Formulaire - Probabilités et Variables Aléatoires

Abdallah K

Formulaire de Probabilités - Résumé

Comment montrer qu'une fonction est une densité de probabilité

Théorème 1 : f est une densité de probabilité si :

1. $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
2. f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Fonction de répartition à partir de la densité

$f \xrightarrow{\int} F \xrightarrow{\text{de}} f$

Si X a pour densité f, alors sa fonction de répartition est :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Comment montrer qu'une fonction F est une f.r. de VAR à densité

Théorème 4 : F est fonction de répartition d'une VAR à densité si :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$
2. F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points
3. F est croissante sur $\mathbb{R}$
4. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

f dv
f' est continue

Alors $f(x) = F'(x)$ (aux points de dérivabilité) est une densité.

Calculs de probabilités avec densité et fonction de répartition

Soit X une VAR de densité f et fonction de répartition F :

$$P(X = a) = \boxed{0}$$

$$P(X \leq a) = P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$$

$$P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F(a) = \int_{a}^{+\infty} f(t)dt$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

Espérance et Variance - Définitions générales

- **Cas discret :** X de support $\mathcal{X}$, $P(X = x_k) = p_k$

$$E[X] = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} x_k p_k, \quad E[g(X)] = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} g(x_k) p_k$$

$$Var(X) = \underbrace{E[(X - E[X])^2]} = E[X^2] - (E[X])^2$$

- **Cas continu :** X de densité f

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt, \quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) dt$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E[X])^2 f(t) dt = E[X^2] - (E[X])^2$$

Calcul d'Espérance et Variance - Cas Discret Non Usuel

Méthode de calcul pour une VAR discrète non usuelle

Soit X une variable aléatoire discrète avec $P(X = x_i) = p_i$

Étapes pour le calcul de l'espérance

1. Dresser le tableau des valeurs et probabilités
2. Calculer les produits $x_i \cdot p_i$
3. Faire la somme pour obtenir $E[X]$

x_i	$p_i = P(X = x_i)$	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_i$
x_1	p_1	$x_1 \cdot p_1$	x_1^2	$x_1^2 \cdot p_1$
x_2	p_2	$x_2 \cdot p_2$	x_2^2	$x_2^2 \cdot p_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_n	$x_n \cdot p_n$	x_n^2	$x_n^2 \cdot p_n$
Total	1	$\mathbf{E[X] = \sum x_i p_i}$		$\mathbf{E[X^2] = \sum x_i^2 p_i}$

Calcul de la variance

Deux méthodes équivalentes :
Méthode 1 : $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$
Méthode 2 : $Var(X) = \sum (x_i - E[X])^2 p_i$

Étape	Formule	Calcul
1	$E[X] = \sum x_i p_i$	Valeur obtenue du tableau
2	$E[X^2] = \sum x_i^2 p_i$	Valeur obtenue du tableau
3	$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$	Application numérique
4	$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$	Racine carrée

X

	DS	TP	Ex
Notes	18	16	14
Moyenne			
Coéf (%)	$\boxed{0.2}$	0.1	0.7

$$M = 0.2 \times 18 + 0.1 \times 16 + 0.7 \times 14$$
$$= 3,6 + 1,6 + 9,8$$
$$M = 15.0$$

$\mathbb{E}(X) =$ Moyenne.

Expectation :

What did you expect.

75 % $\longrightarrow$ 10 \$

365.

X : v.a.r.d. $\longrightarrow$ $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

x_k	x_1	x_2		x_n
$\mathbb{P}(X = x_k)$	p_1	p_2		p_n

$$\mathbb{E}(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_n \times p_n$$

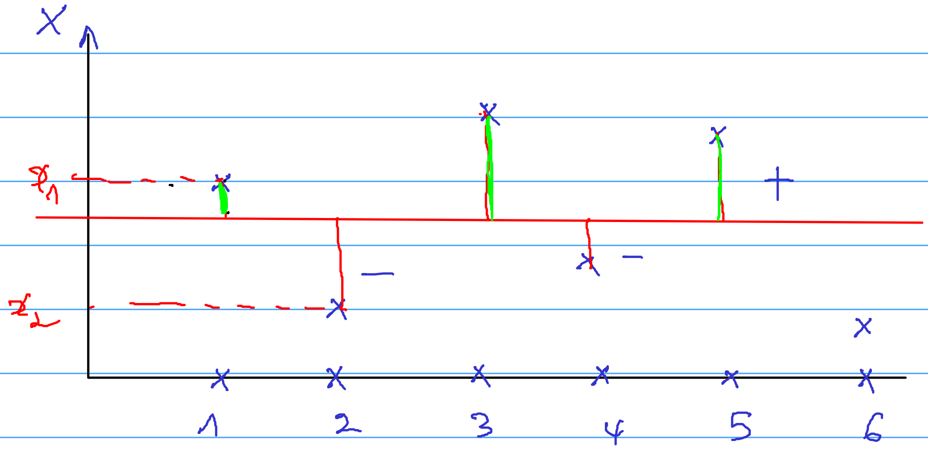
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \underbrace{\mathbb{P}(X = x_i)}_{p_i} \, :$$

	2LM1	2LM2	2LM3	2LM4
M_G	11,8	12,3	13.1	11,75

1 17,5
16
⋮
10,5
30 9

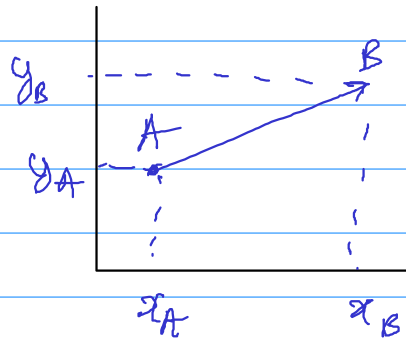
11,8
12,2
11,6
⋮
12,3

$E(X) \leftarrow \bar{x}$



* $\boxed{V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)} \longrightarrow \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$



$V(X) = E\left([X - E(X)]^2\right)$

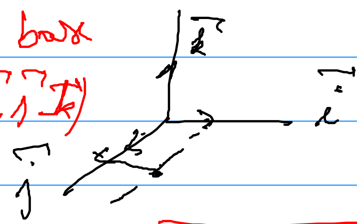
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$= \frac{1}{n}\left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2\right]$

$\sigma(X)$

Espace

$\vec{V}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



$P(X) = 3X^2 + 2X + 1$

d' $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ $\left.\begin{matrix}1\\X\\X^2\end{matrix}\right\}$ base

d: $\sqrt{\dots}$

M.

Exemple concret

	$k=1$	$k=2$	$k=3$	
k	1	2	3	T_1
$P(X=k)$	$\frac{c}{2}$	$\frac{c}{6}$	$\frac{c}{12}$	1

Soit X telle que $P(X = k) = \frac{c}{k(k+1)}$ pour $k = 1, 2, 3$

1. **Détermination de c :**

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{c}{k(k+1)} = 1 \Rightarrow c \overbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)}^{3/4} = 1 \Rightarrow c = \frac{4}{3}$$

$$\frac{6+2+1}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4}$$

2. **Tableau de calcul :**

k	$P(X = k)$	$k \cdot P(X = k)$	k^2	$k^2 \cdot P(X = k)$
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	4	$\frac{8}{9}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	9	$\frac{9}{9}$
Total	1	$E[X] = \frac{13}{9}$		$E[X^2] = \frac{23}{9}$

3. **Calculs finaux :**

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{23}{9} - \left(\frac{13}{9}\right)^2 = \frac{38}{81} = \frac{38}{81}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{38}{81}} = \frac{\sqrt{38}}{9}$$

Vérifications importantes

- $\sum p_i = 1$ (loi de probabilité) $\longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$
- $E[X]$ existe si $\sum |x_i| p_i < +\infty$ ex :
- $Var(X)$ existe si $E[X^2] < +\infty$
- $Var(X) \geq 0$ toujours $\rightarrow$ $\sigma(X) = \underline{\sqrt{V(X)}}$

Propriétés de l'espérance et variance

- $X = a$: cte : $E(a) = a$ $\quad V(a) = 0$
- $V(aX) = a^2 V(X)$

- **Linéarité :** $E[aX + b] = aE[X] + b$
- **Variance :** $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
- **Théorème de transfert :** $E[g(X)] = \sum g(x_k)p_k$ (discret) ou $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)dt$ (continu)
- **Indépendance :** Si X et Y indépendantes, alors $E[XY] = E[X]E[Y]$ et $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Variable centrée réduite

Pour toute variable aléatoire X :

$$X^* = \frac{X - E[X]}{\sigma(X)} \quad \text{avec} \quad \sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

On a alors $E[X^*] = 0$ et $Var(X^*) = 1$.

déf

soient X, Y deux v.a.r. discrètes
X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes si
$$P(X=i \wedge Y=j) = P(X=i, Y=j) = P(X=i) \cdot P(Y=j)$$
$\forall i \in X(\Omega)$.
$\forall j \in Y(\Omega)$.

$$\mathbb{E}(aX+b) \overset{?}{=} a\,\mathbb{E}(X)+b \quad a, b \in \mathbb{R}$$

X v.a.r.d
X admet une éspérance

Rappel
$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} g(x_i)\,P(X=x_i)$$

$$g(x) = ax+b$$
$x \leftarrow x_i$

$$\mathbb{E}(aX+b) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} (ax_i+b)\,P(X=x_i)$$
$$= \sum_{x_i \in X(\Omega)} \{ax_i P(X=x_i) + b\,P(X=x_i)\}$$
$$= \sum_{x_i \in X(\Omega)} a x_i P(X=x_i) + \sum_{x_i \in X(\Omega)} b\,P(X=x_i)$$
$$= a \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X=i) + b \sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X=x_i)$$
$$= a \cdot \mathbb{E}(X) + b \cdot 1$$
$$= a\,\mathbb{E}(X)+b$$

X v.a.r.c
X admet une éspérance

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx.$$

$$\mathbb{E}(aX+b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b) f(x)\,dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ax f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} b f(x)\,dx$$
$$= a\,\mathbb{E}(X) + b \quad \boxtimes$$

* $\underbrace{\mathbb{V}(aX+b)}$ $\overset{?}{=} a^2\,\mathbb{V}(X)$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Rq.
$\mathbb{E}(X^2)$ existe $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(X)$ existe

$$\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}([aX+b]^2) - [\mathbb{E}([aX+b])]^2$$

$$= \mathbb{E}(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (a\mathbb{E}(X)+b)^2$$

$$= \mathbb{E}(a^2X^2)+\mathbb{E}(2abX)+\mathbb{E}(b^2) - \{a^2\mathbb{E}(X)^2 + 2ab\mathbb{E}(X) + b^2\}$$

$$= a^2\mathbb{E}(X^2) + \cancel{2ab\mathbb{E}(X)} + \cancel{b^2} - a^2\mathbb{E}(X)^2 - \cancel{2ab\mathbb{E}(X)} - \cancel{b^2}$$

$$= a^2\,[\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2]$$

$$= a^2 \cdot \mathbb{V}(X)$$

Exemple de Calcul ☑

$c = \frac{4}{3}$

k	1	2	3	T
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

$\mathbb{E}(X)$ $\mathbb{E}(X)$ $\mathbb{E}(X)$

$$\mathbb{E}(X) = 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{9}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{13}{9}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(\left[X - \mathbb{E}(X)\right]^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$= \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{13}{9}\right)^2 + \frac{2}{9} \times \left(2 - \frac{13}{9}\right)^2 + \frac{1}{9} \times \left(3 - \frac{13}{9}\right)^2$$

$$= \frac{2}{3} \times \left(\frac{-4}{9}\right)^2 + \frac{2}{9} \times \frac{25}{81} + \frac{1}{9} \times \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{38}{81}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{3} \times (1)^2 + \frac{2}{9} \times (2)^2 + \frac{1}{9} \times (3)^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{3} + \frac{8}{9} + 1 = \frac{23}{9}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{23}{9} - \left(\frac{13}{9}\right)^2 = \frac{207 - 169}{81} = \frac{38}{81} =$$

Lois Discrètes Usuelles

Formuls à connaitre !!

Loi	Espérance	Variance	Écart-type
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$	$\sqrt{p(1-p)}$
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	np	$np(1-p)$	$\sqrt{np(1-p)}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{\sqrt{1-p}}{p}$
Uniforme $\mathcal{U}\{a,b\}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	$\sqrt{\frac{(b-a+1)^2-1}{12}}$

Lois Continues Usuelles

Loi	Espérance	Variance	Écart-type
Uniforme $\mathcal{U}(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{\sqrt{12}}$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$
Normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	σ
Normale $\mathcal{N}(0,1)$	0	1	1

Loi Normale - Propriétés importantes

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, alors $X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ où Φ est la f.r. de $\mathcal{N}(0,1)$
- $P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
- Valeurs usuelles :
  - $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 0.6827$
  - $P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0.9545$
  - $P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) \approx 0.9973$

Primitives usuelles

Fonction	Primitive
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a}$
$\ln x$	$x\ln x - x$
$\cos(ax)$	$\frac{\sin(ax)}{a}$
$\sin(ax)$	$-\frac{\cos(ax)}{a}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

Variable de Bernoulli :

Expériance Aléatoire $\to$ succé / Echec (lancer une pièce de monnaie)

$\mathbb{P}(\text{Succé}) = p \in]0;1[$ $\qquad$ $\mathbb{P}(\text{Echec}) = 1-p$

$X : \Omega \longrightarrow \{0;1\}$

Echéc $\longrightarrow 0$

Succé $\longrightarrow 1$

i	0	1	T
$\mathbb{P}(X=i)$	$1-p$	p	1
$i\mathbb{P}(X=i)$	0	p	$\mathbb{E}(X)=p$

$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$= p - p^2$

$\mathbb{V}(X) = p(1-p)$

Loi Binomiale :

: Une Expérience de Bernoulli répétée n fois d'une manière indépendante.

X : Compte le nombre de succé dans les n tentatives.

$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$\overbrace{\boxed{E}\ \boxed{S}\ E\ S\ S \ldots \boxed{E}}^{n \text{ fois}}$

$\to$ S Succé $\to k$:

$\to$ Echec $\to n-k$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$:

n : le nombre de rép

p : $\mathbb{P}(\text{"Succé"})$

Rq : X Bernoulli $\quad X \sim \mathcal{B}(1, p)$

$X \sim B(n,p) \longrightarrow \mathbb{E}(X) = n \cdot p \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p)$

$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n} i \, \mathbb{P}(X=i) \qquad \text{or} \quad \mathbb{P}(X=i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$* \quad = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \dots \overset{????}{=} np$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot 1^{n-k}$$

$$f(x) = (x+b)^n = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \times b^{n-k}}$$

$$\boxed{f'(x) = n(b+x)^{n-1}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i \, x^{i-1} \times b^{n-i} \qquad \cancel{*}$$

$x \neq 0$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \qquad \begin{bmatrix} x \leftarrow p \\ b \leftarrow 1-p \end{bmatrix}$$

$$= p \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^{i-1} (1-p)^{n-i}}$$

$$= p \cdot f'(p) \quad \text{avec} \quad b = 1-p$$

$$= p(n)(b+p)^{n-1}$$

$$= p \cdot n \underbrace{(1-p+p)}^{n-1}$$

$$\mathbb{E}(X) = n \cdot p$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\underbrace{\mathbb{E}(X(X-1))}_{\checkmark} = \mathbb{E}(X^2 - X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X)$$

$X \sim B(n,p)$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,\mathbb{P}(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$f(x) = (x+b)^n \longrightarrow f'(x) = n(x+b)^{n-1}$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} \times b^{n-k}$$

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{n} k\cdot(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}\cdot b^{n-k}$$

$$f''(x) = n(n-1)(x+b)^{n-2}$$

$$= p^2 \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^{k-2}(1-p)^{n-k}$$

$$= p^2 f''(p) \qquad b = 1-p$$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = p^2 n(n-1)(p+1-p)^{n-2}$$

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = p^2 n(n-1) = n^2p^2 - np^2$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X)$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = n^2p^2 - np^2 + np}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \cancel{n^2p^2} - np^2 + np - \cancel{n^2p^2}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = np(1-p)}$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = p \\ \mathbb{V}(X) = p(1-p) \end{cases}$$

$$\boxed{B(1,p)} \xrightarrow[\text{(indép)}]{\text{répéter } n \text{ fois}} \boxed{B(n,p)}$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = np \\ \mathbb{V}(X) = np(1-p) \end{cases}$$

$n \longrightarrow \infty$

$$\boxed{\mathcal{P}(\lambda)}$$

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

$$\boxed{X \sim Geom(p)}$$

(jusqu'à obtenir le premier succès)

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

Intégrales utiles en probabilités

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-at} dt = \frac{n!}{a^{n+1}}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$
$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}$$

Changements de variable utiles

- Pour les exponentielles : $u = e^{-t}$, $du = -e^{-t}dt$
- Pour les gaussiennes : $u = \frac{t-\mu}{\sigma}$
- Pour les fonctions rationnelles : décomposition en éléments simples