Formulaire - Probabilités et Variables Aléatoires

Abdallah K

Formulaire de Probabilités - Résumé

Comment montrer qu'une fonction est une densité de probabilité

Théorème 1 : f est une densité de probabilité si :

1. $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$
2. f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$

Fonction de répartition à partir de la densité

Si X a pour densité f, alors sa fonction de répartition est :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Comment montrer qu'une fonction F est une f.r. de VAR à densité

Théorème 4 : F est fonction de répartition d'une VAR à densité si :

1. F est continue sur $\mathbb{R}$
2. F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points
3. F est croissante sur $\mathbb{R}$
4. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Alors $f(x) = F'(x)$ (aux points de dérivabilité) est une densité.

Calculs de probabilités avec densité et fonction de répartition

Soit X une VAR de densité f et fonction de répartition F :

$$P(X = a) = 0$$
$$P(X \leq a) = P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$$
$$P(X \geq a) = P(X > a) = 1 - F(a) = \int_{a}^{+\infty} f(t)dt$$
$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

Espérance et Variance - Définitions générales

- **Cas discret :** X de support $\mathcal{X}$, $P(X = x_k) = p_k$

$$E[X] = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} x_k p_k, \quad E[g(X)] = \sum_{x_k \in \mathcal{X}} g(x_k) p_k$$

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

- **Cas continu :** X de densité f

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt, \quad E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) dt$$

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E[X])^2 f(t) dt = E[X^2] - (E[X])^2$$

Calcul d'Espérance et Variance - Cas Discret Non Usuel

Méthode de calcul pour une VAR discrète non usuelle

Soit X une variable aléatoire discrète avec $P(X = x_i) = p_i$

Étapes pour le calcul de l'espérance

1. Dresser le tableau des valeurs et probabilités
2. Calculer les produits $x_i \cdot p_i$
3. Faire la somme pour obtenir $E[X]$

x_i	$p_i = P(X = x_i)$	$x_i \cdot p_i$	x_i^2	$x_i^2 \cdot p_i$
x_1	p_1	$x_1 \cdot p_1$	x_1^2	$x_1^2 \cdot p_1$
x_2	p_2	$x_2 \cdot p_2$	x_2^2	$x_2^2 \cdot p_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_n	$x_n \cdot p_n$	x_n^2	$x_n^2 \cdot p_n$
Total	1	$\mathbf{E[X] = \sum x_i p_i}$		$\mathbf{E[X^2] = \sum x_i^2 p_i}$

Calcul de la variance

Deux méthodes équivalentes :
Méthode 1 : $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$
Méthode 2 : $Var(X) = \sum (x_i - E[X])^2 p_i$

Étape	Formule	Calcul
1	$E[X] = \sum x_i p_i$	Valeur obtenue du tableau
2	$E[X^2] = \sum x_i^2 p_i$	Valeur obtenue du tableau
3	$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$	Application numérique
4	$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$	Racine carrée

Exemple concret

Soit X telle que $P(X=k) = \frac{c}{k(k+1)}$ pour $k = 1, 2, 3$

1. **Détermination de c :**
$$\sum_{k=1}^{3} \frac{c}{k(k+1)} = 1 \Rightarrow c\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{4}{3}$$

2. **Tableau de calcul :**

k	$P(X=k)$	$k \cdot P(X=k)$	k^2	$k^2 \cdot P(X=k)$
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	4	$\frac{8}{9}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	9	$\frac{9}{9}$
Total	1	$E[X] = \frac{13}{9}$		$E[X^2] = \frac{23}{9}$

3. **Calculs finaux :**
$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{23}{9} - \left(\frac{13}{9}\right)^2 = \frac{38}{81}$$
$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{38}{81}} = \frac{\sqrt{38}}{9}$$

Vérifications importantes

- $\sum p_i = 1$ (loi de probabilité)
- $E[X]$ existe si $\sum |x_i| p_i < +\infty$
- $Var(X)$ existe si $E[X^2] < +\infty$
- $Var(X) \geq 0$ toujours

Propriétés de l'espérance et variance

- **Linéarité :** $E[aX + b] = aE[X] + b$
- **Variance :** $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
- **Théorème de transfert :** $E[g(X)] = \sum g(x_k) p_k$ (discret) ou $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) dt$ (continu)
- **Indépendance :** Si X et Y indépendantes, alors $E[XY] = E[X]E[Y]$ et $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$

Variable centrée réduite

Pour toute variable aléatoire X :
$$X^* = \frac{X - E[X]}{\sigma(X)} \quad \text{avec} \quad \sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

On a alors $E[X^*] = 0$ et $Var(X^*) = 1$.

Lois Discrètes Usuelles

Loi	Espérance	Variance	Écart-type
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	p	$p(1-p)$	$\sqrt{p(1-p)}$
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	np	$np(1-p)$	$\sqrt{np(1-p)}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{\sqrt{1-p}}{p}$
Uniforme $\mathcal{U}\{a,b\}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	$\sqrt{\frac{(b-a+1)^2-1}{12}}$

Lois Continues Usuelles

Loi	Espérance	Variance	Écart-type
Uniforme $\mathcal{U}(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{\sqrt{12}}$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$
Normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	σ
Normale $\mathcal{N}(0,1)$	0	1	1

Loi Normale - Propriétés importantes

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, alors $X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ où Φ est la f.r. de $\mathcal{N}(0,1)$
- $P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
- Valeurs usuelles :
  - $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \approx 0.6827$
  - $P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \approx 0.9545$
  - $P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) \approx 0.9973$

Primitives usuelles

Fonction	Primitive
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^{ax}	$\dfrac{e^{ax}}{a}$
$\ln x$	$x\ln x - x$
$\cos(ax)$	$\dfrac{\sin(ax)}{a}$
$\sin(ax)$	$-\dfrac{\cos(ax)}{a}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

Intégrales utiles en probabilités

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-at} dt = \frac{n!}{a^{n+1}}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$
$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}$$

Changements de variable utiles

- Pour les exponentielles : $u = e^{-t}$, $du = -e^{-t}dt$
- Pour les gaussiennes : $u = \frac{t-\mu}{\sigma}$
- Pour les fonctions rationnelles : décomposition en éléments simples