

Principales lois discrètes

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- A.P.*
- Les cinq premières lois présentées (Bernoulli, binomiale, géométrique, binomiale négative et hypergéométrique) servent à modéliser différentes quantités concernant la situation suivante : une expérience aléatoire est tentée pour laquelle deux résultats seulement sont possibles : un succès, qui peut être obtenu avec une probabilité π , ou un échec, qui survient avec probabilité $1 - \pi$, π étant un nombre réel compris entre 0 et 1 inclusivement.

Loi de Bernoulli I

$$\pi = P(\text{"succès"}) = p$$

- Une expérience aléatoire est tentée.
- Deux résultats sont possibles : un succès, qui peut être obtenu avec une probabilité π , ou un échec, qui survient avec probabilité $1 - \pi$, π étant un nombre réel compris entre 0 et 1 inclusivement.
- La variable aléatoire X , qui vaut 1 si un succès est observé et 0 sinon, est de loi de Bernoulli de paramètre π .

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

Loi de Bernoulli II

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale

négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- Les valeurs prises par cette variable aléatoire sont

$$X(\omega) = \mathcal{S}_X = \begin{cases} \{0, 1\} & \text{si } 0 < \pi < 1, \\ 0 & \text{si } \pi = 0, \\ 1 & \text{si } \pi = 1. \end{cases}$$

- Sa fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} \pi^x (1 - \pi)^{1-x} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet,

$$\begin{aligned} \pi &= P[\text{obtenir un succès}] = P[X = 1] = \pi^1 (1 - \pi)^{1-1} \\ \text{et } 1 - \pi &= P[\text{obtenir un échec}] = P[X = 0] = \pi^0 (1 - \pi)^{1-0}. \end{aligned}$$

$$\pi = P(\text{"succès"})$$

Loi de Bernoulli III

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale

négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

$$\begin{aligned}
 E[X] &= 0f_X(0) + 1f_X(1) \\
 &= 0 \pi^0 (1 - \pi)^{1-0} + 1 \pi (1 - \pi)^{1-1} \\
 &= \pi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= 0f_X(0) + 1^2f_X(1) \\
 &= \pi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\
 &= \pi - \pi^2 \\
 &= \pi(1 - \pi).
 \end{aligned}$$

Binomiale I

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- Une expérience aléatoire est tentée.
- Deux résultats sont possibles : un succès, qui peut être obtenu avec une probabilité π , ou un échec, qui survient avec probabilité $1 - \pi$, π étant un nombre réel compris entre 0 et 1 inclusivement.
- Cette expérience est répétée n fois, de façon indépendante.
- La variable aléatoire X , qui représente le nombre de succès obtenus au cours de ces n tentatives, est de loi binomiale de paramètres n et π .

Binomiale II

I

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- Les valeurs prises par cette variable aléatoire sont

$$X(\omega) = S_X = \begin{cases} \{0, 1, \dots, n\} & \text{si } 0 < \pi < 1, \\ 0 & \text{si } \pi = 0, \\ n & \text{si } \pi = 1. \end{cases} \quad \text{Cas particulier}$$

- Sa fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} & \text{si } x \in S_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$P(X=k) = \binom{n}{k} p \cdot (1-p)^{n-k}$ ✓

où $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$.

- Rappelons que, par définition, $0! = 1$.

Binomiale III

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- Justification de la fonction de masse :

Il y a 10 façon d'obtenir 3 succès lors de 5 tentatives :

ÉÉSSS, ÉSÉSS, ÉSSÉS, ÉSSSÉ
SÉÉSS, SÉSÉS, SÉSSÉ,
SSÉÉS, SSÉSÉ, SSSÉÉ.

$$\begin{aligned}
 & P[X = x] \\
 = & P[\text{obtenir } x \text{ succès et } n - x \text{ échec}] \\
 = & \underbrace{\frac{n!}{x! (n-x)!}}_{\substack{\text{nombre de façons} \\ \text{de disposer les } x \text{ succès} \\ \text{parmi les } n \text{ essais}}} \underbrace{\pi^x}_{\substack{\text{probabilité d'obtenir} \\ x \text{ succès}}} \underbrace{(1-\pi)^{n-x}}_{\substack{\text{probabilité d'obtenir} \\ n-x \text{ échecs}}} .
 \end{aligned}$$

Binomiale IV

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- Si

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si nous obtenons un succès au } i \text{ ième essai} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors X_1, \dots, X_n est un ensemble de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes de loi Bernoulli(π).

- Nous pouvons constater que $X = \sum_{i=1}^n X_i$.

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- Pour cette raison,

$$\begin{aligned}
 E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\
 &= \sum_{i=1}^n E[X_i] \text{ par la propriété (E1)} \\
 &= \sum_{i=1}^n \pi \\
 &= n\pi.
 \end{aligned}$$

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] \text{ par la propriété (V4)} \\ &= \sum_{i=1}^n \pi(1 - \pi) \\ &= n\pi(1 - \pi).\end{aligned}$$

Exemple I

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

[. on lance un dé 15 fois : $X :=$ le nombre de 6 obtenus.]

Loi binomiale

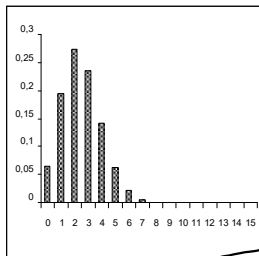
- Le nombre X de 6 obtenus en 15 lancers de dé est de loi binomiale $(15, \frac{1}{6})$.

$$E[X] = n \cdot p = 15 \times \frac{1}{6} = \frac{15}{6}$$

Fonction de masse de X

x	$f_X(x)$
0	$6,491 \times 10^{-2}$
1	$1,947 \times 10^{-1}$
2	$2,726 \times 10^{-1}$
3	$2,363 \times 10^{-1}$
4	$1,418 \times 10^{-1}$
5	$6,237 \times 10^{-2}$

...



$$E[X] = 2,5 \text{ et } \text{Var}[X] = \frac{25}{12} \cong 2,0833.$$

$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} \approx 1,4$

Exemple II

Loi binomiale



- Le nombre de personnes ayant les yeux bleus dans un échantillon aléatoire simple avec remise de taille 540 tiré dans une population donnée est de loi binomiale $(540, \pi)$ où π est la proportion d'individus ayant les yeux bleus dans la population.

donnée !

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrie

Binomiale

négative

Hypergéométrie

Poisson

Uniforme

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

Rq (*) Hors programme. ☒

- Si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes de loi binomiale(n_1, π) et binomiale(n_2, π) respectivement, alors $X_1 + X_2$ est de loi binomiale($n_1 + n_2, \pi$).

$$\begin{aligned} \rightarrow X_1 &\sim B(540, \underline{0,001}) && \text{Vjeux x vents.} \\ X_2 &\sim B(180, \underline{0,001}) \\ X_1 + X_2 &\sim B(\underline{720}, 0,001) \end{aligned}$$

→ Géométrie I

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

GéométrieBinomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- Une expérience aléatoire est tentée.
- Deux résultats sont possibles : un succès, qui peut être obtenu avec une probabilité π , ou un échec, qui survient avec probabilité $1 - \pi$, π étant un nombre réel compris entre 0 exclusivement et 1 inclusivement.
- Cette expérience est répétée de façon indépendante jusqu'à l'obtention d'un premier succès. Soit X le nombre d'essais requis.

Géométrie II

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

GéométrieBinomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- Les valeurs prises par cette variable aléatoire sont

$$\mathcal{S}_X = \begin{cases} \{1, 2, 3, \dots\} & \text{si } 0 < \pi < 1 \\ 1 & \text{si } \pi = 1 \end{cases}$$

- Sa fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} \pi (1 - \pi)^{x-1} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Justification de la fonction de masse:

$$\begin{aligned} P[X = x] &= P \left[\text{Le résultat des } n \text{ essais est } \underbrace{\overset{\text{É}}{\text{É}} \overset{\text{É}}{\text{É}} \dots \overset{\text{É}}{\text{S}}}_{x-1 \text{ fois}} \right] \\ &= (1 - \pi)^{x-1} \pi. \end{aligned}$$

Les séries géométriques I

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

GéométriqueBinomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

Theorem

Soit $S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$. Si $|a| < 1$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - a}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + a + a^2 + \dots + a^n \\ \Rightarrow aS_n &= a + a^2 + \dots + a^{n+1} \\ \Rightarrow S_n - aS_n &= 1 - a^{n+1} \\ \Rightarrow S_n &= \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}. \blacksquare \end{aligned}$$

Les séries géométriques II

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

GéométriqueBinomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

Theorem

Posons $T_n = 1 + 2a + 3a^2 + \dots + na^{n-1}$. Si $|a| < 1$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

Preuve. Rappelons que $S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$.

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{d}{da} S_n \\ &= \frac{d}{da} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \\ &= \frac{1 - (n+1)a^n + na^{n+1}}{(1-a)^2}. \blacksquare \end{aligned}$$

Les séries géométriques III

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

Theorem

Posons $U_n = 1 + 2^2a + 3^2a^2 + \dots + n^2a^{n-1}$. Si $|a| < 1$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{1+a}{(1-a)^3}.$$

Preuve. Rappelons que

$$U_n = 1 + 2^2a + 3^2a^2 + \dots + n^2a^{n-1}$$

$$T_n = 1 + 2a + 3a^2 + \dots + na^{n-1}.$$

$$\text{et } aT_n = a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + na^n$$

Les séries géométriques IV

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

GéométriqueBinomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

$$\begin{aligned}
 & U_n \\
 = & \frac{d}{da} (a T_n) \\
 = & T_n + a \frac{d}{da} T_n \\
 = & \frac{1 - (n+1) a^n + n a^{n+1}}{(1-a)^2} + a \frac{d}{da} \left(\frac{1 - (n+1) a^n + n a^{n+1}}{(1-a)^2} \right) \\
 = & \frac{1 + a - (n^2 + 2n + 1) a^n + (2n^2 + 2n - 1) a^{n+1} - a^{n+2} n^2}{(1-a)^3}.
 \end{aligned}$$

Les moments I

loi géométrique

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

GéométriqueBinomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

Rappel : $T_n = 1 + 2a + \dots + na^{n-1}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{(1-a)^2}$.

Si $0 < \pi < 1$ alors

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{x=1}^{\infty} x f_X(x) \\
 &= \sum_{x=1}^{\infty} x \pi (1 - \pi)^{x-1} \\
 &= \pi \sum_{x=1}^{\infty} x (1 - \pi)^{x-1} \\
 &= \pi \left(1 + 2(1 - \pi) + 3(1 - \pi)^2 + \dots \right) \\
 &= \pi \frac{1}{(1 - (1 - \pi))^2} = \frac{1}{\pi}.
 \end{aligned}$$

Les moments II

loi géométrique

Rappel : $U_n = 1 + 2^2 a + \dots + n^2 a^{n-1}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{1+a}{(1-a)^3}$.

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 f_X(x) \\
 &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \pi (1-\pi)^{x-1} \\
 &= \pi \sum_{x=1}^{\infty} x^2 (1-\pi)^{x-1} \\
 &= \pi \left(1 + 2^2 (1-\pi) + 3^2 (1-\pi)^2 + \dots \right) \\
 &= \pi \frac{1 + (1-\pi)}{(1 - (1-\pi))^3} \\
 &= \frac{2 - \pi}{\pi^2}.
 \end{aligned}$$

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

GéométriqueBinomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

Les moments III

loi géométrique

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

GéométriqueBinomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\
 &= \frac{2 - p}{p^2} - \frac{1}{p^2} \\
 &= \frac{1 - p}{p^2}.
 \end{aligned}$$

$$X \sim \text{Geom}(p) \quad P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \quad k \geq 1$$

$$\rightarrow E(X) = \frac{1}{p}, \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$p = 1/3$$

$$p = 10\%$$

$$p = 0.01 :$$



$$p = 0.1$$

Exemple

Loi géométrique

Le nombre X de lancers de dé nécessaires à l'obtention de la face $\boxed{6}$ suit une loi géométrique de paramètre $\pi = \frac{1}{6}$.

x	$f_X(x)$
-----	----------

1	$1,667 \times 10^{-1}$
---	------------------------

2	$1,389 \times 10^{-1}$
---	------------------------

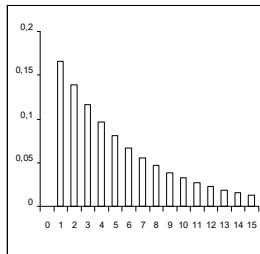
3	$1,157 \times 10^{-1}$
---	------------------------

4	$9,645 \times 10^{-2}$
---	------------------------

5	$8,038 \times 10^{-2}$
---	------------------------

...

Fonction de masse de X



$$E[X] = 6 \text{ et } \text{Var}[X] = 30.$$

Binomiale négative I

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

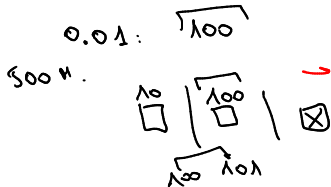
**Binomiale
négative**

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- Une expérience aléatoire est tentée.
- Deux résultats sont possibles : un succès, qui peut être obtenu avec une probabilité π , ou un échec, qui survient avec probabilité $1 - \pi$, π étant un nombre réel compris entre 0 exclusivement et 1 inclusivement.
- Cette expérience est répétée de façon indépendante jusqu'à l'obtention de n succès. Soit X le nombre d'essais requis.



H.P. Binomiale négative II

- Les valeurs prises par cette variable aléatoire sont

$$\mathcal{S}_X = \begin{cases} \{n, n+1, \dots\} & \text{si } 0 < \pi < 1 \\ n & \text{si } \pi = 1 \end{cases}$$

- Sa fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{n-1} \pi^n (1-\pi)^{x-n} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Binomiale négative III

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

**Binomiale
négative**

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- Justification de la fonction de masse

$$\begin{aligned}
 & P[X = x] \\
 = & P \left[\begin{array}{c} \text{il y a eu exactement } x \text{ essais,} \\ \text{le résultat du dernier essais est un succès} \\ \text{et parmi les } x - 1 \text{ premières tentatives,} \\ \text{il y a eu } n - 1 \text{ succès.} \end{array} \right] \\
 = & \underbrace{\frac{(x-1)!}{(n-1)!(x-n)!}}_{\text{Nombre de façons d'obtenir } n-1 \text{ succès en } x-1 \text{ essais}} \underbrace{\pi^n}_{\text{probabilité d'obtenir } n \text{ succès}} \underbrace{(1-\pi)^{x-n}}_{\text{probabilité d'obtenir } x-n \text{ échecs}}.
 \end{aligned}$$

Binomiale négative IV

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

**Binomiale
négative**

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- Si X_i représente le nombre d'essais effectués après le $i - 1$ ième succès afin d'obtenir le i ième succès alors X_1, \dots, X_n est un ensemble de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes de loi Géométrique(π).
- Nous pouvons constater que

$$X = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Binomiale négative V

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

**Binomiale
négative**

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- Pour cette raison,

$$\begin{aligned}
 E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\
 &= \sum_{i=1}^n E[X_i] \text{ par la propriété (E1)} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\pi}
 \end{aligned}$$

 $E(X)$
 $=$
 $\frac{n}{\pi}$
 $n=3$
 $p=0.01$

 $E(X) = 300$
 10
 100
 150

Binomiale négative VI

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

**Binomiale
négative**

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- En utilisant la propriété (V4), nous établissons une expression pour la variance d'une variable aléatoire de loi binomiale négative :

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[X] &= \text{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] \\
 &= \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] \text{ par la propriété (V4)} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1 - \pi}{\pi^2} \\
 &= n \frac{1 - \pi}{\pi^2}.
 \end{aligned}$$

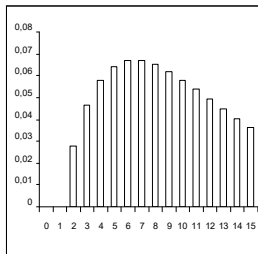
Exemple I

Binomiale négative

Le nombre X de lancers de dé nécessaires à l'obtention de deux fois la face 6 suit une loi binomiale négative de paramètres $n = 2$ et $\pi = \frac{1}{6}$.

x	$f_X(x)$
2	$2,778 \times 10^{-2}$
3	$4,630 \times 10^{-2}$
4	$5,787 \times 10^{-2}$
5	$6,430 \times 10^{-2}$
6	$6,698 \times 10^{-2}$

...

Fonction de masse de X 

$$E[X] = 12 \text{ et } \text{Var}[X] = 60.$$

→ Hypergéométrie I

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- La population est composée de N_1 éléments de type 1 et de N_2 éléments de type 2.
- Nous prélevons un échantillon aléatoire simple sans remise de taille n de cette population (n étant un entier positif inférieur ou égal à $N_1 + N_2$).
- La variable aléatoire X est le nombre d'éléments de type 1 dans l'échantillon.
- Cette situation ressemble à celle définie lors de la présentation de la loi binomiale. En effet, si nous définissons un succès comme étant le fait de choisir un élément de type 1, alors X serait de loi binomiale $\left(n, \frac{N_1}{N_1 + N_2}\right)$ si l'échantillonnage était effectué **avec remise**.

Hypergéométrique II

- Dans le cas d'un échantillonnage **sans remise**, le support de la variable X est

*simultanément
et sans remise.*

$$\mathcal{S}_X = \{x \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \max\{0, n - N_2\} \leq x \leq \min\{n, N_1\}\}.$$

- En effet, s'il y a moins d'éléments de type 1 dans la population que d'éléments dans l'échantillon ($n > N_1$), alors il ne nous est pas possible d'obtenir plus de N_1 succès. C'est pourquoi $x \leq \min\{n, N_1\}$.
- S'il y a moins d'éléments de type 2 dans la population que d'éléments dans l'échantillon ($n > N_2$), alors il ne nous est pas possible d'obtenir plus de N_2 échecs. Comme le nombre d'échecs est n moins le nombre de succès, alors

$$n - x \leq \min\{n, N_2\}$$

$$\Leftrightarrow -n + x \geq -\min\{n, N_2\} = \max\{-n, -N_2\}$$

$$\Leftrightarrow x \geq n + \max\{-n, -N_2\} = \max\{0, n - N_2\}.$$

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

Hypergéométrique III

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative**Hypergéométrique**

Poisson

Uniforme

- La fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\binom{N_1}{x} \binom{N_2}{n-x}}{\binom{N_1+N_2}{n}} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{N_1! N_2! n! (N_1+N_2-n)!}{x! (N_1-x)! (n-x)! (N_2-n+x)! (N_1+N_2)!} & \text{si } x \in \mathcal{S}_X \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Hypergéométrie IV

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative**Hypergéométrique**

Poisson

Uniforme

- Il est possible de montrer que

$$E[X] = n \frac{N_1}{N_1 + N_2} \text{ et}$$

$$\text{Var}[X] = n \frac{N_1}{N_1 + N_2} \frac{N_2}{N_1 + N_2} \frac{N_1 + N_2 - n}{N_1 + N_2 - 1}.$$

Exemple I

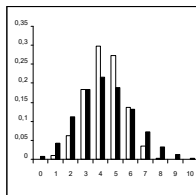
Hypergéométrique

- Un échantillon aléatoire simple sans remise de taille 20 est sélectionné dans une classe composée de 8 filles et 29 garçons.
- Le nombre X de filles présentes dans l'échantillon suit une loi hypergéométrique de paramètres $n = 20$ et $N_1 = 8$ et $N_2 = 29$.
- Pour fins de comparaison, nous avons aussi représenté la distribution d'une variable aléatoire Y de loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $\pi = \frac{8}{37}$.

x	$f_X(x)$ (blanc)	$f_Y(x)$ (noir)
0	$6,2966 \times 10^{-4}$	$7,6547 \times 10^{-3}$
1	$1,0075 \times 10^{-2}$	$4,2233 \times 10^{-2}$
2	$6,0905 \times 10^{-2}$	$1,1068 \times 10^{-1}$
3	$1,8272 \times 10^{-1}$	$1,8319 \times 10^{-1}$
4	$2,9867 \times 10^{-1}$	$2,1478 \times 10^{-1}$
5	$2,7307 \times 10^{-1}$	$1,8960 \times 10^{-1}$

...

...

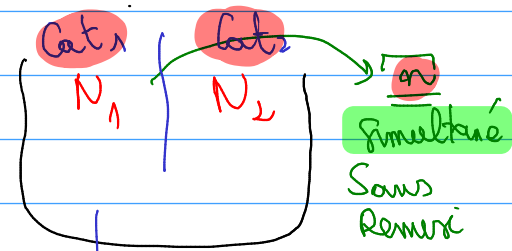
Fcts de masse de X et de Y 

$\begin{cases} 29 G \\ 8 F \end{cases} \rightarrow \text{tirage } n=20$
(Simultané sans remise de 20) personnes

X : le nombre de Fille dans l'échantillon

$$P(X=2) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{29}{18}}{\binom{37}{20}}$$

$X \sim \text{Hypergeom}(20, 8, 29)$



X : le nombre d'échantillon de Catégorie [1] dans le tirage.

$X \sim \text{Hypergeom}(n, N_1, N_2)$
↓ ↓
 Cat_1 Cat_2 taille de l'échantillon

$$P(X=k) = \frac{\binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k}}{\binom{N_1+N_2}{n}}$$

$$1 \leq n \leq N_1 + N_2$$

on pose $N = N_1 + N_2$

1% article défectueux

5/15

$$E(X) = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{N_1}{N}$$

$$V(X) = \frac{N_1}{N_1 + N_2} \times \frac{N_2}{N_1 + N_2} \times \frac{N_1 + N_2 - n}{N_1 + N_2 - 1}$$

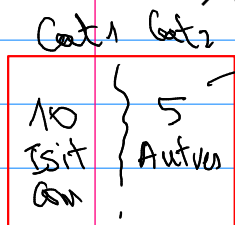
dans un groupe de 15 personnes il y a 10 étudiants de l'isitcom
→ on choisit un échantillon de 10 personnes simultanément sans remise.

Soit X le nombre d'étudiant de l'isitcom après la sélection

→ Donner la loi de X

→ Calculer son espérance et sa variance

$$X(\Omega) = \{5, 6, 7, \dots, 10\}$$



{ 10 personnes }

$$\begin{aligned} n &= 10 \\ N_1 &= 10 \\ N_2 &= 5 \end{aligned}$$

$$X \sim H(n, N_1, N_2)$$

$$[X \sim H(10, 10, 5)]$$

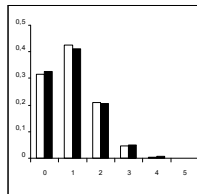
$$E(X) = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{10}{15} = 2/3 \quad ; \quad V(X) = \frac{N_1}{N_1 + N_2} \cdot \frac{N_2}{N_1 + N_2} \cdot \frac{N_1 + N_2 - n}{N_1 + N_2 - 1}$$

Exemple II

Hypergéométrique

- Le nombre X de cartes en ♠ obtenues dans une main de poker suit une loi Hypergéométrique de paramètres $n = 5$ et $N_1 = 13$ et $N_2 = 39$.
- Par comparaison, le nombre Y de cartes en ♠ obtenues en tirant cinq fois une carte avec remise dans un jeu de 52 cartes est de loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $\pi = \frac{13}{52}$.

x	$f_X(x)$ (blanc)	$f_Y(x)$ (noir)
0	$2,2153 \times 10^{-1}$	$2,373 \times 10^{-1}$
1	$4,1142 \times 10^{-1}$	$3,9551 \times 10^{-1}$
2	$2,7428 \times 10^{-1}$	$2,6367 \times 10^{-1}$
3	$8,1543 \times 10^{-2}$	$8,7891 \times 10^{-2}$
4	$1,0729 \times 10^{-2}$	$1,4648 \times 10^{-2}$
5	$4,952 \times 10^{-4}$	$9,7656 \times 10^{-4}$

Fonctions de masse de X et de Y 

Remarque I

Hypergéométrie

- Plus le taux de sondage $\frac{n}{N_1+N_2}$ est petit, plus la loi hypergéométrique de paramètres (n, N_1, N_2) ressemble à la loi binomiale $\left(n, \frac{N_1}{N_1+N_2}\right)$.

- La loi de Poisson s'applique souvent à la description du comportement du nombre X d'événements qui se produisent dans un certain intervalle de temps.
- Le support d'une variable aléatoire de loi de Poisson est l'ensemble des entiers naturels augmenté du zéro.
- Sa fonction de masse est

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & \text{si } x \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où λ est une constante positive.

- Nous verrons lors de l'étude des processus de Poisson comment se justifie cette expression pour la fonction de masse.

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^y}{y!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

$$\begin{aligned}
E[X^2] &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{d\lambda} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x \lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(x-1) \lambda^{x-1}}{(x-1)!} \right) \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} + \lambda \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \right) \\
&= \lambda e^{-\lambda} (e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) \\
&= \lambda + \lambda^2
\end{aligned}$$

$$\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

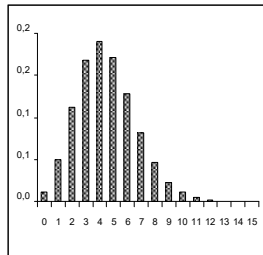
$$X_{17} = \sim P(\lambda) = P(3) \quad \text{avec } E(X_{17}) = \lambda$$

Exemple

Poisson

- S'il y a en moyenne trois naissances par jour dans un certain hôpital, alors le nombre X de naissances qui se produiront pendant les prochaines trente-six heures (1 journée et demie) à cet hôpital suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4,5$.

x	$f_X(x)$
0	$1,111 \times 10^{-2}$
1	$4,999 \times 10^{-2}$
2	$1,125 \times 10^{-1}$
3	$1,687 \times 10^{-1}$
4	$1,898 \times 10^{-1}$
5	$1,708 \times 10^{-1}$
6	$1,281 \times 10^{-1}$
...	...

Fonction de masse de X 

X_{1j} := le nombre de naissance en 1 journée
 $X_{1j} \sim P(3)$

la moyenne
de naissance
en 1j = 3

$$P(X_{1j} = 5) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^5}{5!}$$

$X \sim P(\lambda)$

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \rightarrow E(X) = V(X) = \lambda$$

$$X_{7j} \sim P(7 \times 3) = P(21)$$

intervalle I
 $I \rightarrow P(\lambda)$

$$\alpha I \rightarrow P(\alpha \lambda)$$

$X_{1cm^3} \sim P(5)$
 le nombre
de microbes
moyen
dans $1cm^3$
 $1L = 1000cm^3$

$$X_{1L} \sim P(5000)$$

- Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, la première étant de loi de Poisson(λ_1) et la deuxième étant distribuée selon une loi de Poisson(λ_2) , alors $X_1 + X_2$ est de loi de Poisson($\lambda_1 + \lambda_2$).

- Une variable aléatoire X est dite de loi uniforme discrète de paramètres a et b si a et b sont des entiers tels que $a < b$ et que la fonction de masse de X est

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a+1} & \text{si } x \in \{a, a+1, a+2, \dots, b\} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire que chacune des modalités de la variable a la même probabilité de survenir.

Theorem

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

Preuve par induction. Lorsque $n = 1$, nous avons

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Série II

La somme des n premiers entiers.

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

Supposons maintenant qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= \left(\sum_{i=1}^k i \right) + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \text{ par hypothèse d'induction} \\ &= \frac{k+1}{2} (k+2) . \blacksquare\end{aligned}$$

La somme des n premiers entiers au carré.

Theorem

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}..$$

Preuve par induction. Lorsque $n = 1$, nous avons

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6}.$$

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

Série II

La somme des n premiers entiers au carré.Supposons maintenant qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}. \text{ Alors}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \left(\sum_{i=1}^k i^2 \right) + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \text{ par hyp. d'induction} \\ &= \frac{(k+1)}{6} (k(2k+1) + 6(k+1)) \\ &= \frac{(k+1)}{6} (2k^2 + 7k + 6) \\ &= \frac{(k+1)}{6} (k+2)(2(k+1)+1). \blacksquare \end{aligned}$$

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale

négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

Moments I

Loi uniforme

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale
négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- Si Y est de loi uniforme $(0, c)$, c'est-à-dire que $a = 0$ et $b = c > 0$, alors

$$\begin{aligned}
 E[Y] &= \sum_{y=0}^c y \frac{1}{c+1} \\
 &= \frac{1}{c+1} \sum_{y=0}^c y \\
 &= \frac{1}{c+1} \frac{c(c+1)}{2} \\
 &= \frac{c}{2}
 \end{aligned}$$

Moments II

Loi uniforme

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale

négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme



$$\begin{aligned}
 E[Y^2] &= \sum_{y=0}^c y^2 \frac{1}{c+1} \\
 &= \frac{1}{c+1} \sum_{y=0}^c y^2 \\
 &= \frac{1}{c+1} \frac{c(c+1)(2c+1)}{6} \\
 &= \frac{c(2c+1)}{6} \\
 \\
 \text{Var}[Y] &= \frac{c(2c+1)}{6} - \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{c(c+2)}{12}
 \end{aligned}$$

Moments III

Loi uniforme

- Il suffit de constater que $X = Y + a$, $c = b - a$ pour obtenir les premiers moments d'une variable aléatoire de loi uniforme discrète de paramètres a et b :

$$\begin{aligned}
 E[X] &= E[Y] + a \\
 &= \frac{b-a}{2} + a \\
 &= \frac{a+b}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[X] &= \text{Var}[Y + a] \\
 &= \text{Var}[Y] \\
 &= \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}.
 \end{aligned}$$

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale

négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

Exemple

Uniforme

Définitions

Distribution

Égalités forte
et faible

Loi conjointe

Loi
conditionnelle

Indépendance

Moments

Lois discrètes

Bernoulli

Binomiale

Géométrique

Binomiale

négative

Hypergéométrique

Poisson

Uniforme

- Le nombre X de points observés sur la face supérieure d'un dé suit une loi uniforme de paramètres $a = 1$ et $b = 6$. $E[X] = \frac{7}{2} = 3,5$ et $\text{Var}[X] = \frac{35}{12} \cong 2,9167$.