5 hommes et 5 femmes selon leurs résultats lors d'un examen. On fait l'hypothèse que tous les scores sont différents et que les 10! classements sont équiprobables. On désigne par X le classement de la meilleure femme (par exemple, X vaudra 2 si le meilleur résultat a été obtenu par un homme et le suivant par une femme). Trouver la distribution de probabilités de X.

Exercice 6 : Variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Déterminer la constante c pour que f_X soit une densité de probabilité

b) Calculer $P(0.5 \leq X \leq 1.5)$

c) Déterminer la fonction de répartition $F_X(x)$

d) Vérifier que $F_X(x)$ est bien une fonction de répartition

Exercice 7 : Variables identiquement distribuées

On considère deux variables aléatoires :

- X : nombre de faces en lançant 3 pièces équilibrées
- Y : nombre de piles en lançant 3 pièces équilibrées

a) Montrer que X et Y sont identiquement distribuées

b) Donner les fonctions de masse de X et Y

c) Les variables X et Y sont-elles égales ? Justifier

d) Calculer $P(X + Y = 3)$

Exercice 8 : Fonction de répartition mixte

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0.3 + 0.7(1 - e^{-x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Vérifier que F_X est une fonction de répartition

b) Déterminer $P(X = 0)$

c) Calculer $P(1 \leq X \leq 2)$

d) X est-elle discrète ou continue ? Justifier

Exercice 9 : Transformation de variable

Soit X une variable aléatoire continue de densité :

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit $Y = X^2$.

a) Déterminer la fonction de répartition de Y

b) En déduire la densité de Y

c) Vérifier que $f_Y(y)$ est bien une densité de probabilité