Comment montrer qu'une fonction est une densité de probabilité

Théorème 1 : f est une densité de probabilité si :

1. $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
2. f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilité et si oui déterminer la fonction de répartition de la VAR associée à cette densité.

1. $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

2. $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{3}{2}e^{-t/2}\left(1 - e^{-t/2}\right)^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

✓ i) $g(t) \geqslant 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

✓ ii) g est continue (sauf peut être en 0)

iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \dots \overset{?}{=} 1$

	$-\infty$ 0	$+\infty$
$g(t)$	$\boxed{0}$	$4te^{-2t}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \underbrace{g(t)}_{0}\,dt}_{=0} + \int_{0}^{+\infty} \underbrace{g(t)}_{4te^{-2t}}\,dt$$

$$= 0 + \int_0^{+\infty} 4te^{-2t}\,dt$$

$\int_a^b f(x)\,dx = ?$ la primitive F connue → $F(b) - F(a)$ (Formulaire)

- ~~$\square$~~ décomposition (Transformation)
- ~~$\square$~~ i.p.p
- $\square$ changement de variable

$$\int_1^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^2$$

$$\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+1}\,dt = \int_1^2 \frac{2t}{1+t^2}\,dt + \int_1^2 \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$\frac{u'}{u} \to \ln|u|$; arctan

$$u'e^u \xrightarrow{\int} e^u$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \dots = \int_0^{+\infty} 4t e^{-2t}\,dt$$

$$e^{ax} \xrightarrow{a \neq 0} \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$u(t) = 4t \xrightarrow{\text{dér}} u'(t) = 4$$

$$v'(t) = e^{-2t} \xrightarrow{\int} v(t) = -\frac{1}{2} e^{-2t}$$

$$\lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty \; ; \; \lim_{X \to -\infty} e^X = 0$$

$$= \left[-\frac{1}{2} e^{-2t} \times 4t\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2e^{-2t}\,dt$$

$$* \lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X^n} = +\infty$$

$$= \left[-2te^{-2t}\right]_0^{+\infty} + 2 \left[-\frac{1}{2} e^{-2t}\right]_0^{+\infty}$$

$$* \lim_{X \to -\infty} X e^X = 0$$

$$= \left[-2te^{-2t} - e^{-2t}\right]_0^{+\infty} = 0 - \underset{(t \to 0)}{\boxed{(-1)}} = 1$$

$$(*) \quad \lim_{t \to +\infty} -2te^{-2t} - e^{-2t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{-2t}{e^{2t}} - \frac{1}{e^{2t}}$$

en $+\infty$

$$X = 2t \to +\infty$$

$$t \to +\infty$$

$$= \lim_{X \to +\infty} -\frac{X}{e^X} - \frac{1}{e^X} = \boxed{0}$$

$$\frac{X}{e^X} \to 0 \qquad \frac{1}{e^X} \to 0$$

$(**)$ lim en 0

$$\lim_{t \to 0} \underbrace{-2te^{-2t}}_{0 \times 1} - e^{-2t} = \boxed{-1}$$

Cl $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = \boxed{1}$

i) ✓
ii) ✓
iii) ✓

Cl final : g est une densité de probabilité.